

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6
Pierre et Marie Curie

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par
Gersende FORT

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Titre :

**Contrôle explicite d'ergodicité de chaîne de Markov :
Applications à l'analyse de convergence
de l'algorithme Monte-Carlo EM**

Soutenue le 1er Juin 2001 devant le jury composé de

Jean LACROIX (Président du Jury)
Pierre PRIOURET (Directeur de thèse)
Gilles CELEUX
Eric MOULINES
Christian ROBERT (Rapporteur)
Gareth ROBERTS (Rapporteur)

A mon Directeur de Thèse, Mr. Pierre Priouret, Professeur à l'Université Paris VI, et à Mr. Eric Moulines, Professeur à l'ENST, j'exprime ma profonde gratitude pour leurs précieux conseils, leur patience et leur disponibilité tout au long de cette thèse. J'ai réellement eu beaucoup de plaisir à travailler avec eux.

Je remercie Mr. Christian Robert, et Mr. Gareth Roberts, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse en acceptant d'en être les rapporteurs. Je remercie aussi Mr. Gilles Celeux, et Mr. Jean Lacroix, d'avoir accepté d'être membres du jury.

J'ai effectué cette thèse au sein du Département TSI de l'ENST et j'ai eu la chance de bénéficier chaque jour de l'aide et de la gentillesse de ses membres. Merci à Randal Douc, Stéphanie Dubost, Gilles Fay, Jamal Najim, François Roueff, Olivier Thomas, Cyril Touze, … et j'en oublie certainement ! Je remercie plus particulièrement Vincent Buchoux, Olivier Cappé, Jean-François Cardoso, Lisa Meilhac et le Chef, pour leur patience, leur amitié et leur soutien ; et pour leur volonté de m'initier à l'Etre Okocha.

Je remercie Yusuf, Muriel et Arnaud, lecteurs persévérandts bien que non initiés de mes travaux. Je me résigne à annoncer à ma famille et à mes amis qui s'enquièrent régulièrement du devenir du marcheur ivre, que celui-ci sévit encore !

Enfin, toute ma reconnaissance à mes parents, à Marie-Antide et à Vianney, sans qui cette thèse n'aurait pu avoir lieu.

Table des matières

Notations	1
1 Présentation	5
2 Conditions de Drifts	23
2.1 Quelques propriétés du noyau de transition	24
2.2 Typologie des conditions de drifts	27
2.3 Exemples de conditions de drift	37
2.4 f -régularité	43
3 (f, r)-ergodicité par la méthode de scission	51
3.1 Résultats	51
3.2 D'un ensemble petite à un ensemble ν_1 -small	55
3.3 D'un ensemble ν_1 -small à un atome	56
3.4 De l'ergodicité d'une chaîne atomique à l'ergodicité d'un processus de renouvellement	57
3.5 Ergodicité d'un processus de renouvellement	60
3.6 Autres approches de la méthode de scission	63
4 (f, r)-ergodicité par la méthode de couplage	65

4.1	Méthode de couplage	68
4.2	Convergence à un taux riemannien (1)	76
4.3	Convergence à un taux riemannien (2)	81
4.4	Convergence à un taux géométrique	92
4.5	Convergence à un taux sous-géométrique	103
5	Ergodicité de chaînes de Markov	111
5.1	Modèle non linéaire	111
5.2	Algorithme de Hastings-Métropolis à marche aléatoire (1)	116
5.3	Algorithme de Hastings-Métropolis à marche aléatoire (2)	122
5.4	Algorithme de Hastings-Métropolis Hybride (HMH)	123
6	Convergence de l'algorithme MCEM stable	135
6.1	Calcul explicite d'une majoration type-Rosenthal pour chaînes de Markov	140
6.2	Convergence du MCEM stable	142
6.3	Vitesse de convergence	144
6.4	Applications	145
Articles		147
7	Computable bounds for subgeometrical and geometrical ergodicity	149
7.1	Polynomial ergodicity	152
7.2	Examples	161
7.3	Ergodicity at a general rate	166
7.4	Proofs	173

7.5	Acknowledgements	182
7.6	Some technical proofs	183
7.7	Figure and Tables	186
8	<i>V</i>-Subgeometric ergodicity for a Hastings-Metropolis algorithm	191
8.1	Introduction	191
8.2	<i>V</i> -subgeometric criteria	192
8.3	The Metropolis algorithm	194
8.4	Proofs	196
9	Convergence of the Monte Carlo EM for curved exponential families	203
9.1	The Monte Carlo Expectation Maximization algorithm	205
9.2	The curved exponential family	207
9.3	Rate of convergence and averaging	211
9.4	Examples	214
9.5	Proof of Theorem 9.3	219
9.6	Proofs of Theorem 9.6 and Lemma 9.7	224
9.7	Uniform Rosenthal's inequality	225
9.8	Tables and Histograms	231
Annexes		235
Annexe A : Annexe du Chapitre 2		237
A.1	Démonstration du Lemme 2.9	237
Annexe B : Annexe du Chapitre 3		239

B.2 Résultat de Meyn et Tweedie sur l'ergodicité géométrique	239
B.3 Résultat de Tuominen et Tweedie sur l'ergodicité sous-géométrique	239
B.4 Démonstration de la Proposition 3.4	240
B.5 Démonstration de la Proposition 3.5	241
B.6 Démonstration de la Proposition 3.7	243
B.7 Scission selon Nummelin et Tuominen	245
Annexe C : Annexe du Chapitre 4	247
C.8 Démonstration du Théorème 4.3	247
C.9 Démonstration du Théorème 4.5	249
C.10 Démonstration de la propriété (4.18) des suites $S^{*\eta}$	251
Bibliographie	251

Notations

Symboles

Φ	Chaine de Markov
Φ_n	Chaine de Markov à l'instant n
\mathcal{X}	Espace d'état séparable
$\mathcal{B}(\mathcal{X})$	Tribu sur \mathcal{X}
P_x	Probabilité conditionnelle sachant $\Phi_0 = x$
\mathcal{F}_n	$\sigma(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$
ψ	Mesure d'irréductibilité maximale, Paragraphe 2.1.1
$\mathcal{B}^+(\mathcal{X})$	Ensembles accessibles, Paragraphe 2.1.1
σ_C	Temps d'entrée dans C , $\sigma_C := \inf\{n \geq 0, \Phi_n \in C\}$
τ_C	Temps de retour à C , $\tau_C := \inf\{n \geq 1, \Phi_n \in C\}$
$S(f, r, C)$	Points (f, r, C) réguliers, Paragraphe 2.4.4
π	Mesure de probabilité invariante
$\mathcal{M}_1(\mathcal{X})$	Mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$
$\mathcal{M}(f, r, C)$	Mesures de probabilité (f, r, C) -régulières, Paragraphe 2.4.4
$\ f\ _V$	Norme f d'une fonction V , Chapitre 1
\mathcal{L}_V	Ensemble des fonctions de V -norme finie, Chapitre 1
$\ \mu\ _{VT}$	Norme en variation totale, Chapitre 1
$\ \mu\ _f$	Norme f , Chapitre 1
r^0	Suite intégrée, Chapitre 2
Δr	Suite dérivée, Chapitre 2
Λ	Suites positives log sous-additives, Chapitre 2

Λ_g	Suites géométriques, Paragraphe 2.4.1
Λ_s, Λ_0	Suites sous-géométriques, Paragraphe 2.4.1
Λ_c	Suites convexes, Paragraphe 4.5.4
$S(q, \cdot)$	Suites à croissance polynomiale, q entier positif, Paragraphe 2.2.4
$\bar{S}(l, \cdot)$	Suites à croissance riemannienne, l réel positif, Paragraphe 4.2.3
$S^{*\eta}(l, \cdot)$	Paragraphe 4.3.3

Conditions de drifts

Condition de drift D1[f, r, C] Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, $V \geq f$, et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

Condition de drift D2[f, r, C] Il existe une famille de fonctions $\{V_n\}$, $V_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, $V_n \geq r(n)f$, et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V_0 < \infty$ et

$$\begin{aligned} \{V_1 < \infty\} &\subset \{V_0 < \infty\} \\ PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) &\leq V_n(x) + br(n)\mathbb{1}_C(x). \end{aligned}$$

Condition de drift D1'[f, r, C] Il existe des fonctions $f \leq F_1 \leq \dots \leq F_{q+1}$ mesurables et des constantes $b_i < \infty$, $1 \leq i \leq q$ telles que $\sup_C F_{q+1} < \infty$ et pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{cases} PF_i(x) + F_{i-1}(x) \leq F_i(x) + b_{i-1}\mathbb{1}_C(x) & 2 \leq i \leq q+1, \\ F_1(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta^q r(k) f(\Phi_k) \right]. \end{cases}$$

Condition de drift de Fort-Moulines Il existe des fonctions mesurables $f =: F_0 \leq \dots \leq F_{q+1}$ et des constantes $b_k < \infty$, $0 \leq k \leq q$ telles que

$$\begin{cases} PF_k(x) + F_{k-1}(x) \leq F_k(x) + b_{k-1}\mathbb{1}_C(x), & 1 \leq k \leq q+1, \\ \sup_{x \in C} F_{q+1}(x) < \infty. \end{cases}$$

Condition de drift de Jarner-Roberts Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, et des constantes $0 < \delta \leq 1$, $c > 0$, $b < \infty$, tels que $cV^{1-\delta} \leq V$, $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) + cV^{1-\delta}(x) \leq V(x) + b\mathbb{1}_C(x).$$

Condition de drift de Foster-Lyapunov Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable et des constantes $0 < \lambda < 1$ et $b < \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) \leq \lambda V(x) + b\mathbb{I}_C(x).$$

Liste des hypothèses du Chapitre 4

H1 P est un noyau ψ -irréductible et apériodique.

H2[C, D] Il existe un entier $m \geq 1$ tel que pour tout $(x, x') \in \Delta := C \times D \cup D \times C$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P^m(x, A) \wedge P^m(x', A) \geq \rho_{x, x'}(A),$$

où $\rho_{x, x'}(dy)$ est un noyau sous-markovien de Δ dans $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel que

$$\epsilon^- := \inf_{(x, x') \in \Delta} \rho_{x, x'}(\mathcal{X}) > 0.$$

H2'[C] Il existe une constante $\epsilon > 0$ et une mesure $\nu_m \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que

$$\forall x \in C, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \quad P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A), \quad \nu_m(C) > 0.$$

H4[f, C, D] Il existe $0 < \alpha < 1$, des fonctions $1 \leq W_0 \leq W_1 < \infty$ mesurables et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_D W_1 < \infty$, $\|f\|_{W_1^\alpha} < \infty$ et

$$\begin{cases} PW_1(x) + W_0(x) \leq W_1(x) + b\mathbb{I}_C(x), \\ W_0(x) - b \geq 0, \quad x \in D^c. \end{cases}$$

H4'[f, C, D] Il existe $0 < \alpha < 1$, des fonctions $1 \leq W_0 \leq W_1 < \infty$ mesurables et des constantes $0 < a < 1$ et $b < \infty$ telles que $\sup_D W_1 < \infty$, $\|f\|_{W_0^\alpha} < \infty$ et

$$\begin{cases} PW_1(x) + W_0(x) \leq W_1(x) + b\mathbb{I}_C(x), \\ W_0(x) - b \geq aW_0(x), \quad x \in D^c. \end{cases}$$

H5fm[q, C, D] Il existe des fonctions $1 \leq V_0 \leq \dots \leq V_q < \infty$ mesurables et des constantes $a_k > 0$ et $b_k < \infty$, $0 \leq k \leq q - 1$, telles que $\sup_D V_q < \infty$ et pour tout $0 \leq k \leq q - 1$

$$\begin{aligned} PV_{k+1}(x) &\leq V_{k+1}(x) - V_k(x) + b_k \mathbb{I}_C(x), \\ V_k(x) - b_k &\geq a_k V_k(x), \quad x \in D^c. \end{aligned}$$

H5jr Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable, $V \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$, un ensemble $C \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$ petite et des constantes $0 < \delta < 1$, $c > 0$ et $b < \infty$ tels que $cV^{1-\delta} \leq V$, $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) \leq V(x) - cV^{1-\delta}(x) + b\mathbb{1}_C(x).$$

H5[r, C, D] Il existe une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable, une famille de fonctions $\{g_n\}$ mesurables, $g_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[, g_n \geq r(n)f$, une constante $a \geq 0$ et une suite positive (finie) $\{b(n)\}$ telles que $\sup_D g_0 < \infty$,

$$\begin{aligned} Pg_{n+1}(x) + r(n)f(x) &\leq g_n(x) + b(n)\mathbb{1}_C(x), \\ r(n)f(x) - b(n) &\geq r(n)a, \quad x \in D^c. \end{aligned}$$

H6[C, D] Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable, des constantes $0 < \lambda_* < 1$ et $b < \infty$ telles que $\sup_D V < \infty$ et

$$\begin{aligned} PV(x) &\leq \lambda_* V(x) + b\mathbb{1}_C(x), \\ \beta_*^{-1} &:= \lambda_* + \frac{b}{1 + \inf_{D^c} V} < 1. \end{aligned}$$

Chapitre 1

Présentation

Il est bien connu que l'ergodicité d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur un espace fini ou dénombrable est liée à l'existence d'un état *a recurrent positif* c'est-à-dire tel que l'espérance du temps de retour à *a*, partant de *a*, soit finie (voir par exemple, Karlin et Taylor [53], Kemeny, Snell et Knapp [54]). Pour des chaînes de Markov sur des espaces d'état généraux, on obtient un résultat tout à fait similaire à condition d'étendre les notions d'irréductibilité, d'apériodicité et d'*état recurrent positif* (voir par exemple Revuz [94, 95], Nummelin [82], Dacunha Castelle et Duflo [25], Duflo [37]).

L'obtention de conditions "pratiques" sous lesquelles la chaîne est ergodique et permettant le calcul de bornes d'ergodicité, a connu récemment un vif regain d'intérêt, lié principalement à

- l'analyse des vitesses de convergence des méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC),
- l'analyse de convergence des algorithmes stochastiques à dynamique markovienne,
- l'étude de la convergence des modèles récurrents markoviens,
- l'étude des algorithmes d'optimisation combinatoire, en particulier en théorie des graphes.

Les approches utilisées pour évaluer la vitesse de convergence vers la loi stationnaire sont assez diverses. Elles peuvent être assez grossièrement réparties en trois classes.

- **L'approche opérateur**, qui consiste à étudier les propriétés de contraction de l'opérateur de transition vu comme un opérateur linéaire défini sur un espace fonctionnel.
- **L'approche par scission¹**, qui consiste à ramener l'analyse de la convergence en loi de la chaîne à l'étude d'un processus de renouvellement.
- **L'approche par couplage**, qui consiste à "coupler" différentes versions de la chaîne.

La première approche s'applique aux noyaux réversibles par rapport à une mesure de probabilité π : on montre, sous des hypothèses appropriées, que le noyau P est géométriquement ergodique et que le taux de convergence est majoré par le trou spectral de P (vu comme un opérateur hermitien sur $L^2(\pi)$), trou spectral que l'on sait borner en termes de constante isopérimétrique (Cheeger [21]). Néanmoins, le calcul de cette constante s'avère souvent complexe (en particulier

¹appelée aussi approche par fission ou par bifurcation, traductions de l'anglais *splitting*

pour des espaces d'état non dénombrables) et constitue donc un obstacle à l'utilisation de cette technique pour des chaînes de Markov générales (notons toutefois que des résultats remarquables ont été obtenus par cette méthode : voir par exemple pour les chaînes à espace d'état fini, Diaconis et Stroock [33], Saloff-Coste [44], Miclo [74] et pour les chaînes à espace d'état infini, Lawler et Sokal [57], Rosenthal [102]). Bien que cette voie soit très prometteuse, nous nous sommes concentrée dans ce travail sur l'approche par scission et l'approche par couplage.

Dans ces deux approches, l'ergodicité en norme f , à la vitesse $r := \{r(n)\}$, d'un noyau ψ -irréductible et apériodique P se déduit de l'existence d'un moment du temps de retour à un ensemble mesurable, d'un certain processus markovien (qui n'est pas nécessairement le processus initial de noyau P). La plupart des modèles markoviens sont trop complexes pour permettre un calcul explicite de tels moments et il faut donc se contenter de l'estimation obtenue par résolution d'une *condition de drift* convenable. Ainsi la condition de drift de Foster-Lyapunov (tout d'abord proposée par Popov [91] pour les chaînes à espace d'état dénombrable puis, pour les cas généraux, par Nummelin et Tuominen [83] et Tweedie [119]) a permis d'établir l'ergodicité à un taux géométrique² de nombreux noyaux, tandis que la famille de conditions de drift de Tuominen et Tweedie [117] relative à l'ergodicité à un taux sous-géométrique³ se révèle en pratique peu exploitable.

Nous avons généralisé ces procédures d'estimation en énonçant deux façons équivalentes de calculer une majoration d'un moment du temps de retour à un ensemble, en termes

- d'une unique condition de drift "probabiliste" ;
- d'une famille de conditions de drift.

Les conditions de drift de Foster-Lyapunov et de Tuominen et Tweedie apparaissent alors comme des cas particuliers respectivement de la première approche pour l'estimation d'un moment géométrique, et de la seconde approche pour l'estimation d'un moment sous-géométrique. Nous avons déduit de cette généralisation un système de q conditions de drift (dit Condition de drift de Fort-Moulines) impliquant l'ergodicité polynomiale à un taux proportionnel à $(n+1)^q$ (en norme de variation totale comme en norme f) d'un noyau markovien P ; critère qui se révèle en pratique simple à établir. Très récemment, Jarner et Roberts [50] ont proposé une condition de drift dont la résolution, dans certains cas, est une façon simple d'obtenir une solution au système de Fort-Moulines.

Nous avons constaté que le calcul explicite de constantes d'ergodicité se limitait exclusivement au cas géométrique, et que tous ces travaux requéraient, quelle que soit la démonstration envisagée, l'existence d'une solution à la condition de drift de Foster-Lyapunov (Baxendale [5], Meyn et Tweedie [73], Rosenthal [101, 103], Lund et Tweedie [61], Mengersen et Tweedie [70] et Roberts et Tweedie [98]). Nous avons donc étendu ces résultats au cas où la condition de Foster-Lyapunov est remplacée par le système de conditions de drift de Fort-Moulines et plus généralement, par la famille de conditions de drift de Tuominen et Tweedie.

La motivation première de ces extensions était la recherche d'un comportement ergodique *uniforme* d'une famille de noyaux markoviens P_θ associés aux algorithmes de simulation par chaînes de Markov, plus précisément les algorithmes de Hastings-Métropolis, lorsque la loi cible dépend

²on appelle suite géométrique toute suite r de terme général $r(n) = \kappa^n$, $\kappa > 1$.

³on appelle suite sous-géométrique toute suite r positive croissante, $r(0) = 1$, telle que $r(n+m) \leq r(n)r(m)$ pour $n+m \geq 0$ et $\{\log r(n)\}/n$ tend en décroissant vers zéro.

d'un paramètre $\theta \in \Theta$. Nous nous sommes en effet intéressée à la convergence d'un algorithme stochastique, l'algorithme MCEM (acronyme de Monte Carlo Expectation Maximization, ou technique de moyennisation et maximisation par Monte-Carlo) perturbation aléatoire de l'algorithme déterministe Expectation Maximization, l'aspect aléatoire résultant de la substitution d'une espérance sous la loi π_θ par son approximation par une somme de Monte-Carlo calculée à partir d'échantillons d'une chaîne de Markov de noyau P_θ d'unique loi stationnaire π_θ . L'algorithme MCEM est une perturbation aléatoire d'un algorithme itératif déterministe modélisable par une application $T : \Theta \rightarrow \Theta$ pour laquelle il existe une fonction de Lyapunov ; démontrer sa convergence à l'aide des résultats existant dans ce domaine nécessite de vérifier des conditions peu réalistes. Pour palier à cela, nous avons proposé une (légère) modification de la procédure définissant le MCEM afin de stabiliser l'algorithme, et énoncé un critère exprimé en termes de contrôle *uniforme* de l'inégalité type-Rosenthal pour les chaînes de Markov, critère qui peut s'établir facilement à l'aide des conditions de drift.

Cette thèse est donc principalement consacrée

- à l'obtention d'une condition de drift simple, caractéristique de l'ergodicité polynomiale,
- au calcul explicite de bornes d'ergodicité, plus spécifiquement lorsque le noyau n'est que sous-géométriquement ergodique,
- à l'étude de la convergence de l'algorithme stochastique Monte Carlo Expectation Maximization stable.

La majeure partie de ces travaux est contenue dans trois articles qui constituent les Chapitres 7 à 9. Nous présentons et complétons ces publications dans les Chapitres 4 à 6. Au préalable, dans les Chapitres 2 et 3, nous rappelons et généralisons des résultats connus relatifs aux conditions de drift et à la caractérisation de l'ergodicité en termes de moment d'un temps de retour à un ensemble particulier.

Tous nos résultats reposent sur la vérification d'une condition de drift : nous consacrons le Chapitre 2 à l'étude de ces conditions. Tweedie [119] (resp. Tuominen et Tweedie [117]) a établi le lien entre les solutions de la condition de drift de Foster-Lyapunov (resp. de la suite de conditions de Tuominen et Tweedie) et un moment *pondéré* du temps de retour à un ensemble. Nous généralisons ces travaux en montrant que, à un tel moment pondéré, correspond deux formulations de conditions de drift équivalentes, l'une à l'aide d'une seule condition de drift, l'autre à l'aide d'une suite de conditions de drift. Nous déduisons de ce formalisme un système de q conditions de drift associé au moment polynomial d'ordre q du temps de retour à un ensemble, système qui se révèle être une nouvelle condition facilement vérifiable pour établir l'ergodicité d'une chaîne de Markov à un taux polynomial (Cf. Chapitres 5 et 8).

Les conditions de drift de Foster-Lyapunov et de Tuominen et Tweedie ont été proposées, respectivement, comme caractérisation de la f -ergodicité géométrique par Meyn et Tweedie [72] et comme caractérisation de la f -ergodicité sous-géométrique par Tuominen et Tweedie [117]. Nous montrons que ces deux conditions ne sont que des cas particuliers d'une des deux formes de conditions de drift équivalentes énoncées au Chapitre 2 et respectivement associées à des moments géométriques et sous-géométriques du temps de retour. Dans le Chapitre 3, nous reformulons (et complétons parfois) ces travaux de Meyn et Tweedie et de Tuominen et Tweedie, afin de mettre en évidence la similarité de leurs résultats. Nous insistons sur ce parallèle en proposant une démonstration, reposant sur la méthode de scission, qui a l'avantage d'être valable pour les

deux familles de taux (la preuve de Meyn et Tweedie est en effet propre au cas géométrique). Comme nous l'avons déjà mentionnée, la première motivation de nos travaux de recherche, était l'énoncé de conditions simples impliquant la convergence de l'algorithme MCEM. Nous avons dans un premier temps proposé une condition supposant l'existence, pour une famille de noyaux $\{P_\theta\}$ associés à un algorithme de Hastings-Métropolis dont la loi cible dépend d'un paramètre θ , d'une constante d'ergodicité et d'une vitesse d'ergodicité, uniformes en θ sur tout compact. Nous nous sommes donc intéressée à la fois au calcul explicite de constantes d'ergodicité et aux vitesses de convergence des algorithmes de Hastings-Métropolis.

Nous consacrons le Chapitre 4 au calcul des constantes d'ergodicité. Nous y développons une technique de couplage de chaînes, plus *efficace* que la technique de Nummelin [81], puis détaillons le calcul de constantes d'ergodicité sous-géométrique et géométrique, en norme de variation totale comme en norme f . Il n'existe, à notre connaissance, aucun travaux antérieurs de cette nature pour le cas sous-géométrique.

Le Chapitre 5 est consacré à l'étude de la f -ergodicité de quelques modèles markoviens : nous étudions la f -ergodicité polynomiale de modèles récurrents markoviens sur \mathbb{R}^n , de la forme $\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1}$ lorsque $|F(x)| \leq |x|(1 - r|x|^{-d})$ pour $|x|$ grand et $0 < d \leq 2$. Nous retrouvons des résultats connus lorsque $0 < d < 1$ et $d = 2$ (AngoNze [2, 3], Veretennikov [121]). A notre connaissance, l'étude des cas $1 < d < 2$ est nouvelle. Nous démontrons aussi l'ergodicité polynomiale de noyaux de Hastings-Métropolis à marche aléatoire symétrique lorsque la densité cible a des queues hyperboliques ou sur-exponentielles ; dans ce dernier cas, ces travaux complètent les études de Roberts et Tweedie [98] puis de Jarner et Hansen [51] relatives à l'ergodicité géométrique de ces algorithmes lorsque la densité cible a des queues sous-exponentielles. Nous étudions enfin l'ergodicité géométrique d'un échantillonneur de Hastings-Métropolis hybride à l'aide de conditions plus facilement vérifiables que celles proposées par Roberts et Rosenthal [97] et valables pour un plus grand nombre de modèle comme nous le constaterons à travers l'étude de quelques exemples.

Nous présentons au Chapitre 6, nos travaux sur l'étude de la convergence p.s. de l'algorithme MCEM stable. Nous avons finalement amélioré notre premier critère de convergence mentionné ci-dessus, en le substituant par une inégalité type-Rosenthal uniforme. A la différence des travaux antérieurs, (Chan et Ledolter [20], Sherman *et al.* [106]), nos conditions impliquant la convergence de l'algorithme s'appliquent à une large classe de modèles et reposent sur des critères réalistes : nous en validons l'intérêt par l'étude de deux applications du MCEM à la recherche de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans des modèles dits à données cachées. Nous discutons enfin de la vitesse de convergence de l'algorithme MCEM stable.

Nous reprenons maintenant de façon moins elliptique le contenu de ce document.

Soient \mathcal{X} un espace séparable muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ et P un noyau de transition sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$: il est possible de définir pour chaque mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, une mesure de probabilité

P_μ sur $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq 0$ et tout produit $A_0 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes(n+1)}$

$$P_\mu(\Phi_0 \in A_0, \dots, \Phi_n \in A_n) = \int_{A_0 \times \cdots \times A_n} \mu(dx_0) P(x_0, dx_1) \cdots P(x_{n-1}, dx_n)$$

où $\{\Phi_i\}$ est la chaîne de Markov canonique (pour $\omega := (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega := \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, $\Phi_i(\omega) = \omega_i$). Dans la suite $\Phi := (\Omega, \mathcal{A}, \{\Phi_n\}, P_\mu)$ désigne la version canonique de la chaîne.

Irréductibilité - Apériodicité On dit qu'un noyau P est ϕ -irréductible s'il existe une mesure non triviale ϕ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ (appelée mesure d'irréductibilité) telle que pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ de ϕ mesure non nulle, pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe $n \geq 1$ et $P^n(x, A) > 0$ (la ϕ -irréductibilité est l'extension, pour les espaces quelconques, de l'irréductibilité pour les espaces dénombrables). Une mesure d'irréductibilité ψ est dite maximale si toute autre mesure d'irréductibilité ψ' est dominée par ψ . On montre que l'on peut toujours construire une mesure d'irréductibilité maximale ψ à partir d'une mesure d'irréductibilité ϕ et que les mesures maximales sont équivalentes. Dorénavant, ψ désignera donc une mesure d'irréductibilité maximale. Tout ensemble de ψ -mesure positive est dit *accessible*.

Comme pour les chaînes à valeur dans un espace dénombrable, on dit que P est apériodique s'il n'existe pas d ensembles mesurables \mathcal{X}_i , $i = 1, \dots, d$, $d \geq 2$, dont l'union est de ψ -mesure 1 pour une mesure d'irréductibilité maximale ψ , et tels que $P(x, \mathcal{X}_{i+1}) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}_i$, $1 \leq i \leq d$, (en posant $\mathcal{X}_{d+1} := \mathcal{X}_1$).

Ensemble “petite”- Ensemble “small” L'approche par scission comme l'approche par couplage reposent sur une condition de minoration du noyau de transition P , à savoir l'existence d'un ensemble mesurable “petite”. On appelle ensemble “petite” $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, tout ensemble pour lequel il existe une constante $\epsilon > 0$, une mesure de probabilité $a := \{a(n)\}$ sur \mathbb{N} et une mesure de probabilité ν_a sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telles que

$$\forall x \in C, \quad \sum_n a(n) P^n(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_a(\cdot).$$

Lorsque P est ψ -irréductible apériodique, les ensembles “petites” sont aussi les ensembles “ ν_m -small” (que l'on appelle aussi plus rarement les C -ensembles [85]) : il existe des constantes $\epsilon > 0$, $m \geq 1$ et une mesure de probabilité ν_m sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telles que

$$\forall x \in C, \quad P^m(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot).$$

On pourrait être tenté de traduire cette dernière notion par *ensemble ν_m -petit* mais dans la littérature française, un *petit ensemble* désigne ce que nous appelons *ensemble petite* (Cf. par exemple, Duflo [37]). Aussi, pour éviter toute confusion, adoptons-nous la terminologie anglo-saxonne *ensemble petite* - *ensemble small* et omettons-nous dorénavant les guillemets. Rappelons que si P est un noyau ψ -irréductible à valeur dans un espace séparable, tout ensemble de ψ -mesure positive contient un ensemble petite (Jain et Jamison [48], Neveu [79] ; on trouvera une

preuve moderne de cette propriété dans Meyn et Tweedie [72], Théorème 5.2.2). Dans notre cadre d'étude, supposer l'existence d'un ensemble petite n'est donc pas une hypothèse restrictive.

Ergodicité Une mesure de probabilité π sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ est dite invariante pour P si,

$$\pi(A) = \int \pi(dy)P(y, A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Un noyau P est ergodique s'il est ψ -irréductible apériodique, possède une mesure de probabilité invariante π , et

$$\lim_n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} = 0,$$

pour ψ -presque tout x , où rappelons-le, la norme en *variation totale* d'une mesure signée μ est donnée par

$$\|\mu\|_{VT} := \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \mu(A).$$

La convergence en variation totale implique que pour toute fonction $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, pour ψ -presque tout x ,

$$\lim_n |P^n g(x) - \pi(g)| = 0, \tag{1.1}$$

$P^n g(x) := \int P^{n-1} g(y)P(x, dy)$, $P^0(x, dy) := \delta_x(dy)$ et $\pi(g) := \int g(y)\pi(dy)$. Il est naturel de s'intéresser à la convergence (1.1) pour des fonctions non bornées. Une extension consiste à étudier (par exemple lorsque $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$) la convergence de $|P^n g(x) - \pi(g)|$ vers zéro pour toutes les fonctions g croissant à l'infini, au plus, comme une fonction f donnée. Plus précisément, soit $f \geq 1$. On définit la norme f d'une fonction $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|g\|_f := \sup_{x \in \mathcal{X}} |g(x)|/f(x)$ et on note \mathcal{L}_f l'ensemble des fonctions g dont la norme f est finie. On définit la norme f d'une mesure signée μ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ par

$$\|\mu\|_f := \sup_{|g| \leq f} |\mu(g)| = \sup_{\|g\|_f = 1} |\mu(g)|.$$

Un noyau P est dit f -ergodique s'il est ψ -irréductible apériodique, possède une mesure de probabilité invariante π , et

$$\lim_n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0,$$

pour ψ -presque tout x . Dans de nombreuses applications et en particulier pour

- l'inférence statistique paramétrique et / ou non paramétrique à partir d'observations de la chaîne (Cf. par exemple Clemençon [24])
- l'analyse de convergence des algorithmes d'approximation stochastique (Benveniste, Métivier, Priouret [6], Duflo [37])
- l'étude de la convergence des algorithmes MCMC, et plus spécifiquement, l'évaluation quantitative du nombre d'itérations nécessaires pour pouvoir garantir la convergence de la simulation (voir Tierney [116], Smith et Roberts [108], Mengersen et Tweedie [70]),

on est amené à rechercher une vitesse de convergence, c'est-à-dire à déterminer une suite $r := \{r(n)\}$ positive croissante ($r(0) = 1$) telle que,

$$\lim_n r(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0, \quad (1.2)$$

pour ψ -presque tout x et pour une fonction $f \geq 1$ donnée. Un noyau P est dit (f, r) -ergodique s'il est ψ -irréductible apériodique, possède une mesure de probabilité invariante π et si la convergence (1.2) a lieu pour ψ -presque tout x .

Chapitre 2 : Conditions de drift On appelle condition de drift toute inégalité de la forme

$$PV + F \leq V + b\mathbb{1}_C$$

où F et V sont des fonctions mesurables positives, b est une constante finie et $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Nous consacrons le Chapitre 2 à l'étude de telles conditions. Pour $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, on pose

$$\tau_C := \inf\{n \geq 1, \Phi_n \in C\},$$

le temps de retour à C (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$), et

$$\sigma_C := \inf\{n \geq 0, \Phi_n \in C\},$$

le temps d'entrée de la chaîne dans C . Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $r := \{r(n)\} \in \Lambda$, Λ désignant l'ensemble des suites positives croissantes telles que $r(n+m) \leq r(n)r(m)$ pour $n+m \geq 0$, $r(0) := 1$.

Nous distinguons deux formes de conditions de drift équivalentes :

D1[f, r, C] Il existe une fonction $V \geq f$ mesurable et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b\mathbb{1}_C(x),$$

où $\Delta r(n) := r(n) - r(n-1)$, $n \geq 1$, $\Delta r(0) := r(0)$, est la suite *dérivée*. Il est vraisemblablement un peu abusif d'appeler **D1**[f, r, C] condition de drift, car cette condition dépend de l'espérance d'une fonctionnelle dépendant du temps d'entrée de la chaîne. L'évaluation de cette quantité est bien entendu, sauf cas particulier, non triviale (nous verrons plus tard toutefois comment une telle condition peut être utilisée pour obtenir des conditions de drift utilisables en pratique).

D2[f, r, C] Il existe une famille de fonctions mesurables $\{V_n\}$, $V_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, $V_n \geq r(n)f$, et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V_0 < \infty$ et

$$\begin{aligned} \{V_1 < \infty\} &\subset \{V_0 < \infty\} \\ PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) &\leq V_n(x) + br(n)\mathbb{1}_C(x). \end{aligned}$$

La condition **D2**[f, r, C] a été proposée par Tuominen et Tweedie [117], pour l'étude de la convergence de chaînes à des taux sous-géométriques. L'inconvénient majeur de cette seconde formulation, qui explique la faible popularité de la condition de Tuominen et Tweedie, réside dans la définition de la suite $\{V_n\}$ vérifiant la condition requise : les seuls exemples d'application connus à ce jour, portent sur les modèles récurrents markoviens étudiés par AngoNze [2, 3] et Tuominen et Tweedie [117], et sont relatifs aux taux sous-géométriques à croissance polynomiale (*i.e.* $r(n) \simeq n^q$ pour $q \neq 0$ entier naturel). Lorsque r est une suite à croissance polynomiale, nous montrons que la condition D1[f, r, C] (et donc aussi D2[f, r, C]) est équivalente au système de conditions emboîtées suivant :

Condition de drift de Fort-Moulines il existe des fonctions mesurables $f =: F_0 \leq \dots \leq F_{q+1}$, des constantes $b_i < \infty$, $0 \leq i \leq q$, telles que $\sup_C F_{q+1} < \infty$ et

$$PF_i(x) + F_{i-1}(x) \leq F_i(x) + b_{i-1}\mathbb{I}_C(x), \quad 1 \leq i \leq q+1.$$

Notons que ce type de conditions de drift est utilisé de façon implicite dans de nombreux travaux (voir en particulier, Tweedie [119], Tuominen et Tweedie [117], AngoNze [3]), la plupart du temps pour des fonctions $F_i(x) := 1 + |x|^i$. Il ne semble pas toutefois que ces conditions aient été formulées de manière aussi générale. La résolution de ce critère est, en pratique, plus naturelle que le critère de Tuominen et Tweedie comme le démontrent les exemples traités dans le Chapitre 5.

Nous montrons aussi dans notre travail que les conditions de drift D1[f, r, C] et D2[f, r, C] ont une origine *logique* : le moment

$$U(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k) f(\Phi_k) \right],$$

et les moments translatés

$$U_n(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k+n) f(\Phi_k) \right],$$

sont solutions de D1[f, r, C] et D2[f, r, C] dès que le moment (f, r) -pondéré du temps de retour à C est uniformément borné sur C *i.e.*

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty. \quad (1.3)$$

Dans ce cas, ce sont les solutions minimales : toute solution V (resp. $\{V_n\}$) de D1[f, r, C] (resp. D2[f, r, C]) est telle que $V(x) \geq U(x)$ (resp. $V_n(x) \geq U_n(x)$). Les conditions de drift constituent donc des "méthodes pratiques" pour contrôler les moments (f, r) -pondérés du temps de retour à un ensemble C . Dans de nombreuses applications, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ et les ensembles à l'extérieur desquels on établit ces conditions sont les compacts. L'existence d'une solution à l'équation de type D1[f, r, C] par exemple, que l'on écrit

$$PV(x) \leq V(x) - F(x) + b\mathbb{I}_C(x)$$

pour $x \in \{F < \infty\}$, traduit la tendance *moyenne* de la chaîne à descendre le potentiel V *i.e.* à migrer vers des zones d'où l'on atteint le “centre” de l'espace C plus rapidement. Lorsque F est minimale *i.e.* $F = 1$, nous savons que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_C] < \infty$; tandis que, à l'inverse, lorsque $F = (1 - \lambda)V$ pour $0 < \lambda < 1$, nous savons que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau_C}] < \infty$ et que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r^k V(\Phi_k)] < \infty$ pour tout $1 < r < \lambda^{-1}$.

Nous retiendrons que pour toute fonction mesurable $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, toute suite $r := \{r(n)\} \in \Lambda$ et tout ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, les conditions suivantes sont équivalentes

$$(E \text{ i}) \quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

(E ii) D1 $[f, r, C]$ est vérifiée.

(E iii) D2 $[f, r, C]$ est vérifiée.

En particulier, la condition de drift de Foster-Lyapunov peut se réécrire sous la forme D1 $[f, r, C]$ (r est alors une suite géométrique) et réciproquement, si bien que lorsque r est une suite géométrique, certaines de ces équivalences sont des résultats connus. De même, l'équivalence des conditions (E i) et (E iii) pour les suites sous-géométriques a été remarquée par Tuominen et Tweedie (Proposition 3.2. [117]).

Chapitre 3 : (f, r) -ergodicité par la méthode de scission Il est connu que si r est une suite géométrique ou sous-géométrique, la condition (1.3) est équivalente

- à l'existence de solution d'une condition de drift *convenable* (dont la forme est liée aux propriétés de la suite r),
- à la f -régularité de C ,

et que si C est petite et P ψ -irréductible apériodique, chacune de ces conditions implique la (f, r) -ergodicité du noyau (ces résultats énoncés par Meyn et Tweedie pour les suites géométriques et Tuominen et Tweedie pour les suites sous-géométriques sont rappelés en Annexe B). Les équivalences (E) montrent que deux des caractérisations de Meyn et Tweedie et de Tuominen et Tweedie sont la transcription pour des suites spécifiques (respectivement géométriques et sous-géométriques) d'un même résultat. Nous vérifions que ce parallèle peut se retrouver dans l'ensemble de leur résultat. Pour ce faire, nous utilisons la méthode dite de **scission** (qui nécessite de comparer la chaîne initiale à son m -squelette, puis à une chaîne à atome⁴, afin de se ramener à l'étude d'un processus de renouvellement) et étudions à l'aide des mêmes arguments les taux sous-géométriques et géométriques ; dans ce dernier cas, notre approche diffère de celle de Meyn et Tweedie qui recourent au Lemme de Kendall, résultat analytique qui ne peut pas couvrir le cas sous-géométrique. Ce travail est l'objet principal du Chapitre 3.

Chapitre 4 : Bornes d'ergodicité Dans le Chapitre 4, nous obtenons un résultat plus précis que la (f, r) -ergodicité d'un noyau P ψ -irréductible et apériodique, en calculant explici-

⁴ $\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ est un atome si il existe une mesure de probabilité ν sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telle que $P(x, \cdot) = \nu(\cdot)$ pour tout $x \in \alpha$.

tement une constante d'ergodicité $B_{f,r}(x, x', n)$ telle que

$$\|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f \leq B_{f,r}(x, x', n),$$

et

$$0 < \liminf_n r(n) B_{f,r}(x, x', n) \leq \limsup_n r(n) B_{f,r}(x, x', n) < \infty.$$

Lorsque la chaîne possède un atome α accessible, le terme $\|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f$ est facilement majoré à l'aide des termes liés au comportement de la chaîne entre deux visites à l'atome, visites qui peuvent être vues comme des points de renouvellement. Soit $\{u(n)\}$ la suite de renouvellement d'un processus sans retard de loi d'incrément $\{p(n) := P_\alpha(\tau_\alpha = n)\}$; notons $a_x(n) := P_x(\tau_\alpha = n)$ et $t_f(n) := \mathbb{E}_\alpha[f(\Phi_n) \mathbb{1}_{\tau_\alpha \geq n}]$. En distinguant le premier et le dernier passage dans l'atome de la chaîne avant l'instant n , il vient

$$\|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f \leq \mathbb{E}_x \left[f(\Phi_n) \mathbb{1}_{\tau_\alpha \geq n} \right] + |a_x * u - a_{x'} * u| * t_f(n) + \mathbb{E}_{x'} \left[f(\Phi_n) \mathbb{1}_{\tau_\alpha \geq n} \right] \quad (1.4)$$

où $a * b(n) := \sum_{k=0}^n a(k)b(n-k)$. En conséquence, pour toute suite $r \in \Lambda$, on peut donner l'expression d'une borne $B_{f,r}$ à l'aide des espérances

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_\alpha - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_\alpha \left[\sum_{k=0}^{\tau_\alpha - 1} r(k) f(\Phi_k) \right], \quad (1.5)$$

et d'une majoration du terme $|a_x * u(n) - a_{x'} * u(n)|$; cette majoration peut s'exprimer en fonction des moments

$$\mathbb{E}_x \left[r^0(\tau_\alpha) \right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_\alpha \left[r^0(\tau_\alpha) \right], \quad (1.6)$$

où $r^0(n) := \sum_{k=0}^n r(k)$ désigne la suite intégrée.

Lorsque la chaîne ne possède pas d'atome mais un ensemble petite C (ou, de façon équivalente, un ensemble ν_m -small) tel que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k)] < \infty$, la méthode de scission permet de comparer la chaîne initiale à une chaîne (auxiliaire) à atome : on peut donc exploiter les calculs précédents à condition de majorer explicitement les termes (1.5) et (1.6) relatifs à la chaîne auxiliaire par une fonction de

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] \quad \text{et} \quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right];$$

majoration possible mais qui conduit à des expressions complexes. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple de la majoration de (1.6) lorsque C est un ensemble ν_m -small, ($m > 1$) de constante de minoration $\epsilon > 0$, et tel que pour $\lambda < 1$, on ait $M := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau_C}] < \infty$ et $\mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau_C}] < \infty$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. Soit $\tau_C^{(m)}$ le temps d'entrée dans C du m -squelette P^m . Nous montrons (Lemme 2.9(ii), Chapitre 2) que pour tout $1 - 1/m < \rho < 1$ et $1 < \kappa < \rho^{\ln \lambda / \{2 \ln M\}}$

$$\mathbb{E}_x \left[\kappa^{\tau_C^{(m)}} \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\lambda^{-\tau_C} \right]^{-\ln \kappa / \ln \lambda} + M^{-\ln \kappa / \ln \lambda} \left\{ \frac{\rho^{-2}}{1 - \rho^{-1}(1 - 1/m)} + \frac{\rho^2 \mathbb{E}_x \left[\lambda^{-\tau_C} \right]^{-2 \ln \kappa / \ln \lambda}}{1 - \rho M^{-2 \ln \kappa / \ln \lambda}} \right\}$$

puis, si $M'(\kappa) := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\kappa^{\tau_C^{(m)}} \right]$, pour tout $1 < r < \kappa^{-\ln(1-\epsilon)/\ln M'(\kappa)}$,

$$\check{\mathbb{E}}_x \left[r^{\tau_\alpha} \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\kappa^{\tau_C^{(m)}} \right]^{-\ln r / \ln \kappa} \frac{1}{1 - (1 - \epsilon) M'(\kappa)^{\ln r / \ln \kappa}},$$

où \check{P}_x est la loi de la chaîne canonique possédant un atome et associée, par la méthode de scission usuelle, au noyau P . Si $m = 1$, le calcul se réduit à la seconde étape. Lorsque r est une suite sous-géométrique, le calcul est encore possible mais est plus fastidieux (Cf Lemme 2.9(i), Chapitre 2).

Dans la littérature, aucun calcul explicite de constantes d'ergodicité $B_{f,r}$ n'utilise l'approche précédente. La méthode utilisée par Meyn et Tweedie [73] (reprise dans Mengersen et Tweedie [70]) repose sur des arguments de théorie des opérateurs linéaires sur un espace de Banach, arguments propres au cas géométrique. Rosenthal [101, 103] puis Roberts et Tweedie [99] utilisent la méthode dite de **couplage** (méthode qui diffère de celle présentée dans Nummelin [81]). Pour ce faire, on définit

- un processus $Z = (\Omega, \mathcal{A}, \{X_n, X'_n, d_n\}, P_{x,x',i})$, à valeur dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$, tel que (a) pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P_{x,x',0} \left(X_n \in A \right) = P^n(x, A) \quad P_{x,x',0} \left(X'_n \in A \right) = P^n(x', A),$$

et (b) le processus $\{d_n\}$ vérifie $d_n = 1 \Rightarrow d_{n+1} = 1$ et $X_n \mathbb{I}_{d_n=1} = X'_n \mathbb{I}_{d_n=1}$.

- un temps aléatoire T dit temps de couplage $T := \inf\{n \geq 0, d_n = 1\}$ (il y a *couplage* à l'instant T puisque par définition de $\{d_n\}$, $X_n \mathbb{I}_{T \geq n} = X'_n \mathbb{I}_{T \geq n}$).

Il est remarquable de noter que, sous des hypothèses extrêmement faibles (se réduisant principalement à la ψ -irréductibilité et à l'existence d'une mesure stationnaire), il est possible de construire un couplage tel que $P_{x,x',0}(T < \infty) = 1$ (Rosenthal [100]).

L'intérêt principal de la méthode de couplage est qu'elle réduit l'évaluation de la quantité $|P^n f(x) - P^n f(x')|$ à l'évaluation de la probabilité des queues du temps de couplage. Plus précisément, on obtient, pour toute fonction f mesurable positive,

$$|P^n f(x) - P^n f(x')| \leq \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{f(X_n) + f(X'_n)\} \mathbb{I}_{T > n} \right],$$

point de départ pour la construction de bornes $B_{f,r}$. Les constructions usuelles du processus Z reposent sur l'existence d'un ensemble ν_1 -small C et procèdent comme suit. Soient une constante $\epsilon > 0$ et ν_1 une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telles que

$$P(x, A) \geq \epsilon \nu_1(A), \quad x \in C, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X});$$

on définit le noyau résiduel $R(x, dy) := (1 - \epsilon)^{-1} (P(x, dy) - \epsilon \nu_1(dy))$, $x \in C$. Partant de $Z_0 = (x, x', 0)$, chaque fois que $(X_n, X'_n, d_n) \in C \times C \times \{0\}$, avec la probabilité ϵ , on simule $X_{n+1} \sim \nu_1$ et on pose $X_{n+1} = X'_{n+1}$ et $d_{n+1} = 1$; sinon, on simule indépendamment $X_{n+1} \sim R(X_n, \cdot)$, $X'_{n+1} \sim R(X'_n, \cdot)$ et on pose $d_{n+1} = 0$. Si $(X_n, X'_n, d_n) \in [C \times C]^c \times \{0\}$, on simule indépendamment $X_{n+1} \sim P(X_n, \cdot)$, $X'_{n+1} \sim P(X'_n, \cdot)$, et on pose $d_{n+1} = 0$; enfin, dès que $d_n = 1$, on force l'égalité des trajectoires en posant $X_{n+1} = X'_{n+1} \sim P(X_n, \cdot)$ et $d_{n+1} = 1$. Si C

est ν_m -small, $m > 1$, on substitue P par P^m dans la construction précédente, ce qui revient à définir un processus $Z^{(m)}$ tel que

$$P_{x,x',0}\left(X_n^{(m)} \in A\right) = P^{nm}(x, A) \quad P_{x,x',0}\left(X_n'^{(m)} \in A\right) = P^{nm}(x', A).$$

Le temps de couplage est donc fonction à la fois de la constante de minoration $\epsilon > 0$ et de la fréquence des passages dans $C \times C$ de $\{X_n^{(m)}, X_n'^{(m)}\}$. La construction que nous utilisons diffère de la précédente : nous remplaçons la condition d'existence d'un ensemble ν_m -small par la condition de minoration

$$P^m(x, \cdot) \wedge P^m(x', \cdot) \geq \rho_{x,x'}(\cdot),$$

- pour tout $(x, x') \in \Delta := C \times D \cup D \times C$, $C \subseteq D$ de ψ -mesure strictement positive,
- pour un noyau sous-markovien $\rho_{x,x'}$ tel que $\inf_{(x,x') \in \Delta} \rho_{x,x'}(\mathcal{X}) > 0$.

Lorsque $m \neq 1$, nous nous inspirons de la méthode proposée par Kalashnikov [52] pour présenter une méthode de couplage plus *efficace* (en termes de fréquence des passages dans l'ensemble Δ du processus (X, X') et donc de fréquence d'occurrence du couplage) que celle que l'on obtiendrait en se ramenant classiquement au m -squelette. Nous lions le calcul de la borne d'ergodicité $B_{f,r}$ au temps de couplage T de sorte que l'expression de cette borne se déduit de termes de la forme

$$\mathbb{E}_{x,x',0}\left[\sum_{k=0}^{T_0-1} r(k)\{f(X_k) + f(X'_k)\}\right]$$

où T_0 est le temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$ du processus Z . Enfin, pour calculer cette quantité, nous formulons des conditions de drift relatives au noyau P . Nous développons plus particulièrement le calcul de $B_{f,r}(x, x', n)$ lorsque r est une suite à croissance polynomiale, ou plus généralement riemannienne ($r(n) \sim (n+1)^k$, k réel positif).

Chapitre 5 : Applications De nombreux modèles se révèlent en effet être f -ergodiques à un taux polynomial, ou plus généralement riemannien. Le Chapitre 5 est consacré à l'étude de quelques exemples.

Algorithmes MCMC Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'analyse de la convergence des algorithmes de Monte-Carlo par chaînes de Markov. Les méthodes MCMC, comme l'algorithme de Hastings-Métropolis (Métropolis *et al.* [71], Hastings [47]) et l'algorithme de Gibbs (Geman et Geman [42], Besag et York [7], Gelfand et Smith [41]), sont des outils dont l'usage s'est considérablement développé au cours des dix dernières années (voir par exemple les revues récentes de Smith et Roberts [108], Tierney [116] et le livre de Robert et Casella [96]). Les méthodes MCMC consistent à construire une chaîne de Markov ergodique de loi stationnaire une loi (cible) π donnée. Parmi la grande variété de construction possible de telles chaînes, nous avons étudié plus précisément les algorithmes de Hastings-Métropolis à marche aléatoire symétrique. L'ergodicité de ces algorithmes a été étudiée dans le cas $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ par Mengersen et

Tweedie [70]. Ces auteurs ont montré que la chaîne est géométriquement ergodique lorsque la probabilité cible admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue log-concave. Ces résultats ont ensuite été étendus dans le cas multidimensionnel ($\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$) par Roberts et Tweedie [98], puis par Jarner et Hansen [51], pour des lois cibles π admettant des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n sous-exponentielles. Nous nous sommes intéressés à la convergence de cet algorithme dans des situations où la densité cible ne vérifie pas ces conditions, en particulier lorsque la densité admet des queues hyperboliques (lois à queues lourdes) ou sur-exponentielles (par exemple, lois de Weibull). Nous montrons dans le premier cas (sous des hypothèses de variation régulière à l'infini) que l'algorithme de Hastings-Métropolis converge vers la loi stationnaire avec un taux riemannien, pour des fonctions de contrôle croissant hyperboliquement à l'infini. Dans le second cas, nous montrons que l'algorithme de Hastings-Métropolis converge à n'importe quelle vitesse polynomiale, pour des fonctions de contrôle hyperboliques de degrés, eux aussi, arbitraires.

Nous étudions aussi l'ergodicité des algorithmes de Hastings-Métropolis hybrides. Par algorithme hybride, nous entendons ici un noyau de transition, mélange de noyaux définis de façon à être tous réversibles par rapport à la mesure invariante π . Les algorithmes hybrides sont très utilisés dans les applications statistiques des MCMC, en particulier pour simuler des lois de probabilité dans des espaces de très grande dimension. L'échantillonneur hybride considéré, appelé échantillonneur d'Hastings-Métropolis à site aléatoire, consiste à composer des noyaux de Hastings-Métropolis pour lesquels les lois de proposition sont des marches aléatoires symétriques dans chaque direction de l'espace. De tels algorithmes ont été étudiés par Roberts et Rosenthal [99], qui ont montré l'ergodicité géométrique de cet échantillonneur pour des lois sous-exponentielles (et des hypothèses techniques difficiles à vérifier). L'étude que nous avons menée nous a permis d'établir l'ergodicité géométrique sous des conditions très simples.

Modèles récurrents markoviens Nous nous sommes aussi intéressés à la f -ergodicité riemannienne des modèles récurrents markoviens de la forme

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1},$$

où $\{W_n\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. De tels modèles récurrents ont fréquemment été étudiés dans la littérature (Doukhan [36], Mokkadem [76, 75], Duflo [37], Meyn et Tweedie [72], Tanikawa [112, 113]), et leurs applications statistiques sont nombreuses. La plupart des travaux se sont concentrés sur le cas où la fonction F est strictement Lipschitzienne à l'infini, *i.e.* $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |F(x)|/|x| < 1$. Dans ce cas, la chaîne est géométriquement ergodique (sous des hypothèses complémentaires garantissant la ψ -irréductibilité et apériodicité). L'étude de situations où $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |F(x)|/|x| = 1$ a été entreprise plus récemment par Ango Nze [3] et Tuominen and Tweedie [117], sous une hypothèse de contraction à l'infini de la forme $|F(x)| \leq |x|(1 - r|x|^{-d})$, pour $0 < d < 1$. Ces auteurs ont établi l'ergodicité à un taux polynomial pour des fonctions de contrôle à croissance polynomiale. Ce travail a ensuite été étendu au cas $d = 2$ par Veretennikov [121], par une approche directe de couplage. Nous avons traité les cas $0 < d \leq 2$ et établi l'ergodicité polynomiale.

Chapitre 6 : Algorithme Monte-Carlo EM L'algorithme Expectation Maximization (EM), proposé par Dempster *et al.* [31], est un algorithme itératif très utilisé en statistique computationnelle pour calculer une approximation du maximum, sur un domaine Θ ($\subset \mathbb{R}^l$), d'une fonction g s'exprimant par

$$g(\theta) := \int_{\mathcal{X}} h(z; \theta) \mu(dz)$$

où μ est une mesure finie sur la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $h : \mathcal{X} \times \Theta$ est une fonction positive μ -intégrable (le plus souvent, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$). En particulier, il permet d'*approcher* l'estimateur du maximum de vraisemblance dans les modèles paramétriques dits à données cachées, modèles dans lesquels la vraisemblance ne peut pas être calculée explicitement : $g(\theta)$ est alors la vraisemblance incomplète (vraisemblance des observations y) pour la valeur θ du paramètre et $h(z; \theta) \mu(dz)$ est la loi des données complètes (des observations y et des données manquantes z) pour la valeur θ du paramètre ; dans les deux expressions, la dépendance en les observations est implicite (Cf. pour des applications aux problèmes de mélange, Redner et Walker [93], aux chaînes de Markov cachées, Baum et Petrie [4] et Dembo et Zeitouni [28, 29, 30], et pour un papier de revue sur les applications, Meng et Van Dyk [65]). Chaque itération de l'EM comporte deux étapes

étape E de calcul d'espérance,

$$\mathcal{Q}(\theta; \theta_n) := \int \log h(z; \theta) p(z; \theta_n) \mu(dz) \quad \text{où} \quad p(z; \theta) := h(z; \theta) g(\theta)^{-1}$$

étape M de maximisation,

$$\theta_{n+1} := \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \mathcal{Q}(\theta; \theta_n),$$

ou, si le maximum n'est pas unique, θ_{n+1} est une des valeurs qui maximise la quantité de l'EM $\mathcal{Q}(\cdot; \theta_n)$; ce qui se résume par la définition d'une application T telle que $\theta_{n+1} = T(\theta_n)$. La propriété remarquable de cet algorithme est d'accroître, à chaque itération, la valeur de la fonction à maximiser $g(\theta_{n+1}) \geq g(\theta_n)$. Sous des hypothèses de régularité de g et de la quantité intermédiaire \mathcal{Q} , on montre que l'algorithme converge vers l'ensemble des points stationnaires de g (Dempster *et al.* [31], Wu [123]) et que les seuls points fixes stables de T sont les maxima locaux (Murray [77] ; voir aussi Boyles [11], Meng et Rubin [67], McLachlan [64], Nettleton [78]). On peut rencontrer des difficultés de mise en oeuvre de l'algorithme EM

- soit dans l'étape de maximisation : citons les solutions apportées par l'algorithme ECM (Expectation Conditional Maximization), algorithme dans lequel la maximisation globale est remplacée par un ensemble de maximisation conditionnelle plus simple (Meng et Rubin [68], Meng [66], Liu et Rubin [59], Van Dyk et Meng [120]), méthode proche des techniques de relaxation en optimisation numérique. Il est aussi possible de remplacer la maximisation par une itération d'un algorithme de gradient ou d'une approximation de la méthode de Newton (Lange [56]).
- soit dans l'étape d'intégration E, lorsque l'espérance ne peut pas être calculée explicitement. Dans ce dernier cas, on est amené à estimer la quantité intermédiaire en utilisant

des simulations de Monte-Carlo. Telle est l'idée commune des différentes approximations stochastiques utilisées, à savoir le Stochastic EM (Celeux et Diebolt [15, 16, 17, 34], Diebolt et Ip [35], initialement proposé comme une version de recuit simulé particulière de l'algorithme EM, l'idée étant, comme dans les algorithmes de recuit conventionnel, que l'agitation stochastique introduite par l'étape de simulation permet de libérer la trajectoire des pièges des points stationnaires instables), le Stochastic Approximation EM (Delyon *et al.* [27]), dans lequel l'étape de moyennisation est remplacée par une étape d'approximation stochastique ; et finalement le Monte-Carlo EM (Wei et Tanner [122], Tanner [114]), qui est l'objet d'étude de cette thèse. La convergence en loi (resp. p.s.) de l'algorithme SEM (resp. SAEM) a été étudiée, dans un cadre général, par Nielsen [80] (resp. Delyon *et al.* [27]) ; dans les deux premières approximations, l'étape E est remplacée par une étape de simulation de v.a. conditionnellement indépendantes et distribuées sous la loi $p(z; \theta_n)\mu(dz)$, à partir desquelles on construit une approximation de la quantité $\mathcal{Q}(\theta; \theta_n)$. Dans le MCEM, l'étape E est remplacée par une étape de simulation d'une chaîne de Markov de loi stationnaire $p(z; \theta_n)\mu(dz)$, ce qui permet d'appliquer l'algorithme à une plus large classe de modèles (Cf. par exemple Chan et Ledolter [20], Sherman *et al.* [106], Guo et Thompson [45], McCulloch [62, 63], Meng et Schilling [69], Chan et Kuk [19], Ravishanker et Qiou [92]). En revanche, le comportement asymptotique du MCEM n'a été étudié que pour des modèles très spécifiques, et de façon partielle (Cf. discussions, Chapitre 6).

Aussi, nous sommes-nous intéressée à la convergence de l'algorithme MCEM pour un modèle assez général de densité h , dit modèle exponentiel courbe : h s'écrit sous la forme

$$\ln h(z; \theta) := \phi(\theta) + \langle S(z); \psi(\theta) \rangle$$

où ϕ (resp. S et ψ) sont à valeur dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^q) et $\langle \cdot; \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire. Par suite, l'EM définit une suite $\{\theta_n\}$ selon la procédure $\theta_{n+1} := \hat{\theta}(\bar{S}(\theta_n))$ en ayant posé

$$\bar{S}(\theta) := \int S(z)p(z; \theta)\mu(dz) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}(s) := \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \left\{ \phi(\theta) + \langle s; \psi(\theta) \rangle \right\};$$

tandis que le MCEM définit une suite $\{\theta_n\}$ selon la procédure $\theta_{n+1} := \hat{\theta}(\tilde{S}_n)$ en ayant posé

$$\tilde{S}_n := m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} S(Z_j^n)$$

où $Z^n := \{Z_j^n\}$ est une chaîne de Markov d'unique mesure de probabilité invariante π_{θ_n} , et $\{m_n\}$ est une suite d'entiers croissante. A chaque itération, l'*écart* entre l'algorithme déterministe EM et l'algorithme MCEM réside donc dans la perturbation induite par l'approximation de $\bar{S}(\theta_n)$ par \tilde{S}_n et étudier le comportement asymptotique d'une trajectoire du MCEM, revient à étudier le comportement asymptotique d'une suite d'applications proches d'une application T qui possède, de plus, une fonction de Lyapunov⁵. Les résultats existants dans la littérature reposent sur des

⁵ W est une fonction de Lyapunov relative à une application $T : \Theta \rightarrow \Theta$ et un ensemble \mathcal{L} , si (a) pour tout $u \in \Theta$, $W \circ T(u) - W(u) \geq 0$ et (b) pour tout compact $\mathcal{C} \subset (\Theta \setminus \mathcal{L})$, $\inf_{u \in \mathcal{C}} \{W \circ T(u) - W(u)\} > 0$.

critères peu réalistes lorsque la somme de Monte-Carlo est calculée par une méthode MCMC (nous rappelons au Chapitre 6 quelques uns de ces critères).

Nous avons donc recherché un autre critère de *proximité* des deux procédures. Tout d'abord, nous modifions l'algorithme MCEM décrit ci-dessus pour obtenir une suite $\{\theta'_n\}$ p.s. compacte *i.e.* $\limsup_n \{\theta'_n\} < \infty$ p.s. Nous énonçons ensuite des conditions (réalistes) (a) assurant la convergence p.s. de l'algorithme vers les points stationnaires de g , (b) permettant de comparer la vitesse de convergence, vers un maximum local, du MCEM stable à celle du SAEM.

Nous proposons un critère basé sur une inégalité type-Rosenthal pour les chaînes de Markov : si $P_{\lambda,\theta}$ désigne la probabilité de la chaîne canonique Φ de loi initiale λ et de noyau P_θ tel que π_θ soit l'unique mesure de probabilité invariante, nous demandons que

il existe $p \geq 2$, une mesure de probabilité λ et pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Theta$, une constante $C < \infty$ telles que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{K}} \mathbb{E}_{\lambda,\theta} \left[\left| \sum_{k=1}^n \{S(\Phi_k) - \pi_\theta(S)\} \right|^p \right] \leq C n^{p/2}. \quad (1.7)$$

Nous en déduisons, pour un schéma de simulation tel que $\sum_n m_n^{-p/2} < \infty$, la convergence p.s. du MCEM stable vers une sous-composante connexe de l'ensemble des points stationnaires de g , résultat analogue à ce qui est établi pour l'EM et le SAEM.

Pour justifier l'intérêt de cette condition, nous montrons comment la majoration uniforme (1.7) peut se déduire de *conditions de minoration uniforme* du noyau P_θ , et, lorsque l'espace d'état de la chaîne n'est pas small, de l'existence de *conditions de drift uniformes*. Ainsi, si l'espace d'état est small *i.e.* si il existe des constantes $\epsilon > 0$, $m \geq 1$ et une mesure de probabilité ν_m sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telles que

$$P^m(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot) \quad x \in \mathcal{X},$$

nous obtenons que pour toute fonction mesurable g ,

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq \sup_{\mathcal{X}} |g|^p 6^p C_p \left\{ 1 + 2 \{1 - (1 - \epsilon)^{1/m}\}^{-1} \right\} n^{p/2},$$

et C_p est la constante de Rosenthal (Hall et Heyde [46], Théorème 2.12). Dans le cas général, nous devons de plus formuler des conditions de drift : par exemple, si V est solution d'une condition de drift de Foster-Lyapunov, $PV \leq \lambda V + b \mathbb{I}_{\mathcal{C}}$, et C est un ensemble petite, nous obtenons une inégalité type-Rosenthal pour toute fonction $g \in \mathcal{L}_{V^{1/p}}$ et tout $p \geq 2$.

Nous illustrons nos travaux par l'étude de l'estimation par maximum de vraisemblance des paramètres (**a**) d'un modèle de diffusion d'un produit sur le marché, (**b**) d'un modèle de compte du nombre de cas de poliomylérite.

Vitesse de convergence Enfin, nous nous sommes intéressée à la vitesse de convergence de l'algorithme vers un maximum local. Après n itérations, donc $m_1 + \dots + m_n$ simulations, la vitesse de convergence croît comme $\sqrt{m_n}$; pour un schéma de simulation géométrique $m_n := m^n$,

la vitesse de convergence à l'instant n est donc proportionnelle à la racine carrée du nombre total de simulations.

Contrairement au SEM et au SAEM, l'algorithme MCEM approche l'espérance $\mathcal{Q}(\theta; \theta_n)$ à l'aide des simulations de l'itération en cours et oublie donc toutes les simulations passées. Nous suggérons une modification de l'algorithme, basée sur la procédure d'*averaging*, qui calcule l'estimation du maximum de g à partir de tous les échantillons simulés. Nous montrons alors que la vitesse de convergence à l'instant n est proportionnelle à $\sqrt{m_1 + \dots + m_n}$, la racine carrée du nombre total de simulations, et retrouvons la vitesse de convergence du SAEM exhibée par Delyon *et al.* [27].

Chapitre 2

Conditions de Drifts

Soit une chaîne canonique $\Phi = (\Omega, \mathcal{A}, \Phi_n, P_x)$ homogène à valeurs dans un espace séparable \mathcal{X} muni d'une tribu $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. On définit sur l'espace de probabilité, la filtration naturelle du processus $\{\mathcal{F}_n\}$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\Phi_0, \dots, \Phi_n).$$

Soit P le noyau de transition de la chaîne. On note P^n , $n \geq 0$, la n -ième itération du noyau de transition *i.e.*

$$P^n(x, A) = P_x(\Phi_n \in A) \quad x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

avec la convention $P^0(x, A) = \mathbb{1}_A(x)$. Pour toute fonction g bornée $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ -mesurable, on note $Pg(x)$ la fonction $\int P(x, dy)g(y)$ et pour une mesure signée μ , $\mu(g) := \int \mu(dy)g(y)$.

Suites intégrées - Suites dérivées - Famille Λ

Soit $r := \{r(n)\}$ une suite réelle positive croissante. Nous définissons la suite *intégrée* $r^0 := \{r^0(n)\}$

$$r^0(n) := \sum_{k=0}^n r(k), \quad n \geq 0,$$

et la famille des suites *dérivées* $\Delta^q r := \{\Delta^q r(n)\}$, $q \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Delta r(0) &:= r(0) & \Delta r(n) &:= r(n) - r(n-1), \quad n \geq 1 \\ \Delta^q r &:= \Delta(\Delta^{q-1} r) = \Delta^{q-1}(\Delta r) & q \geq 2. \end{aligned}$$

Notons que pour tout $n \geq 0$,

$$\Delta(r^0)(n) = (\Delta r)^0(n) = r(n).$$

Si r est une suite constante, $\Delta r(n) = 0$ pour $n \geq 1$ et $\Delta r(0) = r(0)$. Dans ce cas, si $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, nous prenons par convention $\Delta r(n)f(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Soit Λ l'ensemble des suites positives croissantes $r := \{r(n)\}$, $r(0) := 1$, vérifiant la propriété

$$r(n+m) \leq r(n)r(m), \quad n+m \geq 0.$$

2.1 Quelques propriétés du noyau de transition

On note $\mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Soient τ_C le temps de retour à l'ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$

$$\tau_C := \inf\{n \geq 1, \Phi_n \in C\}$$

et σ_C le temps d'entrée

$$\sigma_C := \inf\{n \geq 0, \Phi_n \in C\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

2.1.1 Irréductibilité

Soit $\psi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$. On ne considère que des chaînes suffisamment régulières pour visiter, quel que soit le point de départ, tout ensemble de ψ -mesure positive. Un noyau P (ou la chaîne) est ψ -irréductible si

$$\psi(A) > 0 \implies \forall x \in \mathcal{X}, \exists n \geq 1, P^n(x, A) > 0. \quad (2.1)$$

Remarquons que pour toutes les mesures $(\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que $\psi_2 \succ \psi_1$, la ψ_2 -irréductibilité de P entraîne la ψ_1 -irréductibilité de P . ψ est une mesure d'irréductibilité maximale si P est ψ -irréductible et toute autre mesure d'irréductibilité $\psi' \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ est telle que $\psi \succ \psi'$. Remarquons que les mesures d'irréductibilité maximales sont équivalentes. On peut construire une mesure d'irréductibilité maximale à partir de toute mesure d'irréductibilité : si P est ϕ -irréductible, alors la mesure de probabilité

$$\psi(A) := \int \phi(dy) \sum_{n \geq 0} 2^{-(n+1)} P^n(y, A)$$

est une mesure d'irréductibilité maximale.

Enfin, nous rappelons la propriété suivante : si ψ est une mesure d'irréductibilité maximale,

$$\psi(A) = 0 \Rightarrow \psi(\{x \in \mathcal{X}, P_x(\tau_A < \infty) > 0\}) = 0. \quad (2.2)$$

Tous ces résultats sont établis dans la Proposition 4.2.2 [72]. Par convention, nous parlerons de ψ -irréductibilité lorsque ψ est une mesure d'irréductibilité maximale, et de ϕ -irréductibilité

sinon.

Soit ψ une mesure d'irréductibilité maximale. A est dit accessible si $\psi(A) > 0$ et l'on note

$$\mathcal{B}^+(\mathcal{X}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \psi(A) > 0\},$$

(ensemble dont la définition ne dépend pas de la mesure d'irréductibilité maximale choisie). Un ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ est plein si $\psi(A^c) = 0$ et absorbant si $P(x, A) = 1$ pour tout $x \in A$. Lorsque P est ψ -irréductible, tout ensemble absorbant est plein (Proposition 4.2.3. [72]). Ainsi, si il existe $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $b < \infty$ tels que

$$PV \leq V + b\mathbb{1}_C,$$

pour un noyau P ψ -irréductible, alors $\{V < \infty\}$ est soit vide, soit plein et absorbant.

Enfin, tout ensemble C non vide tel que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_C] < \infty$ est accessible. En effet, $V(x) := \mathbb{E}_x[\sigma_C] + 1$ vérifie la condition $PV - 1 \leq V + b\mathbb{1}_C$: donc (i) nous démontrerons (Proposition 2.2) que cela établit $\mathbb{E}_x[\tau_C] \leq V(x) + b\mathbb{1}_C(x)$ et (ii) $\{V < \infty\}$ est plein et absorbant ou vide. Or, $\{V < \infty\}$ contient C , donc il est plein et absorbant. De plus,

$$\{V < \infty\} \subset \{x \in \mathcal{X}, P_x(\tau_C < \infty) = 1\}$$

Par suite, $\psi(\{x, P_x(\tau_C < \infty) > 0\}) > 0$ donc $\psi(C) > 0$, en utilisant (2.2).

2.1.2 Apéridicité

Un noyau ψ -irréductible est dit périodique de période $d \geq 1$ si il existe d ensembles disjoints $\{\mathcal{X}_i\}$, $1 \leq i \leq d$, $\mathcal{X}_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tels que

- (i) pour tout $1 \leq i \leq d$, $\min_{x \in \mathcal{X}_i} P(x, \mathcal{X}_{i+1}) = 1$ en ayant posé $\mathcal{X}_{d+1} := \mathcal{X}_1$.
- (ii) $\psi\left(\bigcup_{i=1}^d \mathcal{X}_i\right) = 1$.
- (iii) d est le plus grand entier qui vérifie les conditions (i) et (ii).

Lorsque $d = 1$, P est dit apériodique.

Le d -cycle $\{\mathcal{X}_i\}$, $1 \leq i \leq d$, n'est pas unique mais il est maximal dans le sens où si il existe $d' \geq 1$ et \mathcal{X}'_i , $1 \leq i \leq d'$, vérifiant (i-ii), alors d' divise d . Si $d' = d$, $\mathcal{X}'_i = \mathcal{X}_i$ ψ -presque sûrement (en réordonnant les ensembles si nécessaires). Chacun de ces ensembles \mathcal{X}_i est absorbant pour la chaîne de noyau P^d notée $\Phi^{(d)}$, et $\Phi^{(d)}$ sur \mathcal{X}_i est apériodique.

Enfin P est dit fortement apériodique (et est apériodique) si il existe $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, une constante $\epsilon > 0$ et une mesure $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ tels que $\nu(C) > 0$ et

$$\forall x \in C, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad P(x, A) \geq \epsilon \nu(A).$$

2.1.3 Ensemble small et ensemble petite

Un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ est ν_m -small (ou small) si il existe un entier $m \geq 1$, une constante $\epsilon > 0$ et une mesure $\nu_m \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ tels que

$$\forall x \in C, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A).$$

Si P est ψ -irréductible, tout ensemble accessible contient un ensemble C ν_m -small et accessible, et $\nu_m(C) > 0$ (Théorème 5.2.2. [72]).

Un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ est ν_a -petite (ou petite) si il existe une mesure de probabilité sur \mathbb{N} , $a = \{a(n)\}$, une constante $\epsilon > 0$ et une mesure de probabilité $\nu_a \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que

$$\forall x \in C, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \sum_{n \geq 0} a(n) P^n(x, A) \geq \epsilon \nu_a(A).$$

Tout ensemble small est donc petite ; réciproquement, tout ensemble petite est small si P est ψ -irréductible et apériodique (Théorème 5.5.7. [72]).

Rappelons que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ est petite dès qu'il existe $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ν_b -petite tel que $\sup_{x \in A} \mathbb{E}_x[\tau_C] =: M < \infty$. En effet, l'inégalité de Markov entraîne $P_x(\sigma_C \geq n) \leq M/n$ pour $x \in A$. Soient $0 < \epsilon < 1$ et N tels que $M/n \leq \epsilon$ pour tout $n > N$. On peut toujours construire une loi $a := \{a(n)\}$ sur \mathbb{N} telle que $a(n) \geq \lambda > 0$ pour $n \leq N$. En conséquence, pour tout $x \in A$,

$$\sum_n a(n) P^n(x, C) \geq \sum_{n \leq N} a(n) P_x(\sigma_C = n) \geq \lambda P_x(\sigma_C \leq N) \geq \lambda(1 - \epsilon) > 0.$$

Comme C est ν_b petite, la relation de Chapman-Kolmogorov implique que pour tout $x \in A$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a * b(n) P^n(x, B) &= \int \sum_{n \geq 0} a(n) P^n(x, dy) \sum_{n \geq 0} b(n) P^n(y, B) \\ &\geq \int_C \sum_{n \geq 0} a(n) P^n(x, dy) \sum_{n \geq 0} b(n) P^n(y, B) \\ &\geq \lambda(1 - \epsilon) \nu_b(B), \end{aligned}$$

où $a * b(n) = \sum_{k=0}^n a(k)b(n-k)$; et A est ν_{a*b} -petite.

2.1.4 Ergodicité

Nous rappelons une condition suffisante d'existence de loi stationnaire, pour la chaîne de noyau P , condition liée à la récurrence d'un ensemble petite.

Proposition 2.1 *Soit P un noyau ψ -irréductible possédant un ensemble petite $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel que pour tout $x \in C$, $P_x(\tau_C < \infty) = 1$.*

Alors P possède une unique (à une constante de multiplicité près) mesure invariante π qui est une mesure finie si $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_C] < \infty$.

Si, de plus, P est apériodique et $P_x(\tau_C < \infty) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT}$ tend vers zéro quel que soit $x \in \mathcal{X}$ i.e.

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} |P^n(x, A) - \pi(A)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Un noyau P (ou la chaîne) est ergodique si

- (i) il est ψ -irréductible, apériodique et possède une mesure de probabilité invariante π ,
- (ii) pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\lim_n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} = 0.$$

Lorsque P ψ -irréductible apériodique possède un atome α (*i.e.* un ensemble mesurable tel que $P(x, \cdot)$ est indépendant de x pour tout $x \in \alpha$) tel que $\mathbb{E}_\alpha[\tau_\alpha] < \infty$, la mesure de probabilité invariante π est proportionnelle à la mesure qui à tout ensemble mesurable A associe le nombre moyen de visites à A entre deux passages à l'atome $\mathbb{E}_\alpha[\sum_{k=1}^{\tau_\alpha-1} \mathbb{1}_A(\Phi_k)]$. Lorsque P ne possède pas d'atome, ce résultats s'étend comme suit (Théorème 14.0.1 [72]) : soit $f \geq 1$ mesurable ; si P est ψ -irréductible apériodique, P possède une mesure de probabilité invariante π et $\pi(f) < \infty$ si et seulement si il existe un ensemble petite C tel que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

2.1.5 (f, r) -ergodicité

Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ une fonction mesurable, et $r := \{r(n)\}$, $r(n) \geq 1$, une suite positive. Un noyau P (ou la chaîne) est (f, r) -ergodique si

- (i) P est ψ -irréductible, apériodique et possède une mesure de probabilité invariante π ,
- (ii) $\pi(f) < \infty$,
- (iii) pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\lim_n r(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0$.

Lorsque r est une suite constante, on parle simplement de f -ergodicité.

2.2 Typologie des conditions de drifts

Nous étudions le lien naturel entre le moment (f, r) -pondéré du temps de retour à un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *i.e.*

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] \tag{2.3}$$

et une condition de drift de la forme

$$PV(x) + F(x) \leq V(x) + b \mathbb{1}_C(x) \quad \text{où } F(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right], \quad (2.4)$$

ou la famille de conditions de drift de la forme

$$PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) \leq V_n(x) + br(n)\mathbb{1}_C(x). \quad (2.5)$$

2.2.1 Résultats préliminaires

Proposition 2.2 Soient $F, V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurables, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et une constante $b < \infty$ tels que

$$PV(x) + F(x) \leq V(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

Pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} F(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right] \leq V(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

Preuve 2 On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned} PV(x) &= \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C=1} \right] + \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C>1} \right] \\ &\geq \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C=1} \right] + \mathbb{E}_x \left[\{F(\Phi_1) + PV(\Phi_1)\} \mathbb{1}_{\tau_C>1} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} V(x) + b \mathbb{1}_C(x) &\geq F(x) + PV(x) \\ &\geq F(x) + \mathbb{E}_x \left[F(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C>1} \right] + \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C=1} \right] + \mathbb{E}_x \left[PV(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C>1} \right] \end{aligned}$$

et en itérant la minoration (2.6), on obtient pour tout $n \geq 1$

$$V(x) + b \mathbb{1}_C(x) \geq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}_x \left[F(\Phi_k) \mathbb{1}_{\tau_C>k} \right] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_k) \mathbb{1}_{\tau_C=k} \right]$$

ce qui conduit au résultat lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

Corollaire 2.3 Soient $f, V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurables, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, une constante $b < \infty$ et $r := \{r(n)\}$ une suite positive, $r(0) := 1$, tels que

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

Pour $x \in C^c$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right] \leq V(x) + \mathbb{E}_x \left[f(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right]$$

et pour $x \in C$,

$$f(x) + \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C > 1} \sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right] \leq V(x) + \mathbb{E}_x \left[f(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right] + b.$$

Preuve 3 On applique la Proposition 2.2 avec $F(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right]$. Pour $x \in C^c$, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\sigma_C} \Delta r(l) f(\Phi_l) \right] \right] &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\tau_C} \Delta r(l) f(\Phi_l) \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k) \sum_{l=0}^k \Delta r(l) \right] + \mathbb{E}_x \left[f(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \sum_{k=1}^{\tau_C} \Delta r(k) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[(r(\tau_C) - 1) f(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\sigma_C} \Delta r(l) f(\Phi_l) \right] \right] + \mathbb{E}_x \left[f(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right] = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right].$$

Si $x \in C$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\sigma_C} \Delta r(l) f(\Phi_l) \right] \right] \\ = \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C > 1} \sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\tau_C} \Delta r(l) f(\Phi_l) \right] \right] - \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C > 1} \sum_{k=0}^{\tau_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] + f(x) \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}_x \left[\sum_{l=0}^{\sigma_C} \Delta r(l) f(\Phi_l) \right] = f(x)$ pour $x \in C$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\sigma_C} \Delta r(l) f(\Phi_l) \right] \right] + \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C < \infty} f(\Phi_{\tau_C}) \right] \\ = \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C > 1} \sum_{k=0}^{\tau_C} (r(k) - \Delta r(k)) f(\Phi_k) \right] + f(x) \\ = \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C > 1} \sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] + f(x); \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \square

Proposition 2.4 Soient une famille de fonctions mesurables $\{V_n\}$, $V_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, une fonction mesurable $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et deux suites réelles positives $\{r(n)\}$ et $\{b(n)\}$ tels que

$$PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) \leq V_n(x) + b(n)\mathbb{1}_C(x). \quad (2.7)$$

Pour tout $q \geq 0$, $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_x \left[V_{q+\tau_C}(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k+q)f(\Phi_k) \right] \leq V_q(x) + b(q)\mathbb{1}_C(x). \quad (2.8)$$

Pour tout temps d'arrêt τ , $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} r(k)f(\Phi_k) \right] \leq V_0(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} b(k)\mathbb{1}_C(\Phi_k) \right]. \quad (2.9)$$

Preuve 4 (2.9) est le Théorème de Comparaison (Théorème 11.3.2. [72]). On établit (2.8) pour $q = 0$, les autres cas se déduisent aisément en remplaçant V_n par V_{n+q} , $r(n)$ par $r(n+q)$ et $b(n)$ par $b(n+q)$, $n \geq 0$. (2.7) entraîne

$$PV_{n+1}(x) \geq \mathbb{E}_x \left[V_{n+1}(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C=1} \right] + r(n+1)\mathbb{E}_x \left[f(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C>1} \right] + \mathbb{E}_x \left[PV_{n+2}(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C>1} \right].$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} V_0(x) + b(0)\mathbb{1}_C(x) &\geq r(0)f(x) + PV_1(x) \\ &\geq r(0)f(x) + r(1)\mathbb{E}_x \left[f(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C>1} \right] + \mathbb{E}_x \left[V_1(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C=1} \right] + \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C>1} PV_2(\Phi_1) \right] \end{aligned}$$

et en itérant la minoration de PV_{n+1} , on obtient pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} V_0(x) + b(0)\mathbb{1}_C(x) &\geq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}_x \left[r(k)f(\Phi_k) \mathbb{1}_{\tau_C>k} \right] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_x \left[V_k(\Phi_k) \mathbb{1}_{\tau_C=k} \right] + \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C>n} PV_{n+1}(\Phi_n) \right] \\ &\geq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}_x \left[r(k)f(\Phi_k) \mathbb{1}_{\tau_C>k} \right] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_x \left[V_k(\Phi_k) \mathbb{1}_{\tau_C=k} \right], \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

2.2.2 Deux conditions de drift équivalentes

Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $r := \{r(n)\}$ une suite réelle positive, $r(0) := 1$.

D1[$f, r, C]$ Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, $V \geq f$, et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b \mathbb{1}_C(x). \quad (2.10)$$

D2[$f, r, C]$ Il existe une famille de fonctions $\{V_n\}$, $V_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, $V_n \geq r(n)f$, et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V_0 < \infty$ et

$$\begin{aligned} \{V_1 < \infty\} &\subset \{V_0 < \infty\} \\ PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) &\leq V_n(x) + br(n)\mathbb{1}_C(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Théorème 2.5 Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et une suite $r \in \Lambda$. D1[f, r, C] et D2[f, r, C] sont deux conditions équivalentes. Si V est solution de D1[f, r, C],

$$\{V < \infty\} \subset \left\{ x \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty \right\}$$

et si V_0 est solution de D2[f, r, C],

$$\{V_0 < \infty\} \subset \left\{ x \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty \right\}$$

Preuve 5 L'inclusion des ensembles résulte du Corollaire 2.3 et de la Proposition 2.4.

D1[f, r, C] implique D2[f, r, C] : on pose $V_n(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} r(n+k) f(\Phi_k) \right] \geq r(n)f(x)$ avec égalité sur C (donc $\sup_C V_0 < \infty$). Puisque r est croissante, $r(n) \leq r(n+1)$ donc $V_n(x) \leq V_{n+1}(x)$ et

$$V_0 = \infty \Rightarrow V_1 = \infty.$$

De plus, $PV_{n+1}(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(n+k) f(\Phi_k) \right]$. Si $x \in C^c$, $PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) = V_n(x)$. Si $x \in C$, puisque $r(n+k) \leq r(n+1)r(k-1)$, $k \geq 1$, $n \geq 0$, et $r(0) = 1$, il vient

$$\begin{aligned} PV_{n+1}(x) &\leq r(n+1) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] \\ &\leq r(n+1) \left\{ \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C > 1} \sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[f(\Phi_1) \mathbb{1}_{\tau_C = 1} \right] \right\} \\ &\leq r(n+1) \left\{ \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_C > 1} \sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[V(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C = 1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le Corollaire 2.3, l'hypothèse D1[f, r, C] implique l'existence d'une constante $b' < \infty$ telle que

$$PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) \leq V_n(x) + r(n)b'\mathbb{1}_C(x).$$

$D2[f, r, C]$ implique $D1[f, r, C]$: on pose $V(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k) f(\Phi_k) \right] \geq f(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} PV(x) &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] \\ PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right] \\ PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right]. \end{aligned}$$

Puisque $\tau_C = \sigma_C$ sur $\{\Phi_0 \in C^c\}$, on a pour tout $x \in C^c$, $PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] = V(x)$. Si $x \in C$,

$$PV(x) \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[V_{\tau_C}(\Phi_{\tau_C}) \mathbb{1}_{\tau_C < \infty} \right],$$

en se rappelant que sur $\{\tau_C < \infty\}$, $r(\tau_C) f(\Phi_{\tau_C}) \leq V_{\tau_C}(\Phi_{\tau_C})$. En utilisant la Proposition 2.4, on obtient $PV(x) \leq V_0(x) + b$ pour $x \in C$. Ainsi

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + \mathbb{1}_C(x) \left[\sup_C V_0 + b \right].$$

Enfin, pour $x \in C$, $V(x) = f(x)$ et puisque $\sup_C V_0 < \infty \Rightarrow \sup_C f < \infty$, on a bien $\sup_C V < \infty$. \square

Exemple : Condition de Tuominen et Tweedie La condition de drift $D2[f, r, C]$ a été proposée par Tuominen et Tweedie [117] comme caractérisation de la (f, r) -ergodicité à un taux sous-géométrique *i.e.* taux $r \in \Lambda$ tel que $\{\log r(n)\}/n$ tend en décroissant vers zéro.

Soit r une suite positive croissante, $r(0) := 1$. Si V est solution de $D1[f, r, C]$, le Corollaire 2.3 montre que $\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x)$ pour $x \in C^c$. Donc

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x), \quad x \in \mathcal{X}. \tag{2.12}$$

De même, si $\{V_n\}$ est solution de $D2[f, r, C]$, on vérifie à l'aide de la Proposition 2.4, que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k+n) f(\Phi_k) \right] \leq V_n(x), \quad x \in \mathcal{X}. \tag{2.13}$$

De plus, pour $x \in C$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b + \sup_C f$$

et

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k-1) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b + \sup_C f.$$

Enfin, puisque r est croissante,

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k+n) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Réiproquement, l'existence de ces moments (f, r) -pondérés uniformément bornés sur C assure l'existence de solutions aux conditions de drift.

2.2.3 Condition de drift et moment (f, r) -pondéré du temps de retour

On vérifie facilement que

$$U(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k) f(\Phi_k) \right]$$

est solution de $PU(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] = U(x)$ pour $x \in C^c$ et

$$U_n(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k+n) f(\Phi_k) \right]$$

est solution de $PU_{n+1} + r(n)f = U_n$ sur C^c . Les majorations (2.12) et (2.13) expriment que ce sont les solutions minimales. La démonstration de ces assertions repose sur les mêmes techniques que celles utilisées pour établir les Propositions 2.2, 2.4 et le Théorème 2.5 et est donc omise.

Proposition 2.6 Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ une fonction mesurable et $r := \{r(n)\}$ une suite positive croissante, $r(0) := 1$.

– U est la plus petite solution du système d'équations

$$\begin{aligned} PV + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] &\leq V && \text{sur } C^c, \\ V &\geq f && \text{sur } C. \end{aligned}$$

– Si de plus, $r \in \Lambda$, $\{U_n\}$ est la plus petite solution de

$$\begin{aligned} PV_{n+1} + r(n)f &\leq V_n && \text{sur } C^c, \\ V_n &\geq r(n)f && \text{sur } C. \end{aligned}$$

U (resp. $\{U_n\}$) est solution de $D1[f, r, C]$ (resp. $D2[f, r, C]$ pour $r \in \Lambda$) dès que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

2.2.4 3ème condition de drift

Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable et un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Soient r une suite réelle positive croissante, $r(0) := 1$ et un entier $q \geq 1$ tel que $\Delta^q r$ soit encore une suite réelle positive croissante. La condition de drift probabiliste $D1[f, r, C]$ ne présente un intérêt pratique que si l'on sait estimer $\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right]$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. Pour trouver une fonction F_1 telle que $F_1(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right]$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, il suffit, d'après la Proposition 2.6, de prendre F_1 solution du système

$$\begin{cases} PF_1(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta^2 r(k) f(\Phi_k) \right] \leq F_1(x) + b \mathbb{1}_C(x), \\ F_1(x) \geq f(x), \end{cases} \quad (2.14)$$

pour une constante $b < \infty$. A son tour, (2.14) ne présente un intérêt pratique que si l'on sait majorer le terme probabiliste par une fonction $F_2 \geq F_1$, obtenue comme F_1 en remplaçant Δ^2 par Δ^3 dans (2.14). Nous déduisons de cette "construction descendante" que le drift $D1[f, r, C]$ peut être remplacé par le système de drift $D1'[f, r, C]$

D1'[f, r, C] il existe des fonctions $f \leq F_1 \leq \dots \leq F_{q+1}$ mesurables et des constantes $b_i < \infty$, $1 \leq i \leq q$ telles que $\sup_C F_{q+1} < \infty$ et pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{cases} PF_i(x) + F_{i-1}(x) \leq F_i(x) + b_{i-1} \mathbb{1}_C(x) & 2 \leq i \leq q+1, \\ F_1(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta^q r(k) f(\Phi_k) \right], \end{cases} \quad (2.15)$$

et cette formulation est préférable à la condition de drift $D1[f, r, C]$ lorsque $\Delta^q r$ a une forme simple : par exemple lorsque $\Delta^q r$ est la suite constante 1 (cela signifie que r est à croissance polynomiale de degré q) ou lorsque Δr est un multiple de r (cela signifie que r est une suite géométrique). Nous détaillons ces deux cas, mais au préalable, nous montrons l'équivalence des conditions $D1[f, r, C]$ et $D1'[f, r, C]$.

Théorème 2.7 Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable et un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Soient $r := \{r(n)\}$ une suite positive croissante, $r(0) := 1$ et un entier $q \geq 1$ tel que $\Delta^q r$ soit une suite positive croissante.

Les conditions $D1[f, r, C]$ et $D1'[f, r, C]$ sont équivalentes.

Preuve 7 $D1[f, r, C]$ implique $D1'[f, r, C]$: on pose $F_{q+1}(x) := V(x)$ et pour $1 \leq l \leq q$,

$$F_l(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta^{q+1-l} r(k) f(\Phi_k) \right].$$

Par construction, $f \leq F_1 \leq \dots \leq F_{q+1}$ sur \mathcal{X} et par hypothèse,

$$PF_{q+1}(x) + F_q(x) \leq F_{q+1}(x) + b \mathbb{1}_C(x),$$

$$\sup_C f < \infty.$$

En particulier, $\sup_C F_{q+1} < \infty$. Supposons que pour $2 \leq l \leq q$

$$PF_{l+1}(x) + F_l(x) \leq F_{l+1}(x) + b_l \mathbb{1}_C(x).$$

Alors

$$\sup_{x \in C} PF_{l+1}(x) = \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} \Delta^{q+1-l-1} r(k-1) f(\Phi_k) \right] < \infty. \quad (2.16)$$

Par définition, $PF_l + F_{l-1} = F_l$ sur C^c et pour $x \in C$,

$$PF_l(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} \Delta^{q+1-l} r(k-1) f(\Phi_k) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} \Delta^{q+1-l-1} r(k-1) f(\Phi_k) \right]$$

puisque $\Delta R(k) = R(k) - R(k-1) \leq R(k)$, $k \geq 1$. Donc on déduit de (2.16) qu'il existe $b_{l-1} < \infty$ telle que

$$PF_l + F_{l-1} \leq F_l + b_{l-1} \mathbb{1}_C.$$

D1 [f, r, C] implique *D1* [f, r, C] : la fonction F_2 vérifie

$$PF_2(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta(\Delta^{q-1} r)(k) f(\Phi_k) \right] \leq F_2(x) + b_1 \mathbb{1}_C(x)$$

donc, puisque $F_2 \geq f$, on obtient par la Proposition 2.6, que

$$F_2(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta^{q-1} r(k) f(\Phi_k) \right], \quad x \in \mathcal{X},$$

puis par récurrence, on montre que

$$F_q(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right].$$

En posant $V := F_{q+1}$, on a $f \leq V$, $\sup_C V < \infty$, et

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b_q \mathbb{1}_C(x).$$

□

Exemple 1 : taux polynomiaux Nous construisons la famille de polynômes $\{S(q, \cdot)\}$ telle que $\Delta^q S(q, \cdot)$ soit la suite constante 1. On pose

$$\begin{aligned} S(0, 0) &:= 1, & S(0, n) &:= 1, n \geq 1 \\ S(q, 0) &:= 1 & S(q, n) &:= \sum_{k=1}^n S(q-1, k), q \geq 1, n \geq 1, \end{aligned}$$

de sorte que $S(q, n) \sim n^q/q! + O(n^{q-1})$, $q \geq 1$.

Soient $q \geq 1$ et $r := S(q, \cdot)$; $\Delta r = S(q-1, \cdot)$ et par récurrence, $\Delta^q r = S(0, \cdot)$ est la suite constante 1. Notons que cela implique que $\Delta^{q+1} r(0) = 1$ et $\Delta^{q+1} r(k) = 0, k \geq 1$. Chercher F_1 telle que $F_1(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta^q r(k) f(\Phi_k) \right]$ revient à chercher F_1 solution de

$$PF_1 + F_0 \leq F_1 + b_0 \mathbb{1}_C$$

où $F_0(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta^{q+1} r(k) f(\Phi_k) \right] = f(x)$. Ainsi, le système (2.15) est équivalent à,

$$\begin{cases} PF_i(x) + F_{i-1}(x) \leq F_i(x) + b_{i-1} \mathbb{1}_C(x) & 1 \leq i \leq q+1, \\ \text{en ayant posé } F_0(x) := f(x). \end{cases}$$

Exemple 2 : taux géométriques Supposons maintenant que $\Delta r(k) = (1 - \kappa^{-1})r(k)$, $k \geq 1$ et $\Delta r(0) = r(0) = 1$ i.e. $r(k) := \kappa^k$, et recherchons des solutions à la condition de drift D1'[f, r, C] sous la contrainte

$$\exists c > 1, \quad F_2(x) \geq cf(x) \quad x \in C^c.$$

Pour $q = 1$, la condition D1'[f, r, C] devient :

il existe des fonctions $f \leq F_1 \leq F_2$, mesurables et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C F_2 < \infty$ et

$$\begin{cases} PF_2(x) + F_1(x) \leq F_2(x) + b \mathbb{1}_C(x), \\ F_1(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right]. \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] &= \mathbb{1}_C(x)f(x) + \mathbb{1}_{C^c}(x) \left(f(x) + (1 - \kappa^{-1}) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k) f(\Phi_k) \right] \right) \\ &\leq \mathbb{1}_C(x)f(x) + \mathbb{1}_{C^c}(x) \left((1 - \kappa^{-1})F_2(x) + \kappa^{-1}f(x) \right) \end{aligned}$$

en utilisant le Corollaire 2.3 dans la dernière inégalité. Il suffit donc de prendre $F_1 := (1 - \kappa^{-1} + \kappa^{-1}c^{-1})F_2$. On s'est ramené à la recherche de constantes $c > 1$ et $b < \infty$ et d'une fonction $F_2 \geq cf$ telles que $\sup_C F_2 < \infty$ et

$$PF_2(x) \leq \kappa^{-1}(1 - c^{-1}) F_2(x) + b \mathbb{1}_C(x),$$

soit encore, à la recherche de $0 < \lambda < 1$, $b < \infty$, $c > 1$ et $V \geq cf$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV \leq \lambda V + b \mathbb{1}_C.$$

Cette condition de drift est connue sous le nom de condition de Foster-Lyapunov.

2.2.5 Conclusion

Théorème 2.8 Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et une suite $r \in \Lambda$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty$.
- (ii) La condition de drift $D1[f, r, C]$ est vérifiée.
- (iii) La condition de drift $D2[f, r, C]$ est vérifiée.

Preuve 8 Le Théorème 2.8 se déduit des Propositions 2.4 et 2.6 et du Théorème 2.5. \square
En conséquence, si l'une des conditions du théorème précédent est vérifiée, C est accessible (Cf. Paragraphe 2.1.1). Si de plus, C est petite, P possède une mesure de probabilité invariante π et $\pi(f) < \infty$. (Cf. Paragraphe 2.1.4).

2.3 Exemples de conditions de drift

2.3.1 Condition de Fort-Moulines

Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et un entier $q \geq 0$.

Condition de Fort-Moulines Il existe des fonctions mesurables $f =: F_0 \leq \dots \leq F_{q+1}$ et des constantes $b_k < \infty$, $0 \leq k \leq q$ telles que

$$\begin{cases} PF_k + F_{k-1} \leq F_k + b_{k-1} \mathbb{1}_C, & 1 \leq k \leq q+1, \\ \sup_C F_{q+1} < \infty. \end{cases} \quad (2.17)$$

Ce système de conditions permet de calculer le moment (f, r) -pondéré du temps de retour à C lorsque r est à croissance polynomiale.

Existence de solution Soit $U_{k+1}(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{j=0}^{\sigma_C} S(k, j+1) f(\Phi_j) \right]$, $k \geq 0$ et $U_0(x) := f(x)$. Nous avons pour tout $k \geq 0$,

$$PU_{k+1}(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{j=1}^{\tau_C} S(k, j) f(\Phi_j) \right], \quad k \geq 0.$$

Si $k = 0$, $PU_1 = U_1 - U_0$ sur C^c si bien que

$$PU_1(x) = U_1(x) - U_0(x) + \mathbb{1}_C(x)\mathbb{E}_x\left[\sum_{j=1}^{\tau_C} f(\Phi_j)\right].$$

Si $k \geq 1$, $S(k, j) = S(k, j+1) - S(k-1, j+1)$ pour tout $j \geq 1$, et $S(k, 0) = S(k-1, 0)$; donc $PU_{k+1} + U_k = U_{k+1}$ sur C^c si bien que

$$PU_{k+1}(x) = U_{k+1}(x) - U_k(x) + \mathbb{1}_C(x)\mathbb{E}_x\left[\sum_{j=1}^{\tau_C} S(k, j)f(\Phi_j)\right].$$

Donc $\{U_{k+1}\}$ est solution de la condition de Fort-Moulines dès que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} S(q, k)f(\Phi_k)\right] < \infty.$$

Solutions minimales Soit $\{F_k\}$, $1 \leq k \leq q+1$, une famille de fonctions solutions de la condition de Fort-Moulines. Nous montrons par récurrence que $U_k \leq F_k$, $1 \leq k \leq q+1$. Nous savons par la Proposition 2.2 que pour $0 \leq l \leq q$,

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} F_l(\Phi_k)\right] + \mathbb{E}_x\left[F_{l+1}(\Phi_{\tau_C})\mathbb{1}_{\tau_C < \infty}\right] \leq F_{l+1}(x), \quad x \in C^c.$$

Si $x \in C^c$,

$$U_1(x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C} F_0(\Phi_k)\right] \leq \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} F_0(\Phi_k)\right] + \mathbb{E}_x\left[F_0(\Phi_{\tau_C})\mathbb{1}_{\tau_C < \infty}\right] \leq F_1(x)$$

et si $x \in C$, $U_1(x) = f(x) \leq F_1(x)$. Donc $U_1 \leq F_1$ sur \mathcal{X} . Supposons que $U_l \leq F_l$ pour $l \leq q$. Alors, pour $x \in C^c$,

$$U_{l+1}(x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C} U_l(\Phi_k)\right] \leq \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} F_l(\Phi_k)\right] + \mathbb{E}_x\left[F_l(\Phi_{\tau_C})\mathbb{1}_{\tau_C < \infty}\right] \leq F_{l+1}(x)$$

et pour $x \in C$, $U_{l+1} = f \leq F_{l+1}$. Donc $U_{l+1} \leq F_{l+1}$ sur \mathcal{X} . Ce qui termine la récurrence. La condition de Fort-Moulines est une condition de la forme D1'[f, r, C] avec $r(n) := S(q, n)$. D1[f, r, C] est donc vérifiée et le Théorème 2.8 montre que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} S(q, k)f(\Phi_k)\right] < \infty.$$

Conclusion Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et un entier $q \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une famille de fonctions $\{F_k\}, 1 \leq k \leq q+1$ solution de la condition de Fort-Moulines.
- (ii) $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} S(q, k) f(\Phi_k) \right] < \infty$.

Notons que cette équivalence est encore valable si la fonction f est simplement positive.

2.3.2 Condition de Jarner-Roberts

Condition de Jarner-Roberts Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, et des constantes $0 < \delta \leq 1$, $c > 0$, $b < \infty$, tels que $cV^{1-\delta} \leq V$, $\sup_C V < \infty$ et

$$PV + cV^{1-\delta} \leq V + b\mathbb{1}_C \quad (2.18)$$

Remarquons que la condition $cV^{1-\delta} \leq V$ est toujours réalisable pour c suffisamment petit. Cette condition de drift entraîne

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{l-1} f_l(\Phi_k) \right] < \infty \quad (2.19)$$

pour tout réel $1 \leq l \leq 1/\delta$ et $f_l := V^{1-l\delta}$.

En effet, pour tout $0 < \eta \leq 1$,

$$PV^\eta + \eta cV^{\eta-\delta} \leq V^\eta + \left(b + \sup_C \{V - V^\eta\} \right) \mathbb{1}_C, \quad (2.20)$$

(Lemme 3.5. [50]¹), ce qui implique

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} V^{\eta-\delta}(\Phi_k) \right] \leq R_\eta V^\eta(x), \quad x \in \mathcal{X}$$

pour une constante $R_\eta < \infty$ ².

Soit l'entier q tel que $q+1 := \lceil 1/\delta \rceil$ où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière supérieure ; on pose

$$F_{q+1} := V \quad F_{q+1-k} := c^k (1-\delta)^{k-1} V^{1-k\delta}, \quad 1 \leq k \leq q+1.$$

¹ il suffit de remarquer que sur C^c , $PV^\eta \leq (V - cV^{1-\delta})^\eta$ et que pour $0 \leq x \leq y$,

$$(y-x)^\eta \leq y^\eta - \int_{y-x}^y \eta t^{\eta-1} dt \leq y^\eta - \eta xy^{\eta-1}.$$

² plus exactement,

$$\eta c \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} V^{\eta-\delta}(\Phi_k) \right] \leq V^\eta(x) + \left(b + \sup_C \{V - V^\eta\} \right) \mathbb{1}_C(x).$$

La famille de fonctions mesurables $\{F_k\}$, $1 \leq k \leq q+1$, est solution de la condition de Fort-Moulines et il vient que pour tout $0 \leq k \leq q$, $k \leq i \leq q$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{j=0}^{\tau_C-1} (j+1)^{i-k} F_k(\Phi_j) \right] \leq R F_{i+1}(x), \quad (2.21)$$

pour une constante $R < \infty$. Soit $1 \leq l \leq 1/\delta$ réel et $f_l := V^{1-l\delta}$. On définit (p_1, p_2) tels que $p_1 := \lceil l-1 \rceil / (l-1) > 1$ et $1/p_1 + 1/p_2 = 1$. Pour tout (a, b) tels que $1/a + 1/b = 1$ (a peut être éventuellement négatif)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{l-1} f_l(\Phi_k) \right] &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{l-1} f_l^{1/a}(\Phi_k) f_l^{1/b}(\Phi_k) \right] \\ &\leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{(l-1)p_1} f_l^{p_1/a}(\Phi_k) \right]^{1/p_1} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f_l^{p_2/b}(\Phi_k) \right]^{1/p_2}. \end{aligned}$$

En prenant a tel que

$$\frac{p_1}{a} = \frac{1 - \lceil l \rceil \delta}{1 - l \delta}$$

il vient

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{l-1} f_l(\Phi_k) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{\lceil l \rceil - 1} f_{\lceil l \rceil}(\Phi_k) \right]^{1/p_1} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} F_{q-1}(\Phi_k) \right]^{1/p_2}. \quad (2.22)$$

Puisque $1 \leq l \leq 1/\delta$, $1 \leq \lceil l \rceil \leq \lceil 1/\delta \rceil$ donc en appliquant (2.21) avec $k = q+1 - \lceil l \rceil$ et $i = q$, il vient

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{l-1} f_l(\Phi_k) \right] \leq R V^{1/p_1}(x) V^{1/p_2}(x) = R V(x),$$

pour une constante $R < \infty$.

Conclusion Si la condition de Jarner-Roberts est vérifiée, pour tout $1 \leq l \leq 1/\delta$, il existe une constante $R_l < \infty$ telle que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{l-1} V^{1-l\delta}(\Phi_k) \right] \leq R_l V(x).$$

2.3.3 Condition de Foster-Lyapunov

Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et une constante $\kappa > 1$.

Condition de Foster-Lyapunov il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, équivalente à f , et des constantes $0 < \lambda < \kappa^{-1}$ et $b < \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) \leq \lambda V(x) + b \mathbb{1}_C(x). \quad (2.23)$$

Remarquons tout d'abord que $V(x) := \mathbb{E}_x[\lambda^{-\sigma_C}]$ est solution de la condition $PV = \lambda V$ sur C^c et V vérifie (2.23) dès que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\lambda^{-\sigma_C}] < \infty$. De plus, pour λ et C donnés, c'est la solution minimale de la condition (2.23).

En multipliant (2.23) par κ^{n+1} , il vient

$$\kappa^{n+1} PV(x) \leq \kappa^n V(x) - (\kappa^{-1} - \lambda) \kappa^{n+1} V(x) + b \kappa^{n+1} \mathbb{1}_C(x)$$

et en utilisant la Proposition 2.4 avec $V_n := \kappa^n V$, $r(n) := \kappa^n$, $b(n) := \kappa^n b \kappa$ et $f := (1 - \kappa \lambda) V$, il vient

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} \kappa^k V(\Phi_k) \right] \leq \{1 - \kappa \lambda\}^{-1} (V(x) + b \kappa \mathbb{1}_C(x)).$$

Puisque V et f sont équivalentes, il existe $c := c(\kappa) > 1$ tel que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} \kappa^k f(\Phi_k) \right] \leq c f(x).$$

Enfin, V est bornée sur C , donc f l'est aussi et le terme de gauche est uniformément majoré sur C .

Réciproquement, supposons qu'il existe $c > 1$ tel que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} \kappa^k f(\Phi_k) \right] \leq c f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \kappa^k f(\Phi_k) \right] < \infty. \quad (2.24)$$

Soit $V(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} \kappa^k f(\Phi_k) \right]$. Nous déduisons de (2.24) que V est bornée sur C . Rappelons que pour $x \in C^c$,

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta(\kappa^k) f(\Phi_k) \right] = V(x),$$

(Proposition 2.6) et (2.24) implique $\sup_C PV < \infty$. Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta(\kappa^k) f(\Phi_k) \right] &= \mathbb{1}_C(x) V(x) + \mathbb{1}_{C^c}(x) \left(\kappa^{-1} f(x) + (1 - \kappa^{-1}) V(x) \right) \\ &\geq \mathbb{1}_C(x) V(x) + \mathbb{1}_{C^c}(x) \left(\kappa^{-1} c^{-1} + (1 - \kappa^{-1}) \right) V(x) \end{aligned}$$

puisque $V \leq c f$, et donc pour $x \in C^c$,

$$PV(x) + \left(1 - \kappa^{-1} (1 - c^{-1}) \right) V(x) \leq V(x)$$

Enfin V et PV sont bornées sur C donc nous avons prouvé l'existence d'une fonction $V \geq 1$ mesurable, bornée sur C et équivalente à f et l'existence de constantes $0 < \lambda < \kappa^{-1}$ et $b < \infty$ telles que

$$PV(x) \leq \lambda V(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

Conclusion Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et une constante $\kappa > 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une solution à la condition de Foster-Lyapunov.
- (ii) Il existe $c > 1$ tel que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \kappa^k f(\Phi_k) \right] \leq c f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \kappa^k f(\Phi_k) \right] < \infty. \quad (2.25)$$

De plus, pour $0 < \lambda < 1$ et $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ donnés, $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau_C}] < \infty$ si et seulement si il existe $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, bornée sur C , et une constante $b < \infty$ telles que

$$PV \leq \lambda V + b \mathbb{1}_C. \quad (2.26)$$

En pratique, on établit la condition de drift (2.26) pour $0 < \lambda < 1$ et $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel que $\sup_C V < \infty$ et l'on en déduit (2.25) pour tout $1 < \kappa < \lambda^{-1}$ et $f(x) := V(x)$.

2.3.4 Condition de drift relativement à un ensemble petite

Nous verrons dans le Chapitre 3 que, pour certains taux r , la (f, r) -ergodicité d'un noyau ψ -irréductible apériodique est étroitement liée à l'existence d'un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ **petite** tel que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Dans ce cas, on peut affaiblir les conditions de Jarner-Roberts et Foster-Lyapunov en ne demandant pas que les solutions soient bornées sur C . En effet, soient P un noyau ψ -irréductible et $0 \leq \alpha \leq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, finie en un point x_0 , un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et des constantes $c > 0$ ($0 < c < 1$ si $\alpha = 1$), $b < \infty$ tels que

$$PV + cV^\alpha \leq V + b \mathbb{1}_C.$$

- (ii) il existe une fonction $V' : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et des constantes $c > 0$ ($0 < c < 1$ si $\alpha = 1$), $b < \infty$ tels que $\sup_C V' < \infty$ et

$$PV' + cV'^\alpha \leq V' + b \mathbb{1}_C.$$

Remarques (a) Lorsque $\alpha > 0$, on peut prendre $V = V'$.

(b) Sous la condition (ii), C est nécessairement accessible (Cf. Paragraphe 2.1.1).

Démonstration L'implication (ii) \Rightarrow (i) est triviale.

Réciproquement, $PV \leq V + b\mathbb{1}_C$ et $\{V < \infty\}$ est non vide, donc $\{V < \infty\}$ est absorbant et plein (Cf. Paragraphe 2.1.1) ; de plus, pour tout $l \geq 1$, les ensembles $\{V \leq l\}$ sont petites puisque la condition de drift implique $\sup_{x \in \{V \leq l\}} \mathbb{E}_x[\tau_C] \leq l + b$ (Cf. Paragraphe 2.1.3).

Supposons tout d'abord que $\alpha > 0$. Soit $0 < \beta < 1$ et $D := \{V^\alpha \leq b/(c(1 - \beta))\}$. On a

$$PV + \beta cV^\alpha \leq V \quad \text{sur } D^c$$

et donc $PV + \beta cV^\alpha \leq V + b\mathbb{1}_D$ et $\sup_D V < \infty$.

Considérons le cas $\alpha = 0$: remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que $c = 1$. Soit $D := \{V \leq l\}$, ensemble petite. D'après le Théorème 14.2.3. [72], il existe une constante $b_D < \infty$ telle que $\mathbb{E}_x[\tau_D] \leq V(x) + b_D$. Par suite, $U(x) := \mathbb{E}_x[\sigma_D] + 1$ est solution de $PU + 1 = U$ sur D^c , et pour $x \in D$, $PU(x) = \mathbb{E}_x[\tau_D] \leq l + b_D < \infty$. Donc U est solution de (ii).

Applications : Condition de Jarner-Roberts Soient une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, finie en un point x_0 , et une constante $0 < \delta < 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- Il existe un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et des constantes $c > 0, b < \infty$, tels que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV + cV^{1-\delta} \leq V + b\mathbb{1}_C.$$

- Il existe un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et des constantes $c > 0, b < \infty$, tels que

$$PV + cV^{1-\delta} \leq V + b\mathbb{1}_C.$$

Condition de Foster-Lyapunov Soient une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable et une constante $\kappa > 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et des constantes $0 < \lambda < \kappa^{-1}$ et $b < \infty$ tels que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV \leq \lambda V + b\mathbb{1}_C.$$

- il existe un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et des constantes $0 < \lambda < \kappa^{-1}$ et $b < \infty$ tels que

$$PV \leq \lambda V + b\mathbb{1}_C.$$

2.4 f -régularité

Nous aurons besoin, dans le Chapitre 3, de calculer le moment r^0 d'un temps d'arrêt (t.a.) τ' sachant que

- il existe un t.a. τ et un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel que $\Phi_\tau \in C$ et $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r(\tau)] < \infty$;
- $\inf_{x \in C} P_x(0 < \tau' \leq \tau) \geq \gamma > 0$.

Pour ce faire, nous devons restreindre notre étude aux taux $r \in \Lambda$ dits géométriques et sous-géométriques.

Nous appliquons ces résultats à l'étude de la f -régularité d'un ensemble C à la vitesse r i.e. l'existence, pour tout ensemble accessible B , d'un taux r tel que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

2.4.1 Taux géométriques et taux sous-géométriques

Les taux géométriques Λ_g

$$\Lambda_g := \{r = \{r(n)\} \in \Lambda, r(n) := \kappa^n, \text{ pour } \kappa > 1 \text{ et tout } n \geq 0\}.$$

On note $\bar{\Lambda}_g$ l'ensemble des suites $r \in \Lambda$ pour lesquelles il existe $c > 0$ et $r' \in \Lambda_g$ tels que $r'(n) = c r(n)$. Tous les résultats sont énoncés et démontrés pour $r \in \Lambda_g$ mais restent valables pour $r \in \bar{\Lambda}_g$.

Les taux sous-géométriques Λ_s

$$\Lambda_s := \left\{ r = \{r(n)\} \text{ positives croissantes telles que pour } n \geq 1, \text{ la suite } \{\log r(n)\}/n \text{ tend en décroissant vers } 0 \right\}.$$

On note $\bar{\Lambda}_s$ l'ensemble des suites $r \in \Lambda$ pour lesquelles il existe des constantes $0 < c_1 < c_2 < \infty$ et $r' \in \Lambda_s$ telles que $0 < c_1 r(n) \leq r'(n) \leq c_2 r(n) < \infty$. $\bar{\Lambda}_s$ contient les suites constantes, les suites à croissance polynomiale, et plus généralement les suites $r(n) := 1 \vee (n+1)^k \log^\alpha(n+1)$, k et α réels positifs, et les suites de la forme $r(n) := 1 \vee (n+1)^k \log^\alpha(n+1) \exp(\beta n^\gamma)$ avec $0 < \gamma < 1$ et $\beta > 0$.

Tous les résultats sont énoncés et démontrés pour $r \in \Lambda_s$ mais restent valables pour $r \in \bar{\Lambda}_s$.

Propriétés des suites sous-géométriques $r \in \Lambda_s$

- (i) $r(n+m) \leq r(n)r(m)$ pour tout $n+m \geq 0$ donc $\Lambda_s \subset \Lambda$.
- (ii) $\lim_n r(n)/r^0(n) = 0$.
- (iii) pour tout $\epsilon > 0$ et $n_0 \geq 0$,

$$r(n+m) \leq (1+\epsilon)r(m) + c \quad n \leq n_0, m \geq 0,$$

où $c := r(m_0 + n_0)$ et $m_0 := \inf\{m \geq 0, \{\log r(m)\}/m \leq \{\log(1+\epsilon)\}/n_0\}$.

En effet, il existe une suite $\{u_n\}$ telle que pour $n \geq 1$, $u_n \downarrow 0$ et $r(n) = \exp n u_n$. Donc si $n, m \geq 1$,

$$r(n+m) = \exp(n u_{n+m}) \exp(m u_{n+m}) \leq \exp(n u_n) \exp(m u_m) = r(n)r(m);$$

si $n = 0$, $r(n+m) = r(m) \leq r(0)r(m) = r(n)r(m)$. Ce qui établit $\Lambda_s \subset \Lambda$.

De plus, puisque $\{u_n\}$ est décroissante et tend vers zéro,

$$\log \left(1 + \frac{\Delta r(n+1)}{r(n)} \right) = \log \frac{r(n+1)}{r(n)} = n(u_{n+1} - u_n) + u_{n+1} \leq u_{n+1}$$

et $\Delta r(n+1)/r(n)$ tend vers zéro. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $\Delta r(n) \leq \epsilon r(n)$, donc $\sum_{k=N_0+1}^n \Delta r(k) \leq \epsilon \sum_{k=N_0+1}^n r(k)$. Par suite, pour tout $n \geq N_0$, $r(n)/r^0(n) \leq \epsilon + r(N_0)/r^0(n)$. Enfin, $\lim_n r^0(n) \geq \lim_n \sum_{k=0}^n r(0) = +\infty$, ce qui établit (ii).

Puisque $\{\log r(n+m)\}/(n+m) \leq \{\log r(n)\}/n$, il vient

$$\frac{\log r(n+m) - \log r(n)}{m} \leq \frac{\log r(n)}{n}.$$

Si $m \geq m_0$, $\{\log r(n_0+m) - \log r(m)\}/n_0 \leq \log r(m)/m \leq \log(1+\epsilon)/n_0$ donc pour $n \leq n_0$, $r(n+m) \leq r(n_0+m) \leq (1+\epsilon)r(m)$; si $m \leq m_0$, $r(n_0+m) \leq c$ et la propriété (iii) est démontrée.

2.4.2 Lemme

Le Lemme 2.9 a été établi par Nummelin et Tuominen pour les taux sous-géométriques $r \in \Lambda_s$ (Lemme 3.1. [84]). La preuve utilise des propriétés de ces suites qui ne sont plus valables pour les suites géométriques, à savoir les propriétés (2) et (3) mentionnées ci-dessus. Nous rappelons les étapes de la démonstration en Annexe A.1 et proposons une démonstration pour les taux géométriques.

Lemme 2.9 *Soit τ un temps d'arrêt \mathcal{F}_n -adapté. On note $S := \{x \in \mathcal{X}, P_x(\tau < \infty) = 1\}$. Soit $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel que $S \supset C$ et $\phi_\tau \in C$ P_x -p.s. pour tout $x \in S$. On note $\{\tau^n\}$ la suite des itérés de τ*

$$\tau^0 := 0 \quad \tau^1 := \tau \quad \tau^n := \tau^{n-1} + \tau \circ \theta^{\tau^{n-1}}, n \geq 1$$

où θ désigne l'opérateur de translation. Soit $\{u_n\}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$, \mathcal{H}_n -adaptée où $\mathcal{H}_n := \sigma(\Phi_0, \dots, \Phi_{\tau^n})$, et telle que pour tout $x \in \mathcal{X}$, $n \geq 2$, $P_x(u_n = 1 | \mathcal{F}_{\tau^{n-1}}) \geq \gamma > 0$. On définit

$$\eta := \inf\{n \geq 1, u_n = 1\}.$$

(i) Si $r \in \Lambda_s$, il existe $R^3 < \infty$ telle que pour tout $x \in S$,

$$\mathbb{E}_x[r^0(\tau^\eta)] \leq R \mathbb{E}_x[r^0(\tau)],$$

³Plus précisément, soit ϵ tel que $(1+\epsilon)(1-\gamma) + \epsilon =: \rho < 1$. Soient n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$, $r(n) \leq \epsilon r^0(n)$ et c_ϵ tel que $r(n+m) \leq (1+\epsilon)r(m) + c_\epsilon$ pour $m \geq 0$ et $n \leq n_\epsilon$. Enfin, soit $M := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^0(\tau)]$. Alors

$$\mathbb{E}_x[r^0(\tau^\eta)] \leq \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}_x[r^0(\tau)] + \frac{M}{1-\rho} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \left[\mathbb{E}_x[r(\tau)] + c_\epsilon \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right].$$

et pour tout $x \in S$,

$$\mathbb{E}_x[r(\tau^\eta)] \leq \mathbb{E}_x[r(\tau)] \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r(\tau^\eta)]$$

(ii) Soit $0 < \lambda < 1$ tel que $M := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau}] < \infty$.
Pour tout $1 - \gamma < \rho < 1$ et $1 < \kappa < \rho^{\ln \lambda / \{2 \ln M\}}$,

$$\mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^\eta}] \leq \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau}]^{-\ln \kappa / \ln \lambda} + M^{-\ln \kappa / \ln \lambda} \left\{ \frac{\rho^{-2}}{1 - \rho^{-1}(1 - \gamma)} + \frac{\rho^2 \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau}]^{-2 \ln \kappa / \ln \lambda}}{1 - \rho M^{-2 \ln \kappa / \ln \lambda}} \right\} \quad (2.27)$$

Si $P_x(u_n = 1 | \mathcal{F}_{\tau^n}) \geq \gamma > 0$,

$$\mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^\eta}] \leq \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau}]^{-\ln \kappa / \ln \lambda} \frac{1}{1 - (1 - \gamma)M^{-\ln \kappa / \ln \lambda}},$$

pour tout $1 < \kappa < \lambda^{\ln(1-\gamma)/\ln M}$.

2.4.3 Application à l'étude de la f -régularité d'un ensemble petite

P est ψ -irréductible. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable.

Définitions Un ensemble C est dit f -géométriquement régulier si pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, il existe $\kappa > 1$ tel que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} \kappa^k f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Lorsque r est un taux sous-géométrique, on dit que C est (f, r) -régulier si pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$,

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Remarquons que tout ensemble f -régulier (à un taux géométrique ou sous-géométrique) est petite puisque il existe un ensemble petite accessible B tel que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_B] < \infty$ (Paragraphe 2.1.3).

Moment du temps de retour à un ensemble accessible Soient un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et un ensemble $B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$. Supposons que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^0(\tau_C)] < \infty$ pour un taux $r \in \Lambda_s \cup \Lambda_g$.

On peut supposer que C est ν_a -petite pour une mesure d'irréductibilité maximale ν_a (Proposition 5.5.5. [72]) ; comme B est accessible, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sum_k a(k) P^k(x, B) \geq \epsilon$ pour tout $x \in C$.

Puisque $P_x(\tau_B < \infty) \geq P_x(\Phi_A \in B)$ où A est une v.a. de loi $a = \{a(n)\}$, il vient que pour tout $x \in C$, $P_x(\tau_B < \infty) \geq \epsilon$. Par suite, pour tout $x \in C$, $\lim_n \uparrow P_x(\tau_B \leq n) \geq \epsilon$ et il existe des constantes $m \geq 1$ et $\gamma > 0$ telles que $P_x(\tau_B \leq m) \geq \gamma$, $x \in C$.

Soit $\tau := m + \sigma_C \circ \theta^m$,

$$\mathbb{E}_x[r^0(\tau)] \leq r^0(m) + r(m)\mathbb{E}_x[r^0(\sigma_C \circ \theta^m)].$$

Or, puisque $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^0(\tau_C)] < \infty$, il existe une solution à la condition de drift D2[1, r , C], notée $\{V_n\}$, et

$$\mathbb{E}_x[r^0(\tau)] \leq r^0(m) + r(m)P^m V_m(x).$$

Puisque $P^m V_m \leq V_0 + \sum_{k=0}^{m-1} b(k) \mathbb{1}_C$, alors $\sup_C P^m V_m < \infty$ et donc $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^0(\tau)] < \infty$: par suite, τ est fini P_x -p.s. pour tout $x \in C$ i.e. $S \supset C$. On pose

$$u_n := 1 \text{ si il existe } 1 \leq k \leq m \text{ } \Phi_{\tau^{n-1}+k} \in B, \quad u_n := 0 \text{ sinon}$$

et l'on a pour tout $n \geq 2$, $P_x(u_n = 1 | \mathcal{H}_{n-1}) \geq P_{\Phi_{\tau^{n-1}}}(\tau_B \leq m) \geq \gamma$. On peut donc appliquer le Lemme précédent et il vient que,

- Si $r \in \Lambda_s$, il existe $R < \infty$ telle que $\mathbb{E}_x[r^0(\tau_B)] \leq R \mathbb{E}_x[r^0(\tau_C)]$ pour tout $x \in S$.
- Si $r(n) := \lambda^{-n}$, il existe $R < \infty$ et $1 < \kappa \leq \lambda^{-1}$ tel que $\mathbb{E}_x[\kappa^{\tau_B}] \leq R \mathbb{E}_x[\lambda^{-\tau_C}]^{-2 \ln \kappa / \ln \lambda}$ pour tout $x \in S$.

Caractérisation de la f -régularité d'un ensemble accessible

Proposition 2.10 Soient P un noyau ψ -irréductible, $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable et $r \in \Lambda_s$ (resp. Λ_g). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ est petite et $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty$.
- (ii) $C \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$ est (f, r) -régulier (resp. f -géométriquement régulier).

Cette propriété est énoncée par Tuominen et Tweedie (Proposition 2.1. [117]) dans le cas sous-géométrique et Meyn et Tweedie (Théorème 15.2.1 [72]) dans le cas géométrique. L'implication (ii) \Rightarrow (i) est triviale. L'implication réciproque se déduit du Théorème 2.8 et de la Proposition 2.4 qui expriment

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} r(k) f(\Phi_k) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x[r^0(\tau_B)] \tag{2.28}$$

puis du Lemme 2.9.

2.4.4 Points (f, r, C) -réguliers et mesures (f, r, C) -régulières

Soient une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et une suite $r \in \Lambda_s \cup \Lambda_g$ tels que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty. \tag{2.29}$$

Définitions On appelle ensemble des points (f, r, C) -réguliers, l'ensemble $S(f, r, C)$ défini par

$$S(f, r, C) := \left\{ x \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty \right\}.$$

On appelle ensemble des mesures (f, r, C) -régulières, l'ensemble $\mathcal{M}(f, r, C)$ défini par

$$\mathcal{M}(f, r, C) := \left\{ \lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}), \mathbb{E}_\lambda \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty \right\}.$$

Nous verrons l'importance de ces ensembles dans le Chapitre 3 : il est en effet établi que si P , ψ -irréductible apériodique, possède un ensemble C petite vérifiant (2.29), alors

$$\lim_n r(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0, \quad x \in S(f, r, C),$$

et

$$\lim_n r^0(n) \int \lambda(dx) \lambda'(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f = 0, \quad (\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}(f, r, C) \times \mathcal{M}(f, r, C).$$

Propriétés de $S(f, r, C)$ En utilisant le Théorème 2.5, il vient que si V est solution de D1 $[f, r, C]$ alors

$$\{V < \infty\} \subset S(f, r, C) \subset \{f < \infty\},$$

et si V_0 est solution de D2 $[f, r, C]$

$$\{V_0 < \infty\} \subset S(f, r, C) \subset \{f < \infty\}.$$

En particulier, si pour f , C et $\kappa > 1$ on établit la condition de Foster-Lyapunov, rappelée au Paragraphe 2.3.3, la fonction

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \kappa^k f(\Phi_k) \right]$$

est solution de D1 $[f, \{\kappa^n\}, C]$ et $V \leq cf$, $c > 1$ (Cf. Paragraphe 2.3.3). Par suite, $\{V < \infty\} \supset \{f < \infty\}$ et

$$S(f, \{\kappa^n\}, C) = \{f < \infty\}.$$

Enfin, $S(f, r, C)$ est absorbant et plein : en effet $C \subset S(f, r, C)$ et l'inégalité

$$\int_{C^c} P(x, dy) \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] + f(x) \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right]$$

montre que l'ensemble est absorbant ; puisque P est ψ -irréductible, il est aussi plein.

Régularité de la mesure invariante π Soit P un noyau ψ -irréductible, apériodique. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et une suite r positive croissante, $r(0) := 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty$.
- (ii) C est accessible, P possède une mesure de probabilité invariante π et

$$\mathbb{E}_\pi \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

L'implication (i) \Rightarrow (ii) résulte du fait que si il existe une ensemble petite C et une fonction $g \geq 1$ mesurable tels que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} g(\Phi_k) \right] < \infty$ alors π existe et $\pi(g) < \infty$. On déduit l'implication réciproque du fait que si $\pi(g) < \infty$, il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables $\{C_n\}$ dont l'union est un ensemble plein et tels que $\sup_{x \in C_n} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} g(\Phi_k) \right] < \infty$, pour tout B accessible. (Théorème 14.0.1 [72]).

Lien avec les points (f, r) -réguliers (resp. mesures (f, r) -régulières) définis par Tuominen et Tweedie Soit $r \in \Lambda_s$. Tuominen et Tweedie définissent l'ensemble $S(f, r)$ des points (f, r) -réguliers

$$S(f, r) := \left\{ x \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty, \quad \forall B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \right\},$$

et appellent mesure (f, r) -régulière toute mesure $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telle que pour tout $B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$,

$$\mathbb{E}_\lambda \left[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Puisque C vérifie (2.29), C est accessible donc $S(f, r) \subset S(f, r, C)$. L'inclusion réciproque se déduit de la Proposition 2.10. En conséquence, $S(f, r) = S(f, r, C)$. De même, on montre que $\mathcal{M}(f, rg, C)$ est l'ensemble des mesures (f, r) -régulières.

Chapitre 3

(f, r) -ergodicité par la méthode de scission

Dans ce chapitre, r désigne une suite sous-géométrique $r \in \Lambda_s$ ou une suite géométrique $r \in \Lambda_g$. Nous montrons que la (f, r) -ergodicité d'un noyau ψ -irréductible et apériodique se déduit de l'existence d'un moment (f, r) -pondéré du temps de retour à un ensemble petite C , uniformément borné sur C . Nous proposons trois autres caractérisations équivalentes impliquant la (f, r) -ergodicité, en termes **(i)** de deux conditions de drift et **(ii)** de (f, r) -régularité d'un ensemble accessible.

Les résultats de ce chapitre reprennent ou complètent ceux existant dans la littérature (dus principalement à Tuominen et Tweedie pour le cas sous-géométrique et Meyn et Tweedie pour le cas géométrique) : nous mettons en évidence la similarité des conditions proposées (et donc des résultats) pour ces deux familles de taux.

3.1 Résultats

3.1.1 Condition suffisante de (f, r) -ergodicité

Théorème 3.1 *Soit P un noyau ψ -irréductible et apériodique. Soient une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et une suite $r := \{r(n)\} \in \Lambda_s \cup \Lambda_g$ tels que*

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty. \quad (3.1)$$

(i) Si $r \in \Lambda_s$,

$$\lim_n r(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0, \quad x \in S(f, r, C), \quad (3.2)$$

et il existe $R < \infty$

$$r(n)\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq R \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k)f(\Phi_k) \right], \quad x \in S(f, r, C). \quad (3.3)$$

Si de plus $\Delta r \in \Lambda_s$, il existe $R < \infty$ telle que

$$\sum_n \Delta r(n)\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq R \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \Delta r(k)f(\Phi_k) \right], \quad x \in S(f, \Delta r, C). \quad (3.4)$$

(ii) Si $r \in \Lambda_g$, il existe $r' \in \Lambda_g$, $r' \leq r$ et une constante $R < \infty$, telles que

$$\sum_n \Delta r'(n)\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq R \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \Delta r(k)f(\Phi_k) \right], \quad x \in S(f, \Delta r, C). \quad (3.5)$$

En conséquence, pour toute mesure $\lambda \in \mathcal{M}(f, \Delta r, C)$, nous avons

$$\sum_n \Delta R'(n) \int \lambda(dx) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq R \mathbb{E}_\lambda \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \Delta R'(k)f(\Phi_k) \right],$$

où $R' = r$ si $r \in \Lambda_s$ et $R' = r'$ si $r \in \Lambda_g$. En particulier, $\pi \in \mathcal{M}(f, \Delta r, C)$ puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \Delta r(k)f(\Phi_k) \right] &= \int_C \pi(dy) \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\tau_C-1} \Delta r(l)f(\Phi_l) \right] \right] \\ &\leq \pi(C) \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k)f(\Phi_k) \right]. \end{aligned}$$

(3.2) est due à Tuominen et Tweedie (Théorème 2.1. [117]). (3.4) complète le Théorème 4.3 [117] qui, sous les mêmes hypothèses, établit simplement que la somme est finie. Pitman [87], Nummelin [82] et Cellier [18] ont étudié l'ergodicité sous-géométrique en norme de variation totale et ont obtenu des résultats similaires à ceux de Tuominen et Tweedie.

Si, pour C petite et $f \geq 1$, la condition de drift de Foster-Lyapunov est établie (Paragraphe 2.3.3), Meyn et Tweedie prouvent l'existence de constantes $\kappa > 1$ et $R < \infty$ telles que

$$\sum_n \kappa^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq R f(x),$$

pour tout x appartenant à l'ensemble plein et absorbant $\{f < \infty\}$ (Théorème 15.0.1. [72]). Nous avons montré que dans ce cas, (3.1) est vérifiée pour une suite géométrique et qu'il existe une constante $1 < c < \infty$ telle que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k)f(\Phi_k) \right] \leq c f(x)$$

(Cf. Paragraphe 2.3.3) : (3.5) est donc similaire au résultat de Meyn et Tweedie (Théorème 15.0.1. [72]), résultat qui complète celui de Nummelin et Tuominen [83] consacré à l'ergodicité géométrique en norme de variation totale.

3.1.2 Vitesse de convergence de $\lambda P^n - \mu P^n$

Théorème 3.2 *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 3.1, pour toutes mesures $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}(f, r, C) \times \mathcal{M}(f, r, C)$*

(i) Si $r \in \Lambda_s$, il existe $R < \infty$

$$\sum_n r(n) \int \lambda(dx) \mu(dy) \|P^n(x, \cdot) - P^n(y, \cdot)\|_f \leq R \left\{ \mathbb{E}_\lambda \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] \right\}. \quad (3.6)$$

(ii) Si $r \in \Lambda_g$, il existe $r' \leq r$, $r' \in \Lambda_g$, et une constante $R < \infty$ telle que

$$\sum_n r'(n) \int \lambda(dx) \mu(dy) \|P^n(x, \cdot) - P^n(y, \cdot)\|_f \leq R \left\{ \mathbb{E}_\lambda \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_\mu \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] \right\}. \quad (3.7)$$

(3.6) complète le Théorème 4.2. [117] qui établit simplement que la somme est finie. (3.7) se déduit de (3.5) en utilisant l'inégalité triangulaire. Lorsque $r \in \Lambda_s$, Nummelin et Tuominen [83] ont montré que lorsque $f = 1$, on obtient aussi

$$\lim_n r^0(n) \int \lambda(dx) \mu(dy) \|P^n(x, \cdot) - P^n(y, \cdot)\|_f = 0.$$

Les paragraphes 3.2 à 3.5 sont consacrés à la démonstration de (3.3) (3.4) et (3.5) et du Théorème 3.2. Nous montrons tout d'abord que l'on peut supposer que la chaîne est ψ -irréductible apériodique et vérifie (3.1) pour un ensemble ν_1 -small ; puis que la chaîne est ψ -irréductible apériodique et vérifie (3.1) pour un atome α . La convergence de $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f$ s'exprime alors en termes de convergence d'un processus de renouvellement de loi initiale $\{P_x(\tau_\alpha = n)\}$ et de loi d'inter-arrivée $\{P_\alpha(\tau_\alpha = n)\}$, vers le processus stationnaire associé. Lorsque $r \in \Lambda_g$, notre approche diffère de celle de Meyn et Tweedie dans la façon de lier la décroissance de la loi du processus d'inter-arrivée dans les queues (dans ce cas, géométrique), à la vitesse de convergence du processus retardé vers le processus stationnaire. Ils utilisent en effet le théorème de Kendall (Théorème 15.1.1.[72]) lié à des résultats sur les séries entières et uniquement adapté au cas géométrique là où nous invoquons un argument probabiliste de couplage de processus de renouvellement (nous suivons en cela la technique que Tuominen et Tweedie adoptent pour étudier le cas sous-géométrique $r \in \Lambda_s$).

Lorsque $r \in \Lambda_g$, on ne garantit pas (3.5) et (3.7) avec $r' = r$, contrairement au cas sous-géométrique. Cela résulte de l'application du Lemme 2.9 que nous utiliserons **(i)** pour majorer un moment $r' \leq r$ du temps de retour à C du m -squelette, $\mathbb{E}_x[r'(\tau_C^{(m)})]$ en fonction du même moment du temps de retour à C de la chaîne initiale $\mathbb{E}_x[r(\tau_C)]$; **(ii)** pour majorer un moment $r' \leq r$ du temps de retour à l'atome de la chaîne atomique $\mathbb{E}_x[r'(\tau_\alpha)]$ en fonction de $\mathbb{E}_x[r(\tau_C)]$;

(iii) pour calculer le moment géométrique du temps de couplage de deux processus de renouvellement de même loi d'incrément $\{P_\alpha(\tau_\alpha = n)\}$, lorsque la loi initiale du premier est la loi de retard $\{P_x(\tau_\alpha = n)\}$ et celle du second est la loi stationnaire.

3.1.3 Autres conditions suffisantes de (f, r) -ergodicité

Théorème 3.3 *Soit P un noyau ψ -irréductible et apériodique. Soient une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et une suite $r \in \Lambda_s$ (resp. Λ_g). Les conditions suivantes sont équivalentes*

$$(i) \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

(ii) il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable, $V \geq f$, et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] \leq V(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

(iii) il existe une famille de fonctions mesurables $\{V_n\}$, $V_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, $V_n \geq r(n)f$, et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V_0 < \infty$,

$$\begin{aligned} \{V_1 < \infty\} &\subset \{V_0 < \infty\} \\ PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) &\leq V_n(x) + br(n)\mathbb{1}_C(x). \end{aligned}$$

(iv) C est (f, r) -régulier (resp. f -géométriquement régulier).

Si V (resp. V_0) est solution de (ii) (resp. (iii)), il existe $R < \infty$ telle que pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] \leq RV(x) \quad \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] \leq RV_0(x).$$

Enfin, $S(f, r, C)$ et $S(f, \Delta r, C)$ sont des ensembles pleins et absorbants, contiennent $\{V_0 < \infty\}$ et $\{V < \infty\}$ et sont contenus dans $\{f < \infty\}$.

Lorsque $r \in \Lambda_s$, l'équivalence des conditions (i), (iii) et (iv) a été établie par Tuominen et Tweedie (Proposition 2.1. [117]). La caractérisation par le drift probabiliste (ii) est donc nouvelle.

Lorsque $r \in \Lambda_g$, nous avons montré (Paragraphe 2.3.3) comment la condition (i) (resp. (ii)) est liée à la condition (ii) (resp. (iii)) du Théorème 15.0.1. de Meyn et Tweedie [72] rappelé en Annexe A.1.2.

Enfin, la dernière partie du théorème reprend des résultats remarqués par Tuominen et Tweedie et Meyn et Tweedie, en les reformulant sous une forme compatible avec les deux familles de taux.

3.2 D'un ensemble petite à un ensemble ν_1 -small

Puisque P est ψ -irréductible et apériodique, tout ensemble petite est ν_m -small pour $m \geq 1$ (Proposition 5.5.7 [72]) et le m -squelette P^m est encore ψ -irréductible et apériodique (Proposition 5.4.5. [72]). Donc il existe $m \geq 1$ tel que C soit ν_1 -small pour P^m ; puisqu'il est accessible, $\nu_1(C) > 0$ (Proposition 5.5.5 et Théorème 5.5.7. [72]). On note

$$\tau_C^{(m)} := \inf\{n \geq 1, \Phi_{mn} \in C\}$$

le temps de retour à C de la chaîne de noyau P^m ; on définit la fonction mesurable $f^{(m)} : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$,

$$f^{(m)}(x) := \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P^k f(x)$$

et la suite $r_m \in \Lambda_s$ (resp. Λ_g) si $r \in \Lambda_s$ (resp. Λ_g),

$$r_m(n) := r(mn).$$

Pour toute suite $r \in \Lambda_s \cup \Lambda_g$, nous avons

$$\begin{cases} r(n) \|P^n(x, \cdot) - P^n(y, \cdot)\|_f \leq r(m)r_m(n) \|P^{km}(x, \cdot) - P^{km}(y, \cdot)\|_{f^{(m)}} \\ \Delta r(n) \|P^n(x, \cdot) - P^n(y, \cdot)\|_f \leq \Delta r_m(k) \|P^{km}(x, \cdot) - P^{km}(y, \cdot)\|_{f^{(m)}} \end{cases} \quad (3.8)$$

où $n =: km + i$, $0 \leq i \leq m - 1$. Enfin, nous établissons en Annexe B.4 la

Proposition 3.4 *Soit P ψ -irréductible et apériodique. Soient une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite et une suite $r \in \Lambda_s$ (resp. $r \in \Lambda_g$) tels que*

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Il existe une constante $c < \infty$ telle que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C^{(m)} - 1} r'_m(k) f^{(m)}(\Phi_{km}) \right] \leq c \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right], \quad x \in S(f, r, C),$$

où $r' = r$ (resp. $r' \leq r$ pour $r' \in \Lambda_g$).

Nous déduisons de (3.8) et de la Proposition 3.4 que l'on peut démontrer (3.4), (3.5) et (3.6) en supposant que P ψ -irréductible apériodique vérifie (3.1) pour un ensemble C ν_1 -small et $\nu_1(C) > 0$.

3.3 D'un ensemble ν_1 -small à un atome

C est ν_1 -small accessible : il existe une constante $\epsilon > 0$ et une mesure $\nu_1 \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que $\nu_1(C) > 0$ et

$$\forall x \in C, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad P(x, A) \geq \epsilon \nu_1(A).$$

Nous posons (sans restriction) $\nu_1(C) = 1$.

3.3.1 Construction de la chaîne atomique

Nous construisons une chaîne de Markov $Z = (\check{\Omega}, \check{\mathcal{A}}, \check{P}_{(x,d)}, \{Z_n = (X_n, d_n)\})$ bifurquée à valeurs dans $\check{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \times \{0, 1\}$, muni de $\mathcal{B}(\check{\mathcal{X}})$, la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme $A \times \{i\}$, $i = 0, 1$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. À toute mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, on associe une mesure λ^* sur $\mathcal{B}(\check{\mathcal{X}})$ et réciproquement, en posant

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \times \{0\}) &:= (1 - \epsilon)\lambda(A \cap C) + \lambda(A \cap C^c) \\ \lambda^*(A \times \{1\}) &:= \epsilon\lambda(A \cap C).\end{aligned}$$

On trouvera une construction rigoureuse (définition du noyau de transition \check{P} de Z) dans [72], Chapitre 5. Nous nous contentons ici de donner une construction algorithmique : soit λ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$; on simule $Z_0 \sim \lambda^*$ i.e. $X_0 \sim \lambda$ et si $X_0 \in C^c$, $d_0 := 0$, sinon d_0 est une v.a. de Bernoulli de paramètre ϵ , $B(\epsilon)$. On procède comme suit

- Si $z_n := (x_n, d_n) \in C \times \{0\}$,
- $X_{n+1} \sim R(x_n, \cdot) := (1 - \epsilon)^{-1}(P(x_n, \cdot) - \epsilon\nu_1(\cdot))$.
- si $X_{n+1} \in C^c$, $d_{n+1} := 0$; sinon $d_{n+1} \sim B(\epsilon)$.
- Si $z_n := (x_n, d_n) \in C^c \times \{0\}$,
- $X_{n+1} \sim P(x_n, \cdot)$.
- d_{n+1} est construit comme précédemment.
- Si $z_n := (x_n, d_n) \in C \times \{1\}$,
- $X_{n+1} \sim \nu_1(\cdot)$ (nécessairement $X_{n+1} \in C$).
- $d_{n+1} \sim B(\epsilon)$.

Pour toute fonction mesurable positive f , et $x \in \mathcal{X}$, on note

$$\check{\mathbb{E}}_x[f] := \left(\delta_x\right)^* \left(\check{\mathbb{E}}_{(x,d)}[f]\right) = \int_{\check{\mathcal{X}}} (\delta_x)^*(dz) \check{\mathbb{E}}_z[f].$$

3.3.2 Propriétés

P est ψ -irréductible et apériodique et C est accessible donc \check{P} est ν_1^* -irréductible et apériodique et possède un atome accessible α

$$\alpha := C \times \{1\},$$

(Théorème 5.1.3. [72]). De plus, pour toute fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ mesurable telle que $\pi(f) < \infty$

$$\left| P^n f(x) - \pi(f) \right| = \left| \left(\delta_x \right)^* \left(\check{P}^n \check{f} \right) - \pi^*(f) \right| \quad n \geq 1, x \in \mathcal{X}$$

où $\check{f} : \check{\mathcal{X}} \rightarrow [1, \infty]$ est définie par $\check{f}((x, d)) := f(x)$. Donc

$$\| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_f = \| \delta_x^*(\check{P}^n) - \pi^* \|_{\check{f}}. \quad (3.9)$$

Enfin, on établit en Annexe B.5 la

Proposition 3.5 *Soit P ψ -irréductible et apériodique. Soient une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ν_1 -small et une suite $r \in \Lambda_s$ (resp. $r \in \Lambda_g$) tels que*

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Il existe une constante $c < \infty$ telle que

$$\check{\mathbb{E}}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_\alpha - 1} r'(k) f(X_k) \right] \leq c \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r'(k) f(\Phi_k) \right], \quad x \in S(f, r, C),$$

où $r' = r$ (resp. $r' \leq r$ pour $r' \in \Lambda_g$).

Nous déduisons de (3.9) et de la Proposition 3.5 que l'on peut démontrer (3.4), (3.5) et (3.6) en supposant que P ψ -irréductible apériodique vérifie (3.1) pour un atome α .

3.4 De l'ergodicité d'une chaîne atomique à l'ergodicité d'un processus de renouvellement

3.4.1 Décomposition premier passage-dernier passage

Nous réécrivons $P^n(x, A)$ en distinguant le premier et dernier passage (avant n) dans l'atome α ; nous obtenons,

$$\begin{aligned} P^n(x, A) &= {}_\alpha P^n(x, A) + \sum_{j=1}^{n-1} \int_\alpha {}_\alpha P^{n-j}(z, A) \sum_{k=1}^j \int_\alpha {}_\alpha P^k(x, dy) P^{j-k}(y, dz) \\ &= {}_\alpha P^n(x, A) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j {}_\alpha P^k(x, \alpha) P^{j-k}(\alpha, \alpha) {}_\alpha P^{n-j}(\alpha, A) \end{aligned} \quad (3.10)$$

où ${}_\alpha P$ désigne la probabilité Taboo *i.e.*

$${}_\alpha P^n(x, A) := P_x \left(\Phi_1 \notin \alpha, \dots, \Phi_{n-1} \notin \alpha, \Phi_n \in A \right) \quad n \geq 1, x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

On pose

$$a_x(n) := P_x(\tau_\alpha = n), \quad u(n) := P_\alpha(\Phi_n \in \alpha),$$

avec la convention $a_x(0) := 0$ et $u(0) := 0$, et pour une fonction mesurable positive f ,

$$t_f(n) := \mathbb{E}_\alpha \left[f(\Phi_n) \mathbb{1}_{\tau_\alpha \geq n} \right] = \int_{-\infty}^n P^n(\alpha, dy) f(y) \quad t_f(0) := 0.$$

On note $a * b$ la convolution de deux suites $a := \{a(n)\}$, $b := \{b(n)\}$

$$a * b(n) := \sum_{k=0}^n a(k)b(n-k).$$

Avec ces notations, nous avons,

$$\begin{aligned} P^n f(x) &= {}_\alpha P^n f(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j a_x(k) u(j-k) t_f(n-j) \\ &= {}_\alpha P^n f(x) + \sum_{j=1}^{n-1} a_x * u(j) t_f(n-j) \\ &= {}_\alpha P^n f(x) + a_x * u * t_f(n). \end{aligned}$$

D'autre part, la mesure invariante vérifie l'égalité

$$\pi(B) = \int_A \pi(dy) \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=1}^{\tau_A} \mathbb{1}_B(\Phi_k) \right], \quad A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

(Théorème 10.0.1 [72]) donc nous écrivons $\pi(f)$ sous la forme

$$\pi(f) = \int_\alpha \pi(dy) \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=1}^{\tau_\alpha} f(\Phi_k) \right] = \pi(\alpha) \mathbb{E}_\alpha \left[\sum_{k=1}^{\tau_\alpha} f(\Phi_k) \right] = \pi(\alpha) \sum_{n \geq 1} t_f(n). \quad (3.11)$$

3.4.2 Démonstration du Théorème 3.1

Nous déduisons de (3.10) et (3.11)

$$\begin{aligned} P^n f(x) - \pi(f) &= {}_\alpha P^n f(x) + a_x * u * t_f(n) - \pi(\alpha) \sum_{k=1}^n t_f(k) - \pi(\alpha) \sum_{k \geq n+1} t_f(k) \\ &= {}_\alpha P^n f(x) + (a_x * u - \pi(\alpha)) * t_f(n) - \pi(\alpha) \sum_{k \geq n+1} t_f(k) \\ |P^n f(x) - \pi(f)| &\leq {}_\alpha P^n f(x) + |a_x * u - \pi(\alpha)| * t_f(n) + \pi(\alpha) \sum_{k \geq n+1} t_f(k). \end{aligned}$$

Pour toute suite $r \in \Lambda_s \cup \Lambda_g$,

$$\begin{aligned} \sum_n \Delta r(n) |P^n f(x) - \pi(f)| &\leq \sum_n \Delta r(n) {}_\alpha P^n f(x) + \sum_n \Delta r(n) |a_x * u - \pi(\alpha)| * t_f(n) \\ &\quad + \pi(\alpha) \sum_n \Delta r(n) \sum_{k \geq n+1} t_f(k). \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_n \Delta r(n) {}_\alpha P^n f(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_\alpha} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right]$$

et

$$\pi(\alpha) \sum_n \Delta r(n) \sum_{k \geq n+1} t_f(k) = \pi(\alpha) \sum_n r(n) t_f(n) = \pi(\alpha) \mathbb{E}_\alpha \left[\sum_{k=1}^{\tau_\alpha} r(n) f(\Phi_n) \right].$$

De plus, puisque $\Delta r \in \Lambda_s \cup \Lambda_g$, $\Delta r(n+m) \leq \Delta r(n) \Delta r(m)$ et

$$\begin{aligned} \sum_n \Delta r(n) |a_x * u - \pi(\alpha)| * t_f(n) &\leq \sum_{n \geq 1} \Delta r(n) t_f(n) \sum_{n \geq 1} \Delta r(n) |a_x * u - \pi(\alpha)|(n) \\ &\leq c \sum_{n \geq 1} \Delta r(n) |a_x * u - \pi(\alpha)|(n). \end{aligned}$$

Observons que si $S := \{S_n\}$ est un processus de renouvellement de loi de retard $a_x := \{a_x(n)\}$ et de loi d'inter-arrivée $p := \{P_\alpha(\tau_\alpha = n)\}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_{a_x})$, $a_x * u(n)$ s'interprète comme la probabilité que n soit un point de renouvellement *i.e.*

$$a_x * u(n) = P_{a_x}(S_j = n, j \geq 0).$$

Or, si p est apériodique de moyenne finie $\mu := \sum_n np(n)$, le processus S est ergodique et $\lim_n a_x * u(n) = \mu^{-1}$. Dans le cas présent, l'apériodicité de p résulte de l'apériodicité de la chaîne et par définition de p , $\mu = \mathbb{E}_\alpha[\tau_\alpha]$ donc $0 < \mu < \infty$. Enfin, nous savons par le Théorème de Kac (Théorème 10.2.2. [72]) que

$$\left(\mathbb{E}_\alpha [\tau_\alpha] \right)^{-1} = \pi(\alpha).$$

Ainsi, $\{a_x * u(n)\}$ converge vers $\pi(\alpha)$ et établir une majoration de la somme $\sum_{n \geq 1} \Delta r(n) |a_x * u - \pi(\alpha)|(n)$ revient à étudier la vitesse de convergence de S vers le processus stationnaire. Nous montrons dans le paragraphe suivant qu'il existe une constante $c < \infty$ et une suite $r' \in \Lambda_s \cup \Lambda_g$ telles que

$$\sum_{n \geq 1} \Delta r'(n) |a_x * u - \pi(\alpha)|(n) \leq c \left\{ \mathbb{E}_x [r'(\tau_\alpha)] + \mathbb{E}_\alpha [r'^0(\tau_\alpha)] \right\}, \quad x \in S(f, \Delta r, C) \quad (3.12)$$

$$r'(n) |a_x * u - \pi(\alpha)|(n) \leq c \left\{ \mathbb{E}_x [r'(\tau_\alpha)] + \mathbb{E}_\alpha [r'^0(\tau_\alpha)] \right\}, \quad x \in S(f, r, C) \quad (3.13)$$

où $r' = r$ si $r \in \Lambda_s$ et $r' \leq r$ pour $r' \in \Lambda_g$ si $r \in \Lambda_g$.

Cela termine la démonstration de (3.4) et (3.5). (3.3) résulte de (3.13),

$$r(n) {}_{\alpha}P^n f(x) \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\alpha}-1} r(k) f(\Phi_k) \right]$$

et

$$r(n) \sum_{k \geq n+1} t_f(k) \leq \sum_{k \geq n+1} r(k) t_f(k) \leq \mathbb{E}_{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\alpha}-1} r(k) f(\Phi_k) \right].$$

3.4.3 Démonstration du Théorème 3.2

En utilisant (3.10), nous avons

$$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leq {}_{\alpha}P^n f(x) + {}_{\alpha}P^n f(y) + |a_x * u - a_y * u| * t_f(n)$$

donc pour $r \in \Lambda_s$,

$$\begin{aligned} \sum_n r(n) |P^n f(x) - P^n f(y)| &\leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\alpha}-1} r(k) f(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\alpha}-1} r(k) f(\Phi_k) \right] \\ &\quad + \sum_n r(n) |a_x * u - a_y * u|(n) \mathbb{E}_{\alpha} \left[\sum_{k=1}^{\tau_{\alpha}} r(k) f(\Phi_k) \right]. \end{aligned}$$

Nous montrons dans le paragraphe suivant qu'il existe $R < \infty$ telle que pour tout $x \in S(f, r, C)$,

$$\sum_n r(n) |a_x * u - u|(n) \leq R \mathbb{E}_x \left[r^0(\tau_{\alpha}) \right], \quad (3.14)$$

ce qui conclut la démonstration de (3.6)

3.5 Ergodicité d'un processus de renouvellement

3.5.1 Définitions

Soit $S = (\Omega, \mathcal{A}, P_a, \{S_n\})$ un processus de renouvellement de loi initiale $a := \{a(n)\}$ et de loi d'inter-arrivée $p := \{p(n)\}$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $0 < \mu := \sum_{n \geq 1} np(n)$ l'intensité du renouvellement, supposée finie. On associe au processus S la suite de renouvellement $\{v(n)\}$

$$v(n) := P_a(S_k = n, k \geq 0).$$

$\{v(n)\}$ est solution de l'équation de renouvellement $v(n) = a(n) + p * v(n)$, $n \geq 1$ et $v(0) = a(0)$; on notera $\{u(n)\}$ la suite de renouvellement d'un processus sans retard (*i.e.* pour lequel $a = \delta_0$), de sorte que $v(n) = a * u(n)$. Enfin, le processus de loi initiale $c := \{c(n)\}$,

$$c(n) := \frac{1}{\mu} \sum_{k \geq n+1} p(k)$$

est le processus stationnaire de suite de renouvellement $v(n) = 1/\mu$ pour tout $n \geq 0$.

Enfin, on associe au processus S une suite de v.a. de Bernouilli $\{V_k\}$, indicatrice des temps de renouvellement

$$\begin{cases} V_k := 1 & \text{si } k \text{ est un point de renouvellement,} \\ V_k := 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Pour les taux sous-géométriques, nous déduisons les relations (3.12), (3.13) et (3.14) de la Proposition suivante.

Proposition 3.6 *Soit $r := \{r(n)\} \in \Lambda_s$ telle que $\sum_n r^0(n)p(n) < \infty$. Il existe des constantes $c_i < \infty$, $i = 1, 2$ telles que*

$$\begin{aligned} \sum_n r(n) |a * u - a' * u|(n) &\leq c_1 \left(\sum_n r^0(n)a(n) + \sum_n r^0(n)a'(n) \right), \\ r^0(n) |a * u - a' * u|(n) &\leq c_2 \left(\sum_n r^0(n)a(n) + \sum_n r^0(n)a'(n) \right). \end{aligned}$$

Preuve 6 (i) La Proposition 2.1.(ii) [84] établit

$$\sum_n |a * u - u|(n) \leq \sum_n r^0(n)a(n) \left(1 + \sum_n r(n)|u(n+1) - u(n)| \right)$$

puis on conclut par le Corollaire 2 [58], corollaire dont la démonstration nécessite la construction d'un temps de couplage. \square

La démonstration du Corollaire 2 [58] repose sur des propriétés des suites sous-géométriques qui ne sont plus valables pour les suites géométriques (Cf. remarque Paragraphe 2.4.2). Nous démontrons un résultat plus faible que celui de la Proposition 3.6, mais néanmoins suffisant pour établir (3.12), (3.13) et (3.14) pour une suite géométrique. La démonstration nécessite aussi la construction d'un temps de couplage.

3.5.2 Temps de couplage

Définition

Soient deux processus de renouvellement S et S' , de même loi d'inter-arrivée apériodique $p := \{p(n)\}$ d'intensité $0 < \mu < \infty$, et de loi de retard respective $a := \{a(n)\}$ et $a' := \{a'(n)\}$. On suppose qu'ils sont définis sur le même espace canonique $(\Omega, \mathcal{A}, P_{a,a'})$ et que les processus

d'inter-arrivées $Y := \{Y_n\}, n \geq 1$ et $Y' := \{Y'_n\}, n \geq 1$ sont indépendants (Y_0 et Y'_0 ne sont pas nécessairement indépendants). Soient $\{v(n)\}$ et $\{v'(n)\}$ les suites de renouvellement associées et $\{V_k\}$ et $\{V'_k\}$ les indicatrices de temps de renouvellement définies par (3.15). On appelle temps de couplage T la v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_{a,a'})$ par

$$T := \inf\{n \geq 0, V_n = V'_n = 1\}.$$

Inégalité de couplage

On définit un processus de renouvellement \tilde{S} sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_{a,a'})$ par

$$\begin{cases} \tilde{S}_n = S_n & n \leq T, \\ \tilde{S}_n = S'_n & n \geq T, \end{cases}$$

auquel on associe la suite de renouvellement $\tilde{v}(n)$. Il est facile de voir que $\tilde{v}(n) = v(n)$ puisque ces suites vérifient les mêmes équations de renouvellement. En conséquence,

$$\begin{aligned} |v(n) - v'(n)| &= |\tilde{v}(n) - v'(n)| \\ &= \left| P_{a,a'}(\tilde{S}_k = n, k \geq 0) - P_{a,a'}(S'_k = n, k \geq 0) \right| \\ &= \left| P_{a,a'}(\tilde{S}_k = n, k \geq 0; T > n) - P_{a,a'}(S'_k = n, k \geq 0; T > n) \right| \end{aligned}$$

et on obtient l'inégalité de couplage

$$|v(n) - v'(n)| \leq P_{a,a'}(T > n).$$

En particulier, lorsque $a' = c$, nous avons $|v(n) - \mu^{-1}| = |a * u(n) - \mu^{-1}| \leq P_{a,c}(T > n)$, et il vient que

$$\kappa^n |a * u(n) - \mu^{-1}| \leq \kappa^n P_{a,c}(T > n) \leq \mathbb{E}_{a,c}[\kappa^T].$$

Nous nous intéressons donc à l'existence de ce moment géométrique.

Moment géométrique du temps de couplage

Proposition 3.7 Soit $r := r^n$, $r > 1$ telle que $\sum_n r^n p(n) < \infty$. Il existe des constantes $\kappa \leq r$ et $c < \infty$ telles que pour toutes distributions $a := \{a(n)\}$, $a' := \{a'(n)\}$ sur \mathbb{N} ,

$$\mathbb{E}_{a,a'}[\kappa^T] \leq c \left\{ \left(\sum_n r(n) a(n) \right)^{2 \ln \kappa / \ln r} + \left(\sum_n r(n) a'(n) \right)^{2 \ln \kappa / \ln r} \right\}.$$

Preuve 7 La démonstration est présentée en Annexe B.6. \square

3.6 Autres approches de la méthode de scission

Les deux approches mentionnées ci-dessous utilisent la méthode de scission pour étudier l'ergodicité en variation totale. La première formule une hypothèse plus générale que l'existence d'un ensemble petite ; la seconde formule les mêmes hypothèses que le Théorème 3.1 mais construit la chaîne atomique à partir de la chaîne initiale et non de son m -squelette.

3.6.1 Construction de Nummelin et Tuominen

Nummelin et Tuominen [84] étudient l'ergodicité à un taux $r \in \Lambda_s$ d'un noyau P ψ -irréductible, apériodique et Harris-récurrent (*i.e.* pour tout $B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $x \in B$, $P_x(\Phi \in B \text{ infiniment souvent}) = 1$). Pour cela, ils substituent l'existence d'un ensemble petite par la condition de minoration plus générale

$$P^m(x, A) \geq h \otimes \nu(A) := h(x)\nu(A), \quad x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \quad (3.16)$$

pour un entier $m \geq 1$, une fonction $h : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ mesurable et $\psi(h) > 0$, et une mesure $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$; et remplacent la condition (3.1) par

$$\nu(Q_{r^0}h) := \nu\left(\sum_n r^0(nm) \left[P^m - h \otimes \nu\right]^n h\right) < \infty.$$

La chaîne atomique est construite pour $m = 1$ (Nummelin [81]). Pour ce faire, à toute mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, on associe une mesure λ^* sur l'espace bifurqué en posant

$$\lambda^*\left(A \times \{0\}\right) = \lambda(I_{1-h}A) \quad \lambda^*\left(A \times \{1\}\right) = \lambda(I_hA),$$

et on définit un noyau de transition \check{P}' de $(\check{\mathcal{X}}, \mathcal{B}(\check{\mathcal{X}}))$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ par

$$\begin{aligned} \check{P}'\left((x, 0), A\right) &= (1 - h(x))^{-1} (P(x, A) - h(x)\nu(A)) \text{ si } h(x) < 1 \\ &= \nu(A) \text{ sinon} \\ \check{P}'\left((x, 1), A\right) &= \nu(A); \end{aligned}$$

puis on étend ce noyau en un noyau \check{P} de $(\check{\mathcal{X}}, \mathcal{B}(\check{\mathcal{X}}))$ dans $(\check{\mathcal{X}}, \mathcal{B}(\check{\mathcal{X}}))$ à l'aide de la mesure "conjuguée" : pour tout $z \in \check{\mathcal{X}}$, $\check{P}(z, \cdot) = (\check{P}'(z, \cdot))^*$.

Tout noyau ψ -irréductible possède un ensemble C - ν_m small accessible et la condition de minoration (3.16) est toujours vérifiée avec $h(x) = \epsilon \mathbb{1}_C(x)$ pour $\epsilon > 0$. Dans ce cas, il est facile de vérifier que la mesure λ^* et la chaîne à atome définies ci-dessus coïncident avec celles définies au Paragraphe 3.3.1. De plus, nous montrons (la démonstration est en Annexe B.7) que pour toute mesure $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ et toute suite $r = \{r(n)\}$, la condition $\lambda(Q_r h) < \infty$ est équivalente à $\mathbb{E}_\lambda[r(\tau_C)] < \infty$.

3.6.2 Construction de Kalashnikov

Kalashnikov [52] étudie l'ergodicité d'un noyau P ψ -irréductible, apériodique et Harris-récurrent sous l'hypothèse d'existence d'un ensemble petite C vérifiant (3.1). La construction de la chaîne atomique est modifiée comme suit :

- Si $z_n = (x_n, d_n) \in C \times \{0\}$, $X_{n+m} \sim R(X_n, \cdot)$,
- Si $z_n = (x_n, d_n) \in C \times \{1\}$, $X_{n+m} \sim \nu_m(\cdot)$,
- Si $z_n = (x_n, d_n) \in C^c \times \{0\}$, $X_{n+1} \sim P(x_n, \cdot)$.

Dans les deux premiers cas, on complète les $(m-1)$ échantillons manquants $(X_{n+1}, \dots, X_{n+m-1})$ selon la loi $P(\Phi_1 \in A_1, \dots, \Phi_{m-1} \in A_{m-1} | \Phi_0 = x_n, \Phi_m = x_{n+m})$. Dans tous les cas, d_n est construit comme dans la méthode que nous avons présentée. Bien que le processus Z ne soit pas markovien (sauf si $m = 1$), on a par construction l'égalité en loi du processus $X = \{X_n\}$ et d'une chaîne de Markov de noyau P . On peut extraire de Z un processus markovien (moralement, c'est le processus obtenu lorsqu'on ne rajoute pas les $m - 1$ échantillons). Kalashnikov étudie ensuite la vitesse d'ergodicité en variation totale à l'aide de l'approche par renouvellement présentée ci-dessus.

Chapitre 4

(f, r) -ergodicité par la méthode de couplage

Les résultats présentés dans ce chapitre complètent, améliorent ou détaillent ceux réunis dans un document soumis à publication, et qui constitue le Chapitre 7.

Afin de faciliter la lecture de cette partie, nous avons rappelé dans les pages **Notations** précédant le Chapitre 1, les hypothèses formulées dans ce chapitre.

Nous étudions l'ergodicité d'un noyau de transition P ψ -irréductible et apériodique, par la méthode de couplage, **sans** recourir à la scission.

Le principe de couplage, tel qu'il est traditionnellement utilisé consiste à construire sur le même espace de probabilité, deux chaînes indépendantes (X, X') de même transition P , et de lois initiales respectives λ, λ' , de sorte qu'au delà d'un temps aléatoire T dit de *couplage*, leurs distributions coïncident : $\mathcal{L}(X_{n+T}) = \mathcal{L}(X'_{n+T}), n \geq 0$. Le couplage, tel que nous l'entendons dans ce chapitre, consiste à définir deux processus (X, X') tels que, pour tout n , la loi marginale de X (resp. X') est λP^n (resp. $\lambda' P^n$) et au delà de T , leurs trajectoires coïncident. Ces deux définitions sont néanmoins très proches, et requièrent les mêmes hypothèses sur P .

Dans le cas de chaînes à espace d'état dénombrable, la construction est simple : pour un état i arbitraire, T est égal au premier passage dans (i, i) de (X, X') (Pitman [87]). Cette définition s'étend classiquement aux noyaux à valeur dans un espace d'état quelconque, possédant un atome α : T est égal au premier temps de passage de (X, X') dans (α, α) .

Lorsque P n'est plus atomique, mais possède un ensemble petite C deux schémas sont possibles ; supposons C ν_1 -small :

- Le premier, tel qu'il est présenté par Nummelin [81], associe à chaque composante X, X' sa

chaîne scindée \check{X}, \check{X}' selon l'algorithme présenté dans le Chapitre précédent ; puis étudie la convergence de $\lambda P^n - \lambda' P^n$ au travers de l'étude de la convergence des noyaux à atome. Autrement dit, le temps de couplage T est obtenu comme suit : à chaque chaîne est associée une suite de v.a. de Bernouilli indépendantes, notées D et D' , et indépendantes de la chaîne. Chaque fois que X (resp. X') est dans C , on consulte la v.a. D (resp. D') : si elle vaut 1, le passage dans C correspond à un passage dans l'atome. Le temps de couplage est le premier instant où (X, X') est dans $C \times C$ **et** $D = D' = 1$.

- La seconde approche (Lindvall [58], Diaconis [32]) s'affranchit de la construction de l'atome : si $(X_n, X'_n) \in C \times C$, on tire une v.a. de Bernouilli d et si $d = 1$, on simule $x \sim \nu_1$ et on pose $X'_{n+1} = X_{n+1} = x$; si $d = 0$, on simule indépendamment X_{n+1} et X'_{n+1} selon leur probabilité “complémentaire” respective (Cf. Paragraphe 4.1.2 pour une définition rigoureuse) ; enfin, si $(X_n, X'_n) \notin C \times C$, X_{n+1} et X'_{n+1} sont tirés indépendamment selon la loi $P(X_n, \cdot)$ et $P(X'_n, \cdot)$. Dans ce cas, T est défini comme le premier instant où $(X, X') \in C \times C$ **et** $d = 1$. Supposons $T < \infty$ presque sûrement ; on construit un troisième processus X'' (sur le même espace de probabilité)

$$X''_n = \begin{cases} X_n & n \geq T, \\ X'_n & n < T, \end{cases}$$

et on appelle processus couplé la paire (X, X'') .

Dans les deux schémas, pour f mesurable positive,

$$\lambda P^n f - \lambda' P^n f = \mathbb{E} \left[\{f(X_n) - f(X'_n)\} \mathbb{I}_{T \geq n} \right];$$

l'étude de la convergence de $\lambda P^n - \lambda' P^n$ en variation totale se déduit de l'étude de la loi (en termes d'existence de moments) de T , tandis que l'étude de la convergence en norme f se déduit de plus du contrôle de l'espérance $\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{T-1} \{f(X_k) - f(X'_k)\} \right]$.

Nous nous proposons d'énoncer des conditions suffisantes, en termes de minoration d'un squelette P^m et en termes de conditions de drift, permettant de déterminer un taux de convergence $r := \{r(n)\}$ (suite croissante) et une borne d'ergodicité en norme f , $B_{f,r}(x, x', n)$, tels que pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f \leq B_{f,r}(x, x', n),$$

et

$$0 < \liminf_n r(n) B_{f,r}(x, x', n) \leq \limsup_n r(n) B_{f,r}(x, x', n) < \infty.$$

Nous construirons aussi une borne $B_{f,r}(x, x')$ telle que

$$\sum_n r(n) \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f \leq B_{f,r}(x, x').$$

Pour ce faire, nous utilisons (une généralisation de) la seconde approche en construisant un processus markovien $Z = (X, X', d)$ de noyau P^* , à valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$: nous remplaçons l'existence d'un ensemble ν_m -small par la condition de minoration

$$P^m(x, \cdot) \wedge P^m(x', \cdot) \geq \rho_{x,x'}(\cdot) \quad (x, x') \in \Delta,$$

(a) sur un domaine non nécessairement symétrique $\Delta := C \times D \cup D \times C$, pour $C \subseteq D$ et C accessible ; (b) pour un noyau sous-markovien $\rho_{x,x'}$ tel que

$$\inf_{(x,x') \in \Delta} \rho_{x,x'}(\mathcal{X}) > 0.$$

De plus, nous construisons le processus Z de façon à ce que la loi de X_n (resp. X'_n) soit λP^n (resp. $\lambda' P^n$) quelle que soit la valeur de m : habituellement, on construit Z à l'aide du m -squelette, ce qui implique que la loi de X_n (resp. X'_n) est λP^{nm} (resp. $\lambda' P^{nm}$) ; les résultats obtenus à l'aide de ce processus concernent donc le squelette P^m et s'étendent classiquement à la chaîne initiale de noyau P par homothétie sur l'échelle de temps.

Baxendale [5], Meyn et Tweedie [73], Rosenthal [101, 103], Lund et Tweedie [61], Mengersen et Tweedie [70], ou encore Roberts et Tweedie [99] ont proposé des expressions explicites de bornes d'ergodicité $B_{f,r}$, pour des taux r géométriques sous des conditions entraînant la f -ergodicité géométrique. Notre objectif est de construire des bornes d'ergodicité sous des hypothèses plus faibles, entraînant l'ergodicité en norme f à un taux polynomial $r(n) = (n+1)^k$, k entier, ou à un taux riemannien $r(n) = (n+1)^k$, k réel positif, ou plus généralement à tout taux sous-géométrique $r \in \Lambda_s$ (classe définie au Paragraph 2.4.1).

La construction de ces bornes d'ergodicité se déduit du calcul de moments du temps de couplage, moment que nous exprimons en fonction du temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$ de Z . Nous avons montré au Chapitre 2 le lien entre les solutions de conditions de drift et les moments du temps d'entrée : il est donc naturel de supposer l'existence de tels moments en formulant une condition de drift relative au noyau P^* . Telle est l'approche de Rosenthal [101, 103] et de Roberts et Tweedie [99] : leurs conditions sont néanmoins difficiles à vérifier en pratique, ce qui intuitivement se comprend puisqu'il s'agit de contrôler le temps d'entrée dans un ensemble d'un processus qui peut être vu comme deux chaînes indépendantes, au lieu du temps d'entrée dans un ensemble d'une chaîne. Aussi exploitons-nous la structure particulière du noyau P^* entre deux passages dans $\Delta \times \{0\}$, pour substituer la condition de drift relative au noyau P^* et à l'ensemble $\Delta \times \{0\}$ par **(a)** une condition de drift relative au noyau P et à l'ensemble C **(b)** des conditions de croissance à l'extérieur de D des fonctions solutions des conditions de drift. Nous proposons plusieurs formulations de drift selon le taux de convergence recherché.

Nous développons aussi cette étude pour les taux géométriques, sous des hypothèses semblables à celles formulées dans [73, 101, 103, 99] : nous définissons un taux maximal $\beta_{FM} > 1$ et une borne $B_{1,\beta}(x, n)$ (définition explicite) tels que pour tout $\beta < \beta_{FM}$

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq B_{1,\beta}(x, n) \quad x \in \mathcal{X},$$

et

$$0 < \liminf_n \beta^n B_{\beta,f}(x, n) \leq \limsup_n \beta^n B_{f,\beta}(x, n) < \infty.$$

Nous complétons ces résultats par le calcul de $B_{f,\beta}$ telle que pour tout $\beta < \beta_{FM}$,

$$\sum_n \beta^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq B_{f,\beta}(x) \quad x \in \mathcal{X}.$$

4.1 Méthode de couplage

4.1.1 Hypothèses

Nous supposons que

H1 P est un noyau ψ -irréductible et apériodique.

La construction du temps de couplage est habituellement basée sur l'existence d'un ensemble petite accessible, ce qui est toujours le cas lorsque P est ψ -irréductible. Néanmoins, pour améliorer le calcul des bornes d'ergodicité $B_{f,r}$, nous formulons une condition de minoration plus fine. Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$.

H2[C, D] Il existe un entier $m \geq 1$ tel que pour tout $(x, x') \in \Delta := C \times D \cup D \times C$,

$$P^m(x, A) \wedge P^m(x', A) \geq \rho_{x,x'}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

où $\rho_{x,x'}(dy)$ est un noyau sous-markovien de Δ dans $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel que

$$\epsilon^- := \inf_{(x,x') \in \Delta} \rho_{x,x'}(\mathcal{X}) > 0. \quad (4.1)$$

On définit

$$\epsilon^+ := \sup_{(x,x') \in \Delta} \rho_{x,x'}(\mathcal{X}).$$

A défaut de vérifier H2[C, D], on sait que si P est ψ -irréductible, il possède un ensemble ν_m -small $C \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$ et donc

H2'[C] il existe une constante $\epsilon > 0$ et une mesure $\nu_m \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que

$$\forall x \in C, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \quad P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A), \quad \nu_m(C) > 0.$$

Dans ce cas, $D = C$ et la condition de minoration H2[C, C] est vérifiée avec $\rho_{x,x'}(dy) := \epsilon \nu_m(dy)$. Réciproquement, sous H2[C, D], C est un ensemble small si il existe une mesure ρ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telle que

$$\forall (x, x') \in \Delta, \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad \rho_{x,x'}(A) \geq \rho(A).$$

Il est toujours possible de construire le noyau $\rho_{x,x'}$ à partir d'un noyau $\mu_{x,x'}(dy)$ de Δ dans $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, en posant

$$\rho_{x,x'}(A) := \int_A \frac{dP^m(x, \cdot)}{d\mu_{x,x'}} \wedge \frac{dP^m(x', \cdot)}{d\mu_{x,x'}} \mu_{x,x'}(dy)$$

où $\frac{dP^m(x, \cdot)}{d\mu_{x,x'}}$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym. Lorsque $\mu_{x,x'}(dy) := P^m(x, dy)$, la condition de minoration (4.1) devient

$$\inf_{(x,x') \in \Delta} \int_{\mathcal{X}} 1 \wedge \frac{dP^m(x', dy)}{dP^m(x, dy)} P^m(x, dy) > 0,$$

et est connue sous le nom de *condition de Doeblin locale*. On note $R_{x,x'}(u, dy)$ le noyau résiduel

$$R_{x,x'}(u, dy) := \left(1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X})\right)^{-1} \left(P^m(u, dy) - \rho_{x,x'}(dy)\right), \quad (x, x') \in \Delta, u \in \{x, x'\}. \quad (4.2)$$

4.1.2 Construction du temps de couplage

Soit la chaîne canonique $Z = (\Omega, \mathcal{A}, Z_n = (X_n, X'_n, d_n), P_{x,x',i})$, $(x, x', i) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$, à valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$ muni de la plus petite tribu qui contient les ensembles $A \times A' \times \{i\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \{0, 1\}$, et de noyau de transition P^*

$$\begin{aligned} P^*\left((x, x', d); A \times A' \times \{i\}\right) &:= \mathbb{I}_{\Delta \times \{0\}}(x, x', d) \left[\rho_{x,x'}(A \cap A') \mathbb{I}_{\{1\}}(i) \right. \\ &\quad + \left(1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X})\right) R_{x,x'}(x, A) R_{x,x'}(x', A') \mathbb{I}_{\{0\}}(i) \Big] \\ &\quad + \mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(x, x', d) P(x, A) P(x', A') \mathbb{I}_{\{0\}}(i) \\ &\quad + \mathbb{I}_{\{1\}}(d) \mathbb{I}_{(x=x')} P(x, A \cap A') \mathbb{I}_{\{1\}}(i) \\ &\quad \left. + \mathbb{I}_{\{1\}}(d) \mathbb{I}_{(x \neq x')} P(x, A) P(x', A') \mathbb{I}_{\{1\}}(i); \right] \end{aligned}$$

en fait, le dernier terme fait de P^* un noyau de transition markovien mais *n'intervient pas* lorsque la loi initiale du processus Z est à support dans $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \{0\}$, ce qui sera le cas dans les relations ci-dessous. Autrement dit, lorsque $Z_0 \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0\}$,

(1) si $d_n = 0$ et

- (a) $(X_n, X'_n) \notin \Delta$, on pose $d_{n+1} := 0$ et on simule indépendamment $X_{n+1} \sim P(X_n, \cdot)$ et $X'_{n+1} \sim P(X'_n, \cdot)$.
- (b) $(X_n, X'_n) \in \Delta$,
 - avec la probabilité $\rho_{X_n, X'_n}(\mathcal{X})$, on simule $\xi \sim \rho_{X_n, X'_n}/\rho_{X_n, X'_n}(\mathcal{X})$, on pose $X_{n+1} = X'_{n+1} := \xi$ et $d_{n+1} := 1$.
 - avec la probabilité $1 - \rho_{X_n, X'_n}(\mathcal{X})$, on laisse $d_{n+1} := 0$ et on simule $X_{n+1} \sim R_{X_n, X'_n}(X_n, \cdot)$ et $X'_{n+1} \sim R_{X_n, X'_n}(X'_n, \cdot)$.

(2) si $d_n = 1$, on laisse $d_{n+1} := 1$ et on simule $X_{n+1} \sim P(X_n, \cdot)$, $X'_{n+1} := X_{n+1}$.

On note \mathcal{F}_n^Z la filtration naturelle du processus

$$\mathcal{F}_n^Z := \sigma(Z_k, 0 \leq k \leq n).$$

Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $n \geq 0$, $z := (x, x', d) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$, $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$,

$$\begin{aligned} P_{\lambda, \lambda', 0}\left(X_{n+1} \in A | Z_n = z\right) &= \mathbb{I}_{\mathcal{X}^2 \times \{1\}}(z) P(x, A) + \mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(z) P(x, A) \\ &\quad + \mathbb{I}_{\Delta \times \{0\}}(z) \left\{ \rho_{x,x'}(A) + (1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X})) R_{x,x'}(x, A) \right\} \\ &= \mathbb{I}_{\mathcal{X}^2 \times \{1\}}(z) P(x, A) + \mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(z) P(x, A) + \mathbb{I}_{\Delta \times \{0\}}(z) P^m(x, A) \end{aligned}$$

et par symétrie, nous obtenons le même résultat pour X'

$$P_{\lambda,\lambda',0}\left(X'_{n+1} \in A | Z_n = z\right) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}^2 \times \{1\}}(z) P(x', A) + \mathbb{1}_{\Delta^c \times \{0\}}(z) P(x', A) + \mathbb{1}_{\Delta \times \{0\}}(z) P^m(x', A).$$

En conséquence, si $m = 1$, nous vérifions que

$$P_{x,x',0}(X_n \in A) = P^n(x, A) \quad P_{x,x',0}(X'_n \in A) = P^n(x', A).$$

En revanche, on perd cette relation lorsque $m > 1$: chaque passage de Z dans $\Delta \times \{0\}$ induit un "décalage temporel" de taille m . Pour retrouver une échelle de temps adéquate, on définit le processus \tilde{Z} comme suggéré par Kalashnikov [52] pour la méthode de scission. Soit $Q_0 := 0$ et $\tilde{Z}_0 := Z_0$.

(1) si $d_n = 0$,

- si $(X_n, X'_n) \notin \Delta$, on incrémente $Q_{n+1} := Q_n + 1$ et l'on pose $\tilde{Z}_{Q_{n+1}} := Z_{n+1}$.
- si $(X_n, X'_n) \in \Delta$, on insère $(m - 1)$ échantillons en posant $Q_{n+1} := Q_n + m$ et $\tilde{Z}_{Q_{n+1}} := Z_{n+1}$. On simule les échantillons manquants \tilde{X}_{Q_n+k} (resp. \tilde{X}'_{Q_n+k}), $1 \leq k \leq m - 1$, sous la loi conditionnelle de la chaîne Φ (de noyau P) sachant $\Phi_0 := \tilde{X}_{Q_n}$ et $\Phi_m := \tilde{X}_{Q_{n+1}}$ (resp. $\Phi_0 := \tilde{X}'_{Q_n}$ et $\Phi_m := \tilde{X}'_{Q_{n+1}}$).

(2) si $d_n = 1$, on pose $Q_{n+1} := Q_n + 1$ et $\tilde{Z}_{Q_{n+1}} := Z_{n+1}$.

Le processus \tilde{Z} vérifie

$$P_{x,x',0}(\tilde{Z}_n \in A) = P^n(x, A) \quad P_{x,x',0}(\tilde{X}'_n \in A) = P^n(x', A) \quad (4.3)$$

pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $n \geq 0$. Dès lors que $\tilde{d}_n = 1$, $\tilde{X}_n = \tilde{X}'_n$ et les processus couplent : on appelle temps de couplage la v.a.

$$T := \inf\{n \geq 1, \tilde{d}_n = 1\}.$$

La construction de T est liée aux passages dans Δ de (X, X') , notés T_n et définis par

$$\begin{aligned} T_0 &:= \inf\{n \geq 0, (X_n, X'_n) \in \Delta\}, \\ T_{n+1} &:= \inf\{n \geq T_n + 1, (X_n, X'_n) \in \Delta\}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, mais seulement à certains passages dans Δ de (\tilde{X}, \tilde{X}') , notés T'_n et définis par

$$T'_n := T_n + n(m - 1).$$

Remarques La construction du processus \tilde{Z} est nécessaire pour vérifier la "conservation des lois" (4.3) mais le seul processus d'intérêt pour la définition de T est le processus Z : sachant $Z_{T_n} = (X_{T_n}, X'_{T_n}, 0)$, $T = T'_n + m$ avec la probabilité $\rho_{X_{T_n}, X'_{T_n}}(\mathcal{X}) \geq \epsilon^-$. L'originalité majeure de notre approche est de construire Z à l'aide du noyau P , quelle que soit la valeur de m dans la condition de minoration H2[C, D], et de "compléter le temps" si nécessaire.

Les constructions habituelles reposent sur la condition de minoration uniforme H2'[C] puis supposent que $m = 1$: ce qui revient à "sous-échantillonner" les trajectoires et à construire une chaîne de Markov $Z^{(m)}$ telle que

$$P_{x,x',0}\left(X_n^{(m)} \in A\right) = P_x\left(\Phi_{nm} \in A\right) \quad P_{x,x',0}\left(X_n'^{(m)} \in A\right) = P_{x'}\left(\Phi_{nm} \in A\right).$$

La construction du temps de couplage résulte de deux effets qui, en pratique, s'opposent, dans le sens où, on ne peut favoriser l'un sans défavoriser l'autre. En effet, on envisage le couplage d'autant plus souvent que Z passe fréquemment dans $\Delta \times \{0\}$; aussi est-on tenté de choisir Δ "grand". Mais, à chacun de ces passages, la probabilité de coupler est (dans le pire cas) ϵ^- , constante qui, dans de nombreuses applications, est d'autant plus petite que Δ est grand. Ces deux facteurs soulignent le double intérêt de notre approche :

- sur l'échelle de temps de la chaîne initiale, nous n'"oublions" que les passages de Z dans $\Delta \times \{0\}$ survenant dans les m -instants consécutifs à un passage dans $\Delta \times \{0\}$; tandis que la construction usuelle oublie tous les passages qui ne surviennent pas sur un multiple de m .
- la probabilité de coupler est plus grande sous une condition de minoration H2[C, D] que sous une condition de minoration uniforme de type H2'[C].

Ces considérations sont illustrées par l'étude de la marche aléatoire sur \mathbb{N} réfléchie en 0 (Paragraphe 4.4.8).

La définition de T dépend aussi du choix du squelette P^m sur lequel on vérifie la condition de minoration : la propriété d'oubli du point initial d'une chaîne ergodique (tel sera le cas des noyaux étudiés par la méthode de couplage) incite à choisir m grand pour trouver une meilleure minoration de $P^m(x, \cdot)$. On renonce souvent à ce troisième facteur pour des raisons pratiques de calcul des itérations du noyau.

4.1.3 Convergence en variation totale

Pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot) &= P_{x,x',0}\left(\tilde{X}_n \in A\right) - P_{x,x',0}\left(\tilde{X}'_n \in A\right) \\ &= P_{x,x',0}\left(\tilde{X}_n \in A, T > n\right) - P_{x,x',0}\left(\tilde{X}'_n \in A, T > n\right) \end{aligned}$$

donc pour toutes mesures $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$,

$$\|\lambda P^n - \lambda' P^n\|_{VT} \leq \int \lambda(dx) \lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} \leq 2P_{\lambda,\lambda',0}(T > n), \quad (4.4)$$

où nous définissons

$$\|\lambda\|_{VT} := \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \lambda(A) - \min_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \lambda(A) = 2 \sup\{|\lambda(f)|, f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable}, |f| \leq 1\}.$$

Théorème 4.1 Soit P ψ -irréductible apériodique. Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D]. Soient $r := \{r(n)\}$ une suite positive croissante et des mesures $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que

$$\mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0}[r(T - m)] < \infty.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_n r(n) \int \lambda(dx) \lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} &= 0, \\ \sum_{n \geq m} \Delta r(n+1-m) \int \lambda(dx) \lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} &\leq 2 \mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0}[r(T - m)], \\ \int \lambda(dx) \lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} &\leq \frac{2 \mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0}[r(T - m)]}{r(n+1-m) + (1 - \epsilon^+)^{-(n+1-m)} \sum_{j > n+1-m} (1 - \epsilon^+)^j \Delta r(j)}. \end{aligned}$$

Preuve 1 Les deux premières assertions sont triviales. La troisième résulte d'une amélioration de l'inégalité de Markov :

Lemme 4.2 Soit P ψ -irréductible apériodique. Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D]. Pour toute suite réelle positive croissante $r := \{r(n)\}$, telle que $\mathbb{E}_{x, x', 0}[r(T - m)] < \infty$,

$$P_{x, x', 0}(T > n) \leq \frac{\mathbb{E}_{x, x', 0}[r(T - m)]}{r(n+1-m) + (1 - \epsilon^+)^{-(n+1-m)} \sum_{j > n+1-m} (1 - \epsilon^+)^j \Delta r(j)}.$$

Montrons tout d'abord que $P_{x, x', 0}(T > n+k | T > n) \geq (1 - \epsilon^+)^k$, $k \geq 0$. On décompose $\{T = n+1\}$ sur les instants de passage successifs dans Δ

$$\{T = n+1\} = \bigcup_{j \geq 0} \left\{ T_j + j(m-1) + m = n+1, d_{T_{j-1}+1} = 0, d_{T_j+1} = 1 \right\}.$$

Soit $q_{n,j} := n+1-m-j(m-1)$. On a

$$\begin{aligned} P_{x, x', 0}(T = n+1) &= \sum_{j \geq 0} P_{x, x', 0}\left(d_{T_j+1} = 1 | T_j = q_{n,j}, d_{T_j} = 0\right) \\ &\quad \times P_{x, x', 0}\left(T_j = q_{n,j}, d_{T_{j-1}+1} = 0 | T > n\right) P_{x, x', 0}(T > n), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{x, x', 0}\left(d_{q_{n,j}+1} = 1 | T_j = q_{n,j}, d_{q_{n,j}} = 0\right) \\ = \mathbb{E}_{x, x', 0}\left[P_{X_{q_{n,j}}, X'_{q_{n,j}}, 0}(d_1 = 1) \mathbb{I}_{T_j = q_{n,j}} \mathbb{I}_{d_{q_{n,j}} = 0}\right] / P_{x, x', 0}\left(T_j = q_{n,j}, d_{q_{n,j}} = 0\right) \leq \epsilon^+. \end{aligned}$$

Par suite, $P_{x,x',0}(T = n + 1) \leq \epsilon^+ P_{x,x',0}(T > n)$, ce qui montre que $P_{x,x',0}(T > n + 1 | T > n) \geq (1 - \epsilon^+)$. Ainsi,

$$P_{x,x',0}(T > n + k | T > n) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{P_{x,x',0}(T > n + j + 1)}{P_{x,x',0}(T > n + j)} \geq (1 - \epsilon^+)^k,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} [r(T-m) | T > n] &= \sum_{j \geq n+1-m} r(j) (P_{x,x',0}(T > j+m-1 | T > n) - P_{x,x',0}(T > j+m | T > n)) \\ &\geq (1 - \epsilon^+)^{-(n+1-m)} \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j+1} \{r(j+1) - r(j)\} + r(n+1-m). \end{aligned}$$

□

4.1.4 Convergence en norme f

Soient une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable et des mesures $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$. Nous écrivons pour $|g| \leq f$ mesurable,

$$\left| \lambda P^n(g) - \lambda' P^n(g) \right| \leq \int \lambda(dx) \lambda'(dx') \left| P^n g(x) - P^n g(x') \right| \leq \mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0} [\{f(X_n) + f(X'_n)\} \mathbb{1}_{T > n}]$$

puis utilisons l'inégalité de Hölder pour majorer le terme de droite par une quantité dépendant de $P_{\lambda, \lambda', 0}(T > n)$.

H4[f, C, D] il existe $0 < \alpha \leq 1$, des fonctions $1 \leq W_0 \leq W_1 < \infty$ mesurables et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_D W_1 < \infty$, $\|f\|_{W_1^\alpha} < \infty$ et

$$\begin{cases} PW_1(x) + W_0(x) \leq W_1(x) + b \mathbb{1}_C(x), \\ W_0(x) - b \geq 0, & x \in D^c. \end{cases}$$

On définit

$$C(W_1) := \sup_{(x,x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X}) \right) \left(R_{x,x'} W_1(x) + R_{x,x'} W_1(x') \right)$$

et

$$C_1(x, x') := W_1(x) + W_1(x') + \left(C(W_1) + \sup_{(x,x') \in \Delta} \sum_{k=1}^{m-1} \{P^k W_1(x) + P^k W_1(x')\} \right) / \epsilon^-, \quad (4.5)$$

avec la convention $\sum_{k=1}^0 a_k := 0$.

Théorème 4.3 Soit P ψ -irréductible, apériodique. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ et $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons $H2[C, D]$ et $H4[f, C, D]$. Pour toutes mesures $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que $\lambda(W_1) + \lambda'(W_1) < \infty$,

$$\int \lambda(dx)\lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f \leq 2^{1-\alpha} \|f\|_{W_1^\alpha} \int \lambda(dx)\lambda(dx') C_1^\alpha(x, x') P_{x, x', 0}^{1-\alpha}(T > n). \quad (4.6)$$

Preuve 3 La démonstration est présentée en Annexe C.8. \square

Corollaire 4.4 Soit P ψ -irréductible, apériodique. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ et $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons $H2[C, D]$ et $H4[f, C, D]$. Soient $r := \{r(n)\}$ une suite positive croissante et des mesures $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que

$$\lambda(W_1) + \lambda'(W_1) < \infty, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0}[r(T - m)] < \infty.$$

Alors

$$\lim_n [r(n)]^{1-\alpha} \int \lambda(dx)\lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f = 0.$$

Nous étudions maintenant la convergence de la série

$$\sum_{n \geq m} r(n-m) \int \lambda(dx)\lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f.$$

H4'[f, C, D] il existe $0 < \alpha \leq 1$, des fonctions $1 \leq W_0 \leq W_1 < \infty$ mesurables et des constantes $0 < a < 1$ et $b < \infty$ telles que $\sup_D W_1 < \infty$, $\|f\|_{W_0^\alpha} < \infty$ et

$$\begin{cases} PW_1(x) + W_0(x) \leq W_1(x) + b\mathbb{I}_C(x), \\ W_0(x) - b \geq aW_0(x), \end{cases} \quad x \in D^c.$$

Pour $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $W : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty[,$ on définit

$$C(W, B) := \sup_{(x, x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})\right) \int_B R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \{W(y) + W(y')\}$$

et

$$\begin{aligned} C_2(x, x') &:= \mathbb{I}_\Delta(x, x') \{W_0(x) + W_0(x')\} + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') \{W_1(x) + W_1(x')\} \\ &+ \left(C(W_0, \Delta) + a^{-1} C(W_1, \Delta^c) + \sup_{(x, x') \in \Delta} \sum_{k=1}^{m-1} \{P^k W_0(x) + P^k W_0(x')\}\right) / \epsilon^-, \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec la convention $\sum_{k=1}^0 a_k := 0$.

Théorème 4.5 Soit P ψ -irréductible, apériodique. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ et $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D] et H4'[f, C, D]. Soient $r := \{r(n)\}$ une suite positive et des mesures $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$, telles que

$$\begin{aligned}\lambda(W_1) + \lambda'(W_1) &< \infty, \\ \mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0}[r(T - m)] &< \infty.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq m} [\Delta r(n+1-m)]^{1-\alpha} \int \lambda(dx) \lambda(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_f \\ \leq 2^{1-\alpha} \|f\|_{W_0^\alpha} \int \lambda(dx) \lambda(dx') \left\{C_2(x, x')\right\}^\alpha \mathbb{E}_{x, x', 0}^{1-\alpha}[r(T - m)].\end{aligned}\quad (4.8)$$

Preuve 5 La démonstration est présentée en Annexe C.9. \square

Moment du temps de couplage Nous avons lié l'étude de la convergence des itérations P^n au calcul d'un moment du temps de couplage (Théorème 4.1, Corollaire 4.4 et Théorème 4.5). Le calcul de $\mathbb{E}_{x, x', 0}[r(T - m)]$ repose sur le fait que

- il existe n tel que $T - m = T'_n$,
- si $T - m = T'_n$, cela signifie qu'aux instants T'_0, \dots, T'_{n-1} , on a "refusé le couplage" avec la probabilité $(1 - \rho_{X_{T_k}, X'_{T_k}}(\mathcal{X}))$ et simulé (X_{T_k+1}, X'_{T_k+1}) à l'aide du noyau résiduel, $0 \leq k \leq n - 1$.

Nous majorons $\mathbb{E}_{x, x', 0}[r(T - m)]$ par une fonction de moments du temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$ du processus Z , plus précisément les moments $\mathbb{E}_{x, x', 0}[r(T_0 + k)]$ pour $0 \leq k \leq m$. Nous énonçons ensuite des conditions "pratiques" en termes de conditions de drift permettant de calculer ces moments.

Le Chapitre 2 souligne le lien entre les solutions d'un drift relatif à un ensemble et un moment du temps d'entrée dans cet ensemble : prenons l'exemple d'une condition de drift de type D2[1, $r, \Delta \times \{0\}$]. Pour toute suite $r := \{r(n)\}$ positive croissante, $r(0) := 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x, x', 0}[r^0(T_0 + l)] &\leq r^0(l) + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') \mathbb{E}_{x, x', 0}\left[\sum_{k=1}^{T_0} r(k+l)\right] \\ &\leq r^0(l) + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') W_l(x, x', 0), \quad l \geq 0,\end{aligned}$$

où $\{W_l\}$ est une famille de fonctions mesurables solution de

$$P^*W_{n+1}(x, x', 0) + r(n) \leq W_n(x, x', 0) + br(n)\mathbb{I}_{\Delta}(x, x'), \quad n \geq 0$$

et $W_l \geq r(l)$. Pour exploiter la structure particulière de $P^*((x, x', d), \cdot)$ lorsque $(x, x', d) \in \Delta^c \times \{0\}$, à savoir,

$$P^*\left((x, x', d), dy \times dy' \times \{i\}\right) = P(x, dy)P(x', dy')\mathbb{I}_{\{0\}}(i) \quad (4.9)$$

nous recherchons des fonctions W_l sous la forme

$$W_l(x, x', 0) = w_l(x) + w_l(x')$$

et plutôt que de requérir un drift pour le noyau P^* relatif à l'ensemble Δ , nous formulons deux conditions plus facilement vérifiables : **(a)** une condition de drift pour le noyau P relative à l'ensemble C : $PV \leq V - F + b\mathbb{1}_C$ et **(b)** une condition de minoration de la force de rappel F sur D^c .

Nous détaillons maintenant la forme de ces conditions selon le taux de convergence envisagé, à savoir les taux polynomiaux puis plus généralement les taux riemanniens, les taux géométriques et enfin les taux sous-géométriques en général. Dans chacun des cas, le plan de l'exposé est similaire : nous commençons par formuler la condition de drift puis estimons un moment du temps d'entrée T_0 du processus Z dans $\Delta \times \{0\}$ en fonction des termes apparaissant dans les conditions de drift et de minoration. Nous calculons ensuite un moment du temps de couplage en fonction du moment du temps d'entrée T_0 .

4.2 Convergence à un taux riemannien (1)

Dans cette section 4.2, P est ψ -irréductible apériodique.

4.2.1 Hypothèse H5fm[q, C, D]

Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$, et un entier $q \geq 1$.

H5fm[q, C, D] Il existe des fonctions mesurables $1 \leq V_0 \leq \dots \leq V_q < \infty$ et des constantes $a_k > 0$ et $b_k < \infty$, $0 \leq k \leq q-1$, telles que $\sup_D V_q < \infty$ et pour tout $0 \leq k \leq q-1$

$$PV_{k+1}(x) \leq V_{k+1}(x) - V_k(x) + b_k \mathbb{1}_C(x), \quad (4.10)$$

$$V_k(x) - b_k \geq a_k V_k(x), \quad x \in D^c. \quad (4.11)$$

Taux polynomiaux $S(q, \cdot)$ Nous avons montré que la condition (4.10) est particulièrement adaptée au calcul de moments polynomiaux du temps de retour à C (Cf. Paragraphe 2.3.1), plus précisément les moments polynomiaux $S(q, \cdot)$. Ces familles de polynômes vérifient la propriété de convolution suivante

$$S(q, n+m) = \sum_{k=0}^q S(k, n) S(q-k, m) \quad n, m \geq 1, q \geq 0. \quad (4.12)$$

En effet, on le vérifie pour $q = 1$, et si on le suppose vrai pour $q - 1$,

$$\begin{aligned} S(q, n + m) &= S(q, n) + \sum_{k=n+1}^{n+m} S(q - 1, k) = S(q, n) + \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{q-1} S(j, n) S(q - 1 - j, l) \\ &= S(q, n) + \sum_{j=0}^{q-1} S(j, n) S(q - j, m) = S(q, n) S(0, m) + \sum_{j=0}^{q-1} S(j, n) S(q - j, m) \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

4.2.2 Conditions de drift et temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Proposition 4.6 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$, et un entier $q \geq 1$.

Supposons H2[C, D] et H5fm[q, C, D]. Pour tous les entiers $0 \leq j \leq q - 1$, $0 \leq l \leq q - 1 - j$, et $(x, x') \in \Delta^c$

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} S(l, k+1) \left\{ V_j(X_k) + V_j(X'_k) \right\} \right] \leq \left(\prod_{k=j}^{j+l} a_k \right)^{-1} \left\{ V_{j+l+1}(x) + V_{j+l+1}(x') \right\},$$

où les suites polynomiales $S(l, \cdot)$ sont définies au Paragraphe 2.2.4, Exemple 1.

Preuve 6 Proposition 7.19, Paragraphe 7.4.3. \square

Puisque $\inf_{(x, x') \in \Delta^c} \{V_0(x) + V_0(x')\} > 0$, nous déduisons de ce résultat une estimation des moments polynomiaux d'ordre k (entier) $\mathbb{E}_{x, x', 0}[S(k, T_0)]$ pour tout $0 \leq k \leq q$. En utilisant un argument de convexité, nous pouvons obtenir une majoration des moments d'ordre k réel, $0 \leq k \leq q$. De plus, les suites à croissance polynomiale $S(l, \cdot)$ vérifient la relation de convolution (4.12) ce qui permet d'obtenir une relation simple entre les moments translatés $\mathbb{E}_{x, x', 0}[S(l, T_0 + m)]$, pour tout entier $m \geq 0$, et les moments $\mathbb{E}_{x, x', 0}[S(j, T_0)]$, $0 \leq j \leq l$.

Pour une fonction $V \geq 0$, on pose

$$m(V) := \inf_{(x, x') \in \Delta^c} \{V(x) + V(x')\}. \quad (4.13)$$

Corollaire 4.7 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$, et un entier $q \geq 1$.

Supposons H2[C, D] et H5fm[q, C, D].

(i) pour tout réel $0 \leq \beta \leq 1$ et entier $0 \leq l \leq q - 1$, et pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[S^\beta(l+1, T_0) \right] \leq \mathbb{1}_\Delta(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \left(m(V_0) \prod_{k=0}^l a_k \right)^{-\beta} \left\{ V_{l+1}(x) + V_{l+1}(x') \right\}^\beta,$$

(ii) et pour tout entier $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} [S^\beta(l+1, T_0 + m)] &\leq \mathbb{1}_\Delta(x, x') S^\beta(l+1, m) \\ &+ \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \left[S(l+1, m) + \sum_{j=1}^{l+1} S(l+1-j, m) \left(\prod_{k=0}^{j-1} a_k \right)^{-1} m(V_0)^{-1} \left\{ V_j(x) + V_j(x') \right\} \right]^\beta. \end{aligned}$$

4.2.3 Du temps de couplage au temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Notations Pour l réel positif ou nul, on note $\beta(l)$ le réel $0 < \beta(l) \leq 1$ tel que

$$l = \lceil l \rceil \beta(l)$$

où $\lceil l \rceil$ désigne la partie entière supérieure de l . Par convention, $\beta(0) := 1$. Soit

$$\bar{S}(l, \cdot) := S^{\beta(l)}(\lceil l \rceil, \cdot)$$

pour l réel positif ou nul. Remarquons que $\bar{S}(l, n) \sim n^l / (\lceil l \rceil!)^{\beta(l)}$ et que si l est entier, $\bar{S}(l, \cdot) = S(l, \cdot)$.

Pour un entier $k \geq 0$ et un réel $0 < \beta \leq 1$, on définit

$$A_m^{(\beta)}(k) := \sup_{(x,x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X}) \right) \int R_{x,x'}(x, dy) R_{x,x'}(x', dy') \mathbb{E}_{y,y',0} [S^\beta(k, T_0 + m)] < \infty,$$

où $R_{x,x'}(x, dy)$ désigne le noyau résiduel défini par (4.2). Soit $l = \lceil l \rceil \beta(l) =: q\beta$; on définit la matrice

$$A_m^{(l)} := \begin{bmatrix} A_m^{(\beta)}(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_m^{(\beta)}(1) & A_m^{(\beta)}(0) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & \\ A_m^{(\beta)}(q-1) & A_m^{(\beta)}(q-2) & \cdots & A_m^{(\beta)}(0) & 0 \\ A_m^{(\beta)}(q) & A_m^{(\beta)}(q-1) & \cdots & A_m^{(\beta)}(1) & A_m^{(\beta)}(0) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Enfin,

$$W^{(\beta)}(x, x') := \left[1; \mathbb{E}_{x,x',0} [S^\beta(1, T_0)]; \cdots; \mathbb{E}_{x,x',0} [S^\beta(q, T_0)] \right]^T. \quad (4.15)$$

Proposition 4.8 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D]. Soit un réel $l \geq 0$ tel que $A_m^{\beta(l)}(\lceil l \rceil) < \infty$. Pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} [\bar{S}(l, T - m)] \leq \epsilon^+ \left\langle \left(I - A_m^{(l)} \right)^{-1} W^{(\beta(l))}(x, x'); e_{\lceil l \rceil} \right\rangle$$

où I désigne la matrice identité, $\{e_k\}$, $0 \leq k \leq q$, est la base canonique de \mathbb{R}^{q+1} et $\langle \cdot; \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

Preuve 8 Démonstration du Théorème 7.3, Paragraphe 7.4.3, lorsque l est entier ; Démonstration du Théorème 7.4, Paragraphe 7.4.3, pour l réel. On écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T - m)] &\leq \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j}) \mathbb{1}_{\{1\}}(d_{T_j+1})] \\ &\leq \epsilon^+ \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})]\end{aligned}$$

puis on montre par récurrence que

$$\mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] \leq \left\langle \left(A_m^{(l)} \right)^j W^{(1)}(x, x'); e_l \right\rangle$$

en se servant de la propriété de convolution des suites $S(l, \cdot)$. Lorsque l est non entier, on utilise la concavité de l'application $x \mapsto |x|^\beta$, $\beta < 1$. \square

4.2.4 Conclusion : moment d'ordre q du temps de couplage

Notations Soit

$$t_l(x, x') := m(V_0)^{-1} \left(\prod_{k=0}^{l-1} a_k \right)^{-1} \left\{ V_l(x) + V_l(x') \right\} \quad 1 \leq l \leq q.$$

On définit pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{A}_m^{(\beta)}(k) := \sup_{(x, x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X}) \right) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \left[\mathbb{1}_\Delta(y, y') S^\beta(k, m) \right. \\ \left. + \mathbb{1}_{\Delta^c}(y, y') \left\{ S(k, m) + \sum_{j=1}^k S(k-j, m) t_j(y, y') \right\} \right],\end{aligned}$$

où $R_{x, x'}$ désigne le noyau résiduel défini par (4.2) et par convention $\sum_{k=1}^0 s_k := 0$. Soit $\hat{A}_m^{(l)}$ la matrice définie comme $A_m^{(l)}$ en remplaçant $A_m^{(\beta)}(k)$ par $\hat{A}_m^{(\beta)}(k)$.

Enfin, soit

$$\hat{W}^{(\beta)}(x, x') := \left[1; \mathbb{1}_\Delta(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') t_1^\beta(x, x'); \dots; \mathbb{1}_\Delta(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') t_q^\beta(x, x') \right]^T.$$

Théorème 4.9 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$ et un entier $q \geq 1$.

Supposons $H2[C, D]$ et $H5fm[q, C, D]$. Pour tout réel $0 \leq l \leq q$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} [\bar{S}(l, T - m)] \leq \epsilon^+ \left\langle \left(I - \hat{A}_m^{(l)} \right)^{-1} \hat{W}^{(\beta(l))}(x, x'); e_{\lceil l \rceil} \right\rangle$$

où I désigne la matrice identité, $\{e_k\}$, $0 \leq k \leq q$, est la base canonique de \mathbb{R}^{q+1} et $\langle \cdot; \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

Ce théorème implique l'existence de constante R_k telles que pour tout réel $0 \leq l \leq q$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[\bar{S}(l, T - m)] \leq \sum_{k=0}^{\lfloor l \rfloor} R_k \left\{ V_k(x) + V_k(x') \right\}^{\beta(l)}.$$

4.2.5 Vitesses de convergence

Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$ et un entier $q \geq 1$. Supposons H2[C, D] et H5fm[q, C, D].

Conditions H4 et H4' Soit $f := V_k^\alpha$ pour $0 < \alpha \leq 1$ et $1 \leq k \leq q$: $W_1 := V_k$ et $W_0 := V_{k-1}$ sont solutions de H4[f, C, D].

Soit $f := V_k^\alpha$ pour $0 < \alpha \leq 1$ et $0 \leq k \leq q-1$: $W_1 := V_{k+1}$ et $W_0 := V_k$ sont solutions de H4'[f, C, D].

Nous présentons les résultats issus de l'application des Théorèmes 4.1 et 4.5 et du Corollaire 4.4 lorsque $\lambda := \delta_x$, pour $x \in \mathcal{X}$, et λ' est la mesure invariante.

Mesure invariante Supposons que P possède une mesure de probabilité invariante π et qu'il existe $0 < \beta \leq 1$ tel que $\pi(V_q^\beta) < \infty$, ce qui implique

$$\mathbb{E}_{x,\pi,0}[\bar{S}(q\beta, T - m)] < \infty, \quad x \in \mathcal{X}.$$

En particulier, si C est petite (ce qui est le cas dans la plupart des applications), H5[q, C, D] établit l'existence de la mesure de probabilité invariante π et $\pi(V_{q-1}) < \infty$ (Cf. Paragraphe 2.1.4) : on peut appliquer les résultats suivants en substituant q par $q-1$ et en prenant $\beta := 1$.

Ergodicité en variation totale

$$\lim_n n^{q\beta} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} = 0, \quad x \in \mathcal{X},$$

et

$$\sum_{n \geq m} (n+1-m)^{q\beta-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq 2\mathbb{E}_{x,\pi,0}[\bar{S}(q\beta, T - m)], \quad x \in \mathcal{X}.$$

Ergodicité en norme f Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable et supposons que H4[f, C, D] est vérifiée et que la solution W_1 est π -intégrable :

$$\lim_n n^{q\beta(1-\alpha)} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0$$

et si H4'[f, C, D] est vérifiée, avec une solution W_1 π -intégrable,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq m} (n+1-m)^{(q\beta-1)(1-\alpha)} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \\ \leq 2^{1-\alpha} \|f\|_{W_0^\alpha} \int \delta_x(dy) \pi(dy') \left\{ C_2(y, y') \right\}^\alpha \mathbb{E}_{y, y', 0}^{\mathbf{1}-\alpha} [\bar{S}(q\beta, T-m)] \\ \leq 2^{1-\alpha} \|f\|_{W_0^\alpha} \left\{ \int \delta_x(dy) \pi(dy') C_2(y, y') \right\}^\alpha \left\{ \mathbb{E}_{x, \pi, 0} [\bar{S}(q\beta, T-m)] \right\}^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Dans de nombreuses applications, on établit la condition (plus forte) de Jarner-Roberts :

$$PV \leq V - cV^{1-\delta} + b\mathbb{I}_C$$

pour un ensemble C petite, des constantes $0 < \delta < 1$, $c > 0$, $b < \infty$ et une fonction $V \geq 1$ mesurable qui tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini et telle que $cV^{1-\delta} \leq V$ et $\sup_C V < \infty$. Dans ce cas,

- il existe $D \supset C$ tel que H2[C, D].
- la condition H5fm[q, C, D] est établie pour $q \geq 1$.
- il existe un réel $0 < \eta \leq 1$ et une constante $R_\eta < \infty$ tels que

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\bar{S}(\eta, T_0)] \leq R_\eta \left\{ V_0(x) + V_0(x') \right\}, \quad (x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

inégalité qui permettra d'améliorer les vitesses précédentes puisque l'on aura

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\bar{S}(q + \eta, T - m)] \leq R \left\{ V_q(x) + V_q(x') \right\}, \quad (x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

pour une constante $R < \infty$, V_0 et V_q étant solutions de la condition H5fm[q, C, D].

- P possède une mesure de probabilité invariante π et $\pi(V^{1-\delta}) < \infty$.

Nous détaillons cette condition et comparons les vitesses obtenues par la méthode de scission et celles obtenues par la méthode de couplage, pour la convergence de $P^n(x, \cdot)$ vers $P^n(x', \cdot)$ puis pour la convergence de $P^n(x, \cdot)$ vers π .

4.3 Convergence à un taux riemannien (2)

Dans cette section 4.3, P est un noyau ψ -irréductible apériodique.

4.3.1 Hypothèse H5jr

H5jr Il existe $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable, $V \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$, un ensemble $C \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$ petite et des constantes $0 < \delta < 1$, $c > 0$ et $b < \infty$ tels que $cV^{1-\delta} \leq V$, $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) \leq V(x) - cV^{1-\delta}(x) + b\mathbb{I}_C(x).$$

Dans la suite de cette section 4.3, on note q l'entier défini par

$$q := \lfloor 1/\delta \rfloor, \text{ si } 1/\delta \text{ non entier,} \\ q := \lfloor 1/\delta \rfloor - 1 \text{ sinon,}$$

de sorte que $q \geq 1$ et $0 < 1 - q\delta \leq \delta$.

Si $q \geq 2$, on peut toujours supposer (et on suppose) que

$$b > c \exp \left(\frac{1 - q\delta}{\delta} \frac{1 - q\delta + \delta}{1 - q\delta + 2\delta} \right).$$

4.3.2 Conséquences de la condition H5jr

Conditions H2 et H5fm

Lemme 4.10 *Supposons H5jr.*

Soit $0 < \epsilon \leq 1 - q\delta$. On définit

$$A_{0,\epsilon} := 1, \quad A_{k,\epsilon} := c^{-k}, \prod_{j=1}^k (\epsilon + j\delta)^{-1}, \quad 1 \leq k \leq q, \\ V_{k,\epsilon} := A_{k,\epsilon} V^{\epsilon+k\delta}, \quad 0 \leq k \leq q \\ b_k := b + \sup_C (V - V^{(k+1)\delta}), \quad 0 \leq k \leq q-1.$$

Soit $0 < a^1 < 1$ tel que $0 < a_{k,\epsilon} < 1$ pour tout $0 < \epsilon \leq 1 - q\delta$ et $0 \leq k \leq q-1$, où

$$a_{0,\epsilon} := a, \quad a_{k,\epsilon} := 1 - \frac{b_k}{c[\epsilon + (k+1)\delta]} \left(\frac{b_0}{1-a} \right)^{-(1+k\delta/\epsilon)}.$$

Enfin, soit

$$D_\epsilon := \left\{ V^\epsilon \leq \frac{b_0}{c(\epsilon + \delta)(1-a)} \right\} \cup C. \quad (4.16)$$

- (i) *$C \subset D_\epsilon$ et la condition H2[C, D_ϵ] est établie.*
- (ii) *Les fonctions $\{V_{k,\epsilon}\}$ et les constantes $\{a_{k,\epsilon}\}$ et $\{b_k\}$ sont solutions de H5fm[q, C, D_ϵ].*
- (iii) *Pour tout $\epsilon \leq \epsilon' \leq 1 - q\delta$, les fonctions $\{V_{k,\epsilon'}\}$ et les constantes $\{a_{k,\epsilon'}\}$ et $\{b_k\}$ sont solutions de H5fm[q, C, D_ϵ].*

¹Si $q > 1$, on peut prendre

$$1 > a > \max_{1 \leq k \leq q-1} 1 - b_0 \left[\frac{c[1 - q\delta + (k+1)\delta]}{b_k} \right]^{(1-q\delta)/(1-q\delta+k\delta)},$$

et si $q = 1$, tout réel $0 < a < 1$ convient.

Preuve 10 Existence de a lorsque $q > 1$: Supposons que pour tout $1 \leq k \leq q - 1$, la fonction

$$\epsilon \mapsto \left(\frac{c[\epsilon + (k+1)\delta]}{b_k} \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon+k\delta}} \quad (4.17)$$

est décroissante sur $[0, 1 - q\delta]$. Dans ce cas,

$$1 - b_0 \left[\frac{c[\epsilon + (k+1)\delta]}{b_k} \right]^{\epsilon/(\epsilon+k\delta)} \leq 1 - b_0 \left[\frac{c[1 - q\delta + (k+1)\delta]}{b_k} \right]^{(1-q\delta)/(1-q\delta+k\delta)}$$

pour tout $0 < \epsilon \leq 1 - q\delta$ et il suffit donc de poser $a_{k,\epsilon} = a_{k,1-q\delta}$ où

$$1 > a_{k,1-q\delta} > 1 - b_0 \left[\frac{c[1 - q\delta + (k+1)\delta]}{b_k} \right]^{(1-q\delta)/(1-q\delta+k\delta)}$$

puis de prendre $a := \max_{1 \leq k \leq q-1} a_{k,1-q\delta}$. On définit sur \mathbb{R}^+ la fonction

$$H(x) := \left(A(x+B) \right)^{x/(x+C)},$$

où A, B et C sont strictement positifs et $B - C = \delta < 1$. La dérivée $H'(x) := \frac{H(x)}{(x+C)^2} \left\{ C \ln(A(x+B)) + x \frac{x+C}{x+B} \right\}$ est négative pour tout x tel que

$$G(x) := A(x+B) - \exp \left(- \frac{x}{C} \frac{(x+C)}{(x+B)} \right) < 0.$$

La dérivée $G'(x) = A + C^{-1} \exp \left(x - (x+C)/(C(x+B)) \right) (x^2 + 2xB + CB)/(x+B)^2$ est positive sur \mathbb{R}^+ donc G est croissante sur \mathbb{R}^+ et H' est négative sur $[0, M]$ dès que $G(M) < 0$. Posons $A := c/b_k$, $B := (k+1)\delta$, $C := k\delta$ et $M := 1 - q\delta$. Alors $G(1 - q\delta) < 0$ si et seulement si

$$c(1 - q\delta + (k+1)\delta) \exp \left(\frac{1 - q\delta}{k\delta} \frac{1 - q\delta + k\delta}{1 - q\delta + (k+1)\delta} \right) < b_k.$$

Puisque la fonction $x \mapsto (1 - q\delta)(1 - q\delta + x)/(x(1 - q\delta + \delta + x))$ est décroissante sur $[\delta, (q-1)\delta]$, $G(1 - q\delta) < 0$ si

$$c \exp \left(\frac{1 - q\delta}{\delta} \frac{1 - q\delta + \delta}{1 - q\delta + 2\delta} \right) < b_k, \quad 1 \leq k \leq q - 1,$$

ce qui est vrai par définition de b . Par suite, H est décroissante et on a montré que la fonction définie par (4.17) est décroissante sur $[0, 1 - q\delta]$.

(i) Puisque C est petite, les ensembles $\{V \leq l\}$ sont petites (Cf. Paragraph 2.1.3) et D_ϵ est l'union de deux ensembles petites donc est petite (Proposition 5.5.5. [72]) ; ce qui établit H2[C, D_ε].

(ii) La condition H5jr implique

$$PV^\eta \leq V^\eta - \eta c V^{\eta-\delta} + \mathbb{1}_C \left(b + \sup_C \{V - V^\eta\} \right)$$

pour tout $0 < \eta \leq 1$ (Cf. Paragraphe 2.3.2). En conséquence, pour tout $0 \leq k \leq q - 1$,

$$PV_{k+1,\epsilon} \leq V_{k+1,\epsilon} - V_{k,\epsilon} + b_k A_{k+1,\epsilon} \mathbb{I}_C.$$

De plus, $1 \leq V_{0,\epsilon}$ et

$$V_{k,\epsilon} = c(\epsilon + (k+1)\delta) V^{-\delta} V_{k+1,\epsilon} \leq c V^{-\delta} V_{k+1,\epsilon} \leq V_{k+1,\epsilon} \quad 0 \leq k \leq q-1$$

puisque $\epsilon + (k+1)\delta \leq 1 - q\delta + (k+1)\delta \leq 1$ et $c V^{-\delta} < 1$. Enfin, sur D_ϵ^c ,

$$V^\epsilon \geq \frac{b_0 A_{1,\epsilon}}{1-a} \quad \text{et} \quad V_{k,\epsilon} \geq \frac{A_{k,\epsilon} b_k}{(1-a_{k,\epsilon})c[\epsilon + (k+1)\delta]} = \frac{A_{k+1,\epsilon} b_k}{1-a_{k,\epsilon}}, \quad 1 \leq k \leq q-1,$$

donc pour tout $0 \leq k \leq q-1$,

$$V_{k,\epsilon} - A_{k+1,\epsilon} b_k \geq a_{k,\epsilon} V_{k,\epsilon};$$

ce qui établit H5fm[q, C, D_\epsilon].

(iii) Les fonctions $\{V_{k,\epsilon}\}$ et les constantes $\{a_{k,\epsilon}\}$ et $\{b_k\}$ sont solutions de H5fm[q, C, D_\epsilon] ; puisque $D_{\epsilon'} \subset D_\epsilon$ et $\sup_{D_{\epsilon'}} V_{q,\epsilon'} < \infty$, elles sont aussi solutions de H5fm[q, C, D_\epsilon]. \square
Remarquons que pour établir la condition de croissance (4.11) à partir de la condition H5jr pour tout $0 \leq k \leq q-1$, on est obligé de choisir une fonction $V_{0,\epsilon}$ qui tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini. On s'interdit donc $\epsilon = 0$; cette contrainte aura une incidence sur la vitesse de convergence des itérations P^n . (Cf. Paragraphe 4.3.8).

Mesure invariante P possède une mesure de probabilité invariante et $\pi(V^{1-\delta}) < \infty$.

H5jr implique H4 et H4'

Proposition 4.11 *Supposons H5jr.*

(i) Pour toute fonction $f := V^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, et tout $0 < \epsilon \leq 1 - q\delta$, la condition H4[f, C, D_\epsilon] est vérifiée avec $W_1 \propto V$, $W_0 \propto V^{1-\delta}$.

En conséquence, pour toute fonction $f := V^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1 - \delta$, et tout $0 < \epsilon \leq 1 - q\delta$, la condition H4[f, C, D_\epsilon] est vérifiée avec $W_1 \propto V^{1-\delta}$ π -intégrable.

(ii) Pour toute fonction $f := V^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1 - \delta$, et tout $0 < \epsilon \leq 1 - q\delta$, la condition H4'[f, C, D_\epsilon] est vérifiée avec $W_1 \propto V$, $W_0 \propto V^{1-\delta}$.

En conséquence, si $\delta < 1/2$, pour toute fonction $f := V^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1 - 2\delta$, et tout $0 < \epsilon \leq 1 - q\delta$, la condition H4'[f, C, D_\epsilon] est vérifiée avec $W_1 \propto V^{1-\delta}$ π -intégrable et $W_0 \propto V^{1-2\delta}$.

Preuve 11 On utilise les notations et résultats du Lemme 4.10. On pose

$$W_1 := V_{q,1-q\delta} \quad \text{et} \quad W_0 := V_{q-1,1-q\delta}.$$

D'après l'assertion (iii) du Lemme 4.10, les fonctions $\{V_{k,1-q\delta}\}$ sont solutions de H5fm[q, C, D_\epsilon], ce qui établit H4[f, C, D_\epsilon] et H4'[f, C, D_\epsilon]. \square

4.3.3 Conditions de drift et temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Notations : suites $S^{*\eta}$ Soient $0 \leq \eta \leq 1$ et un entier $q \geq 0$. On définit les suite $S^{*\eta}(q, \cdot)$ par

$$\begin{aligned} S^{*\eta}(0, 0) &:= 1 & S^{*\eta}(0, n) &:= \bar{S}(\eta, n) \quad n \geq 1. \\ S^{*\eta}(q, 0) &:= 1 & S^{*\eta}(q, n) &:= \sum_{k=1}^n S^{*\eta}(q-1, k), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $\eta = 1$, $S^{*\eta}(q, \cdot) = S(q+1, \cdot)$, et lorsque $\eta = 0$, $S^{*\eta}(q, \cdot) = S(q, \cdot)$. Remarquons que $S^{*\eta}(q, n) \sim C_{\eta, q} n^{q+\eta}$ lorsque n tend vers l'infini. Nous démontrons en Annexe C.10 la propriété suivante

pour tout $l \geq 0, n, m \geq 1$,

$$S^{*\eta}(l, n+m) \leq \sum_{q=0}^l S^{*\eta}(l-q, n) S(q, m) + S^{*\eta}(l, m), \quad (4.18)$$

avec égalité si $\eta = 1$.

Proposition 4.12 Supposons H5jr. Soient

$$\frac{1 - q\delta}{1 - q\delta + \delta} \leq \eta < \frac{1 - q\delta}{\delta} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < \epsilon := \frac{1 - q\delta - \eta\delta}{\eta} \leq 1 - q\delta.$$

On note $V_k := V_{k,1-q\delta}$, $0 \leq k \leq q$, et $a_k := a_{k,1-q\delta}$, $1 \leq k \leq q-1$ où $\{V_{k,1-q\delta}\}$ et $\{a_{k,1-q\delta}\}$ sont définis dans le Lemme 4.10.

Soit $D := D_\epsilon$ défini par (4.16)².

(i) $H2[C, D]$ est vérifiée et

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\bar{S}(\eta, T_0)] \leq \mathbb{1}_\Delta(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \left\{ a_0 c (\epsilon + \delta) m(V^\epsilon) \right\}^{-\eta} \left\{ V_0(x) + V_0(x') \right\},$$

où $m(V^\epsilon)$ est donné par (4.13) ;

(ii) et pour tout $1 \leq l \leq q$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} [S^{*\eta}(l, T_0)] &\leq \mathbb{1}_\Delta(x, x') \\ &+ \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \left\{ a_0 c (\epsilon + \delta) m(V^\epsilon) \right\}^{-\eta} \left(\prod_{k=0}^{l-1} a_k \right)^{-1} \left\{ V_l(x) + V_l(x') \right\}. \end{aligned}$$

² D est d'autant plus grand au sens de l'inclusion que η est grand.

Preuve 12 (i) La proposition 4.6 montre que pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \left\{ V_{0,\epsilon}(X_k) + V_{0,\epsilon}(X'_k) \right\} \right] \leq a_0^{-1} \left\{ V_{1,\epsilon}(x) + V_{1,\epsilon}(x') \right\},$$

et donc, puisque $V_{0,\epsilon} = V^\epsilon$ et $V_{1,\epsilon} = c^{-1}(\epsilon + \delta)^{-1}V^{\epsilon+\delta}$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [T_0] \leq \left(a_0 \ c(\epsilon + \delta) \ m(V^\epsilon) \right)^{-1} \left\{ V^{\epsilon+\delta}(x) + V^{\epsilon+\delta}(x') \right\}, \quad (x, x') \in \Delta^c.$$

Puis on applique l'inégalité de Jensen, en remarquant que $(\epsilon + \delta)\eta = 1 - q\delta$ et $V^{1-q\delta} = V_0$.

(ii) En utilisant le Lemme 4.10(iii) et la Proposition 4.6, pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \left\{ V_l(\Phi_k) + V_l(\Phi'_k) \right\} \right] \leq a_l^{-1} \left\{ V_{l+1}(x) + V_{l+1}(x') \right\}, \quad (4.19)$$

pour $0 \leq l \leq q-1$. Nous démontrons la propriété par récurrence sur l . Pour $l=1$, $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} [S^{*\eta}(1, T_0)] &= \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=1}^{T_0} S^{*\eta}(0, k) \right] = \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=1}^{T_0} \bar{S}(\eta, k) \right] \\ &= \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \bar{S}(\eta, T_0 - k) \right] = \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \mathbb{E}_{X_k, X'_k, 0} [\bar{S}(\eta, T_0)] \right] \\ &\leq \left(a_0 \ c \ (\epsilon + \delta) \ m(V^\epsilon) \right)^{-1} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \{V_0(X_k) + V_0(X'_k)\} \right] \\ &\leq \left(a_0 \ c \ (\epsilon + \delta) \ m(V^\epsilon) \right)^{-1} a_0^{-1} \{V_1(x) + V_1(x')\}. \end{aligned}$$

Supposons la propriété établie pour $l \leq q-1$. Pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} [S^{*\eta}(l+1, T_0)] &= \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=1}^{T_0} S^{*\eta}(l, k) \right] = \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} S^{*\eta}(l, T_0 - k) \right] \\ &= \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \mathbb{E}_{X_k, X'_k, 0} [S^{*\eta}(l, T_0)] \right] \\ &\leq \left(a_0 \ c \ (\epsilon + \delta) \ m(V^\epsilon) \right)^{-1} \left(\prod_{k=0}^{l-1} a_k \right)^{-1} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \{V_l(X_k) + V_l(X'_k)\} \right] \\ &\leq \left(a_0 \ c \ (\epsilon + \delta) \ m(V^\epsilon) \right)^{-1} \left(\prod_{k=0}^l a_k \right)^{-1} \{V_{l+1}(x) + V_{l+1}(x')\}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence. \square

4.3.4 Du temps de couplage au temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Notations Pour un entier $k \geq 0$ et un réel $0 < \eta \leq 1$, on note

$$A_m^{*\eta}(k) := \sup_{(x,x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X})\right) \int R_{x,x'}(x, dy) R_{x,x'}(x', dy') \mathbb{E}_{y,y',0} [S^{*\eta}(k, T_0 + m)] < \infty,$$

où $R_{x,x'}$ désigne le noyau résiduel défini par (4.2); et pour un entier $q \geq 1$, on note $A_m^{*\eta,q}$ la matrice définie comme en (4.14), en substituant $A_m^{(\beta)}(k)$ par $A_m^{*\eta}(k)$, $0 \leq k \leq q$. Enfin, soit

$$W^{*\eta,q}(x, x') := [\mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(0, T_0)]; \dots; \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(q, T_0)]]^T.$$

Proposition 4.13 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D]. Soient un entier $q \geq 1$ et un réel $0 < \eta \leq 1$ tels que $A_m^{*\eta}(q) < \infty$. Alors pour tout entier $0 \leq l \leq q$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T - m)] \leq \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} \left\{ \left\langle A_m^{*\eta,q} \left(I - A_m^{(q)} \right)^{-1} W^{(1)}(x, x'); e_l \right\rangle + \left\langle W^{*\eta,q}(x, x'); e_l \right\rangle \right\}$$

où $A_m^{(q)}$ et $W^{(1)}(x, x')$ sont définis par (4.14) et (4.15), I désigne la matrice identité, $\{e_k\}$, $0 \leq k \leq q$, est la base canonique de \mathbb{R}^{q+1} et $\langle \cdot; \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

Preuve 13 On écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T - m)] &\leq \epsilon^+ \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] \\ &\leq \epsilon^+ \left(\mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T_0)] + \sum_{j \geq 1} \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] \right) \\ &\leq \epsilon^+ \left(\left\langle W^{*\eta,q}(x, x'); e_l \right\rangle + \sum_{j \geq 1} \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] \right). \end{aligned}$$

Pour estimer le terme général de la série, nous utiliserons l'inégalité suivante, établie dans la démonstration de la Proposition 4.8 : pour tout $0 \leq k \leq l$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] \leq \left\langle \{A_m^{(q)}\}^j W^{(1)}(x, x'); e_l \right\rangle.$$

En utilisant la majoration (4.18), il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_j) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] &= \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_{j-1} + m + T_0 \circ \theta^{T'_{j-1}+m}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] \\ &\leq \sum_{k=0}^l \mathbb{E}_{x,x',0}[S(k, T'_{j-1}) S^{*\eta}(l-k, m + T_0 \circ \theta^{T'_{j-1}+m}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] + \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] \\ &\leq \sum_{k=0}^l A_m^{*\eta}(l-k) \mathbb{E}_{x,x',0}[S(k, T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j})] + (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}})] \\ &\leq \sum_{k=0}^l A_m^{*\eta}(l-k) \left\langle \{A_m^{(q)}\}^j W^{(1)}(x, x'); e_k \right\rangle + (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0}[S^{*\eta}(l, T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}})]. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} \mathbb{E}_{x,x',0} [S^{*\eta}(l, T'_j) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j})] &\leq (1 - \epsilon^-) \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} [S^{*\eta}(l, T'_j) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j})] \\ &\quad + \sum_{k=0}^l A_m^{*\eta}(l-k) \left\langle (I - A_m^{(q)})^{-1} W^{(1)}(x, x'); e_k \right\rangle \end{aligned}$$

et

$$\epsilon^- \sum_{j \geq 1} \mathbb{E}_{x,x',0} [S^{*\eta}(l, T'_j) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j})] \leq (1 - \epsilon^-) [S^{*\eta}(l, T_0)] + \left\langle A_m^{*\eta,q}(I - A_m^{(q)})^{-1} W^{(1)}(x, x'); e_l \right\rangle$$

□

Supposons H5jr ; soit $(1 - q\delta)/(1 - q\delta + \delta) \leq \eta < (1 - q\delta)/\delta$. Nous montrons que l'on peut appliquer la Proposition 4.13. La proposition 4.12 établit l'existence d'un ensemble $D \supset C$ tel que H2[C, D] et pour tout $0 \leq k \leq q$

$$\mathbb{E}_{y,y',0} [S^{*\eta}(k, T_0)] \leq R_k \{V_k(x) + V_k(x')\}, \quad (x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

pour une constante $R_k < \infty$. En utilisant la majoration (4.18), il vient que pour tout $0 \leq k \leq q$ et tout entier $m \geq 1$,

$$\mathbb{E}_{y,y',0} [S^{*\eta}(k, T_0 + m)] \leq \sum_{j=0}^k R_{k,j} \{V_j(x) + V_j(x')\}, \quad (x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$$

pour des constantes $R_{k,j} < \infty$. De plus, V_q vérifie la condition de drift

$$PV_q \leq V_q - V_{q-1} + b_{q-1} \mathbb{I}_C$$

et $\sup_C V_q < \infty$; donc $\sup_C P^m V_q < \infty$ et puisque $V_0 \leq \dots \leq V_q$, $\sup_C P^m V_k < \infty$, $0 \leq k \leq q$. En conséquence, $A_m^{*\eta}(q) < \infty$, et l'on peut appliquer la Proposition 4.13.

4.3.5 Conclusion : moment d'ordre $q + \eta$, $0 < \eta \leq 1$, du temps de couplage

Supposons H5jr. Soient $0 < \eta \leq 1$ et $\epsilon := (1 - q\delta)/\eta - \delta \leq 1 - q\delta$.

Notations Pour tout $0 \leq l \leq q$, on pose $V_k := V_{k,1-q\delta} \propto V^{1-k\delta+q\delta}$ et pour $0 \leq k \leq q-1$, $a_k := a_{k,1-q\delta}$ où les fonctions $\{V_{k,1-q\delta}\}$ et les constantes $\{a_{k,1-q\delta}\}$ sont définies dans le Lemme 4.10. Soit

$$t_l^{*\eta}(x, x') := \left\{ a_0 c (\epsilon + \delta) m(V^\epsilon) \right\}^{-\eta} \left(\prod_{k=0}^{l-1} a_k \right)^{-1} \{V_l(x) + V_l(x')\} \quad 0 \leq l \leq q,$$

avec la convention $\prod_{k=0}^{-1} a_k := 1$. On définit pour tout $0 \leq k \leq q$

$$\hat{A}_m^{*\eta}(k) := \sup_{(x,x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X}) \right) \int R_{x,x'}(x, dy) R_{x,x'}(x', dy') \left[\mathbb{I}_{\Delta}(y, y') S^{*\eta}(k, m) + \mathbb{I}_{\Delta^c}(y, y') \left\{ \sum_{j=0}^k S(j, m) t_{k-j}^{*\eta}(y, y') + S^{*\eta}(k, m) \right\} \right],$$

où $R_{x,x'}$ désigne le noyau résiduel défini par (4.2) ; soit $\hat{A}_m^{*\eta,q}$ la matrice définie comme en (4.14), en substituant $A_m^{(\beta)}(k)$ par $\hat{A}_m^{*\eta}(k)$, $0 \leq k \leq q$. Enfin,

$$\widehat{W}^{*\eta,q}(x, x') := \left[\mathbb{I}_{\Delta}(x, x') + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') t_0^{*\eta}(x, x'); \dots; \mathbb{I}_{\Delta}(x, x') + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') t_q^{*\eta}(x, x') \right]^T.$$

Théorème 4.14 *Supposons H5jr. Soit*

$$\frac{1 - q\delta}{1 - q\delta + \delta} \leq \eta < \frac{1}{\delta} - q.$$

Il existe $D \supset C$ tel que la condition de minoration H2[C, D] est vérifiée et pour tout entier $0 \leq l \leq q$

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[S^{*\eta}(l, T-m) \right] \leq \epsilon^+ \left\{ \left\langle \hat{A}_m^{*\eta,q} \left(I - \hat{A}_m^{(q)} \right)^{-1} \widehat{W}^{(1)}(x, x'); e_l \right\rangle + \frac{1 - \epsilon^-}{\epsilon^-} \widehat{W}^{*\eta,1}(x, x') \right\}$$

où $\hat{A}_m^{(q)}$ et $\widehat{W}^{(1)}(x, x')$ sont définis au Paragraphe 4.2.4, I désigne la matrice identité, $\{e_k\}$, $0 \leq k \leq q$, est la base canonique de \mathbb{R}^{q+1} et $\langle \cdot; \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

En particulier,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[S^{*\eta}(q, T-m) \right] \leq \sum_{j=0}^q R_j \{V_j(x) + V_j(x')\}$$

pour des constantes $R_j < \infty$ avec $S^{*\eta}(q, n) \sim n^{q+\eta}$ lorsque n tend vers l'infini, et $q + \eta < 1/\delta$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[\left(S^{*\eta}(q, T-m) \right)^{1-\delta} \right] \leq RV^{1-\delta}(x) < \infty,$$

avec $[S^{*\eta}(q, n)]^{1-\delta} \sim n^{(q+\eta)(1-\delta)}$ lorsque n tend vers l'infini.

4.3.6 Comparaison des vitesses de convergence en norme de variation totale obtenues par la méthode de scission et par la méthode de couplage

Supposons H1 et H5jr.

Les résultats obtenus par la méthode de scission se déduisent des Théorèmes 3.1 et 3.2. Les résultats obtenus par la méthode de couplage se déduisent des Théorèmes 4.1 et 4.14.

La condition H5jr implique la condition (3.1) Nous avons montré au Paragraphe 2.3.2 que pour tout $1 \leq l \leq 1/\delta$, il existe une constante $R_l < \infty$ telle que pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} (k+1)^{l-1} V^{1-l\delta}(\Phi_k) \right] \leq R_l V(x).$$

Convergence de $P^n(x, \cdot)$ vers $P^n(x', \cdot)$ Par la méthode de scission, nous obtenons

$$\lim_n n^{1/\delta} \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} = 0,$$

et il existe une constante $R < \infty$ telle que

$$\sum_n n^{1/\delta-1} \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} \leq R\{V(x) + V(x')\}.$$

Par la méthode de couplage, nous obtenons

$$\lim_n n^\gamma \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} = 0, \quad \forall \gamma < 1/\delta,$$

et

$$\sum_n n^{\gamma-1} \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{VT} \leq R\{V(x) + V(x')\}, \quad \forall \gamma < 1/\delta.$$

Convergence de $P^n(x, \cdot)$ vers π Par la méthode de scission, nous obtenons

$$\lim_n n^{1/\delta-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} = 0,$$

et si $\delta \leq 1/2$,³

$$\sum_n n^{1/\delta-2} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq R V^{1-\delta}(x).$$

Par la méthode de couplage, nous obtenons

$$\lim_n n^{\gamma-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} = 0, \quad \forall \gamma < 1/\delta,$$

et

$$\sum_n n^{\gamma-2} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq R V^{1-\delta}(x), \quad \forall \gamma < 1/\delta.$$

³On montre en effet que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} \Delta[(k+1)^{l-1}] V^{1-l\delta}(\Phi_k) \right] \leq R V^{1-\delta}(x)$$

Pour cela, on remarque que $W = V^{1-\delta}$ vérifie la condition $PW \leq W - c'W^{1-d} + b'\mathbb{I}_C$ avec $d := \delta/(1-\delta)$. En substituant V par W et δ par d dans les calculs du Paragraphe 2.3.2, il vient que pour tout $1 \leq L \leq 1/d$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} (k+1)^{L-1} W^{1-L\delta}(\Phi_k) \right] \leq RW(x)$$

On prend L tel que $W^{1-L\delta} = V^{1-l\delta}$ i.e. $L := l - 1$ et on obtient le résultat.

4.3.7 Comparaison des vitesses de convergence en norme f obtenues par la méthode de scission et par la méthode de couplage

Les résultats obtenus par la méthode de scission se déduisent des Théorèmes 3.1 et 3.2. Ceux obtenus par la méthode de couplage se déduisent du Corollaire 4.4, du Théorème 4.5, de la Proposition 4.11 et du Théorème 4.14.

Convergence de $P^n(x, \cdot)$ vers $P^n(x', \cdot)$ Par la méthode de scission, nous obtenons

$$\sum_n n^{l-1} \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{V^{1-l\delta}} \leq R\{V(x) + V(x')\} \quad 1 \leq l < 1/\delta.$$

Par la méthode de couplage, nous obtenons

$$\lim_n n^\gamma \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{V^{1-l\delta}} = 0, \quad 0 \leq l < 1/\delta \text{ et } \gamma < l, \quad (4.20)$$

et

$$\sum_n (n+1)^{\gamma-1} \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_{V^{1-l\delta}} \leq R\{V(x) + V(x')\}, \quad 1 \leq l < 1/\delta \text{ et } \gamma < l.$$

Convergence de $P^n(x, \cdot)$ vers π Par la méthode de scission, nous obtenons

$$\lim_n n^{l-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{V^{1-l\delta}} = 0, \quad 1 \leq l < 1/\delta,$$

et si $\delta \leq 1/2$,

$$\sum_n (n+1)^{l-2} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{V^{1-l\delta}} \leq RV^{1-\delta}(x), \quad 2 \leq l < 1/\delta.$$

Par la méthode de couplage, nous obtenons

$$\lim_n n^{\gamma-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{V^{1-l\delta}} = 0, \quad 1 \leq l < 1/\delta \text{ et } \gamma < l$$

et si $\delta < 1/2$,

$$\sum_n (n+1)^{\gamma-2} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{V^{1-l\delta}} \leq RV^{1-\delta}(x), \quad 2 \leq l < 1/\delta \text{ et } \gamma < l.$$

4.3.8 Conclusion

La convergence (4.20) obtenue par la méthode de couplage, est, à notre connaissance nouvelle. Cette étude souligne néanmoins la faiblesse de la méthode de couplage, lorsque l'on ne s'intéresse qu'à l'étude de la convergence des itérations du noyau P à une vitesse riemannienne. On peut constater une (légère) différence entre les vitesses obtenues par la méthode de scission d'une part et la méthode de couplage d'autre part.

”Perte” de vitesse La méthode de couplage requiert le contrôle du temps d’entrée dans un ensemble d’un processus qui peut être vu comme deux chaînes indépendantes là où la méthode de scission ne se sert que d’une seule chaîne. Pour ce faire, nous avons proposé d’ajouter à une condition de drift, une condition de croissance de certaines fonctions solutions du drift. L’étude de l’ergodicité à un taux riemannien sous une condition de la forme H5jr montre clairement que cette condition de croissance interdit de prendre $V_0 := 1$; et cette contrainte explique des conditions de la forme $\gamma < 1/\delta$, $\gamma < l$, $\delta < 1/2$, là où la méthode de scission accepte une inégalité large.

Néanmoins, l’approche par couplage permet de calculer explicitement un contrôle de la convergence, et ce, de façon relativement simple par rapport à ce qui pourrait être énoncé à partir de la méthode de scission.

A notre connaissance, le calcul de bornes dans le cas polynomial est un résultat nouveau : les seules travaux dans ce domaine concernent le cas des taux géométriques. On peut certainement expliquer cela par la difficulté de vérifier concrètement la condition de Tuominen et Tweedie. Nos travaux [38, 39], ainsi que ceux de Jarner et Roberts [50] ont permis de développer une caractérisation plus ”pratique” de l’ergodicité riemannienne ; et donc de prouver la convergence de nombreux modèles (Cf. Chapitre 5).

Dans la section suivante, nous étudions le cas de l’ergodicité géométrique : là encore nous supposons la condition de minoration H2[C, D] et formulons une condition de drift basée cette fois sur la condition de Foster-Lyapunov ; nous définissons $\beta_{FM} > 1$ tel que pour tout $\beta < \beta_{FM}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq \beta^{-n} R V(x),$$

où V est solution de la condition de drift, et calculons explicitement R en fonction des termes apparaissant dans la condition de drift et dans la condition de minoration. Nous comparons nos résultats à ceux de Roberts et Tweedie au travers de l’exemple simple d’une marche aléatoire sur \mathbb{N} .

Nous montrons de plus que pour tout $\beta < \beta_{FM}$, il existe une constante $R_\beta < \infty$ (dont nous donnons une expression explicite) telle que

$$\sum_n \beta^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V \leq RV(x)$$

où V est solution de la condition de Foster-Lyapunov.

4.4 Convergence à un taux géométrique

Dans cette section 4.4, P est ψ -irréductible apériodique.

4.4.1 Hypothèse H6[C, D]

Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$.

H6[C, D] Il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable, des constantes $0 < \lambda_* < 1$ et $b < \infty$ telles que $\sup_D V < \infty$ et

$$PV \leq \lambda_* V + b \mathbb{1}_C, \quad (4.21)$$

$$\beta_*^{-1} := \lambda_* + \frac{b}{1 + \inf_{D^c} V} < 1. \quad (4.22)$$

Lorsque C est un ensemble petite, la condition de drift de Foster-Lyapunov (4.21) implique l'existence d'une mesure de probabilité invariante π et $\pi(V) < \infty$.

4.4.2 Conditions de drift et temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Proposition 4.15 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D] et H6[C, D]. Pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\beta_*^{T_0} \right] \leq \mathbb{1}_\Delta(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \{2\beta_*\}^{-1} \{V(x) + V(x')\}.$$

Preuve 15 Soient $\psi := (\lambda_*^{-1}b)/\{1 + \inf_{D^c} V\}$ et $W(x, x', d) = W(x, x') := \lambda_*^{-1}(1 + \psi)^{-1}\{V(x) + V(x')\}$, $d = 0, 1$. Supposons que pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$P^*W(x, x', 0) \leq \lambda_*(1 + \psi)W(x, x'). \quad (4.23)$$

En procédant comme dans la démonstration de la Proposition 2.2, il vient que pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\lambda_*^{-T_0} (1 + \psi)^{-T_0} W(X_{T_0}, X'_{T_0}) \mathbb{1}_{T_0 < \infty} \right] \leq W(x, x').$$

Puisque $W(x, x') < \infty$ pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $T_0 < \infty P_{x, x', 0}$ -p.s. ce qui établit la Proposition. Montrons (4.23). Par hypothèse,

$$P^*W(x, x', 0) \leq \lambda_* W(x, x') + \lambda_*^{-1}(1 + \psi)^{-1}b \left\{ \mathbb{1}_{C \times D^c}(x, x') + \mathbb{1}_{D^c \times C}(x, x') \right\}.$$

Sur $C \times D^c$, $V(x) + V(x') \geq 1 + \inf_{D^c} V = \lambda_*^{-1}b/\psi$ donc $\lambda_* \psi W(x, x') \geq \lambda_*^{-1}(1 + \psi)^{-1}b$. On montre la même inégalité sur $D^c \times C$; par suite,

$$P^*W(x, x', 0) \leq \lambda_* W(x, x') + \lambda_* \psi W(x, x') = \lambda_*(1 + \psi)W(x, x').$$

□

Corollaire 4.16 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D] et H6[C, D]. Pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et $\kappa < \beta_*$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \kappa^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] \leq \left(\mathbb{1}_\Delta(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \{1 - \kappa \beta_*^{-1}\} \right) (V(x) + V(x')).$$

Preuve 16 Nous avons démontré dans la preuve de la Proposition précédente que pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$P^*W(x, x', 0) \leq \beta_*^{-1}W(x, x').$$

Pour tout $\kappa < \beta_*$, posons $W_n := \kappa^n W$. Il vient que pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$P^*W_{n+1}(x, x', 0) \leq W_n(x, x') - \kappa^n(1 - \kappa \beta_*^{-1})W(x, x')$$

et en procédant comme dans la démonstration de la Proposition 2.4, $(x, x') \in \Delta^c$,

$$(1 - \kappa \beta_*^{-1})\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0-1} \kappa^k W(X_k, X_k) \right] + \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[W_{T_0}(X_{T_0}, X'_{T_0}) \mathbb{1}_{T_0 < \infty} \right] \leq W(x, x').$$

On conclut en remarquant que T_0 est fini $P_{x, x'}$ -p.s., $(x, x') \in \Delta^c$, et que

$$W_{T_0}(X_{T_0}, X_{T_0}) \geq \kappa^{T_0}W(x, x').$$

□

4.4.3 Du temps de couplage au temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Notations Soit $\beta > 1$. On définit

$$A_m(\beta) := \sup_{(x, x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X}) \right) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \mathbb{E}_{y, y', 0} [\beta^{m+T_0}] \quad (4.24)$$

où $R_{x, x'}$ désigne le noyau résiduel défini par (4.2).

Proposition 4.17 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D]. Soit $\beta > 1$ tel que $A_m(\beta) < 1$. Pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\beta^{T-m}] \leq \epsilon^+ (1 - A_m(\beta))^{-1} \mathbb{E}_{x, x', 0} [\beta^{T_0}].$$

Preuve 17 Démonstration du Théorème 7.11(i), Paragraphe 7.4.4. □

Supposons H2[C, D] et H6[C, D]. La proposition 4.15 prouve l'existence, pour tout $\beta \leq \beta_*$ d'une constante $R_\beta < \infty$ telle que

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\beta^{m+T_0}] \leq R_\beta \{V(x) + V(x')\}.$$

Or $PV \leq V + b\mathbb{1}_C$ et $\sup_D V < \infty$ donc $\sup_D P^m V < \infty$ et pour tout $\beta \leq \beta_*$, $A_m(\beta) < \infty$. De plus, $\beta \mapsto A_m(\beta)$ est croissante sur $[1, \beta_*]$ et $A_m(1) = \sup_{(x,x') \in \Delta} (1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X})) \leq 1 - \epsilon^- < 1$: en conséquence, pour tout β "suffisamment proche" de 1, $A_m(\beta) < 1$ et on peut appliquer la Proposition 4.17.

4.4.4 Conclusion : moment géométrique β_{FM} du temps de couplage

Notations Soit $1 \leq \beta \leq \beta_*$. On définit

$$\begin{aligned} \hat{A}_m(\beta) := \beta^m \sup_{(x,x') \in \Delta} & \left(1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X}) \right) \int R_{x,x'}(x, dy) R_{x,x'}(x', dy') \left\{ \mathbb{1}_{\Delta}(y, y') \right. \\ & \left. + \mathbb{1}_{\Delta^c}(y, y') \left[\{2\beta_*\}^{-1} \{V(y) + V(y')\} \right]^{\ln \beta / \ln \beta_*} \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

où $R_{x,x'}$ désigne le noyau résiduel défini par (4.2). L'application $\beta \mapsto \hat{A}_m(\beta)$ est continue et $\hat{A}_m(1) < 1$: on note

$$\beta_{FM} := \sup\{1 < \beta < \beta_*, \hat{A}_m(\beta) < 1\}. \quad (4.26)$$

Enfin, soit

$$\widehat{W}^{(\beta)}(x, x') := \mathbb{1}_{\Delta}(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \left(\{2\beta_*\}^{-1} \{V(x) + V(x')\} \right)^{\ln \beta / \ln \beta_*}. \quad (4.27)$$

Théorème 4.18 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D] et H6[C, D]. Pour tout $1 \leq \beta < \beta_{FM}$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\beta^{T-m} \right] \leq \epsilon^+ \left(1 - \hat{A}_m(\beta) \right)^{-1} \widehat{W}^{(\beta)}(x, x').$$

Preuve 18 Le théorème se déduit des Propositions 4.15 et 4.17. \square

Lorsque l'on substitue la condition de minoration H2[C, D] par la condition de minoration uniforme H2'[C], on peut calculer une minoration de β_{FM} . Supposons H2'[C] ce qui revient à poser (entre autre) $D = C$, $\Delta = C \times C$ et $\rho_{x,x'}(\mathcal{X}) = \epsilon > 0$. Soit

$$A := \sup_C P^m V \leq \sup_{x \in C} \left[\lambda_*^m V(x) + b \sum_{k=0}^{m-1} P^k(x, C) \lambda_*^{m-1-k} \right]. \quad (4.28)$$

Comme $V(x) + V(x') \geq 2$,

$$\hat{A}_m(\beta) \leq (1 - \epsilon) \sup_{(x,x') \in C \times C} \left[\beta_*^m \{R_{x,x'}V(x) + R_{x,x'}V(x')\}/2 \right]^{\ln \beta / \ln \beta_*}$$

et puisque $R_{x,x'}V(x) \leq (P^m V(x) - \epsilon)/(1 - \epsilon) \leq (A - \epsilon)/(1 - \epsilon)$, il vient

$$\hat{A}_m(\beta) \leq (1 - \epsilon) \left[\beta_*^m \left(\frac{A - \epsilon}{1 - \epsilon} \right) \right]^{\ln \beta / \ln \beta_*}.$$

Par suite, β_{FM} est supérieur ou égal à la solution de l'équation

$$\ln(1-\epsilon) + \frac{\ln \beta}{\ln \beta_*} \ln \left(\beta_*^m \frac{A-\epsilon}{1-\epsilon} \right) = 0.$$

Donc

$$\frac{-\ln \beta_* \ln(1-\epsilon)}{\ln \{\beta_*^m(A-\epsilon)\} - \ln(1-\epsilon)} \leq \ln \beta_{FM} \leq \ln \beta_*.$$

4.4.5 Ergodicité géométrique en norme de variation totale

Corollaire 4.19 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D] et H6[C, D]. Supposons de plus que P possède une mesure de probabilité invariante π . Pour tout $1 \leq \beta < \beta_{FM}$, défini par (4.26), $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq 2 \beta^{-(n+1-m)} \left(1 - (1-\epsilon^+) \beta\right) \left(1 - \hat{A}_m(\beta)\right)^{-1} \int \delta_x(dy) \pi(dy') \widehat{W}^{(\beta)}(y, y'), \quad (4.29)$$

où $\hat{A}_m(\beta)$ et $\widehat{W}^{(\beta)}(y, y')$ sont définis par (4.25) et (4.27).

Preuve 19 Le corollaire se déduit des Théorèmes 4.1 et 4.18. \square

Lorsque l'on substitue H2[C, D] par la condition de minoration uniforme H2'[C], on peut calculer, pour chaque $(x, n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ le taux β qui minimise la majoration de $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT}$. Les calculs suivants sont adaptés du Théorème 5.1. de Roberts et Tweedie [99]. On pose

$$\xi := \ln \left(\int \delta_x(dy) \pi(dy') \widehat{W}^{(\beta_*)}(y, y') \right) / \ln \beta_*, \quad \text{et} \quad \eta := \ln \left(\beta_*^m \frac{A-\epsilon}{1-\epsilon} \right) / \ln \beta_*,$$

où A est défini par (4.28), de sorte que

$$\int \delta_x(dy) \pi(dy') \widehat{W}^{(\beta)}(y, y') \leq \beta^\xi, \quad \text{et} \quad \hat{A}_m^{(\beta)} \leq (1-\epsilon) \beta^\eta.$$

Alors

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq 2 \beta^{-(n+1-m)+\xi} \frac{1 - (1-\epsilon) \beta}{1 - (1-\epsilon) \beta^\eta}.$$

A défaut de savoir calculer explicitement la valeur $\hat{\beta}$ pour laquelle la quantité de droite est minimale, on calcule le minimum de

$$\frac{\beta^{-(n+1-m)+\xi}}{1 - (1-\epsilon) \beta^\eta}$$

que l'on considère comme une bonne approximation de $\hat{\beta}$. Par suite, la majoration (4.29) est (approximativement) minimisée pour la valeur

$$\hat{\beta}(x, n) := (1-\epsilon) \left(1 - \frac{\eta}{\xi - (n+1-m)}\right)^{-1/\eta}. \quad (4.30)$$

4.4.6 V -ergodicité géométrique

Notations Soit

$$A(\beta, V) := \sup_{(x, x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X}) \right) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \mathbb{E}_{y, y', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right].$$

Théorème 4.20 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D] et H6[C, D]. Pour tout $1 \leq \beta < \beta_{FM}$, $(\lambda, \lambda') \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$,

$$\begin{aligned} \sum_n \beta^n \int \lambda(dx) \lambda'(dx') \|P^n(x, \cdot) - P^n(x', \cdot)\|_V &\leq \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} \mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] \\ &+ \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} \left\{ \frac{\beta^m A(\beta, V)}{1 - A_m(\beta)} + (1 + A_0(\beta)) \sup_{(x, x') \in \Delta} \sum_{k=1}^{m-1} \beta^k \{P^k V(x) + P^k V(x')\} \right\} \mathbb{E}_{\lambda, \lambda', 0} \left[\beta^{T_0} \right] \end{aligned}$$

avec la convention $\sum_{k=1}^0 P^k V(x) := 0$, et $A_m(\beta)$ et $A_0(\beta)$ sont définis par (4.24).

On déduit de la Proposition 4.15 et du Corollaire 4.16 une majoration des espérances, de $A(\beta, V)$, $A_m(\beta)$ et de $A_0(\beta)$ en fonction des termes apparaissant dans les conditions H2[C, D] et H6[C, D]. En particulier, lorsque P possède une mesure de probabilité invariante π , il vient que

$$\lim_n \beta^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V = 0,$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $\beta < \beta_{FM}$. Le théorème 4.20 permet de calculer explicitement, pour tout $\beta < \beta_{FM}$, une constante $R_\beta < \infty$ telle que

$$\sum_n \beta^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V \leq R_\beta V(x).$$

Preuve 20 Nous démontrons le Théorème lorsque $m = 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] &= \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{1\}}(d_{T_0+1}) \right] \\ &+ \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_{j+1}} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{1\}}(d_{T_{j+1}+1}) \right] \\ &\leq \epsilon^+ \left\{ \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_{j+1}} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j+1}+1}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j+1}+1}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

avec la convention $T_{-1} + 1 = 0$. Pour $j \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_{j+1}} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right] \\
& \leq (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_j} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) \right] \\
& \quad + \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=T_j+1}^{T_{j+1}} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right] \\
& \leq (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_j} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) \right] \\
& \quad + \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \beta^{T_j+1} \mathbb{E}_{X_{T_j+1}, X'_{T_j+1}, 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] \right] \\
& \leq (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_j} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) \right] + A(\beta, V) \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j}) \beta^{T_j+1} \right]
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j}) \beta^{T_j+1} \right] \leq \left[A_m(\beta) \right]^j \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\beta^{T_0+1} \right].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_{j+1}} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right] & \leq (1 - \epsilon^-)^{j+1} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] \\
& \quad + \frac{A(\beta, V)}{1 - (1 - \epsilon^-) A_m(\beta)^{-1}} \left\{ \left[A_m(\beta) \right]^j - \frac{1 - \epsilon^-}{A_m(\beta)} (1 - \epsilon^-)^j \right\}.
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] & \leq \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \beta^k \{V(X_k) + V(X'_k)\} \right] \\
& \quad + \frac{A(\beta, V)}{1 - A_m(\beta)} \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\beta^{T_0+1} \right].
\end{aligned}$$

□

4.4.7 Comparaison de nos résultats avec ceux existant dans la littérature

Le calcul explicite des bornes contrôlant l'ergodicité géométrique d'un noyau P (à valeurs dans un espace quelconque) a fait l'objet de nombreuses études sous des hypothèses plus restrictives. Citons, entre autres, les travaux de Meyn et Tweedie[73], Rosenthal [101, 103] et Roberts et Tweedie [99].

- Meyn et Tweedie construisent ces bornes par une méthode non probabiliste utilisant la théorie spectrale des opérateurs. Pour ce faire, ils supposent que le noyau P ψ -irréductible apériodique possède un ensemble ν_m -small C *i.e.*

$$\forall x \in C, \quad P^m(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot) \quad \nu_m(C) = 1, \quad \epsilon > 0,$$

et qu'il existe une solution à la condition de drift de Foster-Lyapunov relative au noyau P^m et à C

$$P^m V \leq \lambda V + b \mathbb{1}_C \quad 0 < \lambda < 1, \quad b < \infty \quad \sup_C V < \infty. \quad (4.31)$$

Il est souvent difficile, en pratique, de calculer les itérations du noyau P ; et les conditions de Foster-Lyapunov qui sont établies le sont relativement au noyau P lui-même, et à un ensemble C qui est ν_m -small pour $m > 1$. Ce qui interdit l'application directe des résultats de Meyn et Tweedie.

Rosenthal et Roberts et Tweedie proposent une construction des bornes basée sur la méthode de couplage.

- Rosenthal suppose l'existence d'un ensemble ν_1 -small C (la construction du processus Z se fait donc en prenant $\Delta := C \times C$) et d'une solution à la condition de Foster-Lyapunov telle que

$$\sup_C V =: d < \infty \quad \text{et} \quad d > \frac{2b}{1 - \lambda}. \quad (4.32)$$

Ils écrivent, pour tout $j \geq 1$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq P_{x,\pi,0}(T > n) \leq P_{x,\pi,0}(T > n, N_n \geq j) + P_{x,\pi,0}(T > n, N_n < j)$$

où N_n est le nombre de passages de Z dans $C \times C \times \{0\}$ avant l'instant n . En conséquence,

$$P_{x,\pi,0}(T > n, N_n \geq j) \leq (1 - \epsilon)^j.$$

Pour estimer le second terme, ils expriment $P_{x,\pi,0}(N_n < j)$ en fonction du moment géométrique du temps de retour à $C \times C \times \{0\}$, moment qu'ils estiment à l'aide de la condition de drift et de la condition (4.32).

- Roberts et Tweedie supposent l'existence d'un ensemble ν_1 -small C , et d'une solution à la condition de Foster-Lyapunov, et substituent la condition (4.32) par

$$\sup_C V =: d < \infty \quad d \geq \frac{b}{2(1 - \lambda)} - 1. \quad (4.33)$$

Ils majorent $P_{x,\pi,0}(T > n)$ par (une amélioration de) l'inégalité de Markov, puis estiment le moment géométrique du temps de couplage à l'aide de la condition de drift et de la condition (4.33). La condition (4.33) est meilleure que celle de Rosenthal, mais, dans de nombreux modèles, n'est pas vérifiée.

On peut certes augmenter la constante d en augmentant (au sens de l'inclusion) C , ce qui en contrepartie, entraîne une détérioration de ϵ . Pour palier à cela, on peut montrer que C est aussi $\nu_{m'}\text{-small}$ pour $m' > 1$; mais les travaux de Roberts et Tweedie ne s'étendent pas (simplement) au cas de l'existence d'un ensemble $\nu_m\text{-small}$, $m > 1$.

En conséquence, on saisit l'intérêt de notre approche

1. Dans la pratique, P^m est difficilement calculable et on vérifie la condition de Foster-Lyapunov relativement à P et à un ensemble $\nu_m\text{-small } C$, $m \geq 1$, de sorte que les ensembles $\{V \leq l\}$ sont petites. On choisit ensuite D petite tel que (4.22). Puis on trouve m tel que H2[C, D].
2. A la différence des autres travaux, la condition H6[C, D] porte sur le noyau P quelle que soit la valeur de m dans H2[C, D], ce qui permet de déterminer l'indice m en "dernier" dans l'ordre d'établissement des conditions H6 et H2.
3. Enfin, choisir l'ensemble Δ dissymétrique en prenant $C \neq D$ permet d'*ajuster* D sans modifier la condition de drift; tandis que pour vérifier les conditions (4.32) et (4.33), il faut augmenter C sous la contrainte $C \nu_1\text{-small}$ en espérant que b croisse moins vite que ne croît d . Précisons tout de même que cette dernière remarque est souvent vérifiée puisque b est défini comme le supremum d'une quantité maximale sur le "centre" de C ; intuitivement, ce comportement est logique lorsque V est la solution minimale de la condition de Foster-Lyapunov, *i.e* $V(x) := \mathbb{E}_x[\lambda^{-\sigma_C}]$. Dans ce cas, $b := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\lambda^{-\sigma_C}]$ et l'on peut attendre que ce maximum soit atteint pour x au "centre" de C .

Ces considérations sont illustrées dans l'application numérique suivante.

4.4.8 Exemple : Marche aléatoire sur \mathbb{N}

Nous reprenons l'exemple 1 de Roberts et Tweedie [99]. Les tableaux sont donnés en fin de chapitre.

Modèle Soient $p > 0.5$ et $q := 1 - p$. Soit la marche aléatoire sur \mathbb{N} , réfléchie en 0, définie par

$$\begin{aligned} P(0, 0) &:= \alpha > 0 & P(0, 1) &:= 1 - \alpha, \\ P(n, n+1) &:= q & P(n, n-1) &:= p, n \geq 1. \end{aligned}$$

Nous envisageons trois chaînes définies par la valeur de p et α , donnée en lignes 1 et 2 des tableaux. Dans la suite,

$$C := \{0, \dots, m_C\} \quad D := \{0, \dots, m_D\}$$

où m_C et m_D sont précisés dans les tableaux.

Tableau 4.1 : chaîne initiale ou m -squelette ? Pour chacun des trois modèles (a), (b) et (c), nous estimons β_{FM} . Nous vérifions H2[C, D] en minorant l’itération P^m , m donné en ligne 4, par le noyau sous-markovien

$$\rho_{x,x'}(y) := \sum_{k=0}^{m_D+m} (P^k(x,y) \wedge P^k(x',y)) \delta_k(y). \quad (4.34)$$

Nous établissons la condition H6[C, D] avec

$$\lambda_* := \sqrt{4pq} \quad V(x) := \sqrt{p/q}^{(x-m_C)\vee 0} \quad b := \sup_C \{PV - \lambda_* V\}. \quad (4.35)$$

Les valeurs de λ_* et b sont données en ligne 7 et 8. En ligne 9, nous estimons β_{FM}^{-1} .

Etudions maintenant la chaîne (a) à partir du m -squelette P^7 (colonne (a')) : nous vérifions H2[C, D] en minorant P^7 (*i.e.* nous prenons $m = 1$) par le noyau sous-markovien défini par (4.34) et établissons la condition de drift

$$P^7V \leq \lambda_* V + b \mathbb{I}_C \quad (4.36)$$

où $\lambda_* := \sqrt{4pq}^7$, $V(x) := \sqrt{p/q}^{(x-1)\vee 0}$ et

$$b := \sup_{x \in C} \left(p + (1-p)\sqrt{p/q} - \lambda_* \right) \left(\lambda_*^6 \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x) + \sum_{k=1}^6 \lambda_*^{6-k} \{P^k(x,0) + P^k(x,1)\} \right). \quad (4.37)$$

Nous obtenons $\beta_{FM} = 0.9997$, taux relatif au m -squelette P^7 et donc la valeur correspondant à la chaîne initiale est $\beta_{FM} = 0.9997^{1/7}$.

Cela illustre l’intérêt d’étudier l’ergodicité de la chaîne initiale quitte à vérifier la condition de minoration pour m grand, plutôt que d’étudier le m -squelette puis d’en déduire les propriétés de la chaîne initiale par homothétie sur l’échelle de temps.

Tableau 4.2 : Minoration uniforme ? Nous reprenons l’estimation de β_{FM} lorsque la mesure de minoration de l’itération m de P est une mesure uniforme, indépendante de $(x, x') \in \Delta$: nous posons

$$\epsilon := \inf_{(x,x') \in \Delta} P^m(x,0) \wedge P^m(x',0) \quad \nu_m(y) := \delta_0(y).$$

En ligne 7, nous donnons la valeur de ϵ .

Les valeurs de β_{FM} obtenues sont moins bonnes que celles obtenues à partir de la condition de minoration non-uniforme.

Tableau 4.3 : Notre approche vs celle de Roberts et Tweedie Nous calculons le taux de convergence maximal β_{RT} obtenu en appliquant les résultats de Roberts et Tweedie [99] ; pour ce faire, on prend $C := \{0, 1\}$ et on vérifie la condition de minoration avec

$$\epsilon := \alpha \quad \nu_1(y) := \delta_0(y),$$

comme ils le suggèrent. Pour les chaînes (b) et (c), on peut vérifier la condition de Foster-Lyapunov, et la condition de croissance de la solution V à l'extérieur de C (condition 4.33) en prenant

$$\lambda_* := \sqrt{4pq} \quad V(x) := \sqrt{p/q}^x \quad b := \sup_C \{PV - \lambda_* V\}.$$

Le taux β_{RT} obtenu (donnée en ligne 9) est moins bon que le taux β_{FM} . Pour la chaîne (a), on ne peut vérifier la condition de croissance de Roberts et Tweedie (4.33); aussi augmentons-nous la taille de C (colonne (a')) : nous prenons $C := \{0, \dots, 7\}$ qui est un ensemble ν_1 -small pour le noyau P^7 ; et établissons le drift de Foster-Lyapunov pour le noyau P^7 avec λ_* , V et b définis comme en (4.36) et (4.37). Nous pouvons cette fois estimer β_{RT} mais la borne obtenue reste moins bonne que celle obtenue en colonne (a), Tableau 4.1.

Enfin, nous évaluons les bornes d'ergodicité en variation totale données par le Corollaire 4.19, pour la chaîne définie par $p = 0.75$ et $\alpha = 0.4$.

Tableau 4.4 H2[C, D] est vérifiée avec $C := \{0\}$ et $D := \{0, \dots, 4\}$, $m = 8$, $\nu_8(y) := \delta_0(y)$ et $\epsilon := \inf_{(x,x') \in \Delta} P^m(x, 0) \wedge P^m(x', 0) = 3.38 \cdot 10^{-1}$.

H6[C, D] est établie pour λ_* , V et b donnés par (4.35). Nous calculons la borne pour différentes valeurs de n , différentes valeurs de $w_* := \int \delta_x(dy) \pi(dy) \widehat{W}^{(\beta_*)}(y, y')$ et pour $\beta := \beta(n, w_*)$ donné par (4.30).

Tableau 4.5 Nous faisons le même calcul que précédemment en substituant la minoration uniforme par une minoration par le noyau sous-markovien

$$\rho_{x,x'}(y) := \sum_{k=0}^{m_D+8} \left(P^k(x, y) \wedge P^k(x', y) \right) \delta_k(y).$$

Pour différentes valeurs de (n, w_*) , nous calculons la borne d'ergodicité au point β donné par (4.30) où

$$\eta := m + \frac{\ln \{\sup_{(x,x') \in \Delta} (R_{x,x'}V(x) + R_{x,x'}V(x'))/2\}}{\ln \beta_*}.$$

La comparaison de ces deux tableaux traduit encore l'intérêt de la condition de minoration non uniforme.

Pour terminer, nous calculons les bornes de (f, r) -ergodicité lorsque $r \in \Lambda_s$ et pour cela nous supposons vérifiée la famille de conditions de drift de Tuominen et Tweedie. Ces calculs restent néanmoins d'un intérêt purement théorique puisque, dans la pratique, la condition de Tuominen et Tweedie est démontrée pour des taux riemanniens, comme conséquence de la condition de drift

de Fort-Moulines ou de Jarner-Roberts. Dans ce cas, on utilise les résultats des paragraphes 4.2 et 4.3.

4.5 Convergence à un taux sous-géométrique

Dans cette section 4.5, P est ψ -irréductible apériodique.

4.5.1 Hypothèse H5 $[r, C, D]$

Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$ et $r := \{r(n)\}$ une suite positive croissante, $r(0) := 1$.

H5 $[r, C, D]$ Il existe $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$ mesurable, une famille de fonctions $\{g_n\}$ mesurables, $g_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty[$, $g_n \geq r(n)f$, une constante $a \geq 0$ et une suite positive (finie) $\{b(n)\}$ telles que $\sup_D g_0 < \infty$,

$$Pg_{n+1}(x) + r(n)f(x) \leq g_n(x) + b(n)\mathbb{1}_C(x), \quad (4.38)$$

$$r(n)f(x) - b(n) \geq r(n)a, \quad x \in D^c. \quad (4.39)$$

4.5.2 Conditions de drift et temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Proposition 4.21 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Soit $r := \{r(n)\}$ une suite positive, $r(0) := 1$. Supposons H2 $[C, D]$ et H5 $[r, C, D]$.

Pour tout $l \geq 0$, $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r^0(T_0 + l) \right] \leq \mathbb{1}_\Delta(x, x')r^0(l) + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \left\{ r^0(l-1) + ((1+a) \wedge 2)^{-1} (g_l(x) + g_l(x')) \right\}$$

avec la convention $r^0(-1) := 0$.

Preuve 21 Soit $G_n(x, x', d) = G_n(x, x') := g_n(x) + g_n(x')$, $d = 0, 1$. Nous établissons la Proposition lorsque $l = 0$, la démonstration s'adapte facilement si $l > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} P^*G_{n+1}(x, x', 0) &\leq G_n(x, x') - r(n)\{f(x) + f(x')\} + b(n)\{\mathbb{1}_C(x) + \mathbb{1}_C(x')\} \\ &\leq G_n(x, x') - r(n)\{f(x) + f(x')\} \left(1 - \mathbb{1}_{C \times D^c}(x, x') - \mathbb{1}_{D^c \times C}(x, x') \right) \\ &\quad - \left(r(n)f(x) + r(n)f(x') - b(n) \right) \{ \mathbb{1}_{C \times D^c}(x, x') + \mathbb{1}_{D^c \times C}(x, x') \}. \end{aligned}$$

Si $(x, x') \in C \times D^c \cup D^c \times C$, $r(n)f(x) + r(n)f(x') - b(n) \geq (1+a)r(n)$. On pose

$$F(x, x') := \{f(x) + f(x')\} \left(1 - \mathbb{1}_{C \times D^c}(x, x') - \mathbb{1}_{D^c \times C}(x, x') \right) + (1+a) \left\{ \mathbb{1}_{C \times D^c}(x, x') + \mathbb{1}_{D^c \times C}(x, x') \right\},$$

de sorte que

$$P^*G_{n+1}(x, x') + F(x, x') \leq G_n(x, x'), \quad (x, x') \in \Delta^c.$$

Remarquons que $F(x, x') \geq 1+a$ sur Δ^c et $F(x, x') \geq 2$ sur Δ . Il vient que pour tout $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\left((1+a) \wedge 2 \right) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r^0(T_0) \right] \leq \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} r(k) F(X_k, X'_k) \right] \leq g_0(x) + g_0(x'),$$

(la démonstration est analogue à celle de la Proposition 2.2). \square

4.5.3 Du temps de couplage au temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Proposition 4.22 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons $H2[C, D]$. Soit $r \in \Lambda_s$ telle que

$$A_m := \sup_{(x, x') \in \Delta} \left(1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X}) \right) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \mathbb{E}_{y, y', 0} \left[r^0(T_0 + m) \right] < \infty. \quad (4.40)$$

Soit $0 < \alpha < 1$ tel que $(1+\alpha)(1-\epsilon^-) + \alpha A_m =: \rho < 1$. Soient $n_\alpha := \min_{n \geq 0} \{r(n)/r^0(n) \leq \alpha\}$ et c_α ⁴ tel que $r(n+m) \leq (1+\alpha)r(m) + c_\alpha$ pour tout $m \geq 0$, $n \leq n_\alpha$. Pour tout (x, x') tel que $\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r(T_0) \right] < \infty$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r^0(T - m) \right] \leq \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r^0(T_0) \right] + \frac{\epsilon^+ A_m}{1 - \rho} \left(1 + \frac{1}{\epsilon^-} \right) \left(\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r(T_0) \right] + c_\alpha \left\{ \frac{1}{\epsilon^-} - 1 \right\} \right).$$

Preuve 22 Nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r^0(T - m) \right] &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r^0(T_n + n(m-1)) \mathbb{1}_{\{1\}}(d_{T_n+1}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n}) \right] \\ &\leq \epsilon^+ \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[r^0(T_n + n(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n}) \right]. \end{aligned}$$

Soit $n \geq 1$. Puisque

$$r^0(n+k) \leq r^0(k) + r(k)r^0(n), \quad n+k \geq 0, \quad (4.41)$$

et

$$T_n + n(m-1) = T_{n-1} + (n-1)(m-1) + m + T_0 \circ \theta^{T_{n-1}+1}$$

⁴ c_α peut s'exprimer explicitement en fonction de n_α et de α , voir Paragraphe 2.4.1

où θ désigne l'opérateur de translation, il vient que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r^0(T_n + n(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n}) \right] = \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r^0(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n}) \right] \\
& + \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{n-1}+1}) \mathbb{E}_{X_{T_{n-1}+1}, X'_{T_{n-1}+1}, 0} \left[r^0(m+T_0) \right] \right] \\
& = \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r^0(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n}) \right] \\
& + \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{n-1}}) \left(1 - \rho_{X_{T_{n-1}}, X'_{T_{n-1}}}(\mathcal{X}) \right) \right. \\
& \times \int R_{X_{T_{n-1}}, X'_{T_{n-1}}}(X_{T_{n-1}}, dy) R_{X_{T_{n-1}}, X'_{T_{n-1}}}(X'_{T_{n-1}}, dy') \mathbb{E}_{y,y',0} \left[r^0(m+T_0) \right] \Big] \\
& \leq a_{x,x'}(n-1) + A_m b_{x,x'}(n-1)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
a_{x,x'}(n) &:= \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r^0(T_n + n(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n+1}) \right] \\
b_{x,x'}(n) &:= \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r(T_n + n(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n}) \right].
\end{aligned}$$

Or, en utilisant à nouveau (4.41) et en se servant de la propriété de Markov fort

$$\begin{aligned}
a_{x,x'}(n) &\leq \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r^0(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{n-1}+1}) \right] (1 - \epsilon^-) \\
&+ \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{n-1}}) \right] A_m \\
&\leq (1 - \epsilon^-) a_{x,x'}(n-1) + A_m b_{x,x'}(n-1).
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $r(n+k) \leq (1+\alpha)r(k) + c_\alpha$ si $n \leq n_\alpha$ et $r(n+k) \leq r(k)\alpha r^0(n)$ si $n \geq n_\alpha$, il vient

$$\begin{aligned}
b_{x,x'}(n) &\leq (1+\alpha) (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_n}) \right] + c_\alpha P_{x,x',0}(d_{T_{n-1}} = 0) \\
&+ \alpha \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r(T_{n-1} + (n-1)(m-1)) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{n-1}+1}) \mathbb{E}_{X_{T_{n-1}+1}, X'_{T_{n-1}+1}, 0} \left[r^0(m+T_0) \right] \right] \\
&\leq (1+\alpha) (1 - \epsilon^-) b_{x,x'}(n-1) + c_\alpha (1 - \epsilon^-)^n + \alpha A_m b_{x,x'}(n-1) \\
&\leq \rho b_{x,x'}(n-1) + c_\alpha (1 - \epsilon^-)^n.
\end{aligned}$$

Enfin, $b_{x,x'}(0) = \mathbb{E}_{x,x',0}[r(T_0)]$ et $a_{x,x'}(0) \leq (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0}[r^0(T_0)]$. Par suite,

$$\epsilon^- \sum_{n \geq 0} a_{x,x'}(n) \leq A_m \sum_{n \geq 0} b_{x,x'}(n) + (1 - \epsilon^-) \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r^0(T_0) \right]$$

et

$$(1 - \rho) \sum_{n \geq 0} b_{x,x'}(n) \leq \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r(T_0) \right] + c_\alpha \left(\frac{1}{\epsilon^-} - 1 \right).$$

□

Corollaire 4.23 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$ et $r \in \Lambda_s$. Supposons H2[C, D] et H5[r, C, D]. Il existe une constante $R < \infty$ telle que pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [r^0(T - m)] \leq R(g_0(x) + g_0(x'))$$

et l'expression de R se déduit des Propositions 4.21 et 4.22.

Preuve 23 Il suffit de remarquer que pour $(x, x') \in \Delta$,

$$(1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \int R_{x, x'}(x, dy) g_m(y) \leq P^m g_m(x) \leq \sup_{x \in D} g_0(x) + \sum_{k=0}^{m-1} b(k) < \infty$$

ce qui établit (4.40). \square

4.5.4 Cas des taux convexes

On peut améliorer l'estimation du temps de couplage par le moment du temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$ lorsque la suite r vérifie la relation de convexité suivante.

Définition Soit Λ_c l'ensemble des suites $r := \{r(n)\}$ positives croissantes, $r(0) := 1$, telles qu'il existe une suite ρ_r et

(i) pour tout $k \geq 1$

$$r\left(\sum_{j=1}^k n_j\right) \leq \rho_r(k) \sum_{j=1}^k r(n_j), \quad (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k.$$

(ii) $\sum_n n \rho_r(n) |z|^n$ converge sur $]0, 1[$.

Λ_c contient entre autres, les suites à croissance polynomiale et les suites de la forme $r(n) := (n+1)^k \log^l(n+1) \vee 1$, k et l positifs.

Du temps de couplage au temps d'entrée dans $\Delta \times \{0\}$

Proposition 4.24 Soient $(C, D) \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $C \subset D$. Supposons H2[C, D]. Soit $r \in \Lambda_c$ telle que

$$A_m := \sup_{(x, x') \in \Delta} (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \mathbb{E}_{y, y', 0} [r(T_0 + m)] < \infty.$$

Alors pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [r(T - m)] \leq \epsilon^+ \left(A_m \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^{j-1} j \rho_r(j+1) + \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^j \rho_r(j+1) \mathbb{E}_{x, x', 0} [r(T_0)] \right).$$

Preuve 24 Démonstration du Théorème 7.4.4(ii), Chapitre 7. \square

4.5.5 Comparaison de H5 et H5fm

Soit un entier $q \geq 0$ et $r(n) := S(q-1, n+1)$. Nous comparons $\text{H5}[r, C, D]$ et $\text{H5fm}[q, C, D]$. Dans le Paragraphe 2.3.1 nous avons montré que V_k est solution de

$$PV_k(x) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{j=0}^{\tau_C} S(k-2, j+1) V_0(\Phi_j) \right] \leq V_k(x) + b_{k-1} \mathbb{1}_C(x)$$

avec la convention $S(-1, 0) = 1$ et $S(-1, n) = 0$, $n \neq 0$. Donc d'après le Corollaire 2.3, pour tout $0 \leq k \leq q-1$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{j=1}^{\tau_C} S(k, j) V_0(\Phi_j) \right] \leq V_{k+1}(x) + b_k, \quad x \in C.$$

La condition (4.10) implique (4.38) avec $r(n) := S(q-1, n+1)$, $f := V_0$,

$$g_n(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} S(q-1, k+1+n) V_0(\Phi_k) \right] \quad (4.42)$$

et $b(n) := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} S(q-1, k+1+n) V_0(\Phi_k) \right]$. Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} S(q-1, k+1+n) V_0(\Phi_k) \right] &= \sum_{j=0}^{q-1} S(q-1-j, 1+n) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} S(j, k) V_0(\Phi_k) \right] \\ &\leq \sum_{j=0}^{q-1} S(q-1-j, 1+n) \left(\sup_C V_{j+1} + b_j \right). \end{aligned}$$

Donc la suite $\{b_n\}$ est finie. Réciproquement, (4.38) entraîne (4.10) en posant $V_0 := f$,

$$V_{l+1}(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} S(l, k+1) V_0(\Phi_k) \right] \quad 0 \leq l \leq q-1, \quad (4.43)$$

et $b_l := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} S(l, k) V_0(\Phi_k) \right]$ pour tout $0 \leq l \leq q-1$.

Ainsi, les conditions (4.10) et (4.38) sont équivalentes. Nous étudions maintenant le lien entre les conditions (4.39) et (4.11). Pour cela, supposons que les fonctions V_k (resp. g_n) solutions de $\text{H5fm}[q, C, D]$ (resp. $\text{H5}[r, C, D]$) sont les solutions minimales *i.e.* sont données par (4.43) (resp. (4.42)). La condition (4.11) signifie que, pour tout $0 \leq l \leq q-1$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C} S(l, k+1) V_0(\Phi_k) \right] \geq (1 - a_l)^{-1} \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} S(l, k) V_0(\Phi_k) \right] \quad (4.44)$$

sur D^c tandis que (4.39) signifie

$$V_0(x) \geq a + S(q, n)^{-1} \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_C} S(q, k+1+n) V_0(\Phi_k) \right] \quad (4.45)$$

sur D^c . En pratique, on commence par établir les conditions de drift (resp. de croissance) relativement à un ensemble C (resp. D) puis on vérifie que ces ensembles satisfont la condition de minoration H2[C, D]. Or, les conditions de drift sont bien souvent relatives à des ensembles petites et les ensembles de niveau $\{V_0 \leq l\}$ sont petites (et donc aussi les ensembles $\{V_k \leq l\}$) donc la condition H2[C, D] est vérifiée. Néanmoins, la condition (4.39) est plus "coûteuse" dans le sens où l'ensemble D à l'extérieur duquel on vérifie la minoration (4.45) est plus "gros" que celui pour lequel on vérifie la minoration (4.44), ce qui contribue à détériorer la constante de minoration (Cf. remarques Paragraphe 4.1.2).

Aussi, dans le cas des taux polynomiaux, énonce-t-on le calcul de la borne d'ergodicité à partir d'une condition de la forme H5fm[q, C, D] plutôt que d'une condition de la forme H5[r, C, D].

	(a)	(a')	(b)	(c)
p	0.6	0.6	0.7	0.75
α	0.25	0.25	0.5	0.4
noyau	P	P^7	P	P
m	28	1	6	8
$m_{\mathcal{C}}$	0	7	1	0
$m_{\mathcal{D}}$	14	7	3	4
λ_*	0.9798	0.8669	0.9165	0.8660
b	0.1888	0.5587	0.2417	0.5732
β_{FM}^{-1}	0.9983	$0.9997^{1/7}$	0.9649	0.9413

TAB. 4.1 –

	(a)	(b)	(c)
p	0.6	0.7	0.75
α	0.25	0.5	0.4
noyau	P	P	P
m	28	6	8
$m_{\mathcal{C}}$	0	1	0
$m_{\mathcal{D}}$	14	3	4
ϵ	2.60e-02	2.71e-01	3.38e-01
β_{FM}^{-1}	0.9998	0.9854	0.9793

TAB. 4.2 –

	(a)	(a')	(b)	(c)
p	0.6	0.6	0.7	0.75
α	0.25	0.25	0.5	0.4
noyau	P	P^7	P	P
m	1	1	1	1
$m_{\mathcal{C}}$	1	7	1	1
ϵ	0.25	1.17e-02	0.5	0.4
λ_*	0.9798	0.8669	0.9165	0.8660
b	0.1888	0.5587	0.3472	0.5732
β_{RT}^{-1}	**	$0.9998^{1/7}$	0.9845	0.9796

TAB. 4.3 –

	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$
$w_* = 10$	2.9493e-01	7.3337e-02	3.6342e-03	1.4554e-06
$w_* = 1000$	5.1036e-01	1.3748e-01	7.1250e-03	2.9144e-06

TAB. 4.4 –

	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$
$w_* = 10$	6.7984e-04	2.6108e-06	2.8634e-11	7.0544e-24
$w_* = 1000$	7.2623e-03	3.0771e-05	3.5925e-10	9.1672e-23

TAB. 4.5 –

Chapitre 5

Ergodicité de chaînes de Markov

Dans ce chapitre, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ est la tribu des Boréliens. On note $\langle \cdot; \cdot \rangle$ le produit scalaire, $|\cdot|$ la norme euclidienne, ∇ l'opérateur de différentiation, et $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

Nous étudions tout d'abord un modèle non-linéaire de la forme $\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1}$, lorsque, pour $|x|$ grand, $F(x) \leq |x|(1-r|x|^{-d})$, $0 < d \leq 2$ (Paragraphe 5.1). Nous nous intéressons ensuite aux chaînes de Markov définies par les algorithmes de Hastings-Métropolis. Nous commençons par étudier l'ergodicité à un taux polynomial de l'algorithme de Hastings-Métropolis à marche aléatoire symétrique

- sur \mathbb{R} lorsque la densité cible décroît comme $|x|^{-s}$, $s > 1$, (Paragraphe 5.2) ;
- sur \mathbb{R}^n lorsque la densité cible est sur-exponentielle *i.e.* décroît comme $\exp(-|x|^s)$, $s < 1$ (Paragraphe 5.3).

Nous proposons ensuite une caractérisation simple de l'ergodicité à un taux géométrique d'un échantillonneur hybride, caractérisation que nous illustrons par l'étude de nombreux cas (Paragraphe 5.4).

5.1 Modèle non linéaire

5.1.1 Présentation du modèle

Soit la chaîne définie par

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

où

NSS1 $\{W_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (et indépendantes de Φ_0), de loi Γ , centrée, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\Gamma(dy) = \gamma(y)dy.$$

Par suite, le noyau de transition de la chaîne est donné par

$$P(x, dy) = \gamma(y - F(x))dy.$$

Supposons de plus

NSS2 Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tout ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ non vide, il existe $n_0 > 0$ tel que

$$\inf_{x \in K} P^{n_0}(x, A) > 0.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\sum_n 2^{-n} P^n(x, \cdot)$ est équivalente à la mesure de Lebesgue et P est Lebesgue-irréductible.

NSS3 P est apériodique.

NSS4 Tout compact non vide est petite.

Lorsque Γ est à support \mathbb{R}^n et que F est bornée sur tout compact, les conditions NSS2 à NSS4 sont vérifiées. On peut aussi substituer ces trois conditions par les trois hypothèses suivantes : (a) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, (b) $|F(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, (c) il existe $\epsilon_\gamma > 0$, $\delta_\gamma < \infty$ tels que

$$|y| \leq \delta_\gamma \Rightarrow \gamma(y) \geq \epsilon_\gamma.$$

Ces trois conditions garantissent la ψ -irréductibilité et l'apériodicité du noyau P et impliquent que tout ensemble compact accessible est petite (Tuominen et Tweedie [117]).

NSS5 $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est mesurable et il existe $0 < d \leq 2$, $r > 0$, $M < \infty$ tels que

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq |x| \left(1 - r|x|^{-d}\right) && \text{pour } |x| \geq M, \\ \sup_{|x| \leq M} |F(x)| &< \infty. \end{aligned}$$

En particulier, F est bornée sur tout compact. Soit

$$\Gamma(s) := \int |y|^s \gamma(y) dy.$$

NSS6 Si $1 \leq d \leq 2$, il existe $s \geq 2$ tel que $\Gamma(s) < \infty$ et si $d = 2$, s vérifie $s - 1 < 2r/\Gamma(2)$.

Si $0 < d < 1$, soit il existe $s > d$ tel que $\Gamma(s) < \infty$, soit $\Gamma(d) < \infty$ et $dr - \Gamma(d) > 0$.

De nombreux travaux concernent ces modèles (Cf. Meyn et Tweedie [72] et références citées) ; la plupart proposent des conditions entraînant la f -ergodicité géométrique (par exemple Doukhan et Ghindès [36], Mokkadem [76], Tanikawa [112, 113]) ; par exemple, Mokkadem substitue les

hypothèses NSS5 et NSS6 par (a) l'existence d'un moment exponentiel de Γ : il existe $a > 0$ tel que $m := \mathbb{E}[\exp(aW_1)] < \infty$, (b) il existe $M < \infty$ et $A > \{\log m\}/a$ tels que

$$\begin{aligned}|F(x)| &\leq |x| - A && \text{pour } |x| \geq M, \\ \sup_{|x| \leq M} |F(x)| &< \infty.\end{aligned}$$

Tuominen et Tweedie [117] ou Anglo Nze [2, 3] (resp. Veretennikov [121]) étudient ces modèles sous des hypothèses de la forme NSS5 lorsque $0 < d < 1$ (resp. $d = 2$), et établissent l'ergodicité (en norme de variation totale et en norme f) de P à un taux sous-géométrique, sans précision des constantes d'ergodicité.

Nous établissons des résultats d'ergodicité sous géométrique (plus précisément riemannienne) en norme de variation totale et en norme f pour tout $0 < d \leq 2$.

5.1.2 Vitesse de convergence

Proposition 5.1 *Supposons NSS1 à NSS6. Soient $V(x) := 1 + |x|^s$ et $\delta := d/s$. P est Lebesgue-irréductible apériodique et pour tout $0 < \lambda < 1$, il existe un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ petite accessible, des constantes $c > 0$, $b < \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et*

$$PV(x) \leq V(x) - cV^{1-\delta}(x) + b\mathbb{1}_C(x),$$

où

- si $d = 2$, $c := \lambda s \left(r - (s-1)\Gamma(2)/2 \right)$,
- si $1 \leq d < 2$, $c := \lambda sr$,
- et si $0 < d < 1$ et $s = d$, $c := \lambda \left(sr - \Gamma(s) \right)$ ou lorsque $s > d$, $c := \lambda sr$.

On peut donc choisir λ tel que $cV^{1-\delta} \leq V$ sur \mathbb{R}^n .

Remarque Lorsque $0 < d < 1$, on peut ne pas supposer que Γ est centrée.

Vitesse de convergence D'après les résultats du Paragraphe 2.3.2, pour tout $1 \leq l \leq s/d$, il existe une constante $R < \infty$ telle que

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{l-1} \left(1 + |\Phi_k|^{s-ld} \right) \right] \leq R \left(1 + |x|^{s-d} \right). \quad (5.1)$$

Nous déduisons donc les conclusions suivantes du Théorème 3.1 : pour tout $0 \leq r \leq s - d$,

$$\lim_n (n+1)^{(s-r)/d-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et il existe une constante $R_1(\gamma, r) < \infty$ telle que pour tout $\gamma \leq (s - r)/d - 1$,

$$(n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} \leq R_1(\gamma, r) \left(1 + |x|^{r+\gamma d}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

de plus, si $s \geq 2d$, pour tout $2 \leq l \leq s/d$, il existe une constante $R_2(\gamma, r) < \infty$ telle que

$$\sum_n (n+1)^{\gamma-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} \leq R_2(\gamma, r) \left(1 + |x|^{r+\gamma d}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lorsque $d = 2$, Veretennikov [121] montre que pour tout $2 < m \leq s - 2$ et $k < m/2$, il existe $C < \infty$ telle que

$$(n+1)^k \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq C \left(1 + |x|^m\right).$$

Lorsque $0 < d < 1$,

- Tuominen et Tweedie [117] démontrent, sous des hypothèses semblables aux nôtres (si ce n'est qu'ils supposent $s \geq 1$), qu'il existe un ensemble petite C tel que pour tout entier $0 \leq l \leq s - 1$,

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)^{s-l-1} (1 + |\Phi_k|^l) \right] < \infty,$$

ce qui implique donc

$$\lim_n (n+1)^{s-l-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^l} = 0.$$

- Anglo Nze [3], sous les mêmes hypothèses que Tuominen et Tweedie, montre qu'il existe un ensemble C petite tel que pour tout $0 \leq \alpha \leq s - d$,

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} k^{-1+(s-d)/\alpha} |\Phi_k|^\alpha \right] < \infty,$$

ce qui est similaire à ce que nous obtenons.

A notre connaissance, les résultats concernant le cas $1 \leq d < 2$ sont nouveaux.

Démonstration de la Proposition 5.1 Soit $|x| \geq M$. Nous montrons tout d'abord que

$$|F(x)|^\alpha \leq |x|^\alpha - \alpha r |x|^{\alpha-d} + \phi(x, \alpha), \tag{5.2}$$

avec $\phi(x, \alpha) := 0$ si $d \leq \alpha \leq 1$ et $\phi(x, \alpha) := o(|x|^{\alpha-d})$ sinon.

Si $0 < \alpha \leq 1$,

$$|F(x)|^\alpha \leq |x|^\alpha \left(1 - r|x|^{-d}\right)^\alpha \leq |x|^\alpha \left(1 - \alpha r|x|^{-d}\right) \leq |x|^\alpha - \alpha r |x|^{\alpha-d}.$$

Si $\alpha > 1$, on écrit $\alpha = \underline{\alpha} + l$ où $\underline{\alpha}$ est la partie entière inférieure de α et $0 \leq l < 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}|F(x)|^\alpha &\leq |x|^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\underline{\alpha}} C_{\underline{\alpha}}^k (-r)^k |x|^{-kd} \right) \left(1 - r|x|^{-d} \right)^l \\&\leq |x|^\alpha \left(1 - \underline{\alpha}r|x|^{-d} + o(|x|^{-d}) \right) \left(1 - lr|x|^{-d} \right) \\&\leq |x|^\alpha - \alpha r|x|^{\alpha-d} + o(|x|^{\alpha-d});\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (5.2).

Supposons qu'il existe une constante $M(s) < \infty$ telle que pour tout $|x| \geq M(s)$

$$PV(x) \leq V(x) - cV^{1-\delta}(x). \quad (5.3)$$

Puisque F est bornée sur tout compact, et

$$\begin{aligned}PV(x) &= \int |F(x) + y|^s \gamma(y) dy \leq \left(\int |F(x) + y|^{\bar{s}} \gamma(y) dy \right)^{s/\bar{s}} \\&\leq \left(\sum_{k=0}^{\bar{s}} C_{\bar{s}}^k |F(x)|^k \int |y|^{\bar{s}-k} \gamma(y) dy \right)^{s/\bar{s}}\end{aligned}$$

où \bar{s} désigne la partie entière supérieure de s , il existe $b < \infty$ telle que

$$PV(x) \leq V(x) - cV^{1-\delta}(x) + b \mathbb{1}_C(x)$$

avec $C := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq M(s)\}$ et $\sup_C V < \infty$. Enfin, par hypothèse, les compacts sont petites, ce qui conclut la démonstration de la Proposition. Démontrons donc (5.3) : pour ce faire, nous montrons que pour $|x|$ grand,

$$PV(x) \leq V(x) - c'V^{1-\delta}(x) + o(V^{1-\delta}(x)),$$

où $c' := c/\lambda$.

1er cas : $1 \leq d \leq 2$ Supposons $s \geq 3$. Nous écrivons, pour $u \neq 0, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|u + y|^s - |u|^s = s|u|^{s-1} < \frac{u}{|u|}, y > + \frac{s}{2}|u|^{s-2} \left(|y|^2 + (s-2) < \frac{u}{|u|}, y >^2 \right) + R_3(s, u, y)$$

avec $|R_3(s, u, y)| \leq R(|u|^{s-3} + |y|^{s-3})|y|^3$, $R < \infty$. Par suite, en utilisant $\int y \gamma(y) dy = 0$ et (5.2), il vient

$$PV(x) \leq V(x) - \left\{ sr|x|^{s-d} - s(s-1)\Gamma(2)/2|x|^{s-2} \right\} + o(|x|^{s-d} + |x|^{s-2}).$$

Supposons $2 \leq s \leq 3$. Nous écrivons pour $u \neq 0, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|u + y|^s - |u|^s \leq s|u|^{s-1} < \frac{u}{|u|}, y > + R_2(s, u, y)$$

avec $|R_2(s, u, y)| \leq s(s-1)/2 \left(|u|^{s-2} + |y|^{s-2} \right) |y|^2$. Par suite,

$$PV(x) \leq V(x) - \left\{ sr|x|^{s-d} - s(s-1)\Gamma(2)/2|x|^{s-2} \right\} + o(|x|^{s-d} + |x|^{s-2}).$$

2nd cas : $0 < d < 1$ Supposons $s \geq 1$. En utilisant le propriété de convexité de la norme s , il vient

$$\begin{aligned} \int |F(x) + y|^s \gamma(y) dy &\leq \left(|F(x)| + \Gamma 1/s \right)^s \\ &\leq \left(|x|^s - sr|x|^{s-d} + \phi(x, s) \right) \left(1 + o(|x|^{-d}) \right) \\ &\leq |x|^s - sr|x|^{s-d} + (|x|^{s-d}). \end{aligned}$$

et donc

$$PV(x) \leq V(x) - rs|x|^{s-d} + o(|x|^{s-d}).$$

Supposons $s < 1$. En utilisant la convexité de l'application $|x| \mapsto |x|^s$, il vient

$$\int |F(x) + y|^s \gamma(y) dy \leq |x|^s - sr|x|^{s-d} + \Gamma(s)$$

et donc

$$PV(x) \leq V(x) - sr|x|^{s-d} + \Gamma(s).$$

5.2 Algorithme de Hastings-Métropolis à marche aléatoire (1)

5.2.1 Présentation succincte des algorithmes de Hastings-Métropolis

Nous nous contentons de rappeler quelques notions dont nous nous servirons dans les paragraphes suivants (Cf. Robert et Casella [96] pour une description des différents algorithmes).

Les échantillonneurs de Hastings-Métropolis sont des algorithmes itératifs qui permettent de “construire” une trajectoire d'une chaîne de Markov $\{\Phi_n\}$ de mesure de probabilité invariante π donnée (il suffit que π soit connue à une constante de normalisation près). Pour un point initial donné, chaque algorithme de Hastings-Métropolis est donc défini par la donnée d'un noyau de transition P d'unique mesure invariante π .

Nous supposons que π est une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité p (appelée densité *cible*)

$$\pi(dy) = p(y)dy.$$

Soit $Q(x, dy)$ un noyau de transition markovien dit “noyau de proposition” supposé absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $q(x, y)$ (appelée densité *de proposition* ou par abus, loi de proposition),

$$Q(x, dy) = q(x, y)dy.$$

Pour (π, Q) donnés, le noyau de Hastings-Métropolis sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ s'exprime par

$$P(x, dy) := \alpha(x, y)Q(x, dy) + \delta_x(dy) \int (1 - \alpha(x, y))Q(x, dy), \quad (5.4)$$

où pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(x, y) := \begin{cases} 1 \wedge \frac{p(y)q(y, x)}{p(x)q(x, y)} & \text{si } p(x)q(x, y) > 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.5)$$

est le ratio d'acceptation-rejet. Autrement dit, la $(n+1)$ -ème étape de l'algorithme de Hastings-Métropolis consiste à simuler un échantillon y de loi $Q(\Phi_n, dy)$ et “à corriger” cet échantillon : avec la probabilité $\alpha(\Phi_n, y)$, on pose $\Phi_{n+1} = y$ et sinon, $\Phi_{n+1} = \Phi_n$.

Ces algorithmes sont utilisés pour “approximer” des tirages de v.a. de loi $\pi(\mathbb{R}^n)^{-1}\pi$ et il est donc naturel

- de s’assurer que π est l’unique (à une constante de multiplicité près) mesure invariante de P ;
- de s’intéresser à la convergence de l’algorithme par exemple au sens de la convergence de $P^n(x, \cdot)$ vers la mesure invariante en norme f ;
- puis de s’intéresser à la vitesse de convergence ainsi qu’au calcul explicite d’une suite positive croissante $r := \{r(n)\}$ et d’une constante $B_{f,r}$ telles que

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq B_{f,r}(x, n)$$

$$\text{et } 0 < \liminf_n r(n)B_{f,r}(x, n) \leq \limsup_n r(n)B_{f,r}(x, n) < \infty.$$

Rappelons deux conditions (portant sur les densités p et q) impliquant la ψ -irréductibilité et l’apériodicité du noyau de Hastings-Métropolis.

- si pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $p(y) > 0 \Rightarrow q(x, y) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors P est Lebesgue-irréductible ; et si p et q sont positives et continues pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ alors le noyau est apériodique et tout ensemble compact non vide est small (Lemmes 1.1. et 1.2. [70]).
- si p est bornée et non nulle sur tout compact, et si il existe $\delta_q > 0$ et $\epsilon_q > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$|x - y| \leq \delta_q \Rightarrow q(x, y) \geq \epsilon_q,$$

alors P est ψ -irréductible apériodique et tout ensemble compact non vide est small (Théorème 2.2 [98]).

Dans la suite, nous énonçons des conditions sur la densité cible p garantissant la f -ergodicité de certains noyaux de Hastings-Métropolis dits *à marche aléatoire symétrique*.

Algorithme de Hastings-Métropolis à marche aléatoire symétrique (HMMAS) Ces algorithmes sont définis par la forme particulière de la densité de la loi de proposition ; on suppose en effet que

$$q(x, y) = q(x - y) = q(y - x).$$

Dans ce cas, le noyau P devient

$$P(x, dy) = \left(1 \wedge \frac{p(y)}{p(x)}\right) q(y - x) dy + \delta_x(dy) \int \left(1 - 1 \wedge \frac{p(y)}{p(x)}\right) q(y - x) dy.$$

L'ergodicité de la chaîne résulte à la fois du choix de la loi de proposition et de la vitesse de décroissance à l'infini de la densité cible p . Mengersen et Tweedie [70] ont étudié la cas des HMMAS à valeur dans \mathbb{R} : lorsque

- la densité de la loi de proposition q est continue et strictement positive sur \mathbb{R} ,
- la densité cible est symétrique et asymptotiquement log-concave *i.e.* il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que

$$|y| \geq |x| \geq M \Rightarrow \frac{p(y)}{p(x)} \geq \exp(\alpha|x - y|),$$

ils montrent que P est V -ergodique à un taux géométrique, en prenant $V(x) := \exp(s|x|)$, $0 < s < \alpha$. Si p n'est pas symétrique, on obtient le même résultat en supposant de plus que $q(x) \leq b \exp(-\alpha|x|)$, $b < \infty$. Roberts et Tweedie [98] et Jarner et Hansen [51] ont étudié le cas multidimensionnel. Ces derniers montrent que si

- il existe $\delta_q < \infty$ et $\epsilon_q > 0$ tels que $|x| \leq \delta_q \Rightarrow q(x) \geq \epsilon_q$,
- la densité cible est strictement positive et sous-exponentielle *i.e.* p est de classe C^1 et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\langle \frac{x}{|x|}; \nabla \log p(x) \right\rangle = -\infty,$$

- et la densité cible vérifie de plus

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left\langle \frac{x}{|x|}; \frac{\nabla p(x)}{|\nabla p(x)|} \right\rangle < 0,$$

alors P est V -ergodique à un taux géométrique en prenant $V(x) := p(x)^{-1/2}$.

Dans les Paragraphes 5.2.2 et 5.3, nous étudions les cas où p sur \mathbb{R} décroît à l'infini comme $|x|^{-s}$, $s > 1$ puis p sur \mathbb{R}^n décroît à l'infini comme $\exp(-|x|^s)$, $s < 1$.

5.2.2 Présentation du modèle (sur \mathbb{R})

RW1 Loi de Proposition q : q est symétrique, à support compact et il existe $\delta_q < \infty$ et $\epsilon_q > 0$ tels que $|x| \leq \delta_q \Rightarrow q(x) \geq \epsilon_q$.

RW2 Densité cible p : p est de classe C^2 sur \mathbb{R} , et il existe $s > 1$ tel que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \nabla \log p(x) = -s,$$

et des constantes $D < \infty$, $M < \infty$ telles que pour tout $|x| \geq M$,

$$\frac{|\nabla^2 p(x)|}{p(x)} \leq D|x|^{-2}.$$

Cette classe de densité contient entre autre, la loi de Cauchy.

5.2.3 Vitesse de convergence

Proposition 5.2 Supposons RW1 et RW2. Soient $2 \leq \alpha < s + 1$, $V(x) := 1 + |x|^\alpha$ et $\delta := 2/\alpha$. Pour tout $0 < \lambda < 1$, il existe un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ petite, et des constantes $c > 0$, $b < \infty$ tels que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) \leq V(x) - cV^{1-\delta}(x) + b\mathbb{1}_C(x),$$

et $c := \lambda\alpha(s+1-\alpha)\sigma_q^2/2$ en ayant posé $\sigma_q^2 := \int t^2 q(t) dt$.

On peut donc choisir λ tel que $cV^{1-\delta} \leq V$ sur \mathbb{R} .

Rappels Nous rappelons succinctement les résultats établis dans le Chapitre 4 dont nous nous servons ici :

Soit P ψ -irréductible apériodique. Si il existe $W : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty[$ mesurable, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x) = \infty$, un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ petite accessible, des constantes $0 < \delta < 1$, $b < \infty$, $c > 0$ tels que $\sup_C W < \infty$, $cW^{1-\delta} \leq W$ sur \mathbb{R}^n et

$$PW \leq W - cW^{1-\delta} + b\mathbb{1}_C, \quad (5.6)$$

alors pour tout $1 < l \leq 1/\delta$, $\gamma < l$,

$$\lim_n (n+1)^{\gamma-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{W^{1-l\delta}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et il existe des constantes $R_i(\gamma, l) < \infty$, $i = 1, 2$, telles que

$$(n+1)^{\gamma-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{W^{1-l\delta}} \leq R_1(\gamma, l)W^{1-\delta}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et si $\delta < 1/2$, pour tout $2 < l \leq 1/\delta$, $\gamma < l$,

$$\sum_n (n+1)^{\gamma-2} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{W^{1-l\delta}} \leq R_2(\gamma, l)W^{1-\delta}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'expression des constantes $R_i(\gamma, l)$ en fonction des termes apparaissant dans la condition de drift et dans la condition de minoration (*i.e.* existence de l'ensemble petite) se déduit de l'application des Théorèmes 4.1 (resp. Théorème 4.3 ou Théorème 4.5) pour la convergence en norme de variation totale (resp. norme f) et du Théorème 4.14.

Vitesse de convergence Nous déduisons de ces rappels les conclusions suivantes : pour tout $0 \leq r < s - 1$, $\gamma < (s - 1 - r)/2$,

$$\lim_n (n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

et pour tout $0 \leq r < m < s - 1$, $\gamma < (m - r)/2$, il existe $R_1(r, m) < \infty$ telle que

$$(n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} \leq R_1(r, m) (1 + |x|^m), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De plus, si $s > 3$, pour tout $0 \leq r < m - 2 < s - 3$, $\gamma < (m - r)/2 - 1$, il existe $R_2(r, m) < \infty$ telle que

$$\sum_m (n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} \leq R_2(r, m) (1 + |x|^m), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Conclusion Pour démontrer la Proposition 5.2, nous écrivons

$$PV(x) - V(x) = \int \{V(x+t) - V(x)\} q(t) dt + \int_{R(x)-x} \{V(x+t) - V(x)\} \left(\frac{p(x+t)}{p(x)} - 1 \right) q(t) dt$$

où $R(x) - x := \{t \in \mathbb{R}, p(x+t) \leq p(x)\}$, et faisons un développement de Taylor à l'ordre 2 de V et de p . Le terme de rappel $V^{1-\delta}$ dans la condition de drift est issu de la somme de deux termes :

- du terme d'ordre 2 du développement de V dans la première intégrale ;

- du produit des termes d'ordre 1 du développement de V et de p dans la seconde intégrale.

Il semble que lorsque la loi de proposition n'est pas à support compact, on puisse calculer un coefficient δ plus faible, et donc améliorer les vitesses de convergence (S. Jarner *First European Conference on Spatial and Computational Statistics, Sept. 2000*, résultat non publié) : si $q(x) \sim |x|^{-(1+\eta)}$, $0 < \eta < 2$, et $p(x) \sim |x|^{-s}$, $s > 1$, alors pour tout $\eta < \alpha < s - 1 + \eta$,

$$PV(x) \leq V(x) - cV^{1-\delta}(x) + b\mathbb{I}_C(x)$$

où $V(x) := 1 \vee |x|^\alpha$ et $\delta := \eta/\alpha$. En conséquence, pour tout $0 \leq r < s - 1$, et $\gamma < (s - 1 - r)/\eta$,

$$\lim_n (n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration de la Proposition 5.2 Notons $[-T, T]$, $0 < T < \infty$, le support de la loi de proposition q . Remarquons tout d'abord, que

$$\limsup_x \sup_{|y| \leq T} \frac{p(x+y)}{p(x)} = 1. \tag{5.7}$$

En effet,

$$\frac{p(x+y)}{p(x)} \leq 1 + T \sup_{|y| \leq T} \frac{|\nabla p(x+y)|}{p(x+y)} \sup_{|y| \leq T} \frac{p(x+y)}{p(x)}$$

et l'on conclut en utilisant l'hypothèse RW2. Remarquons aussi qu'il existe une constante $M_1 < \infty$ telle que pour tout $|x| \geq M_1$,

$$R(x) - x := \left\{ t \in \mathbb{R}, p(x+t) - p(x) \leq 0 \right\} \supset [0, T]. \tag{5.8}$$

En effet, RW2 entraîne que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $1 \leq M_1 < \infty$ tel que si $|x| \geq M_1$, alors

$$(s - \epsilon)|x|^{-1} \leq -\nabla \log p(x) \leq (s + \epsilon)|x|^{-1}$$

et donc

$$p(x + t) - p(x) \leq p(M_1) \left\{ \frac{M_1^{s-\epsilon}}{|x+t|^{s-\epsilon}} - \frac{M_1^{s+\epsilon}}{|x|^{s+\epsilon}} \right\};$$

ce qui établit (5.8).

Nous écrivons

$$PV(x) - V(x) = \int \{V(x+t) - V(x)\} q(t) dt + \int_{R(x)-x} \left\{ V(x+t) - V(x) \right\} \left\{ \frac{p(x+t)}{p(x)} - 1 \right\} q(t) dt.$$

Soit $x > 0$ (le cas $x < 0$ est analogue et est donc omis). Nous avons, pour $x \geq T$,

$$V(x+t) - V(x) = \alpha tx^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)/2 t^2 x^{\alpha-2} + r_1(x, t, \alpha)$$

avec $r_1(x, t, 2) = 0$ et si $\alpha > 2$, $\limsup_{|x|} |t|^{-3} |x|^{3-\alpha} |r_1(x, t, \alpha)| < \infty$. Soit $r_2(x, t, \alpha) := V(x+t) - V(x) - \alpha tx^{\alpha-1}$. Pour $x \geq T$,

$$\frac{p(x+t)}{p(x)} - 1 = \frac{\nabla p(x)}{p(x)} t + r_3(x, t)$$

avec, en utilisant (5.7), $\limsup_{|x|} |r_3(x, t)| t^{-2} x^2 < \infty$. Ainsi, $PV(x) - V(x) = \sum_{i=0}^5 I_i(x)$ où

$$\begin{aligned} I_0(x) &:= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sigma_q^2/2, \\ I_1(x) &:= \int r_1(x, t, \alpha) q(t) dt = O(|x|^{\alpha-3}), \\ I_2(x) &:= \alpha x^{\alpha-1} \frac{\nabla p(x)}{p(x)} \int_{R(x)-x} t^2 q(t) dt, \\ I_3(x) &:= \alpha x^{\alpha-1} \int_{R(x)-x} r_3(x, t) t q(t) dt = O(|x|^{\alpha-3}), \\ I_4(x) &:= \frac{\nabla p(x)}{p(x)} \int_{R(x)-x} t r_2(x, t, \alpha) q(t) dt = O(|x|^{\alpha-3}), \\ I_5(x) &:= \int_{R(x)-x} r_2(x, t, \alpha) r_3(x, t) q(t) dt = O(|x|^{\alpha-4}). \end{aligned}$$

D'après (5.8), puisque $\nabla p(x) < 0$ pour $|x|$ grand, il vient que pour $|x|$ suffisamment grand

$$I_0(x) + I_2(x) \leq \alpha x^{\alpha-2} \left((\alpha-1)\sigma_q^2/2 + x \frac{\nabla p(x)}{p(x)} \int_0^T t^2 q(t) dt \right) \leq \alpha \sigma_q^2/2 x^{\alpha-2} \left(\alpha-1 + x \frac{\nabla p(x)}{p(x)} \right).$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $M_\epsilon < \infty$ telle que pour $|x| \geq M_\epsilon$,

$$PV(x) \leq V(x) - \alpha \sigma_q^2/2 |x|^{\alpha-2} (s - \epsilon - \alpha + 1) + \phi_\alpha(x)$$

où $x \mapsto \phi_\alpha(x)$ est continue et $\phi_\alpha(x) = O(|x|^{\alpha-3})$. En conséquence, pour $0 < \lambda < 1$, il existe un ensemble C compact et une constante $b < \infty$ tels que

$$PV(x) \leq V(x) - \lambda \alpha \sigma_q^2/2 (s + 1 - \alpha) V^{1-\delta}(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

5.3 Algorithme de Hastings-Métropolis à marche aléatoire (2)

Ces travaux ont été publiés et sont rapportés au Chapitre 8. Nous nous contenterons donc de présenter les résultats.

5.3.1 Présentation du modèle (sur \mathbb{R}^n)

RW3 Loi de Proposition q : q est symétrique, à support compact et il existe $\delta_q < \infty$, $\epsilon_q > 0$ tels que $|x| \leq \delta_q \Rightarrow q(x) \geq \epsilon_q$.

RW4 Densité cible p : p est strictement positive de classe C^2 sur \mathbb{R}^n ,

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\nabla p(x)}{|\nabla p(x)|}; \frac{x}{|x|} \right\rangle < 0,$$

et il existe $0 < m < 1$ et des constantes d_i , $D_i < \infty$, $i = 0, 1, 2, M < \infty$ telles que pour $|x| \geq M$,

$$\begin{aligned} 0 &< d_0|x|^m \leq -\log p(x) \leq D_0|x|^m, \\ 0 &< d_1|x|^{m-1} \leq |\nabla \log p(x)| \leq D_1|x|^{m-1}, \\ d_2|x|^{m-2} &\leq |\nabla^2 \log p(x)| \leq D_2|x|^{m-2}. \end{aligned}$$

Cette classe est stable par addition, multiplication, et multiplication par des fonctions appartenant à une classe contenant entre autres les fonctions polynomiales sur \mathbb{R}^n (cf. Proposition 8.4).

Exemples de densité Lorsque $n = 1$, cette classe de densités cible contient toutes les lois asymptotiquement plus “lourdes” que la loi exponentielle, comme par exemple les lois de Weibull pour lesquelles $p(x) = (\gamma/\beta)x^{\gamma-1} \exp(-x^\gamma/\beta)$, $x > 0$, $\beta > 0$ et $0 < \gamma < 1$. Lorsque $n \geq 1$, cette classe contient les densités sur-exponentielles homogènes *i.e.* les densités telles que

- $p(x) = \exp[-f(x)]$.
- $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x)$, où I est un ensemble fini inclu dans $]-\infty, 1]$, $0 < \sup_{i \in I} = m < 1$ et $f_i(\lambda x) = \lambda^i f_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, λ réel.
- $\inf_{S^{n-1}} f_m > 0$ où S^{n-1} désigne la sphère unité de \mathbb{R}^n .

5.3.2 Vitesse de convergence

Proposition 5.3 Supposons RW3 et RW4. Soient $\alpha > 0$ et $f(x) := 1 + (-\log p(x))^\alpha$. P est Lebesgue-irréductible apériodique et pour tout entier $q \geq 0$, il existe des fonctions $f =: F_0 \leq$

$F_1 \leq \dots \leq F_{q+1}$, des constantes $b_k < \infty$, $0 \leq k \leq q$, et un ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ petite tels que $\sup_C F_{q+1} < \infty$ et

$$PF_k \leq F_k - F_{k-1} + b_{k-1} \mathbb{1}_C \quad 1 \leq k \leq q+1.$$

Preuve 3 Démonstration du Théorème 8.5, Paragraphe 8.4.2. \square

Précisons que les fonctions solutions sont de la forme $F_k(x) \propto 1 + (-\log p(x))^{\alpha+k(2-m)/m}$. Nous déduisons donc du Paragraphe 2.3.1

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} S(q, k) f(\Phi_k) \right] \leq R F_{q+1}(x) \quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} S(q, k) f(\Phi_k) \right] < \infty,$$

pour une constante $R < \infty$. En conséquence, en appliquant le Théorème 3.1, il vient

$$\lim_n (n+1)^q \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+(-\log p(x))^\alpha} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et il existe une constante $R < \infty$ telle que

$$(n+1)^q \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+(-\log p(x))^\alpha} \leq R \left(1 + (-\log p(x))^{\alpha+q(2-m)/m} \right);$$

si $q \geq 1$,

$$\sum_{n \geq 1} (n+1)^{q-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+(-\log p(x))^\alpha} \leq R \left(1 + (-\log p(x))^{\alpha+q(2-m)/m} \right).$$

Conclusion Nous établissons donc l'ergodicité en norme $1 + (-\log p(x))^\alpha$, $\alpha > 0$, à toute vitesse polynomiale. Il semble donc que la vitesse polynomiale ne soit pas la “bonne” vitesse. Nous pensons que l'on peut attendre une vitesse d'ergodicité de la forme $r(n) = \exp(n^\gamma)$ pour $0 < \gamma < 1$; pour démontrer cette assertion, il suffirait d'établir la condition de drift de Tuominen et Tweedie, qui, à notre connaissance, n'a jamais été vérifiée pour de tels taux. Cela résulte très certainement de la difficulté d'application de cette condition, et cela le restera tant qu'aucune condition plus pratique (de la forme de celle de Fort-Moulines ou de celle de Jarner-Roberts pour les taux riemanniens) n'aura été exhibée.

5.4 Algorithme de Hastings-Métropolis Hybride (HMH)

Lorsque la mesure cible π opère sur un espace de grande dimension, on préfère augmenter la probabilité d'acceptation à chaque itération en proposant un candidat qui ne modifie que quelques composantes de la valeur courante de la chaîne. On décompose donc \mathbb{R}^n sous forme d'un produit de sous-espaces : soit un d -uplet (n_1, \dots, n_d) tel que $\sum_k n_k = n$; on écrit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_d}$. On se donne ensuite une famille de noyaux (P_1, \dots, P_d) , $d \leq n$, telle que

pour tout $1 \leq i \leq d$, P_i agisse sur \mathbb{R}^{n_i} au sens où pour $x = (x_{n_1}, \dots, x_{n_d}) \in \mathbb{R}^n$, $P_i(x, \cdot)$ est une loi sur $(x_{n_1}, \dots, x_{n_{i-1}}, \mathbb{R}^{n_i}, x_{n_{i+1}}, \dots, x_{n_d})$. L'ordre dans lequel ces noyaux constituants sont utilisés peut être déterministe et le noyau de l'échantillonneur est alors $P_H := P_d \cdots P_1$; ou alors aléatoire et $P_H := d^{-1} \sum_{i=1}^d P_i$. Enfin, les noyaux P_i sont bien sûr construits de sorte que le noyau de l'échantillonneur résultant P_H soit "suffisamment régulier" pour avoir pour seule mesure invariante (à une constante de multiplicité près) π .

Nous étudions l'ergodicité géométrique d'un algorithme hybride P_H lorsque $P_H := n^{-1} \sum_{i=1}^n P_i$ et P_i est un noyau de HMMAS sur \mathbb{R} . Autrement dit, soit $\{q_i\}$ une famille de densités symétriques par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Au lieu de proposer un candidat dont la loi est symétrique sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, on choisit au hasard, à chaque transition, une direction e_i de l'espace et propose une évolution de la chaîne de la valeur courante Φ_n vers $\Phi_n + ye_i$ où y est de loi $q_i(y)dy$ (symétrique sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Dans cette section 5.4, on note μ_n (resp. μ) la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}). Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x_i := \langle x; e_i \rangle$. Enfin, $A - x := \{y, x + y \in A\}$. Soit p la densité par rapport à μ_n de la mesure cible π (densité supposée strictement positive); on définit des noyaux de transition P_i sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} P_i(x, A) &:= \prod_{k \neq i} \delta_{x_k}(A_k) \int_{A_i - x_i} \alpha(x, x + ye_i) q_i(y) \mu(dy) \\ &\quad + \delta_x(A) \int (1 - \alpha(x, x + ye_i)) q_i(y) \mu(dy), \quad x \in \mathbb{R}^n, A := A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (5.9)$$

et $\alpha(x, x + ye_i) := 1 \wedge \{p(x + ye_i)/p(x)\}$. Posons

$$\mathcal{A}(x, i) := \{y \in \mathbb{R}, p(x + ye_i) \geq p(x)\} \quad x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n, \quad (5.10)$$

la zone d'acceptation dans la direction e_i et

$$\mathcal{R}(x, i) := \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}(x, i), \quad (5.11)$$

la zone de rejet dans la direction e_i . Autrement dit, toute évolution de la position courante x vers $x + ye_i$, $y \in \mathcal{A}(x, i)$ est systématiquement acceptée, tandis que toute évolution vers $x + ye_i$, $y \in \mathcal{R}(x, i)$ est rejetée avec une probabilité positive. Nous étudions l'algorithme hybride sur \mathbb{R}^n défini par le noyau de transition

$$P_H := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i, \quad (5.12)$$

pour les noyaux P_i donnés par (5.9) : à chaque transition, on choisit aléatoirement selon la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ une direction de l'espace e_i et on effectue une transition de Hastings-Métropolis à marche aléatoire symétrique sur la droite de direction e_i .

Remarque 1 Nous étudions l'algorithme hybride lorsque P_i agit sur la i -ème direction de la base canonique de \mathbb{R}^n . Néanmoins, on pourrait choisir n'importe quelle autre base de l'espace. Nous verrons au Paragraphe 5.4.3 l'importance de ce choix dans l'ergodicité du noyau P_H .

Remarque 2 Roberts et Rosenthal [97] ont énoncé des conditions garantissant la f -ergodicité géométrique de P_H lorsque p est une densité exponentielle ou sous-exponentielle *i.e.*

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla \log p(x)| > 0.$$

Pour cela, ils supposent entre autre que la courbure maximale des géodésiques sur la surface $\{z \in \mathbb{R}^n, p(z) = p(x)\}$ en x , tend vers zéro lorsque $|x| \rightarrow \infty$, condition difficile à vérifier en pratique lorsque $n > 2$.

Nous proposons des hypothèses plus simples à établir, hypothèses que nous illustrons par l'étude de quelques exemples. Nous verrons en particulier deux exemples pour lesquels nos conditions s'appliquent tandis que la condition de courbure de Roberts et Rosenthal n'est pas vérifiée ; nous verrons aussi que l'algorithme de noyau P_H peut être f -géométriquement ergodique alors que l'algorithme HMMAS ne l'est pas. Nous appliquerons enfin nos conditions à l'étude d'un cas plus réaliste relatif à la modélisation du nombre de cas de poliomylérite (modèle proposé par Zeger [126]).

5.4.1 Présentation du modèle

Supposons que

RS1 la loi cible π est absolument continue par rapport à μ_n , $\pi(dx) := p(x)\mu_n(dx)$, et la densité p est strictement positive et continue sur \mathbb{R}^n .

RS2 $\{q_i\}$, $1 \leq i \leq n$, est une famille de densités par rapport à μ , symétriques, et pour lesquelles il existe $\delta_i < \infty$ et $\epsilon_i > 0$,

$$|y| \leq \delta_i \Rightarrow q(y) \geq \epsilon_i, \quad y \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

Proposition 5.4 Supposons RS1 et RS2. Le noyau de transition P_H est Lebesgue-irréductible, apériodique, et $\pi P_H = \pi$. De plus, tout ensemble borné est small.

Preuve 4 Montrons que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\pi P_i = \pi$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, et $B_{-i}^* := B_1 \times \cdots \times B_{i-1} \times \mathbb{R} \times B_{i+1} \times \cdots \times B_n$; nous avons

$$\begin{aligned} \pi P_i(B) &= \int_{B_{-i}^*} p(x)\mu_n(dx) \int_{B_i - x_i} \alpha(x, x + ye_i) q_i(y)\mu(dy) \\ &\quad + \int_B p(x)\mu_n(dx) \int (1 - \alpha(x, x + ye_i)) q_i(y)\mu(dy) \\ &= \int_{B_{-i}^*} p(x)\mu_n(dx) \int_{B_i - x_i \cap \mathcal{A}(x, i)} q_i(y)\mu(dy) + \int_{B_{-i}^*} \mu_n(dx) \int_{B_i - x_i \cap \mathcal{R}(x, i)} p(x + ye_i) q_i(y)\mu(dy) \\ &\quad + \int_B p(x)\mu_n(dx) \int_{\mathcal{R}(x, i)} q_i(y)\mu(dy) - \int_B \mu_n(dx) \int_{\mathcal{R}(x, i)} p(x + ye_i) q_i(y)\mu(dy). \end{aligned}$$

Or

$$\int_{B_{-i}^*} p(x) \mu_n(dx) \int_{B_i - x_i \cap \mathcal{A}(x, i)} q_i(y) \mu(dy) = \int_B \mu_n(dz) \int_{\mathcal{R}(x, i)} p(z + ye_i) q_i(y) \mu(dy);$$

en effet, si $y \in B_i - x_i \cap \mathcal{A}(x, i)$ alors $x_i + y \in B_i$ et $p(x + ye_i) \geq p(x)$, et puisque $x \in B_{-i}^*$, $z := x + ye_i \in B$, $p(z) \geq p(z - ye_i)$ et $-y \in \mathcal{R}(z, i)$. Enfin, $q_i(y) = q_i(-y)$, ce qui termine la démonstration. De même, on montre que

$$\int_{B_{-i}^*} \mu_n(dx) \int_{B_i - x_i \cap \mathcal{R}(x, i)} p(x + ye_i) q_i(y) \mu(dy) = \int_B p(z) \mu_n(dz) \int_{\mathcal{A}(x, i)} q_i(y) \mu(dy).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \pi P_i(B) &= \int_B p(x) \mu_n(dx) \int_{\mathcal{A}(x, i)} q_i(y) \mu(dy) + \int_B p(x) \mu_n(dx) \int_{\mathcal{R}(x, i)} q_i(y) \mu(dy) \\ &= \int_B p(x) \mu_n(dx) \int q_i(y) \mu(dy) = \pi(B), \end{aligned}$$

et π est une mesure de probabilité invariante.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $L \in \mathbb{R}^n$,

$$B_1(0, L) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n, |y_i| \leq L, 1 \leq i \leq n \right\}, \quad B_1(x, L) := x + B_1(0, L),$$

et si $L \in \mathbb{R}$,

$$B_1(0, L) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n, |y_i| \leq L, 1 \leq i \leq n \right\}, \quad B_1(x, L) := x + B_1(0, L).$$

Nous montrons que l'itération P_{RS}^n possède une composante absolument continue par rapport à μ_n , de densité uniformément minorée pour tout (x, y) dans une boule compacte ; ce qui suffit à établir que tout ensemble borné est small. Soient $\delta := (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $x \in B_1(z, \delta/2)$ et $C \subset B_1(z, \delta/2)$; on note

$$0 < \eta(z, \delta/2) := \inf_{t \in B_1(z, \delta/2)} p(t) / \sup_{t \in B_1(z, \delta/2)} p(t) \infty.$$

Avec la convention $\sum_{k=1}^0 y_k = 0$, nous avons,

$$\begin{aligned} P_H^n(x, C) &\geq \frac{1}{n^n} \sum_{i_1 < \dots < i_n} P_{i_n} \cdots P_{i_1}(x, C) \\ &\geq \frac{1}{n^n} \sum_{i_1 < \dots < i_n} \prod_{k=1}^n \int_{C_{i_k} - x_{i_k}} \alpha \left(x + \sum_{j=1}^{k-1} y_{i_j} e_{i_j}; x + \sum_{j=1}^k y_{i_j} e_{i_j} \right) q_{i_k}(y_{i_k}) \mu(dy_{i_k}). \end{aligned}$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, $y_{i_k} \in C_{i_k} - x_{i_k} \Rightarrow |y_{i_k}| \leq \delta_{i_k}$ donc $q_{i_k}(y_{i_k}) \geq \epsilon_k$; de plus, pour tout $1 \leq k \leq n$, $x + \sum_{j=1}^{k-1} y_{i_j} e_{i_j} \in B_1(z, \delta/2)$ et $\alpha \left(x + \sum_{j=1}^{k-1} y_{i_j} e_{i_j}; x + \sum_{j=1}^k y_{i_j} e_{i_j} \right) \geq \eta(z, \delta/2)$. Ainsi

$$P_H^n(x, C) \geq \frac{n!}{n^n} \left(\eta(z, \delta/2) \right)^n \left(\prod_{k=1}^n \epsilon_k \right) \mu_n(C).$$

□

Remarque 3 si chaque densité q_i est continue et strictement positive sur \mathbb{R} , on montre comme précédemment que tout compact est ν_n -small.

Pour établir la f -ergodicité géométrique du noyau P_H , nous formulons une dernière condition

RS3 De toute suite de points de \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} := \{x^j\}$ telle que $\lim_j |x^j| = \infty$, on peut extraire une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$ pour laquelle il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que pour tout $y > 0$,

$$\lim_j \frac{p(\tilde{x}^j)}{p(\tilde{x}^j + y\epsilon_i e_i)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_j \frac{p(\tilde{x}^j - y\epsilon_i e_i)}{p(\tilde{x}^j)} = 0. \quad (5.13)$$

Nous proposons maintenant différentes façons de vérifier RS3 lorsque p est différentiable.

Condition suffisante 1 Supposons que p est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n .

De toute suite $\mathbf{x} := \{x^j\}$ de points de \mathbb{R}^n telle que $\lim_j |x^j| = \infty$ on peut extraire une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\forall \eta > 0, \lim_j \sup_{0 \leq |y| \leq \eta} \left| \frac{\nabla_i^2 \log p(\tilde{x}^j + ye_i)}{\nabla_i \log p(\tilde{x}^j)} \right| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_j \nabla_i \log p(\tilde{x}^j) = \epsilon_i \infty.$$

On vérifie alors la condition RS3 à l'aide d'un développement de Taylor

$$\log p(\tilde{x}^j + ye_i) = \log p(\tilde{x}^j) + y \nabla_i \log p(\tilde{x}^j) \left(1 + \int_0^y (y-t) \frac{\nabla_i^2 \log p(\tilde{x}^j + te_i)}{\nabla_i \log p(\tilde{x}^j)} dt \right).$$

Cette condition est en particulier facilement vérifiable lorsque $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq |y| \leq \eta} |\nabla_i^2 \log p(x + ye_i)|$ est bornée.

Condition suffisante 2 Nous formulons une condition qui s'affranchit de l'argument de sous-suite. Supposons que p est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et

$$\liminf_{M \rightarrow \infty} \inf_{\{x: |\nabla_i \log p(x)| \geq M\}} \inf_{|h| \leq \eta} \frac{\nabla_i \log p(x + he_i)}{\nabla_i \log p(x)} > 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla \log p(x)| = \infty.$$

Là encore, on établit RS3 à l'aide d'un développement de Taylor

$$\log p(\tilde{x}^j + ye_i) - \log p(\tilde{x}^j) = \int_0^y \frac{\nabla_i \log p(\tilde{x}^j + te_i)}{\nabla_i \log p(\tilde{x}^j)} dt \cdot \nabla_i \log p(\tilde{x}^j).$$

Remarque 4 Nous verrons que si p vérifie RS3 alors nécessairement, pour toute suite qui tend vers l'infini, on peut trouver une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$, i et $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que pour tout $y > 0$,

$$\epsilon_i y \in \liminf_j \mathcal{A}(\tilde{x}^j, i). \quad (5.14)$$

Dans les applications que nous proposons, on peut définir $(\tilde{\mathbf{x}}, i, \epsilon_i)$ de la façon suivante : $\tilde{\mathbf{x}}$ est une sous-suite telle que $\lim_j \nabla \log p(\tilde{x}^j) / |\nabla \log p(\tilde{x}^j)|$ existe, et ϵ_i et i sont tels que

$$\left\langle \lim_j \frac{\nabla \log p(\tilde{x}^j)}{|\nabla \log p(\tilde{x}^j)|}; \epsilon_i e_i \right\rangle > 0.$$

5.4.2 Vitesse de convergence

Proposition 5.5 Supposons RS1 à RS3. Soient $0 < s < 1$ tel que $s(1-s)^{1/s-1} < (2n-2)^{-1}$ et $V(x) := p(x)^{-s}$. Il existe des constantes $0 < \lambda < 1$, $b < \infty$ et un ensemble small accessible $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$P_H V(x) \leq \lambda V(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

Plus précisément, soit $\epsilon > 0$ tel que

$$\lambda_\epsilon := \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} \left(1 + s(1-s)^{1/s-1} \right) + \epsilon < 1.$$

Nous montrons qu'il existe un compact C_ϵ tel que

$$P_H V(x) \leq \lambda_\epsilon V(x) + b \mathbb{1}_{C_\epsilon}(x) \quad \text{où} \quad b := n^{-1} \left(1 + s(1-s)^{1/s-1} \right) \sup_{C_\epsilon} V.$$

Nous déduisons des Propositions 5.4 et 5.5 et des résultats du Chapitre 4, l'existence de $\beta_{FM} > 1$, tel que pour tout $\beta < \beta_{FM}$, il existe une constante $R_\beta < \infty$ et

$$\sum_n \beta^n \|P_H^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V \leq R_\beta V(x) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration de la Proposition 5.5 Nous commençons par rappeler le résultat de la Proposition 3 de Roberts et Rosenthal [97] : soit $W(x) := p(x)^{-s}$ pour $0 < s < 1$: pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$P_i W(x) \leq r(s) W(x) \quad (5.15)$$

où $r(s) := 1 + s(1-s)^{1/s-1} \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow 0$.

En effet, nous avons $P_i W(x)/W(x) := \int I(x+ye_i) q_i(y) \mu(dy)$ où

$$I(x+ye_i) := \begin{cases} 1 - p(x+ye_i)/p(x) + \{p(x+ye_i)/p(x)\}^{1-s} & y \in \mathcal{R}(x, i), \\ \{p(x)/p(x+ye_i)\}^s & y \in \mathcal{A}(x, i), \end{cases}$$

et les ensembles $\mathcal{A}(x, i)$ et $\mathcal{R}(x, i)$ sont définis par (5.10) et (5.11). Lorsque $y \in \mathcal{A}(x, i)$, $I(x + ye_i) \leq 1$; tandis que si $y \in \mathcal{R}(x, i)$, $I(x + ye_i) = 1 - \omega + \omega^{1-s}$ pour $0 < \omega \leq 1$. Puisque la fonction $\omega \mapsto 1 - \omega + \omega^{1-s}$ est maximale en $\omega_* := (1-s)^{1/s}$ et vaut dans ce cas $r(s)$, on obtient la majoration voulue.

Nous démontrons maintenant la Proposition 5.5. Puisque (5.15) implique $\sup_{\mathbb{R}^n} P_H V/V < \infty$, il suffit de montrer que $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} P_H V/V < 1$; ce que nous faisons par un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de points de \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} := \{x^j\}$ telle que $\lim_j |x^j| = \infty$ et $\lim_j P_H V(x^j)/V(x^j) \geq 1$; nous montrons qu'il existe une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\lim_j P_i V(\tilde{x}^j)/V(\tilde{x}^j) \leq 1/2; \quad (5.16)$$

dans ce cas, on a

$$\lim_j \frac{P_H V(\tilde{x}^j)}{V(\tilde{x}^j)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lim_j \frac{P_k V(\tilde{x}^j)}{V(\tilde{x}^j)} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} \lim_j \frac{P_k V(\tilde{x}^j)}{V(\tilde{x}^j)} < \frac{1}{2n} + \frac{(n-1)}{n} \frac{2n-1}{2(n-1)} < 1$$

en utilisant (5.15). Ce qui contredit la définition de la suite $\tilde{\mathbf{x}}$. Exhibons $\tilde{\mathbf{x}}$ et i tels que (5.16). D'après l'hypothèse RS3, il existe une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que pour tout $y > 0$,

$$\lim_j \frac{p(\tilde{x}^j)}{p(\tilde{x}^j + y\epsilon_i e_i)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_j \frac{p(\tilde{x}^j - y\epsilon_i e_i)}{p(\tilde{x}^j)} = 0. \quad (5.17)$$

Supposons que $\epsilon_i = -1$ (la démonstration est analogue dans le cas contraire). Alors

$$\lim_j \mathcal{R}(\tilde{x}^j, i) = [0, +\infty). \quad (5.18)$$

En effet, montrons que $[0, +\infty) \subset \liminf_j \mathcal{R}(\tilde{x}^j, i) \subset \limsup_j \mathcal{R}(\tilde{x}^j, i) \subset [0, +\infty)$. Soit $y \in [0, +\infty)$; il vient $\lim_j p(\tilde{x}^j + ye_i)/p(\tilde{x}^j) = 0$ et il existe J tel que pour tout $j \geq J$, $p(\tilde{x}^j + ye_i)/p(\tilde{x}^j) \leq 1$; par suite, $y \in \liminf_j \mathcal{R}(\tilde{x}^j, i)$. Soit $y \in \limsup_j \mathcal{R}(\tilde{x}^j, i)$ i.e. pour tout J , il existe $j \geq J$ tel que $p(\tilde{x}^j + ye_i)/p(\tilde{x}^j) \leq 1$. Alors, $\lim_j p(\tilde{x}^j)/p(\tilde{x}^j + ye_i) = \liminf_j p(\tilde{x}^j)/p(\tilde{x}^j + ye_i) \geq 1$; (5.17) implique $-y \leq 0$. Ce qui termine la preuve de (5.18).

Par définition de P_i ,

$$\begin{aligned} \frac{P_i V(\tilde{x}^j)}{V(\tilde{x}^j)} - \int_{\mathcal{R}(\tilde{x}^j, i)} q_i(y) \mu(dy) &= \int_{\mathcal{A}(\tilde{x}^j, i)} \left[\frac{p(\tilde{x}^j + ye_i)}{p(\tilde{x}^j)} \right]^{-s} q_i(y) \mu(dy) \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}(\tilde{x}^j, i)} \left\{ \left[\frac{p(\tilde{x}^j + ye_i)}{p(\tilde{x}^j)} \right]^{1-s} - \left[\frac{p(\tilde{x}^j + ye_i)}{p(\tilde{x}^j)} \right] \right\} q_i(y) \mu(dy). \end{aligned}$$

Or, si $y \in \mathcal{A}(x, i)$, $p(x + ye_i)/p(x) \geq 1$ et si $y \in \mathcal{R}(x, i)$, $p(x + ye_i)/p(x) \leq 1$. Donc, en utilisant (5.18) et le Théorème de Convergence dominée, il vient

$$\lim_j \frac{P_i V(\tilde{x}^j)}{V(\tilde{x}^j)} \leq \int_{[0, +\infty)} q_i(y) \mu(dy) = 1/2,$$

ce qui termine la démonstration.

5.4.3 Applications

Un exemple simple : p est sous-exponentielle

Considérons tout d'abord le cas où la densité p est sous-exponentielle sur \mathbb{R}^n

$$p(x) \propto \exp(-|x|^s), \quad s > 1. \quad (5.19)$$

Remarquons tout d'abord que

$$\log \frac{p(x + ye_i)}{p(x)} = -|x + ye_i|^s + |x|^s = -|x|^{s-1} \left(\frac{s}{2} \frac{2yx_i + y^2}{|x|} + o(1) \right). \quad (5.20)$$

Soit $\mathbf{x} := \{x^j\}$ une suite de points de \mathbb{R}^n , $\lim_j |x^j| = \infty$. Il existe une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\lim_j |\tilde{x}_i^j| = \infty$. Supposons que $\lim_j \tilde{x}_i^j = +\infty$; (5.20) montre que si $y > 0$, $\lim_j \log\{p(\tilde{x}^j + ye_i)/p(\tilde{x}^j)\} = -\infty$ et si $y < 0$, $\lim_j \log\{p(\tilde{x}^j + ye_i)/p(\tilde{x}^j)\} = +\infty$: RS3 est établie en prenant $\epsilon_i = -1$. Supposons maintenant que $\lim_j \tilde{x}_i^j = -\infty$. (5.20) montre que si $y > 0$, $\lim_j \log\{p(\tilde{x}^j + ye_i)/p(\tilde{x}^j)\} = +\infty$ et si $y < 0$, $\lim_j \log\{p(\tilde{x}^j + ye_i)/p(\tilde{x}^j)\} = -\infty$: RS3 est établie en prenant $\epsilon_i = 1$.

Le noyau P_H de densité cible p donnée par (5.19) est donc f -géométriquement ergodique.

Importance du choix des directions d'évolution

Considérons le cas où la densité p est définie sur \mathbb{R}^2 par

$$p(x_1, x_2) \propto \exp(-(x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2)). \quad (5.21)$$

La densité et quelques courbes de niveau $\{z \in \mathbb{R}^2, p(z) = c\}$ sont représentées en Figure 5.1. Cet exemple a été proposé par Jarner et Hansen (Exemple 5.4. [51]) comme exemple de densité pour laquelle l'algorithme de Hastings-Métropolis à marche aléatoire symétrique HMMAS n'est pas géométriquement ergodique. Or, nous montrons que l'algorithme hybride l'est. Remarquons en effet que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{p(x_1 + y, x_2)}{p(x_1, x_2)} = \exp -[(2yx_1 + y^2)(1 + x_2^2)], \quad (5.22)$$

$$\frac{p(x_1, x_2 + y)}{p(x_1, x_2)} = \exp -[(2yx_2 + y^2)(1 + x_1^2)]. \quad (5.23)$$

Ainsi, soit $\mathbf{x} := \{x^j\}$ une suite de points de \mathbb{R}^2 telle que $\lim_j |x^j| = \infty$; supposons que pour une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$, $\lim_j \tilde{x}_1^j = \epsilon\infty$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Nous déduisons de (5.22) et (5.23) que la condition RS3 est vérifiée avec $i = 1$ et $\epsilon_i = -\epsilon$. Par symétrie du problème, on obtient la même résultat si $\lim_j \tilde{x}_2^j = \epsilon\infty$.

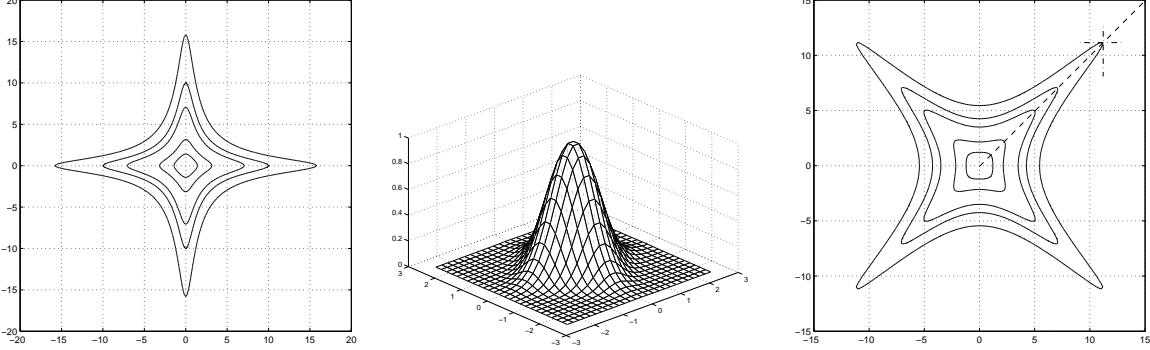


FIG. 5.1 – Densité (5.21); A gauche, dans le repère (e_1, e_2) . A droite : dans le repère $(e_1 + e_2, -e_1 + e_2)$

Supposons maintenant que l'on choisisse pour directions d'évolution de la chaîne les vecteurs (e'_1, e'_2) , $e'_1 := \sqrt{2}/2(e_1 + e_2)$ et $e'_2 := \sqrt{2}/2(e_2 - e_1)$. Cela revient à considérer dans le repère (e_1, e_2) la densité \bar{p} définie par

$$\bar{p}(x_1, x_2) = \exp - \left(x_1^2 + x_2^2 + 1/4(x_1^2 - x_2^2)^2 \right). \quad (5.24)$$

Dans ce cas, nos résultats ne s'appliquent pas. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}(x_1 + y, x_2)}{\bar{p}(x_1, x_2)} &= \exp - \left[(y^2 + 2yx_1)(1 + 1/4\{(x_1 + y)^2 + x_1^2 - 2x_2^2\}) \right], \\ \frac{\bar{p}(x_1, x_2 + y)}{\bar{p}(x_1, x_2)} &= \exp - \left[(y^2 + 2yx_2)(1 + 1/4\{(x_2 + y)^2 + x_2^2 - 2x_1^2\}) \right], \end{aligned}$$

si bien que pour la suite $\bar{x} := (j, j)$, il vient

$$\frac{\bar{p}(j + y, j)}{\bar{p}(j, j)} \sim \exp -(4j^2 y^2),$$

et la condition RS3 ne peut pas être vérifiée. Graphiquement, (Figure 5.1 Droite), il est aisément de se rendre compte que la condition nécessaire (5.14) n'est pas vérifiée le long des diagonales.

Contre-exemple aux conditions de Roberts-Rosenthal (1)

Considérons le cas où la densité p sur \mathbb{R}^2 est le mélange de deux gaussiennes

$$p(x_1, x_2) \propto \exp -(x_1^2 + a^2 x_2^2) + \exp -(a^2 x_1^2 + x_2^2)), \quad |a| > 1; \quad (5.25)$$

la densité et quelques courbes de niveau $\{z \in \mathbb{R}^2, p(z) = c\}$ sont représentées en Figure 5.2. Jarner et Hansen (Exemple 5.2. [51]) ont montré que les courbes de niveau $\{z \in \mathbb{R}^2, p(z) = c\}$

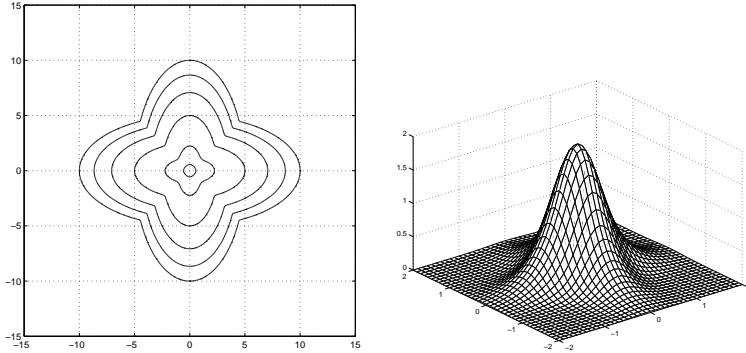


FIG. 5.2 – Densité (5.25) et quelques courbes de niveau

pour une constante $0 < c < \infty$ présentent des “pinçements” qui s’accentuent lorsque $c \rightarrow \infty$. En particulier, sur la diagonale $\{x \in \mathbb{R}^2, x_1 = x_2\}$, la courbure tend vers l’infini et donc pour cette densité, les résultats de Roberts et Rosenthal [97] établissant la f -ergodicité de noyau P_H ne s’appliquent pas. En revanche, nos conditions sont vérifiées. On écrit en effet

$$\log \frac{p(x + ye_i)}{p(x)} = \int_0^y \nabla_i \log p(x + te_i) dt.$$

Or,

$$\begin{aligned}\nabla_1 \log p(x_1, x_2) &= -2x_1 \frac{e^{-(x_1^2 + a^2 x_2^2)} + a^2 e^{-(a^2 x_1^2 + x_2^2)}}{e^{-(x_1^2 + a^2 x_2^2)} + e^{-(a^2 x_1^2 + x_2^2)}}, \\ \nabla_2 \log p(x_1, x_2) &= -2x_2 \frac{a^2 e^{-(x_1^2 + a^2 x_2^2)} + e^{-(a^2 x_1^2 + x_2^2)}}{e^{-(x_1^2 + a^2 x_2^2)} + e^{-(a^2 x_1^2 + x_2^2)}},\end{aligned}$$

et donc

$$1 \leq \frac{\nabla_1 \log p(x_1, x_2)}{-2x_1} \leq a^2 \quad 1 \leq \frac{\nabla_2 \log p(x_1, x_2)}{-2x_2} \leq a^2.$$

Soit $\mathbf{x} := \{x^j\}$ une suite de points de \mathbb{R}^2 telle que $\lim_j |x^j| = +\infty$; supposons qu’il existe une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$ telle que $\lim_j \tilde{x}_1^j = +\infty$. Il vient que pour tout j suffisamment grand,

$$-2a^2(2y\tilde{x}_1^j + y^2) \leq \log \frac{p(\tilde{x}^j + ye_i)}{p(\tilde{x}^j)} \leq -2(2y\tilde{x}_1^j + y^2)$$

de sorte que RS3 est établie avec $i = 1$ et $\epsilon_i = -1$. Les autres cas ($\lim_j \tilde{x}_1^j = -\infty$, $\lim_j \tilde{x}_2^j = \pm\infty$) se démontrent de la même façon.

Contre-exemple aux conditions de Roberts-Rosenthal (2)

Considérons la densité définie sur \mathbb{R}^2 par

$$p(x) \propto (1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^8 x_2^2) \exp(-(x_1^2 + x_2^2)). \quad (5.26)$$

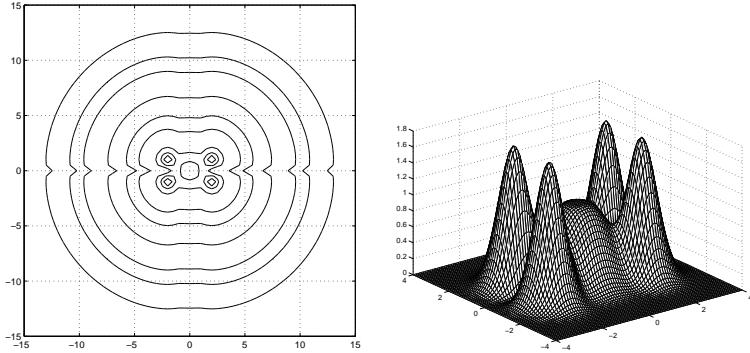


FIG. 5.3 – Densité (5.26) et quelques courbes de niveau

La densité et quelques courbes de niveau $\{z \in \mathbb{R}^2, p(z) = c\}$ sont représentées en Figure 5.3. Cet exemple, proposé par Jarner et Hansen (Exemple 5.3. [51]) ne vérifie pas la condition de courbure de Roberts et Rosenthal [97], puisque la courbure tend vers l'infini le long de l'axe des abscisses) et donc leurs résultats relatifs à l'ergodicité géométrique de P_H ne s'appliquent pas. Nous montrons que là encore, nos conditions sont vérifiées. Il suffit en effet de remarquer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{p(x_1 + y, x_2)}{p(x_1, x_2)} &= \left(\frac{1 + (x_1 + y)^2 + x_2^2 + (x_1 + y)^8 x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^8 x_2^2} \right) \exp(-(2yx_1 + y^2)), \\ \frac{p(x_1, x_2 + y)}{p(x_1, x_2)} &= \left(\frac{1 + x_1^2 + (x_2 + y)^2 + x_1^8 (x_2 + y)^2}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^8 x_2^2} \right) \exp(-(2yx_2 + y^2)) \end{aligned}$$

et l'on montre RS3 comme dans les précédentes applications.

Modélisation du nombre de cas de Poliomyélite

Pour terminer, nous considérons un exemple plus réaliste étudié par Zeger [126].

Il propose de modéliser le nombre de cas de poliomyélite par un modèle linéaire généralisé à effet aléatoire : on suppose que les observations $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont des v.a. de Poisson d'intensité $\lambda_k := \exp(\mu_k + X_k)$ où $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ est déterministe et X_k est un AR(1) stationnaire dont l'innovation ϵ_k suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1) : X_k = aX_{k-1} + \epsilon_k, |a| < 1$.

Chan et Ledolter [20] ont étudié l'estimation de (μ, λ^{-1}, a) au sens du maximum de vraisemblance à l'aide de l'algorithme de Monte-Carlo Expectation Maximization (MCEM) en supposant des conditions d'ergodicité de l'échantillonneur de Gibbs difficiles à vérifier, et non vérifiées explicitement par les auteurs. Récemment, nous avons étudié la convergence de l'algorithme MCEM sous des hypothèses de f -ergodicité de l'échantillonneur considéré (ces travaux sont présentés au Chapitre 6 et développés au Chapitre 9). Aussi nous intéressons-nous à la f -ergodicité de l'algorithme hybride, lorsque la densité p est celle du processus caché $X = (X_1, \dots, X_n)$ sachant

les observations y . En conséquence, nous considérons le cas où p est donné par

$$p(x) \propto \exp \left(\sum_{k=1}^n \{y_k(\mu_k + x_k) - \exp(\mu_k + x_k)\} - \lambda/2 \sum_{k=2}^d (x_k - ax_{k-1})^2 - \lambda(1-a^2)x_1^2/2 \right);$$

(la dépendance de p en les observations y est omise). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\log \frac{p(x + te_i)}{p(x)} = -\left(\exp t - 1 \right) \exp(\mu_i + x_i) + t\phi_i(x) + \psi_i(t), \quad (5.27)$$

où

$$\begin{cases} \phi_1(x) := -\lambda x_1 + \lambda a x_2, & \phi_n(x) := -\lambda x_n + \lambda a x_{n-1}, \\ \phi_i(x) := -\lambda((1+a^2)x_i - a(x_{i-1} + x_{i+1})) & i \neq 1, n, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \psi_i(t) := y_1 t - \lambda/2t^2 & i = 1, n, \\ \psi_i(t) := y_i t - \lambda/2(1+a^2)t^2 & i \neq 1, n. \end{cases}$$

Soit $\mathbf{x} := \{x^j\}$ une suite de points de \mathbb{R}^n , $\lim_j |x^j| = \infty$. Il existe une sous-suite $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}^j\}$ et une permutation σ sur $\{1, \dots, n\}$ telle que pour tout j ,

$$\tilde{x}_{\sigma(1)}^j \leq \dots \leq \tilde{x}_{\sigma(n)}^j,$$

$$\lim_j \tilde{x}_{\sigma(n)}^j = +\infty \text{ et/ou } \lim_j \tilde{x}_{\sigma(1)}^j = -\infty.$$

Supposons que $\lim_j \tilde{x}_{\sigma(n)}^j = \infty$; alors $\phi_{\sigma(n)}(\tilde{x}^j) = o(\exp \tilde{x}_{\sigma(n)}^j)$ (lorsque $j \rightarrow \infty$). En conséquence, (5.27) montre que si $t > 0$, $\lim_j \log\{p(\tilde{x}^j + te_{\sigma(n)})/p(\tilde{x}^j)\} = -\infty$ et si $t < 0$, $\lim_j \log\{p(\tilde{x}^j + te_{\sigma(n)})/p(\tilde{x}^j)\} = +\infty$; ce qui démontre RS3 avec $i = \sigma(n)$ et $\epsilon_i = -1$.

Supposons cette fois que $\limsup_j \tilde{x}_{\sigma(n)}^j < \infty$ et $\lim_j \tilde{x}_{\sigma(1)}^j = -\infty$. Alors pour j suffisamment grand, si $\sigma(1) \in \{1, n\}$, $\phi_{\sigma(1)}(\tilde{x}^j) \geq -\lambda(1-|a|)\tilde{x}_{\sigma(1)}^j$ et sinon, $\phi_{\sigma(1)}(\tilde{x}^j) \geq -\lambda(1-|a|)^2\tilde{x}_{\sigma(1)}^j$; en conséquence, (5.27) implique la condition RS3 avec $i = \sigma(1)$ et $\epsilon_i = 1$.

Chapitre 6

Convergence de l'algorithme MCEM stable

Nous présentons un document soumis pour publication dans lequel on étudie la convergence p.s. de l'algorithme MCEM stable pour les modèles exponentiels courbes. Ce document constitue le Chapitre 9.

Nous exploitons la technique de couplage développée au Chapitre 4 pour contrôler des fonctionnelles additives d'une chaîne de Markov $\Phi = \{\Phi_n\}$ de mesure de probabilité invariante π , fonctionnelles de la forme

$$\mathbb{E}_x \left[\left| \sum_{k=1}^n \{S(\Phi_k) - \pi(S)\} \right|^p \right]$$

pour $p \geq 2$ et S mesurable. Nous appliquons ce résultat à la démonstration de la convergence p.s. de l'algorithme Monte Carlo Expectation Maximization (MCEM) stable par chaînes de Markov pour les modèles exponentiels courbes.

L'algorithme Expectation Maximization (EM), proposé par Dempster *et al.* [31] est un algorithme itératif permettant d'approcher le maximum sur un domaine Θ d'une fonction positive g définie par

$$g(\theta) := \int_{\mathcal{X}} h(z; \theta) \mu(dz),$$

lorsque la fonction g ne peut pas être calculée explicitement et \mathcal{X} est un ouvert de \mathbb{R}^d , μ est une mesure finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ et $\{h(z; \theta), \theta \in \Theta\}$ est une famille de fonctions μ -intégrables, strictement positives μ -p.s.

Tel est le cas par exemple dans l'estimation par maximum de vraisemblance des paramètres d'un modèle dit à *données cachées*. $h(z; \theta)$ est la densité par rapport à μ de la loi des données complètes (concaténation du vecteur des données manquantes z et du vecteur des observations y) pour la valeur θ du paramètre, et $g(\theta)$ est la vraisemblance incomplète des observations y , pour la valeur θ du paramètre; la dépendance de g et h en y est omise. Pour des applications de l'algorithme EM, voir par exemple, Redner et Walker [93], Baum et Petrie [4], Dembo et Zeitouni [28, 29, 30], et, pour un papier de revue sur les applications, Meng et Van Dyk [65]. Chaque itération de l'EM comprend deux étapes

Etape E de calcul d'espérance,

$$\mathcal{Q}(\theta; \theta_n) := \int \log h(z; \theta) p(z; \theta_n) \mu(dz) \quad \text{où} \quad p(z; \theta) := h(z; \theta) g(\theta)^{-1}$$

est la loi a posteriori des données manquantes z sachant les observations, pour la valeur θ du paramètre.

Etape M de maximisation, qui définit la nouvelle valeur de l'estimation du maximum

$$\theta_{n+1} := \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \mathcal{Q}(\theta; \theta_n),$$

si ce maximum est unique, ou une des valeurs qui maximise la quantité auxiliaire $\mathcal{Q}(\theta; \theta_n)$ sinon.

Chaque itération de l'EM se résume par la définition d'une application $T : \Theta \rightarrow \Theta$ telle que $\theta_{n+1} = T(\theta_n)$ en ayant posé

$$T(\theta) := \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \int_{\mathcal{X}} \log h(z; \phi) p(z; \theta) \mu(dz).$$

La propriété remarquable de cet algorithme est d'accroître à chaque itération la fonction à maximiser, puisque $g(\theta_{n+1}) = g(T(\theta_n)) \geq g(\theta_n)$, pour tout $n \geq 0$. Il suffit en effet de remarquer que par définition de θ_{n+1} , $\mathcal{Q}(\theta_{n+1}; \theta_n) \geq \mathcal{Q}(\theta_n; \theta_n)$ ce qui implique

$$\log g(\theta_{n+1}) - \log g(\theta_n) \geq - \int \log \frac{p(z; \theta_{n+1})}{p(z; \theta_n)} p(z; \theta_n) \mu(dz)$$

et l'on obtient l'inégalité voulue par application de l'inégalité de Jensen. Sous les conditions classiques de régularité du modèle, on montre que (a) l'ensemble des points fixes de T est l'ensemble des points stationnaires de g et (b) il existe un point stationnaire θ^* tel que la suite $\{g(\theta_n)\}$ converge (en croissant) vers le sous-ensemble $\{\theta \in \Theta, g(\theta) = g(\theta^*)\}$. Si cette composante se réduit au singleton $\{\theta^*\}$, la suite $\{\theta_n\}$ converge vers le point stationnaire θ^* , qui peut être aussi bien un maximum local, un minimum local ou un point selle (Cf. Wu [123], Murray [77], Boyles [11], Meng et Rubin [66], McLachlan [64], Nettleton [78] pour l'étude du comportement asymptotique de l'EM). Néanmoins, dans de nombreux modèles, on sait que

- θ^* est un maximum local de g si et seulement si c'est un point fixe stable de T (*i.e.* le rayon spectral de $\nabla T(\theta)$, noté $\rho(T)$, est strictement inférieur à 1).
- θ^* est un minimum local de g si et seulement si c'est un point fixe instable de T (*i.e.* $\rho(T^{-1}) < 1$).
- θ^* est un point selle si et seulement si c'est un point fixe hyperbolique ($\rho(T) > 1$ et $\nabla T(\theta^*)$ a des valeurs propres (v.p.) de module inférieur à 1) ;

ces assertions sont étudiées par exemple par Celeux et Diebolt [17], Proposition 1 ou Delyon *et al.* [27], Lemme 3.

Dans de nombreuses applications, le calcul de $\mathcal{Q}(\theta; \theta_n)$ est infaisable car il nécessite une sommation sur un grand nombre de termes ou une intégration sur un large domaine. Par exemple, dans le problème d'estimation dans un modèle à données cachées présenté ci-dessus, la dimension de \mathcal{X} est le nombre total de données manquantes. On estime donc cette quantité par simulation ; tel est le principe commun aux algorithmes Stochastic EM (SEM), Stochastic Approximation EM (SAEM) et Monte Carlo EM (MCEM).

Le SEM, (Celeux et Diebolt [15, 16, 17, 34], voir aussi Diebolt et Ip [35]), initialement proposé comme méthode d'accélération de l'EM, substitue l'étape E par une étape de simulation d'une v.a. Z_n de loi $p(z; \theta_n)\mu(dz)$ et indépendante, conditionnellement à θ_n , des v.a. $\{Z_j\}$, $j \leq n - 1$. L'étape de maximisation s'effectue en remplaçant $\mathcal{Q}(\theta; \theta_n)$ par la somme $n^{-1} \sum_{j=1}^n \log h(Z_j; \theta)$. La convergence en loi de la suite de v.a. $\{\theta_n\}$ (qui, par définition est une chaîne de Markov), a été récemment étudiée par Nielsen [80] pour des modèles généraux.

Le SAEM (Delyon *et al.* [27]), remplace l'étape E par une étape d'approximation stochastique en calculant l'approximation

$$\mathcal{Q}_n(\theta) := \mathcal{Q}_{n-1}(\theta) + \gamma_n \left(m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \log h(Z_j^{(n)}; \theta) - \mathcal{Q}_{n-1}(\theta) \right),$$

où $\{\gamma_n\}$ et $\{m_n\}$ sont des suites déterministes respectivement “convenablement” décroissantes et “convenablement” croissantes, et $Z^{(n)} = \{Z_j^{(n)}\}$ est une suite de v.a. indépendantes (conditionnellement à θ_n) de loi $p(z; \theta_n)\mu(dz)$. Delyon *et al.* [27] ont montré la convergence p.s. de cet algorithme vers une sous-composante connexe de l'ensemble des points stationnaires de la fonction à maximiser g , et ce, pour une famille assez générale de modèles dits exponentiels courbes. On parle de *modèle exponentiel courbe* lorsque la vraisemblance incomplète $h(z; \theta)$ est de la forme

$$\ln h(z; \theta) := \phi(\theta) + \langle S(z); \psi(\theta) \rangle, \quad (6.1)$$

où $\phi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^q$, et $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q$ est la statistique exhaustive.

Ces deux algorithmes nécessitent la simulation de v.a. de loi $p(z; \theta)\mu(dz)$ ce qui est relativement simple lorsque cette loi s'écrit comme le produit de lois marginales sur des espaces de petite dimension. Dans le cas contraire, on recourt aux méthodes de simulation par chaînes de Markov pour obtenir une trajectoire d'une chaîne d'unique mesure stationnaire $\pi_\theta(dz) := p(z; \theta)\mu(dz)$.

Telle est la méthode de simulation de l'algorithme MCEM.

Proposé par Wei et Tanner [122] (voir aussi Tanner [114], Guo et Thompson [45], McCulloch [62, 63], Meng and Schilling [69], Chan et Kuk [19], Ravishanker et Qiou [92] pour des applications), le MCEM substitue la quantité $\mathcal{Q}(\theta; \theta_n)$ par la somme de Monte-Carlo

$$\mathcal{Q}_n(\theta) := m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \log h(\Phi_j^{(n)}; \theta) \quad (6.2)$$

où $\{m_n\}$ est une suite déterministe croissante, et $\Phi^{(n)} := \{\Phi_j^{(n)}\}$ est une chaîne de Markov d'unique mesure de probabilité stationnaire π_{θ_n} .

Chan et Ledolter [20] ont étudié la convergence “avec une grande probabilité” du MCEM pour un schéma de simulation fixe $m_n := m$ et pour les modèles exponentiels courbes. Ils ont montré que si l'on initialise l'algorithme en un point $\theta_0^{(m)}$ dans un voisinage d'un maximum isolé θ^* de la fonction à maximiser g , alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\kappa(\epsilon)$ tel que l'on ait

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|\theta_k^{(m)} - \theta^*| < \epsilon, \text{ pour } k < \kappa(\epsilon)) = 1.$$

Outre la difficulté d'application de ce résultat, (choix du voisinage de θ^* , choix de m), leur démonstration repose sur le critère de régularité des chaînes (dont ils commentent très légèrement la vérifiabilité) de convergence en probabilité uniforme sur tout compact de Θ des sommes de Monte-Carlo vers l'espérance sous la mesure invariante : pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Theta$,

$$\sup_{\theta \in \mathcal{K}} \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(\Phi_j) - \pi_\theta(S) \right| \rightarrow_{\mathbb{P}} 0, \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty,$$

où $\{\Phi_j\}$ est une chaîne de Markov d'unique mesure de probabilité stationnaire π_θ .

Sherman *et al.* [106] ont étudié la convergence p.s. et en probabilité d'un algorithme MCEM qui consiste, à chaque itération, à calculer la quantité (6.2) à l'aide de m v.a. $\{\Phi_i^{(k)}(\theta)\}$, $1 \leq i \leq m$, obtenues après k itérations de m échantillonneurs de Gibbs indépendants de loi cible $p(z; \theta) \mu(dz)$. La démonstration de ce résultat repose, entre autre, sur un critère d'ergodicité géométrique uniforme (uniforme en θ , $\theta \in \Theta$ supposé compact) de l'échantillonneur de Gibbs ; condition peu satisfaisante aux vues des résultats existant sur le calcul explicite du taux de convergence de cet échantillonneur.

Ces constats ont donc motivé notre recherche de conditions générales impliquant la convergence p.s. du MCEM pour la (large) famille de densités complètes dites exponentielles courbes.

Algorithme EM et MCEM pour le modèle exponentiel courbe Nous supposons dorénavant que la densité h est donnée par (6.1).

Une suite $\{\theta_n\}$ de l'EM est définie par

$$\theta_{n+1} := \hat{\theta}(\bar{S}(\theta_n)) \quad \text{i.e.} \quad T = \hat{\theta} \circ \bar{S} \quad (6.3)$$

où

$$\bar{S}(\theta) := \int S(z)p(z; \theta)\mu(dz) \quad (6.4)$$

est l'espérance de la statistique exhaustive S sous la mesure $\pi_\theta(dz) := p(z; \theta)\mu(dz)$ et la fonction $\hat{\theta}$ est définie implicitement par

$$\forall \theta \in \Theta, s \in \mathbb{R}^q \quad \phi(\hat{\theta}(s)) + \langle s; \psi(\hat{\theta}(s)) \rangle \geq \phi(\theta) + \langle s; \psi(\theta) \rangle; \quad (6.5)$$

nous n'étudions que les modèles exponentiels courbes pour lesquels $\hat{\theta}$ existe.

Une trajectoire $\{\theta_n\}$ du MCEM est définie par

$$\theta_{n+1} := \hat{\theta}(\tilde{S}_n)$$

où

$$\tilde{S}_n := m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} S(Z_j^n) \quad (6.6)$$

et $Z^n := \{Z_j^n\}$ est une chaîne de Markov d'unique mesure de probabilité stationnaire $\pi_{\theta_n}(dz) := p(z; \theta_n)\mu(dz)$ connue à la constante de normalisation $g(\theta_n)$ près.

Une trajectoire $\{\theta_n\}$ du MCEM est donc une trajectoire du système dynamique T à temps discret aléatoirement bruité. Les résultats sur le comportement du MCEM pourraient donc résulter de l'application des différents travaux sur la convergence des perturbations aléatoires des suites récursives (Cf. par exemple, Pierre-Loti-Viaud [86], Shapiro et Wardi [105], Liukkonen et Levine [60]), travaux, qui, dans notre cadre, ne s'appliquent qu'à certains modèles. Par exemple, la condition majeure des travaux de Pierre-Loti-Viaud (Corollaire 1(iii), Proposition 1 [86]) dont on pourrait déduire la convergence p.s. des trajectoires du MCEM vers un point stationnaire de g (supposé en nombre fini), est la convergence p.s. vers zéro de l'erreur en un pas $\theta_{n+1} - T(\theta_n)$. Pour ce faire, si $\hat{\theta}$ est suffisamment régulière, il suffit d'établir la convergence p.s. de $\tilde{S}_n - \bar{S}(\theta_n)$ vers zéro, condition que nous ne savons pas démontrer sans l'hypothèse supplémentaire (et restrictive) de compacité de la suite $\{\theta_n\}$.

Nous nous sommes aussi heurtée à la non-stabilité du MCEM *i.e.* à la non-compacité des trajectoires du MCEM pour des modèles généraux. Plutôt que de formuler des conditions techniques (Cf. Kushner et Yin [55]), nous avons préféré modifier la procédure du MCEM décrite ci-dessus en adaptant *l'algorithme de reprojection* de Chen *et al.* [22]. On appelle MCEM stable cette nouvelle procédure.

Algorithme MCEM stable Soient une suite de compact $\{\mathcal{K}_n\}$ telle que

$$\mathcal{K}_n \subsetneq \mathcal{K}_{n+1}, \quad \Theta = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{K}_n, \quad (6.7)$$

et un point $\theta'_0 \in \mathcal{K}_0$. On pose $p_0 := 0$ et on procède itérativement comme suit. On calcule une approximation de $\tilde{S}(\theta'_n)$, notée \tilde{S}_n

$$\tilde{S}_n := m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} S(Z_j^n), \quad (6.8)$$

à partir de m_n échantillons d'une chaîne de Markov $\{Z_j^n\}$, d'unique mesure invariante $\pi_{\theta'_n}$. Puis

$$\begin{cases} \text{si } \hat{\theta}(\tilde{S}_n) \in \mathcal{K}_{p_n}, & \theta'_{n+1} := \hat{\theta}(\tilde{S}_n) \text{ et } p_{n+1} := p_n, \\ \text{si } \hat{\theta}(\tilde{S}_n) \notin \mathcal{K}_{p_n}, & \theta'_{n+1} := \theta'_0 \text{ et } p_{n+1} := p_n + 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

Notre objectif est de définir un critère de proximité des sommes de Monte-Carlo et de l'espérance sous la loi stationnaire garantissant un comportement asymptotique du MCEM stable similaire à celui de l'EM. Outre des conditions de régularité du modèle exponentiel courbe $h(z; \theta)$ (Conditions M1 et M2, Paragraphe 9.2), nous formulons la condition suivante

Soient $p \geq 2$ et une mesure de probabilité λ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Theta$, il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{K}} \mathbb{E}_{\lambda, \theta} \left| \sum_{k=1}^n \{S(\Phi_k) - \pi_\theta(S)\} \right|^p \leq C n^{p/2}, \quad (6.10)$$

où $P_{\lambda, \theta}$ désigne la probabilité sur l'espace canonique d'une chaîne $\{\Phi_n\}$ de loi initiale λ , de noyau P_θ et d'unique mesure de probabilité invariante π_θ .

Enfin, nous choisissons un schéma de simulation $\{m_n\}$ tel que $\sum_n m_n^{-p/2} < \infty$. Nous montrons alors (Théorème 9.3) que pour une suite de compacts $\{\mathcal{K}_n\}$ solution de (6.7) et un point $\theta'_0 \in \mathcal{K}_0$ donnés,

- $\lim_n p_n < \infty$ p.s. et $\limsup_n |\theta'_n| < \infty$ p.s. : autrement dit, pour presque toutes les trajectoires du MCEM stable issues de θ'_0 , le nombre de projections sur les compacts croissants \mathcal{K}_n est fini et la suite de points $\{\theta'_n\}$ reste dans un compact (qui dépend de la trajectoire).
- la suite $\{g(\theta'_n)\}$ converge p.s. vers une composante connexe de $g(\{\theta, T(\theta) = \theta\})$ et par suite, si cet ensemble est d'intérieur vide, $\{g(\theta'_n)\}$ converge vers un point g^* et $\{\theta'_n\}$ converge vers $\{\theta, T(\theta) = \theta \text{ et } g(\theta) = g^*\}$.

Avant de présenter les étapes de la démonstration de ce résultat, revenons sur le réalisme de la condition type-Rosenthal (6.10).

6.1 Calcul explicite d'une majoration type-Rosenthal pour chaînes de Markov

Les résultats suivants sont démontrés au Paragraphe 9.7. Précisons que notre objectif n'est pas ici de calculer la meilleure majoration $C(x)$ telle que pour une chaîne de Markov $\{\Phi_n\}$ de mesure

invariante π

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{S(\Phi_k) - \pi(S)\} \right|^p \leq C(x) n^{p/2},$$

mais d'exhiber une construction de $C(x)$ en fonction de termes facilement identifiables. Soit P un noyau ψ -irréductible apériodique à valeur dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

\mathcal{X} est small Supposons tout d'abord qu'il existe des constantes $\epsilon > 0$, $m \geq 1$ et une mesure de probabilité $\nu_m \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ telles que

$$P^m(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot) \quad x \in \mathcal{X}, \quad (6.11)$$

i.e. supposons que la chaîne est uniformément ergodique. Alors P possède une unique mesure de probabilité invariante π (Théorème 16.0.2. [72]) et pour tout $p \geq 2$ et toute fonction mesurable $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que $\sup_{\mathcal{X}} |g| < \infty$, il vient

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq C \sup_{\mathcal{X}} |g|^p n^{p/2},$$

où

$$C := 6^p C_p \left\{ 1 + 2 \{1 - (1 - \epsilon)^{1/m}\}^{-1} \right\} \quad (6.12)$$

et C_p est la constante de Rosenthal. En conséquence, si l'on considère une famille de noyaux P_θ , $\theta \in \Theta$, pour lesquels il existe des constantes $\epsilon_\theta > 0$, $m_\theta \geq 1$ et une mesure de probabilité ν_θ telles que $P_\theta^{m_\theta}(x, \cdot) \geq \epsilon_\theta \nu_\theta(\cdot)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, la majoration (6.12) est uniforme en θ pour θ dans un compact $\mathcal{K} \subset \Theta$ dès lors que ϵ_θ (resp. m_θ) est uniformément minoré (resp. majoré) pour tout θ dans \mathcal{K} . Tel est souvent le cas lorsque \mathcal{X} est compact et la densité cible p est continue sur $\mathcal{X} \times \Theta$ (Cf Application 9.4.1, Paragraphe 9.4).

Conditions générales La condition d'uniforme ergodicité (6.11) reste néanmoins difficile à vérifier principalement lorsque \mathcal{X} n'est pas compact. Nous énonçons donc une autre condition en termes de conditions de drift.

Soient D_i des ensembles ν_{m_i} -small accessibles, (de constantes de minoration $\epsilon_i > 0$) et $C_i \subseteq D_i$, $i = 0, 1$, des ensembles accessibles. Soit $p \geq 2$. Supposons qu'il existe des fonctions mesurables sur \mathcal{X} , $1 \leq f_0 \leq V_0 \leq V_0^p \leq f_1 \leq V_1$, des constantes $b_i < \infty$, $0 < a_i < 1$ telles que $\sup_{D_i} V_i < \infty$ et

$$\begin{cases} PV_i(x) \leq V_i(x) - f_i(x) + b_i \mathbb{1}_{C_i}(x), \\ f_i(x) - b_i \geq a_i f_i(x), \end{cases} \quad x \in D_i^c, \quad (6.13)$$

pour $i = 0, 1$. Alors P possède une unique mesure de probabilité invariante π et pour toute fonction mesurable $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $g \in \mathcal{L}_{f_0}$,

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq \|g\|_{f_0}^p n^{p/2} C(x) \quad x \in \mathcal{X},$$

où

$$C(x) := 6^p C_p \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{\left[M_{1,f_0} + M_{2,f_0} \{V_0(x) + \pi(V_0)\} \right]^p}{V_0^p(x)} \left(\pi(f_1) + M_{1,f_1} + M_{2,f_1} \{V_1(x) + \pi(V_1)\} \right),$$

C_p est la constante de Rosenthal et

$$M_{1,f_i} \leq 2(1+\epsilon_i) \left\{ \sup_{(x,x') \in C_i \times D_i} \{V_i(x) - f_i(x) + V_i(x') - f_i(x')\} + 2b_i m_i \right\} \quad M_{2,f_i} \leq (2-\epsilon_i) a_i^{-1}.$$

Les conditions (6.13) peuvent en particulier se déduire du drift de Jarner-Roberts ou de Foster-Lyapunov. Dans le premier cas, rappelons que si $PV \leq V - cV^{1-\delta} + b\mathbb{1}_C$, alors pour tout $0 < \eta \leq 1$, on a $PV^\eta \leq V^\eta - c\eta V^{\eta-\delta} + b_\eta \mathbb{1}_C$, ce qui permet de vérifier (6.13). Dans le second cas, nous obtenons le résultat suivant.

Soit C un ensemble petite accessible. Supposons qu'il existe des constantes $0 < \lambda < 1$, $b < \infty$ et une fonction mesurable $V \geq 1$, $V(x) \rightarrow \infty$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$ telles que $\sup_C V < \infty$ et

$$PV(x) \leq \lambda V(x) + b\mathbb{1}_C(x).$$

Soient $p \geq 2$ et $M := 1 + \{\sup_C V \vee b(1 - \lambda^{1/p})^{-p}\}$. L'ensemble $\{V \leq M\}$ est ν_m -small (de constante de minoration $\epsilon > 0$) et pour toute fonction mesurable $g \geq 1$, telle que $|g| \leq V^{1/p}$,

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq C(x) n^{p/2} \quad x \in \mathcal{X}, \quad (6.14)$$

où

$$\begin{aligned} C(x) := & \frac{3^p C_p M}{1 - \lambda} \left[\frac{(2 - \epsilon)}{M^{1/p}(1 - \lambda^{1/p}) - b^{1/p}} \right]^p \dots \\ & \times \left\{ \frac{b}{1 - \lambda} + (2 - \epsilon + 3\epsilon^{-1})(2\lambda M + bm) + \frac{(2 - \epsilon)M(1 - \lambda)}{M(1 - \lambda) - b} \left\{ V(x) + \frac{b}{1 - \lambda} \right\} \right\} \end{aligned}$$

et C_p est la constante de Rosenthal.

En conséquence, si l'on considère une famille de noyaux P_θ , la majoration (6.14) est uniforme en θ pour θ dans un compact $\mathcal{K} \subset \Theta$ dès que certaines constantes (apparaissant dans la condition de drift et dans la condition de minoration du noyau P_θ sur l'ensemble small) peuvent être choisies uniformes en θ pour $\theta \in \mathcal{K}$. Tel est le cas, par exemple, dans l'application 9.4.2 développée au Paragraphe 9.4 concernant la modélisation du nombre de cas de poliomylérite.

6.2 Convergence du MCEM stable

Les résultats suivants sont démontrés au Paragraphe 9.5.

Chaque transition de l'algorithme MCEM stable, $\theta'_n \rightarrow \theta'_{n+1}$, peut être vue comme une perturbation d'une application déterministe T . Pour comparer l'ensemble des points limites d'une

trajectoire $\{\theta'_n\}$ du MCEM stable avec celui des points limites de la suite $\{\theta_n\}$ définie par $\theta_{n+1} = T(\theta_n)$ sachant qu'il existe une fonction de Lyapunov¹ relative à T et à un ensemble \mathcal{L} , (**a**) nous vérifions tout d'abord que la procédure (6.9) définit une suite p.s. compacte *i.e.* le nombre de projection est fini p.s., puis (**b**) nous proposons un critère de ressemblance d'une itération du MCEM stable et d'une itération de l'EM, ressemblance mesurée en terme d'action sur la fonction de Lyapunov. Pour ce faire, nous énonçons deux résultats déterministes

- le premier relatif à la construction d'une suite u_{n+1} **compacte** telle que pour n grand, $u_{n+1} = F_n(u_n)$, lorsque $\{F_n\}$ est une famille d'applications données "proches" d'une application T dans un sens à préciser.
- le second relatif à la convergence d'une suite compacte $\{u_n\}$ vers un ensemble \mathcal{L} lorsque u_{n+1} et $T(u_n)$ sont "asymptotiquement proches", au sens de l'effet induit sur une fonction de Lyapunov relative à T et \mathcal{L} .

Stabilisation Soient une suite de compact $\{\mathcal{K}_n\}$ vérifiant

$$\mathcal{K}_n \subsetneq \mathcal{K}_{n+1}, \quad \Theta = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{K}_n,$$

un point $u_0 \in \mathcal{K}_0$ et une suite d'applications $F_n : \Theta \rightarrow \Theta$. On pose $p_0 := 0$ et on construit itérativement une suite $\{u_n\}$ selon la procédure

$$\begin{cases} \text{si } F_n(u_n) \in \mathcal{K}_{p_n}, & u_{n+1} := F_n(u_n) \text{ et } p_{n+1} := p_n, \\ \text{si } F_n(u_n) \notin \mathcal{K}_{p_n}, & u_{n+1} := u_0 \text{ et } p_{n+1} := p_n + 1. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov continue, W , relative à une application $T : \Theta \rightarrow \Theta$ et un ensemble compact \mathcal{K} tels que (**a**) $T(\mathcal{L})$ soit relativement compact, et (**b**) pour tout entier M strictement positif, $\{W \geq M\}$ soit compact et $\Theta = \bigcup_M \{W \geq M\}$. Supposons de plus que pour tout $u \in \mathcal{K}_0$

$$\lim_n |W \circ F_n(u) - W \circ T(u)| = 0$$

et pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Theta$,

$$\lim_n |W \circ F_n(u_n) - W \circ T(u_n)| \mathbb{I}_{u_n \in \mathcal{K}} = 0.$$

Alors la suite $\{p_n\}$ est bornée et $\{u_n\}$ est une suite compacte.

Convergence On note d la distance euclidienne.

Soit W une fonction de Lyapunov relativement à une application $T : \Theta \rightarrow \Theta$ et un ensemble fermé \mathcal{L} , W continue. Supposons qu'il existe une suite $\{u_n\}$ telle que (**a**) pour tout $n \geq 0$, $u_n \in \mathcal{K}$ pour un ensemble $\mathcal{K} \subset \Theta$ compact, (**b**)

$$\lim_n |W(u_{n+1}) - W \circ T(u_n)| = 0.$$

¹ $W \geq 0$ est une fonction de Lyapunov relative à une application T et un ensemble \mathcal{L} si (**i**) pour tout $u \in \Theta$, $W \circ T(u) - W(u) \geq 0$ et (**ii**) pour tout compact $\mathcal{C} \subset (\Theta \setminus \mathcal{L})$, $\inf_{u \in \mathcal{C}} \{W \circ T(u) - W(u)\} > 0$.

Alors $\{W(u_n)\}$ converge vers une sous-composante connexe de $W(\mathcal{L} \cap \mathcal{K})$; si $W(\mathcal{L} \cap \mathcal{K})$ est d'intérieur vide, $\{W(u_n)\}$ converge vers ω_* et $\lim_n d(u_n, \mathcal{L}_{\omega_*} \cap \mathcal{K}) = 0$, où $\mathcal{L}_{\omega_*} := \{\theta \in \mathcal{L}, W(\theta) = \omega_*\}$.

Application à l'étude de l'algorithme MCEM stable Nous appliquons les deux résultats précédents en prenant pour

- T , l'application définie par $T(\theta) = \hat{\theta}(\bar{S}(\theta))$ i.e. l'application qui définit l'EM.
- \mathcal{L} , l'ensemble des points fixes de T .
- W , la fonction de Lyapunov naturellement associée à (T, \mathcal{L}) : $W = g$.

Les conditions sur T , \mathcal{L} et W sont impliquées par l'hypothèse M2 (Paragraphe 9.2). Pour exploiter le résultat de stabilité, il suffit donc de vérifier que

$$\lim_n \left| g\left(\hat{\theta}\left(m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} S(\Phi_j)\right)\right) - g\left(\hat{\theta}(\bar{S}(\theta))\right) \right| = 0 \quad \text{p.s.} \quad (6.15)$$

pour tout $\theta \in \mathcal{K}_0$, où $\{\Phi_n\}$ est une chaîne de Markov de mesure invariante π_θ , puis de vérifier que pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Theta$, on a

$$\lim_n \left| g\left(\hat{\theta}(\tilde{S}_n)\right) - g\left(\hat{\theta}(\bar{S}(\theta'_n))\right) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} = 0 \quad \text{p.s.} \quad (6.16)$$

pour l'approximation de Monte-Carlo \tilde{S}_n donnée par (6.8). De même, pour exploiter le résultat de convergence, il suffit de vérifier que

$$\lim_n \left| g\left(\theta'_{n+1}\right) - g\left(\hat{\theta}(\bar{S}(\theta'_n))\right) \right| = 0 \quad \text{p.s.} \quad (6.17)$$

Nous démontrons (6.15), (6.16) et (6.17) à l'aide du critère (6.10) de régularité des chaînes; ce qui termine l'étude de la convergence du MCEM stable.

6.3 Vitesse de convergence

Nous étudions la vitesse de convergence d'une trajectoire du MCEM stable vers un point stationnaire isolé θ^* . Pour ce faire, nous formulons des conditions de régularité du modèle exponentiel (Hypothèse M5, Paragraphe 9.3), de régularité des chaînes de Markov (Hypothèse M6, Paragraphe 9.3) et de régularité du point stationnaire θ^* (Hypothèses L1 et L2, Paragraphe 9.3), ces dernières permettant de caractériser les minima locaux, maxima locaux et points selles de g en termes de stabilité du point θ^* . Précisons de plus, que les conditions de minoration du noyau P et les conditions de drift mentionnées ci-dessus comme outils pour établir le critère (6.10), impliquent aussi le critère M6.

Application T et application G Nous avons résumé l'algorithme EM par la donnée d'une application $T := \hat{\theta} \circ \bar{S}$ telle que $\theta_{n+1} = T(\theta_n)$; dans ce cas, la suite de points $\{\bar{s}_n\}$ à valeur dans \mathbb{R}^q de terme général $\bar{s}_{n+1} := \bar{S}(\theta_{n+1})$ vérifie la relation $\bar{s}_{n+1} := \bar{S} \circ \hat{\theta}(\bar{s}_n)$. Réciproquement, si l'on définit la suite $\{\bar{s}_n\}$ par la relation $\bar{s}_{n+1} := \bar{S} \circ \hat{\theta}(\bar{s}_n)$, alors la suite de terme général $\theta_{n+1} := \hat{\theta}(\bar{s}_n)$ vérifie la relation $\theta_{n+1} = T(\theta_n)$. Ainsi, soit $G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ l'application définie par

$$G(s) := \bar{S}(\hat{\theta}(s));$$

l'EM est à la fois un algorithme itératif défini par $T : \Theta \rightarrow \Theta$ et un algorithme itératif défini par $G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$. En particulier, les assertions suivantes sont équivalentes :

- $s^* := \bar{S}(\theta^*)$ est un point fixe de G ,
- $\theta^* := \hat{\theta}(s^*)$ est un point fixe de T ,

et sous nos hypothèses, les v.p. de $\nabla G(s^*)$ sont les l v.p. de $\nabla T(\theta^*)$, en comptant leur multiplicité, et $(q - l)$ v.p. nulles. Par suite, le points stables (resp. instables et hyperboliques) de G sont les points stables (resp. instables et hyperboliques) de T et sont aussi les maxima locaux (resp. minima locaux et points selles) de la fonction à maximiser g .

Nous avons jusqu'ici vu l'EM comme l'algorithme défini par T ; pour étudier la vitesse de convergence du MCEM, nous préférons la seconde approche.

Vitesse de convergence vers un maximum local Nous étudions la vitesse de convergence du MCEM stable vers un point stationnaire stable (Paragraphe 9.3). Remarquons que par définition de l'algorithme, on a

$$\tilde{S}_{n+1} = G(\tilde{S}_n) + (\bar{s}_0 - G(\tilde{S}_n)) \mathbb{I}_{p_n=p_{n-1}+1} + \tilde{S}_{n+1} - \bar{s}_{n+1}, \quad (6.18)$$

où, rappelons-le $\lim_n \mathbb{I}_{p_n=p_{n-1}+1} = 0$ p.s.

Par suite, si s^* est un point stationnaire non-stable (c'est-à-dire instable ou hyperbolique) et si sur l'ensemble $\{\lim_n \tilde{S}_n = s^*\}$, la perturbation $\tilde{S}_{n+1} - G(\tilde{S}_n)$ décroît suffisamment rapidement tout en restant suffisamment forte dans les directions instables autour de s^* , alors l'ensemble $\{\lim_n \tilde{S}_n = s^*\}$ est de probabilité nulle (Cf. Brandière et Duflo [12] pour l'énoncé de conditions suffisantes). Autrement dit, l'algorithme $\{\tilde{S}_n\}$ converge p.s. vers un point stationnaire stable de G donc, dans notre cas, un maximum local de g .

En particulier, si (6.10) est vérifiée avec $p = 2$, on montre facilement à l'aide des résultats de Brandière et Duflo que sous nos hypothèses, la probabilité de convergence des trajectoires du MCEM stable vers un minimum local de g est nulle.

Nous nous sommes contentée de supposer la stabilité du point limite θ^* ; nous renvoyons à la littérature pour l'énoncé de conditions garantissant cette stabilité.

6.4 Applications

Nous vérifions l'intérêt de nos travaux en étudiant

- un modèle d'évaluation de la diffusion d'un produit sur le marché (Cf. Paragraphe 9.4.1) ; dans ce cas la chaîne est à espace d'état compact et les noyaux sont uniformément ergodiques.
- un modèle de comptage du nombre de cas de poliomycète (Cf. Paragraphe 9.4.2) ; dans ce cas, la chaîne est à espace d'état quelconque et nous prenons pour échantilleur l'algorithme hybride dont nous avons démontré l'ergodicité géométrique (Paragraphe 5.4, Exemple 5.4.3).

Articles

Chapitre 7

Computable bounds for subgeometrical and geometrical ergodicity

Ce travail, en collaboration avec E. Moulines (ENST), est soumis pour publication à la revue *Stochastic Process. Appl.*.

Abstract This paper discusses general quantitative bounds on the convergence rates of Markov chains, under various ergodicity conditions. This paper extends an earlier work by Roberts and Tweedie [99], which provides quantitative bounds for the total variation norm under conditions implying geometric ergodicity. We first focus on conditions implying polynomial rate of convergence. Explicit bounds for the total variation norm are obtained by evaluating the moments of an appropriately defined coupling time, using a set of drift conditions, adapted from an earlier work by Tuominen and Tweedie. Applications of this result are then presented to study the convergence of random walk Hastings Metropolis algorithm for heavy-tailed target functions and of general state-space models. Explicit bounds for f -ergodicity are also given, for an appropriately defined control function f . We then extend these results to sub-geometrical and geometrical rate, using more general drift conditions.

1991 Mathematics Subject classification : 60J10, 60J22, 65C40.

Keywords Markov chains with discrete parameters, computational methods in Markov Chain, Mixing, Polynomial and sub-geometrical convergence.

Introduction

Let P be an ergodic Markov transition kernel on a Borel state space $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ and denote P^n the n -iterated kernel and π the associated invariant probability measure. This paper is concerned with rate of convergence and computational bounds for the ergodicity in total variation norm *i.e.* the determination of a rate function $r = \{r(n)\} \uparrow \infty$ and of the dependence on the initial distribution of the form

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B_r(x, n), \quad \limsup_n r(n) B_r(x, n) < \infty. \quad (7.1)$$

Explicit expressions for the bounds have been recently obtained by Meyn and Tweedie [73], Rosenthal [101, 103], Mengersen and Tweedie [70] and Roberts and Tweedie [99], under conditions implying the V -uniform ergodicity (*i.e.* geometrical rates $r(n) := \beta^n$, $1 < \beta$). The purpose of this paper is to construct such bounds under typically weaker conditions implying polynomial, subgeometrical, \dots , ergodicity. As illustrated by Rosenthal [101, 103] and Roberts and Tweedie [99], computational bounds for the total-variation distance can be obtained by using the so-called Lindvall's inequality, which relates $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV}$ to the tail probability of a coupling time T . The construction of this coupling time involves to define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and a process $Z = \{(X_n, X'_n, d_n)\}$ (where d_n is the so-called “bell” variable taking value in $\{0, 1\}$) such that (a) for all positive measurable function f on $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, $n \geq 0$,

$$\int f(X_n) d\mathbb{P} = P^n f(x) \quad \int f(X'_n) d\mathbb{P} = \pi(f);$$

(b) $X_n = X'_n$ for all $n \geq T$. Coupling technique is a standard tool for chain on countable space. For general state space chain, such construction is possible if one can find a set $\Delta \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, an integer $m \geq 1$, and for all $(x, x') \in \Delta$, some kernel $\rho_{x, x'}$ from Δ to \mathcal{X} such that for all $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P^m(x, A) \wedge P^m(x', A) \geq \rho_{x, x'}(A),$$

and

$$\inf_{(x, x') \in \Delta} \rho_{x, x'}(\mathcal{X}) > 0.$$

As shown in Meyn and Tweedie [72], this condition holds in particular under rather weak conditions (namely ψ -irreducibility) by the ν_m -small sets $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, for which the following minorization condition is verified for all $x \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A), \quad \epsilon > 0, \quad (7.2)$$

for some probability measure ν_m . Lindvall's inequality shows that $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq \mathbb{P}(T > n)$, and thus, determination of $B_r(x, n)$ in (7.1) amounts to compute an upper bound for the tail probability of T . A convenient way to determine such bound is to use a (refinement of the) Markov's inequality, which implies to compute appropriately defined moments of T . This approach, first investigated by Rosenthal [101], has later been improved by Roberts and Tweedie [99], who

relate moments of T to moments of the hitting-time on Δ , $\sigma := \inf\{n \geq 0, (X_n, X'_n) \in \Delta\}$. These contributions, being ultimately concerned with geometrical case, compute the generating function of the coupling time $\mathbb{E}[\beta^T]$ as a function of the minorization constant ϵ given by (7.2) and of the generating function of σ , $\mathbb{E}[\beta^\sigma]$. The latter quantity is then classically bounded using the so-called Foster-Lyapunov drift criteria.

The main purpose of this contribution is to extend the results of Roberts and Tweedie [99] to general rate functions. In Section 7.1, we focus on polynomial rates. Markov Chain converging at polynomial rates appear in many setting including

- Markov Chain Monte Carlo methods (see Stramer and Tweedie [111] and Fort and Moulines [39]) : Stramer and Tweedie [111] show that the so-called "self-targeting" sampler (based on a proper discretization of a Langevin diffusion) is polynomial under tails conditions of the target density. A similar behavior has been reported by Fort and Moulines [39], for the symmetric random walk Hastings-Metropolis algorithm when the target density is not log-concave in the tails. In Section 7.2.1, we address the case of "heavy-tailed" distributions.
- non-linear state space models on $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$,

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1},$$

for an i.i.d. centered perturbation term W_n and a measurable function F which is non-contractant at infinity *i.e.* $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |F(x)| / |x| = 1$. This example is developed in Section 7.2.2 (see also Tuominen and Tweedie [117], Anglo Nze [2, 3] and Veretennikov [121]).

In this setting, the tail probability are bounded by evaluating polynomial moments of T , namely $\mathbb{E}[T^k]$, $1 \leq k \leq q$, in terms of the moment of the hitting-time σ . This is more cumbersome than the geometrical case. Reasonably comprehensive expression are nevertheless given in Theorem 7.3. The last step then consists in bounding the moments of the hitting-time on Δ of the process (X, X') . This is done thanks to a family of drift conditions, adapted from those suggested by Tuominen and Tweedie [117] (see Section 7.1, assumption (H3)). These drift conditions lead to rates of convergence $r(n) \propto n^k$, $k \in \mathbb{N}$. Interpolating inequalities (allowing to consider rate of convergence $r(n) \propto n^k$, $k \in \mathbb{R}^+$) are also developed. Under similar assumptions, we also provide some results on the f -ergodicity. We finally end up Section 7.1 by reformulating the drift assumptions for special drift functions. In Section 7.3, we determine bounds for general rates of convergence $r(n)$ which either satisfies the inequality

$$r(n+m) \leq r(n)r(m)$$

or are "pseudo-convex" in the sense that

$$r\left(\sum_{k=1}^n n_k\right) \leq \rho_r(n) \sum_{k=1}^n r(n_k),$$

where ρ_r is a positive non-decreasing function. These conditions are of course very general and cover most rate of convergence (and in particular the geometrical ones). For these rate functions, we follow the pattern outlined above and use appropriately defined drift conditions to

evaluate the moment of the hitting-time $\mathbb{E}[r(\sigma)]$ (Assumptions (H5) or (H7)). Several examples are carefully worked out to compare the results obtained with the proposed construction, with the results of Roberts and Tweedie [99] in the geometrical case, and with the bounds obtained in Section 7.1 in the polynomial case.

7.1 Polynomial ergodicity

We consider a Markov Chain $\Phi = \{\Phi_n\}$ with transition kernel P on a Borel state space $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Denote P^n the n -th transition kernel and P_x (resp. \mathbb{E}_x) the probability (resp. the expectation) on the canonical space of the chain starting from x . We assume that

H1 P is π -irreducible for an invariant probability measure π .

H2 There exist some sets $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{D} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, $\pi(\mathcal{C}) > 0$ and an integer $m \geq 1$, such that for any $(x, x') \in \Delta := \mathcal{C} \times \mathcal{D} \cup \mathcal{D} \times \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P^m(x, A) \wedge P^m(x', A) \geq \rho_{x, x'}(A)$$

for some kernel $\rho_{x, x'}(dy)$ from Δ to \mathcal{X} (*i.e.* $\rho_{x, x'}(A)$ is $\mathcal{B}(\Delta)$ -measurable in $(x, x') \in \Delta$ for each $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ and is a measure in $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ for each $(x, x') \in \Delta$), and

$$\epsilon^- := \inf_{(x, x') \in \Delta} \rho_{x, x'}(\mathcal{X}) > 0. \quad (7.3)$$

7.1.1 Some comments on assumption (H2)

If P is ψ -irreducible, then for every set $\mathcal{A} \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, (*i.e.* $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ and $\psi(\mathcal{A}) > 0$) there exists a ν_m -small set $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, *i.e.* there exists $m \geq 1$, such that for all $x \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A),$$

for $\epsilon > 0$ and a probability measure ν_m with $\nu_m(\mathcal{D}) > 0$ (Theorem 5.2.2. of Meyn and Tweedie [72]). By setting $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, $\rho_{x, x'}(dy) := \epsilon \nu_m(dy)$ for all $(x, x') \in \Delta$, it is readily seen that (H2) is satisfied. (Note in addition that under (H1), $\psi(\mathcal{D}) > 0 \Rightarrow \pi(\mathcal{D}) > 0$). However, since we are willing to compute bounds, this choice is in general not optimal (because the bounds depend upon the minorizing constant ϵ). Conversely, (H2) implies that \mathcal{C} is small provided that there exists a measure of probability ρ such that for all $(x, x') \in \Delta$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\rho_{x, x'}(A) \geq \rho(A)$. (H2) is also verified by setting, for any kernel $\mu_{x, x'}(dy)$ from Δ to \mathcal{X} ,

$$\rho_{x, x'}(A) := \int_A \frac{dP^m(x, \cdot)}{d\mu_{x, x'}}(y) \wedge \frac{dP^m(x', \cdot)}{d\mu_{x, x'}}(y) \mu_{x, x'}(dy)$$

where $\frac{dP^m(x,\cdot)}{d\mu_{x,x'}}$ is the derivative of the absolutely continuous part of $P^m(x,dy)$ w.r.t. $\mu_{x,x'}(dy)$. By choosing $\mu_{x,x'}(dy) := P^m(x',dy)$, (7.3) is equivalently written as

$$\epsilon^- := \inf_{(x,x') \in \Delta} \int \left\{ 1 \wedge \left[\frac{P^m(x,dy)}{P^m(x',dy)} \right] \right\} P^m(x',dy) > 0,$$

a condition referred to as a *local Doeblin condition* in Veretennikov [121]. This choice, when leading to practical computations, generally yields to tighter bound (see however Section 7.2 for a counter-example).

(H2) will be used to construct a coupling time (the construction is in Section 7.4) : in order such a construction to be useful, one has to control the hitting-time on Δ of the process (X, X') . The classical approach is to use drift criteria. We focus in this section on polynomial ergodicity and use for such purpose the following drift conditions.

H3 Let $q \geq 1$. There exist, for all $k \in \{0, 1, \dots, q\}$, some measurable functions $V_k : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, and for $k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, some constants $0 < a_k < 1$, $b_k < \infty$, and $c_k > 0$ such that

$$PV_{k+1}(x) \leq V_{k+1}(x) - V_k(x) + b_k \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x), \quad \inf_{x \in \mathcal{X}} V_k(x) \geq c_k > 0, \quad (7.4)$$

$$V_k(x) - b_k \geq a_k V_k(x), \quad x \in \mathcal{D}^c, \quad (7.5)$$

$$\sup_{\mathcal{D}} V_q < \infty. \quad (7.6)$$

H4 $\pi(V_q) < \infty$.

7.1.2 Some comments on assumption (H3)

Before embarking on the more subtle task of computing the bounds, we will first discuss some implications of the above drift conditions, in the light of the results previously obtained by Tuominen and Tweedie [117]. To discuss these results, it is assumed in this section that, P is ψ -irreducible and aperiodic and that \mathcal{C} is a petite set (which is not guaranteed by assumption (H2)). Recall that a set is said to be ν_a -petite, for a distribution $a = \{a_i\}$ on the integer, and a non-trivial measure ν_a , if the sampled transition kernel defined as

$$K_a(x, A) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i P^i(x, A), \quad x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

satisfies the bound $K_a(x, A) \geq \nu_a(A)$, for all $x \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. It follows from Proposition 5.5.5 of Meyn and Tweedie [72], that ν_a may be chosen to be a maximal irreducibility measure (and hence, to be equivalent to ψ) and the sampling distribution may be taken to have a finite mean ($\sum i a_i < \infty$) ; which is assumed below. A straightforward application of the Dynkin's formula (see e.g. Meyn and Tweedie, Theorem 11.3.1) implies that, for $i \in \{1, \dots, q\}$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} V_{i-1}(\Phi_k) \right] \leq V_i(x) + b_{i-1} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x)$$

where τ_A is the return time to $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\tau_A := \inf\{n \geq 1, \Phi_n \in A\}$. In particular, $\mathbb{E}_x[\tau_C] \leq c_{i-1}^{-1}[V_i(x) + b_{i-1}\mathbb{I}_C(x)]$. For $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$ (i.e. $\psi(A) > 0$ and thus $\nu_a(A) > 0$), we have using again the Dynkin's formula and the bound $\mathbb{I}_C(x) \leq \nu_a(A)^{-1}K_a(x, A)$ (along the lines of the proof of Theorem 11.3.11 in Meyn and Tweedie),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A-1} V_{i-1}(\Phi_k) \right] &\leq V_i(x) + b_{i-1} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A-1} \mathbb{I}_C(\Phi_k) \right], \\ &\leq V_i(x) + b_{i-1} \nu_a(A)^{-1} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A-1} K_a(\Phi_k, A) \right], \\ &\leq V_i(x) + b_{i-1} \nu_a(A)^{-1} \sum_{n \geq 1} a_n \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A-1} \mathbb{I}_A(\Phi_{k+n}) \right], \\ &\leq V_i(x) + b_{i-1} \nu_a(A)^{-1} \sum_{n \geq 1} n a_n =: V_i(x) + C_{i-1}(A). \end{aligned}$$

Hence, for all $x \in \mathcal{X}$, and $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, $\mathbb{E}_x[\tau_A] \leq c_{i-1}^{-1}[V_i(x) + C_{i-1}(A)] < \infty$, so that the chain is Harris recurrent and, by Theorem 10.0.1 admits an unique invariant probability measure π (hence (H1) is automatically verified under these assumptions). Since V_i is bounded on \mathcal{C} , the latter relation implies that \mathcal{C} is $(V_{i-1}, 1)$ -regular and that $\sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x[\tau_A] < \infty$. Recall that, given $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ and a non-decreasing sequence $r = \{r(n)\}$, a set A is said to be (f, r) -regular if, for all $B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$,

$$\sup_{x \in A} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Following the pattern of proof suggested in Tweedie (1983), we may iterate the previous inequality which yields, for $i \in \{2, \dots, q\}$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\tau_C-1} V_{i-2}(\Phi_l) \right] \right] = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)V_{i-2}(\Phi_k) \right] \leq V_i(x) + (b_{i-1} + b_{i-2})\mathbb{I}_C(x), \quad (7.7)$$

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A-1} \mathbb{E}_{\Phi_k} \left[\sum_{l=0}^{\tau_A-1} V_{i-2}(\Phi_l) \right] \right] = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A-1} (k+1)V_{i-2}(\Phi_k) \right] \leq V_i(x) + C_{i-1}(A) + C_{i-2}(A)\mathbb{E}_x[\tau_A]. \quad (7.8)$$

These relations imply that $\mathbb{E}_x[S(2, \tau_C)] \leq c_{i-2}^{-1}[V_i(x) + (b_{i-1} + b_{i-2})\mathbb{I}_C(x)]$, where $S(2, k) := \sum_{j=1}^k j$, and for $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$,

$$\mathbb{E}_x[S(2, \tau_A)] \leq c_{i-2}^{-1} \left(V_i(x) + C_{i-1}(A) + C_{i-2}(A) \{c_{i-1}^{-1}[V_i(x) + C_{i-1}(A)]\} \right).$$

In addition \mathcal{C} is (V_{i-2}, k^2) -regular for $i \in \{2, \dots, q\}$, and $\sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x[S(2, \tau_A)] < \infty$. Define iteratively,

$$S(0, k) := 1 \text{ and } S(i, k) := \sum_{j=1}^k S(i-1, j), i \geq 1, \quad (7.9)$$

with the convention that $\sum_{j=k}^l u_j = 0$ if $l < k$. Note that $S(l, k) = k^l / l! + O(k^{l-1})$ and for $k \geq 0$, $n, m \geq 1$,

$$S(k, n+m) = \sum_{l=0}^k S(k-l, n)S(l, m). \quad (7.10)$$

By keeping iterating like in (7.7), we have

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} S(q-1, k+1) V_0(\Phi_k) \right] \leq V_q(x) + \left(\sum_{j=0}^{q-1} b_j \right) \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x), \quad (7.11)$$

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A - 1} S(q-1, k+1) V_0(\Phi_k) \right] \leq V_q(x) + \sum_{j=0}^{q-1} C_j(A) \mathbb{E}_x[S(q-1-j, \tau_A)]. \quad (7.12)$$

As above, \mathcal{C} is (V_0, k^q) -regular and $\sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x[S(q, \tau_A)] < \infty$ for all $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$. For $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, the f -norm of a signed measure ν is defined by

$$\|\nu\|_f := \sup_{\{g : |g| \leq f\}} |\nu(g)|.$$

Convergence on f -norm implies convergence of moments bounded by f . Using Theorem 2.1. in Tuominen and Tweedie [117], we may deduce from the results above that

Théorème 7.1 Suppose P is ψ -irreducible and aperiodic. Assume in addition that Eq. 7.4 holds for some petite set \mathcal{C} , and that $\sup_{x \in \mathcal{C}} V_q < \infty$. Then, for any $x \in \mathcal{X}$,

$$n^{q-1} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{V_0} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

In addition, the set \mathcal{C} is (V_0, k^q) -regular and, for $i \in \{1, \dots, q\}$, $\mathbb{E}_x[S(i, \tau_C)] \leq c_0^{-1} [V_i(x) + (\sum_{j=0}^{i-1} b_j) \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x)]$.

It is worthwhile to note that the drift function V_i is used to bound $\mathbb{E}_x[\tau_C^i]$. We will prove below a kind of converse property : if there exists a set \mathcal{C} (not necessarily petite in this statement) and an integer $q \geq 1$, such that $\sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x[\tau_C^q] < \infty$, then there exists a solution to the system of drift equations $PV_{i+1} \leq V_{i+1} - V_i + b_i \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$, $0 \leq i \leq q-1$. It will be even possible to identify the "minimal" solutions of this system (for appropriate scaling). More precisely, define

$$U_i(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} S(i-1, k+1) \right], i \geq 1, \quad U_0(x) := 1, \quad (7.13)$$

where σ_A is the hitting time on the set A , $\sigma_A := \inf\{n \geq 0, \Phi_n \in A\}$. It follows from these definitions that for $k \geq 0$,

$$U_k(x) = \mathbb{E}_x[S(k, \tau_C + 1)], \quad x \in \mathcal{C}^c, \quad \text{and} \quad PU_k(x) = \mathbb{E}_x[S(k, \tau_C)], \quad k \in \{1, \dots, q\}, \quad (7.14)$$

which together with the obvious relation $S(k, l) = S(k, l+1) - S(k-1, l+1)$ imply that

$$PU_k(x) = U_k(x) - U_{k-1}(x), \quad x \in \mathcal{C}^c.$$

Thus $\{U_k\}$, $0 \leq k \leq q$, is a solution of (7.4) if $\sup_{x \in \mathcal{C}} PU_k(x) < \infty$, which is guaranteed for $k \in \{1, \dots, q\}$ if $\sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^q] < \infty$. Remark in addition, that the finiteness of this moment implies that for $x \in \mathcal{E} := \{x \in \mathcal{X} : \mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^q] < \infty\}$, $PU_q(x) < \infty$ and thus the set \mathcal{E} is absorbing. If $V_k \geq 1$ is solution of $PV_k \leq V_k - V_{k-1}$ on \mathcal{C}^c ($1 \leq k \leq q$), then the Dynkin's formula implies that $U_1 \leq V_1$; a trivial induction establishes that $U_k \leq V_k$, $0 \leq k \leq q$. We summarize our findings below.

Proposition 7.2 *Suppose there exists a set \mathcal{C} and an integer $q \geq 1$ such that*

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^q] < \infty.$$

Then, the functions $\{U_k\}$, for $k \in \{0, \dots, q\}$ are solution of

$$PV_k(x) = V_k(x) - V_{k-1}(x), \quad x \in \mathcal{C}^c, \quad PV_k(x) = \mathbb{E}_x[S(k, \tau_{\mathcal{C}})], \quad x \in \mathcal{C},$$

on the absorbing set $\mathcal{E} := \{x \in \mathcal{X} : \mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^q] < \infty\}$. The solutions $\{U_k\}$ are pointwise minimal in the sense that, for any solution $\{V_k\} : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ of

$$PV_k(x) \leq V_k(x) - V_{k-1}(x), \quad x \in \mathcal{C}^c, \tag{7.15}$$

for $1 \leq k \leq q$, we have $U_k \leq V_k$ on \mathcal{E} .

It is worthwhile to note that the pointwise minimal solutions of (7.15) can be explicitly expressed as linear combination of moments of the hitting time ; since $\mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^l] \leq \mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^{l+1}]$, there exist some constants $d_k > 0$, $D_k < \infty$, such that

$$d_k \mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^k] \leq U_k(x) \leq D_k \mathbb{E}_x[\tau_{\mathcal{C}}^k], \quad \forall k \in \{0, \dots, q\}.$$

7.1.3 Main results

In this contribution, we show that for all $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B_q(x, n),$$

where B_q is a function (the expression of which is explicitly given below) depending upon the quantities appearing in (H2-3), and such that, for any given x , $\limsup_n n^q B_q(x, n) < \infty$. Denote $m(V_0) := \inf_{(x, x') \in \Delta^c} \{V_0(x) + V_0(x')\}$ and for $1 \leq l \leq q$,

$$t_l(x, x') := m(V_0)^{-1} \left(\prod_{k=0}^{l-1} a_k \right)^{-1} \{V_l(x) + V_l(x')\}. \tag{7.16}$$

Define $W_0(x, x') := 1$ and $W_l(x, x') := \mathbb{1}_{\Delta}(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x')t_l(x, x')$, for $1 \leq l \leq q$, and let

$$W(x, x') := (W_0(x, x'), \dots, W_q(x, x'))^t \quad (7.17)$$

where t is the transposition operator. Set

$$\delta_x \otimes \pi(W) := \int \delta_x(dy) \pi(dy') W(y, y').$$

For $0 \leq l \leq q$, denote

$$A_m(l) := \sup_{(x, x') \in \Delta} \sum_{i=0}^l S(i, m) (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') W_{l-i}(y, y'),$$

where $R_{x, x'}(u, dy)$ is the residual kernel,

$$R_{x, x'}(u, dy) := (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X}))^{-1} (P^m(u, dy) - \rho_{x, x'}(dy)). \quad (7.18)$$

As explained in the introduction, the functions $W_l(x, x')$ allow to control the moment $S(l, n)$ of the hitting-time of the coupled process (X, X') on Δ when the initial distribution is $\delta_x \otimes \delta_{x'}$; the constants $A_m(l)$ control the same moment of the return-time to Δ when the process starts from Δ . Define the $(q+1) \times (q+1)$ -matrix

$$A_m := \begin{bmatrix} A_m(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_m(1) & A_m(0) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & \\ A_m(q-1) & A_m(q-2) & \cdots & A_m(0) & 0 \\ A_m(q) & A_m(q-1) & \cdots & A_m(1) & A_m(0) \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

Finally, set

$$\epsilon^+ := \sup_{(x, x') \in \Delta} \rho_{x, x'}(\mathcal{X}). \quad (7.20)$$

Note that $P^m V_q \leq V_q + mb_{q-1}$ and thus the entries $A_m(l)$ are finite, $0 \leq l \leq q$; under (H2), $A_m(0) \leq 1 - \epsilon^-$ and the spectral radius of A_m is thus bounded by $1 - \epsilon^-$.

Théorème 7.3 Assume (H1-4). For any $x \in \mathcal{X}$, $n \geq m$, $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq \min_{1 \leq l \leq q} B_l(x, n)$ with

$$B_l(x, n) := \frac{\epsilon^+ < (I - A_m)^{-1} \delta_x \otimes \pi(W), e_l >}{S(l, n+1-m) + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} S(l-1, j+1)},$$

where $< \cdot, \cdot >$ denotes the inner product in \mathbb{R}^{q+1} , $\{e_l\}, 0 \leq l \leq q$ is the canonical basis on \mathbb{R}^{q+1} , I is the identity matrix and (S, W, A_m, ϵ^+) are given by (7.9), (7.17), (7.19) and (7.20).

The proof of this Theorem, based on coupling technique is presented in Section 7.4.

Remark : We assume that P^m verifies a minorization condition, $m \geq 1$, and require drift criteria for the kernel P . In previous work, (see Meyn and Tweedie [73], Rosenthal [101], Roberts and Tweedie [99]), (H2) is substituted with the assumption that \mathcal{C} is a ν_1 -small set and $\pi(\mathcal{C}) > 0$. When only a minorization condition holds on the kernel P^m , it is always possible to consider the chain $Q = P^m$. The inequality

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq \|Q^{\lfloor n/m \rfloor}(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV},$$

shows that provided that $\|Q^k(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B^Q(x, k)$ for some bounding $B^Q(x, k)$, $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B^Q(x, \lfloor n/m \rfloor)$ ($\lfloor s \rfloor$ is the integer part towards minus infinity). Nevertheless, this approach is not optimal when the primary focus is on computable bounds. Considering the sub-sampled chain artificially divides the number of iterations by m and deteriorates the constant $|A_m|$ and $|W(x, x')|$.

In certain situations, (H3) is verified, but not (H4). Thus, if $q \geq 2$, Theorem 7.3 holds but for $l \in \{1, \dots, q-1\}$. The maximal rate is thus $S(q-1, n) \sim n^{q-1}/(q-1)!$. It is shown in this section that, provided that $\pi(V_q^\beta) < \infty$ for some $(q-1)/q \leq \beta \leq 1$, then

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B_{\beta, l}(x, n) \quad \limsup_n n^{\beta l} B_{\beta, l}(x, n) < \infty,$$

$l \in \{1, \dots, q\}$. Thus we will obtain a maximal rate of convergence equal to $q\beta \geq (q-1)$. This rate should be understood here as the maximal rate that can be determined from the drift conditions. Computable bounds can also be determined under this assumption. For $0 \leq \beta \leq 1$ and $0 \leq l \leq q$, set

$$A_m^{(\beta)}(l) := \sup_{(x, x') \in \Delta} \sum_{i=0}^l \left(S(i, n) \right)^\beta (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \left(W_{l-i}(y, y') \right)^\beta.$$

Denote $A_m^{(\beta)}$ the $(q+1) \times (q+1)$ matrix defined as in (7.19) with entries $A_m^{(\beta)}(l)$. We have

Théorème 7.4 Assume (H1-3). Assume in addition there exists $0 < \beta \leq 1$ such that $\pi(V_q^\beta) < \infty$. Then for any $x \in \mathcal{X}$, $n \geq m$, $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq \min_{1 \leq l \leq q} B_{\beta, l}(x, n)$ with

$$B_{\beta, l}(x, n) := \frac{\epsilon^+ < (I - A_m^{(\beta)})^{-1} \delta_x \otimes \pi(W^\beta), e_l >}{S(l, n+1-m)^\beta + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} \{S(l, j+1)^\beta - S(l, j)^\beta\}},$$

where $W^\beta := (W_0^\beta, \dots, W_q^\beta)^t$.

Using the same tools as above, it is possible to derive computable bounds for f -ergodicity.

Théorème 7.5 Assume (H1-3). Assume in addition there exists $0 < \beta \leq 1$ such that $\pi(V_q^\beta) < \infty$. Let $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ be measurable and assume that there exist $0 < \alpha < 1$ and some functions

$V'_i : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $i = 0, 1$, and some constants $c > 0$, $b < \infty$ such that

$$\begin{aligned} \|f^{1/\alpha}\|_{V'_1} &:= \sup_{x \in \mathcal{X}} f^{1/\alpha}(x)/V'_1(x) < \infty, \\ PV'_1(x) &\leq V'_1(x) - cV'_0(x) + b\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x), \\ cV'_0(x) - b &\geq 0, \quad x \in \mathcal{D}^c, \\ \sup_{\mathcal{D}} V'_1 &< \infty \quad \text{and} \quad \pi(V'_1) < \infty. \end{aligned}$$

Then for $n \geq m$, $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq \|f^{1/\alpha}\|_{V'_1}^\alpha C(\alpha, x) B_{\beta, q}^{1-\alpha}(x, n)$$

where $B_{\beta, q}(x, n)$ is given by Theorem 7.4 and $C(\alpha, x)$ is defined by

$$\begin{aligned} C(\alpha, x) &:= \pi(V'_1)^\alpha + \left\{ C(\Delta) \delta_x \otimes \pi(\Delta) + \int_{\Delta^c} \delta_x(dy) \pi(dy') \{V'_1(y) + V'_1(y')\} \right\}^\alpha \\ &\quad + C(\Delta)^\alpha (1 - (1 - \epsilon^-)^\alpha)^{-1}, \end{aligned}$$

with

$$C(\Delta) := \sup_{(x, x') \in \Delta} (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \left(R_{x, x'} V'_1(x) + R_{x, x'} V'_1(x') \right).$$

7.1.4 A particular family of drift conditions

In all the examples below (see section 7.2), the drift conditions can most naturally be cast into the following framework

A1 P is aperiodic and ψ -irreducible.

A2 there exist a small-set \mathcal{C} , $\psi(\mathcal{C}) > 0$, a measurable function $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ and some positive constants δ , $\bar{\alpha}$, such that for any $\delta \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$, there exist some constants $c_{\alpha-\delta} > 0$, $b_{\alpha-\delta} < \infty$ and

$$PV^\alpha(x) \leq V^\alpha(x) - c_{\alpha-\delta} V^{\alpha-\delta}(x) + b_{\alpha-\delta} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x). \quad (7.21)$$

In addition, V is norm-like and unbounded off petite sets.

Recall that a measurable function is said to be unbounded off petite sets, if for $n < \infty$, the set $\{x \in \mathcal{X} : V(x) \leq n\}$ is petite. Note that \mathcal{C} can always be chosen as a level set. (A1-2) together shows that the P is positive recurrent and has an unique probability measure π . It has been shown by Jarner and Roberts [50] (Lemma 3.5), that the drift condition above can be derived from the single drift condition

$$PV^{\bar{\alpha}}(x) \leq V^{\bar{\alpha}}(x) - cV^{\bar{\alpha}-\delta}(x) + b\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x) \quad \text{for some } b < \infty, c > 0, \quad (7.22)$$

using convexity arguments; but checking (7.21) for **all** α in a segment does not usually (perhaps counter-intuitively) require more efforts than proving (7.22), and the constants c_α and b_α directly

obtained from (7.21) are in general tighter than those deduced from the single drift condition (7.22). We will deduce from (7.21) a family of drift conditions verifying (H3).

Assume first that $\bar{\alpha}$ is not an integer multiple of δ . Set $q := \lfloor \bar{\alpha}/\delta \rfloor$. For $\eta \in (0, \bar{\alpha} - q\delta]$ and $0 \leq i \leq q$, define

$$V_{i,\eta}(x) := 1 + V^{\eta+i\delta}(x).$$

It is straightforward to check that since V is norm-like, we can suppose without loss of generality that for any $\delta \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\inf_{x \in \mathcal{C}^c} V^{\alpha-\delta}(x) > 0$ (see the comments above) and thus the functions $V_{i,\eta}$ verify the equation, $0 \leq i \leq q-1$,

$$PV_{i+1,\eta}(x) \leq V_{i+1,\eta}(x) - c'_{i,\eta} V_{i,\eta}(x) + b'_{i,\eta} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x)$$

for some constants $c'_{i,\eta} > 0, b'_{i,\eta} < \infty$. It is simple to show that (H1-3) are verified under the stated conditions (A1-2). If $\pi(V_{q,\eta}) < \infty$ (a condition, e.g., which can be verified if π is explicitly known, as is the case for Markov Chain Monte-Carlo algorithms), Theorem 7.3 applies and the maximal rate of convergence for the total variation norm is $S(q, n) \sim n^q$ (as $n \rightarrow \infty$). As shown below, when π is unknown, we may always verify $\mathbb{E}_x[V_{q,\eta}^{\beta(\eta)}] < \infty$, for some $0 < \beta(\eta) \leq 1$, and apply Theorem 7.4. Recall that, by Theorem 10.4.9 of Meyn and Tweedie [72], for any non negative measurable function f , we may write

$$\pi(f) = \int_{\mathcal{C}} \pi(dx) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} f(\Phi_k) \right]$$

and thus $\pi(f) < \infty$ iff $\sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} f(\Phi_k) \right] < \infty$. The problem now is to find a lower bound for the maximal element of the subset $\mathcal{B}_{q,\eta} \subset [0, 1]$,

$$\mathcal{B}_{q,\eta} := \{ \beta \in [0, 1], \sup_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} V_{q,\eta}^{\beta}(\Phi_k) \right] < \infty \}.$$

Note that, if $\beta \in [0, 1]$ is such that there exists some $\alpha', \delta \leq \alpha' \leq \bar{\alpha}$ verifying $\beta(\eta + q\delta) = \alpha' - \delta$, the discrete Dynkin's formula applied to (7.21) with $\alpha := \alpha'$ shows that $\beta \in \mathcal{B}_{q,\eta}$. The largest possible lower bound (using the drift condition (7.21)) is obtained by setting $\alpha' := \bar{\alpha}$. Thus, for any $\eta \in (0, \bar{\alpha} - q\delta]$, we may choose

$$\beta(\eta) := \frac{\bar{\alpha} - \delta}{\eta + q\delta}.$$

Using Theorem 7.4, the rate is thus given by $q(\bar{\alpha} - \delta)/(\eta + q\delta)$. The largest rate (using this drift condition) is then obtained by letting $\eta \downarrow 0$ i.e. $\gamma_* := (\bar{\alpha} - \delta)/\delta$.

If $\bar{\alpha}$ is an integer multiple of δ , we set $q := \bar{\alpha}/\delta - 1$ and proceed as in the previous case.

We end up with the following result

Proposition 7.6 *Assume (A1-2). Let $\alpha_* \in [\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha}]$ be such that $\pi(V^{\alpha_*}) < \infty$. Then for any $0 \leq \gamma < \alpha_*/\delta$, we have for $x \in \mathcal{X}$,*

$$(n+1)^{\gamma} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

For any such γ there is a constant C_γ (depending upon \mathcal{C} , V , $\bar{\alpha}$, α_* , δ , $\{c_\alpha\}$, $\{b_\alpha\}$) such that for all $n \geq 0$, $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq C_\gamma (n+1)^{-\gamma} (1 + V^{\alpha_*}(x)).$$

The explicit expression of the constant, not shown here, may be derived from the proof. We may also apply Theorem 7.5. For any $0 < \beta \leq \alpha_*/\delta$, set $f := 1 + V^{\alpha_*-\beta\delta}$ and $V'_{1,\alpha} := 1 + V^\alpha$ for some $(\alpha_* - \beta\delta) \vee \delta < \alpha \leq \alpha_*$, where $\bar{\alpha} - \delta \leq \alpha_* \leq \bar{\alpha}$ is such that $\pi(V^{\alpha_*}) < \infty$. Then, for any $\gamma < \alpha_*/\delta$ and any $(\alpha_* - \beta\delta) \vee \delta < \alpha \leq \alpha_*$,

$$\limsup_n (n+1)^{\gamma(1-\{\alpha_*-\beta\delta\}/\alpha)} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f < \infty, \quad x \in \mathcal{X},$$

and the rate is maximal when $\alpha \uparrow \alpha_*$. Thus we have,

Proposition 7.7 Assume (A1-2). Let $\alpha_* \in [\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha}]$ be such that $\pi(V^{\alpha_*}) < \infty$. Then for any $0 < \beta \leq \alpha_*/\delta$, and $0 \leq \gamma < \beta$, $x \in \mathcal{X}$,

$$(n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+V^{\alpha_*-\beta\delta}} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

For any such γ , there is a constant C_γ (depending upon \mathcal{C} , V , $\bar{\alpha}$, α_* , δ , $\{c_\alpha\}$, $\{b_\alpha\}$, β) such that for all $n \geq 0$, $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+V^{\alpha_*-\beta\delta}} \leq C_\gamma (n+1)^{-\gamma} (1 + V^{\alpha_*}(x)).$$

7.2 Examples

In this section, the chains are \mathbb{R}^d -valued. We will denote $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the scalar product, $|\cdot|$ the Euclidean norm and ∇ the differential operator. $[s]$ is the integer part towards minus infinity of a real s .

7.2.1 The symmetric Random Walk Hastings-Metropolis algorithm

Let us consider the symmetric random walk Hastings-Metropolis algorithm (henceforth named the Metropolis algorithm) on \mathbb{R}^d . Denote $Q(x, dy)$ the proposal kernel and π the target probability measure. When $Q(x, dy)$ and $\pi(dy)$ are absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure *i.e.* $Q(x, dy) = q(x, y)dy$ and $\pi(dy) \propto p(y)dy$, the transition kernel of the Metropolis chain is given by

$$P(x, dy) := \alpha(x, y)q(x, y)dy + \delta_x(dy) \left(1 - \int \alpha(x, y)q(x, y)dy \right)$$

where $\alpha(x, y) := 1 \wedge \frac{p(y)q(y, x)}{p(x)q(x, y)}$ is the acceptance ratio (see Casella and Robert [96]). The rate of convergence of the Metropolis algorithm depends on the behavior of the target density p in the

tails. Mengersen and Tweedie [70], Roberts and Tweedie [98] and Jarner and Hansen [51] have shown that the Metropolis algorithm is geometrically ergodic provided that the target density is log-concave in the tails. Fort and Moulines [39] have shown that the Metropolis algorithm converges at any polynomial rate, when the log density decreases hyperbolically at infinity, $\log p(x) \sim -|x|^s$, $0 < s < 1$, as $|x| \rightarrow \infty$. In this example, we consider densities on \mathbb{R} which are regularly varying in the tails. This class contains, among other, the Cauchy distribution and many other "heavy tailed" distributions ; we prove that for such a distribution, the Metropolis kernel is ergodic and for any $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \gamma < (s-1)/2$,

$$(n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Assume that

RW1 Q is absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure $Q(x, dy) := q(x, y)dy$. In addition, Q is a symmetric random walk i.e. $q(x, y) = q(y-x)$ and $q(x-y) = q(y-x)$, Q is compactly supported and bounded away from zero on a neighborhood of the origin.

RW2 the target distribution π is absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure on \mathbb{R} , with a positive twice continuously differentiable density $p(x)$ regularly varying in the tails i.e. there exists $1 < s$ such that for large $|x|$, $\nabla p(x) < 0$ and

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \nabla \log p(x) &= -s, \\ 0 < \liminf |x|^2 |\nabla^2 p(x)|/p(x) &\leq \limsup |x|^2 |\nabla^2 p(x)|/p(x) < \infty. \end{aligned}$$

Lemme 7.8 Assume (RW1-2). Then, for any $0 < \lambda < 1$, there exists a non-empty compact set $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\lambda)$ such that for any $2 \leq \alpha \leq \bar{\alpha} < s+1$,

$$PV^\alpha(x) \leq V^\alpha(x) - c_{\alpha-2}V^{\alpha-2}(x) + b_{\alpha-2}\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x)$$

where $V(x) := |x|$, $b_{\alpha-2} < \infty$ and $c_{\alpha-2} := \lambda \alpha/2 (s+1-\alpha) \int t^2 q(t) dt > 0$.

Proof 8 The proof is in Appendix 7.6.2. \square

Under (RW1-2) the Metropolis algorithm is Lebesgue irreducible, aperiodic and any nonempty compact set is small (Roberts and Tweedie [98], Theorem 2.2.). Since we know that $\pi(V^{s'}) < \infty$, for any $s' < s-1$, then we deduce from the preceding discussions and Propositions 7.6-7.7 that for any $0 \leq \gamma < (s-1)/2$, there exists $C_\gamma < \infty$ such that for $x \in \mathcal{X}$, $n \geq 0$ we have

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq C_\gamma (n+1)^{-\gamma} (1+|x|^{s-1})$$

and for any $0 < \beta \leq (s-1)/2$, and $0 \leq \gamma < \beta$, there exists $C_\gamma < \infty$ such that for $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^{s-1-2\beta}} \leq C_\gamma (n+1)^{-\gamma} (1+|x|^{s-1}).$$

The expression of the constants can be deduced from Lemma 7.8, (7.21) and Theorems 7.4-7.5. It should be stressed that the condition $\pi(V^{s'}) < \infty$, $s' < s-1$, stems directly from the assumption (RW2) but is also the maximal condition (in the sense given above) that can be deduced from Lemma 7.8.

7.2.2 Non linear state space models (NSS)

Let us consider the following \mathbb{R}^d -valued Markov Chain

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1},$$

where $\{W_n\}$ is an i.i.d. sequence of centered r.v. with distribution Γ , which is absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure. The disturbance sequence is independent of Φ_0 . Denote $\Gamma(s) := \int |w|^s \Gamma(dw)$. Assume that

NSS 1 for any compact \mathcal{K} , and any Borel set \mathcal{A} with positive Lebesgue-measure, there exists $n_0 > 0$ such that

$$\inf_{x \in \mathcal{K}} P^{n_0}(x, A) > 0.$$

NSS 2 The chain is aperiodic.

NSS 3 F is measurable and there exist $0 < \delta \leq 2$, $r > 0$ and $M < \infty$ such that

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq |x| \left(1 - r|x|^{-\delta}\right) \text{ for } |x| \geq M, \\ \sup_{|x| \leq M} |F(x)| &< \infty. \end{aligned}$$

NSS 4 there exists a real $s > 2\delta$ such that $\Gamma(s) < \infty$ and if $\delta = 2$, $r > \frac{s-1}{2}\Gamma(2)$.

Remark that (NSS1-2) is checked if F is bounded on compact sets and the density of Γ is positive. Non linear state space models have received a large attention in the literature (see Meyn and Tweedie [72]). Most of the contributions focus on conditions implying V -uniform geometric ergodicity (see Doukhan and Ghindès [36] and Mokkadem [76]) where (NSS3-4) is substituted with $|F(x)| \leq |x| - A$ for $|x| \geq M$, $\sup_{|x| \leq M} |F(x)| < \infty$ and $\Gamma(s) \leq A$). The study of NSS models under weaker conditions such as (NSS 3) has been initiated (among others) by Tuominen and Tweedie [117] and Ango Nze [2] with $0 < \delta < 1$. This model has later been worked out by Veretennikov [121] who proved ergodicity at subgeometrical rate (see below) for $\delta = 2$.

Lemme 7.9 *Assume (NSS1-4). Then for any $0 < \lambda < 1$, there exists a non-empty compact set $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\lambda)$ such that*

$$PV^s(x) \leq V^s(x) - c(\delta)V^{s-\delta}(x) + b(\delta)\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x)$$

where $V(x) := |x|$, $b(\delta) < \infty$, and $c(\delta) := \lambda s r$ if $0 < \delta < 2$ and $c(2) := \lambda s(r - (s-1)\Gamma(2)/2)$.

Proof 9 The proof is in Appendix 7.6.3. \square

In such case, we may use Lemma 3.5. of Jarner and Roberts [50] to show (A2). A direct proof of (A2) is possible, but the resulting constants (not shown here and used in 7.2.2) are more involved.

Under (NSS1), the transition kernel P is Lebesgue-irreducible and thus possesses a sub-invariant measure π . As proved in Mokkadem [76], for any non-empty compact set \mathcal{C} , $0 < \pi(\mathcal{C}) < \infty$, and by Theorem 3.1. of Tweedie [118], Lemma 7.9 implies that the chain is ergodic and $\pi(V^{s-\delta}) < \infty$

. Finally, since Φ is aperiodic and irreducible, any non-empty compact set \mathcal{C} is petite and thus ν_m -small for some $m \geq 1$ (Theorem 5.5.7. in Meyn and Tweedie [72]). Thus, by Lemma 7.9, (A1-2) are verified. Then we apply Propositions 7.6-7.7 and establish that for any $0 \leq \gamma < (s - \delta)/\delta$, there exists a constant $C_\gamma < \infty$ such that for $x \in \mathcal{X}$, $n \geq 0$, we have

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq C_\gamma (n+1)^{-\gamma} (1 + |x|^{s-\delta}).$$

And for any $0 < \beta \leq (s - \delta)/\delta$, and $0 \leq \gamma < \beta$, there exists $C_\gamma < \infty$ such that for $x \in \mathcal{X}$, $n \geq 0$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^{s-\delta-\beta\delta}} \leq C_\gamma (n+1)^{-\gamma} (1 + |x|^{s-\delta}).$$

The expression of the constants can be deduced from Lemma 7.9, (7.22) and Theorems 7.4-7.5. Previously reported results on this model only provide rate of convergence. For $\delta = 2$, Veretennikov [121] shows the existence, under (NSS), of a constant $C < \infty$ such that for all $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq C (n+1)^{-k} (1 + |x|^m),$$

for any $2 < m \leq s - 2$ and $k < m/2$. This result is similar to our assertion. For $0 < \delta < 1$, Tuominen and Tweedie [117] establishes that for any $x \in \mathcal{X}$,

$$(n+1)^k \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \longrightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty, \quad (7.23)$$

for any $0 \leq k \leq s - 1$; which is weaker than our result. In addition, they assume (NSS1-3) but substitute (NSS 4) by the stronger condition $s \geq 2$. Finally, under (NSS1-4), Ango Nze [3] establishes (7.23) for $0 \leq k \leq s/\delta - 2$ when $0 < \delta < 1$. To our best knowledge, the results for $1 \leq \delta < 2$ have not been worked out before.

Numerical experiments

In the numerical illustration, we assume that $d = 1$, $\delta = 2$,

$$\begin{aligned} F(x) &:= x - \text{sign}(x) \frac{r}{M \vee |x|} && \text{if } |x| \geq 1 \\ F(x) &:= F(1)x && \text{if } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

and $\Gamma \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. We (arbitrarily) set $s := 11$, $r := 46$, $M := 7$, $\sigma^2 := 4$ and we verify (H2) with $m = 1$, $\mathcal{C} = [-8, 8]$, $\mathcal{D} = [-11, 11]$,

$$\begin{aligned} \rho_{x, x'}(dy) = \rho_{x_*, x'_*}(dy) &:= \left\{ \mathbb{1}_{\{y \leq (F(x_*) + F(x'_*))/2\}} \mathcal{N}\left(F(x_*) \vee F(x'_*), \sigma^2\right) dy \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{y > (F(x_*) + F(x'_*))/2\}} \mathcal{N}\left(F(x_*) \wedge F(x'_*), \sigma^2\right) dy \right\}, \end{aligned}$$

and $\rho_{x_*, x'_*}(\mathcal{X}) = \epsilon^- = \epsilon^+ = 1.9522e - 03$, for $(x_*, x'_*) = (11, 1)$, where $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ is the p.d.f. of the Gaussian distribution with mean a and variance σ^2 . We verify (H3) with $q := 5$,

$$V_k(x) := \left(\prod_{j=k}^4 A_j \right) \left(1 + |x|^{1+2k} \right) \text{ and } \left(\prod_{j=5}^4 A_j \right) = 1 \quad A_k := (1 + 2(k+1)) \left(r - 2(k+1)\sigma^2/2 \right) / 5$$

and

k	0	1	2	3	4
A_k	$2.5200e + 01$	$3.8000e + 01$	$4.7600e + 01$	$5.4000e + 01$	$5.7200e + 01$
b_k	$1.6158e + 09$	$2.0140e + 09$	$2.9209e + 09$	$4.4003e + 09$	$7.1453e + 09$
a_k	$4.3636e - 02$	$7.2937e - 01$	$8.7665e - 01$	$9.2689e - 01$	$9.4702e - 01$

which implies $\pi(V_4) < \infty$. To illustrate Theorem 7.3, we compute $B_l(\lambda, n) := \int \lambda(dx)B_l(x, n)$, $1 \leq l \leq 4$, for some probability λ . To that goal, we set

$$\lambda_4 := \int \lambda(dy)|y|^{1+4\delta} \quad \pi_4 := \int \pi(dy)|y|^{1+4\delta}$$

and use the upper bounds, $1 \leq l \leq 4$,

$$\begin{aligned} \int \lambda(dy)\pi(dy')W_l(y, y') &\leq 1 + \left(m(V_0) \prod_{k=0}^{l-1} a_k\right)^{-1} \left(\prod_{k=l}^4 A_k\right) \left(2 + \lambda_4^{(1+l\delta)/(1+4\delta)} + \pi_4^{(1+l\delta)/(1+4\delta)}\right), \\ \pi_4 &\leq 1 + (\sup_C V_5 + b_4) = 1.2492e + 08. \end{aligned}$$

Thus $B_l(\lambda, n)$ is upper bounded by a function of (λ_4, n) which is drawn in Figure 7.1. In Table 7.1, we collect the minimal bound $\inf_{1 \leq l \leq 4} B_l(\lambda, n)$.

Remark Because of the symmetry of the drift functions and of the model presented in this example, the uniform minorization used above leads (perhaps surprisingly) to a better bound than the one given by the local Doeblin condition. Indeed, one could verify (H2) by choosing

$$\begin{aligned} \rho_{x,x'}(dy) := & \left\{ \mathbb{I}_{\{y \leq (F(x) + F(x'))/2\}} \mathcal{N}(F(x) \vee F(x'), \sigma^2) dy \right. \\ & \left. + \mathbb{I}_{\{y > (F(x) + F(x'))/2\}} \mathcal{N}(F(x) \wedge F(x'), \sigma^2) dy \right\}. \end{aligned}$$

It appears that such a choice does not modify the values of the entries of the matrix A_m since

$$\begin{aligned} &\sup_{(x,x') \in \Delta} \sum_{i=0}^l S(i, m) (1 - \rho_{x,x'}(\mathcal{X})) \int R_{x,x'}(x, dy) R_{x,x'}(x', dy') W_{l-i}(y, y') \\ &= (1 - \rho_{x_*, x'_*}(\mathcal{X})) \sup_{(x,x') \in \Delta} \sum_{i=0}^l S(i, m) \int R_{x_*, x'_*}(x, dy) R_{x_*, x'_*}(x', dy') W_{l-i}(y, y'); \end{aligned}$$

the bound obtained with such choice is worse than the bound obtained by the uniform minorization condition, because in this case, $\epsilon^+ = 1$.

7.3 Ergodicity at a general rate

In this section, we generalize the results of Section 7.1 to deal with non polynomial rate functions. Define

$$\Lambda := \left\{ r : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty), r(n) \uparrow +\infty \text{ and } \forall n, m \in \mathbb{N}, r(n+m) \leq r(n)r(m) \right\}.$$

Λ includes both geometrical sequences and sub-geometrical sequences defined e.g. in Stone and Wainger [110]. Define

$$\begin{aligned} \Lambda_c := & \left\{ r : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty), r(n) \uparrow +\infty \text{ and } \exists \rho_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, \forall (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k, \right. \\ & \left. r \left(\sum_{j=1}^k n_j \right) \leq \rho_r(k) \sum_{j=1}^k r(n_j) \text{ and } \lim_n \rho_r(n)/r(n) = 0 \right\}, \quad (7.24) \end{aligned}$$

which includes rate functions of the form $\{n^q \vee 1\} \ln^l(n \vee 2)$ (but not geometrical sequences). We set by convention that $r(+\infty) = +\infty$. Finally, for a positive sequence $r = \{r(n)\}$, we define $r^0 = \{r^0(n)\}$

$$r^0(n) := \sum_{j=0}^n r(j), \quad (7.25)$$

and set by convention that $r^0(-1) := 0$. The aim of this section is to substitute (H3-4) with drift conditions adapted to the rate functions r in the classes described above. Assume

H5 There exist a non-decreasing sequence $r = \{r(n)\} \geq 1$, a sequence of measurable functions $g_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $g_n(x) \geq r(n)$ on \mathcal{D} and a non-negative sequence $\{b(n)\}$ such that

$$Pg_{n+1}(x) \leq g_n(x) + b(n) \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x), \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}(n) := & r(n) \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \psi(k))^{-1} \geq 1 \text{ where } \psi(n) := \frac{b(n)}{r(n) + \inf_{\mathcal{D}^c} g_n}, \quad \tilde{r}(0) := r(0) \\ & \sup_{\mathcal{D}} g_0 < \infty. \end{aligned}$$

In addition, $\pi(g_0) < \infty$.

By (7.26), and using that $g_n(x) \geq r(n)$, the Dynkin's formula (Theorem 11.3.1. in Meyn and Tweedie [72]) implies that for any $l \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x[r(\tau_{\mathcal{C}} + l)] \leq \mathbb{E}_x[g_{\tau_{\mathcal{C}}+l}(\Phi_{\tau_{\mathcal{C}}})] \leq g_l(x) + b(l) \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x). \quad (7.28)$$

Since $\sup_{\mathcal{C}} g_0 < \infty$, (7.28) implies that \mathcal{C} is recurrent. If \mathcal{C} is a petite set, Φ is recurrent and (H1) is automatically verified. In addition, we have the

Proposition 7.10 *Let P be a transition kernel on $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ and $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Set $g_n(x) := \mathbb{E}_x[r(n + \sigma_{\mathcal{C}})]$, $n \geq 0$, where $\sigma_{\mathcal{C}}$ is the hitting-time on \mathcal{C} and $r = \{r(n)\} \geq 1$.*

(i) $\{g_n\}$ satisfies the identity

$$\begin{aligned} Pg_{n+1}(x) &= g_n(x), \quad x \in \mathcal{C}^c, \\ Pg_{n+1}(x) &= \mathbb{E}_x[r(n + \tau_{\mathcal{C}})], \quad x \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

(ii) The functions $\{g_n\}$ are the minimal pointwise solution to the inequalities

$$\begin{aligned} Pg'_{n+1}(x) &\leq g'_n(x), \quad x \in \mathcal{C}^c, \\ g'_n(x) &\geq r(n). \end{aligned}$$

Proof 10 The proof is in Appendix 7.6.1. \square

As above, the condition (7.27) will be used to control some moment of the return-time of (X, X') to Δ . The proof is in Proposition 7.20. Finally, when π is not explicitly known, the condition $\pi(g_0) < \infty$ can often be checked by using the following condition : there exist $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\pi(\mathcal{A}) > 0$, a measurable function $G : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, bounded on \mathcal{A} , and a constant $b < \infty$ such that

$$PG(x) \leq G(x) - g_0(x) + b\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x). \quad (7.29)$$

The proof follows immediately from the Comparison Theorem and the representation of the invariant measure given in Theorem 10.4.9 of Meyn and Tweedie [72]. Define

$$\begin{aligned} W_0(x, x') &:= \mathbb{1}_{\Delta}(x, x')\tilde{r}(0) + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x')\{g_0(x) + g_0(x')\}/2 \\ W_m(x, x') &:= \mathbb{1}_{\Delta}(x, x')\tilde{r}(m) + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \prod_{k=0}^{m-1} (1 + \psi(k))^{-1} \{g_m(x) + g_m(x')\}/2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

and

$$A_m := \sup_{(x, x') \in \Delta} (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') W_m(y, y'), \quad (7.31)$$

where $R_{x, x'}$ is given by (7.18). (H5) implies that $A_m < \infty$ and for any $x \in \mathcal{X}$, $\delta_x \otimes \pi(W_0) < \infty$. Then we have

Théorème 7.11 Assume (H1-2) and (H5). For any $x \in \mathcal{X}$, $n \geq m$, $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B_{\tilde{r}}(x, n)$ with

(i) if $A_m < 1$ and $\tilde{r} \in \Lambda$,

$$B_{\tilde{r}}(x, n) := \frac{\epsilon^+ (1 - A_m)^{-1} \delta_x \otimes \pi(W_0)}{\tilde{r}(n + 1 - m) + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} \{\tilde{r}(j+1) - \tilde{r}(j)\}},$$

and (ϵ^+, W_0, A_m) are given by (7.20), (7.30) and (7.31).

(ii) if $\tilde{r} \in \Lambda_c$,

$$B_{\tilde{r}}(x, n) := \frac{\epsilon^+ \left\{ B_1 + B_2 \delta_x \otimes \pi(W_0) \right\}}{\tilde{r}(n + 1 - m) + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} \{\tilde{r}(j+1) - \tilde{r}(j)\}},$$

$$B_1 := A_m \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^{j-1} j \rho_{\tilde{r}}(j+1) \quad B_2 := \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^j \rho_{\tilde{r}}(j+1)$$

and $(\epsilon^+, \rho_{\tilde{r}}, W_0, A_m)$ are given by (7.20), (7.24), (7.30) and (7.31).

When $\tilde{r} \in \Lambda$ and $A_m \geq 1$, Theorem 7.11(i) does not apply ; it may also happen that for a given initial point x and a number of iteration n , one computes a better bound by applying Theorem 7.11 with a function rate r_ϕ lower than \tilde{r} . Theorem 7.11 can be generalized as follows

Théorème 7.12 Assume (H1-2) and (H5). Let $r_\phi = \{r_\phi(n)\}$ be a sequence and ϕ be an increasing concave function such that for any $n \geq 0$, $r_\phi(n) \leq \phi(\tilde{r}(n))$. Define

$$A_m^\phi := \sup_{(x, x') \in \Delta} (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') \phi(W_m(y, y')).$$

For any $x \in \mathcal{X}$, $n \geq m$, $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B_{r_\phi}(x, n)$ with,

(i) if $A_m^\phi < 1$ and $r_\phi \in \Lambda$,

$$B_{r_\phi}(x, n) := \frac{\epsilon^+ (1 - A_m^\phi)^{-1} \delta_x \otimes \pi(\phi(W_0))}{r_\phi(n+1-m) + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} \{r_\phi(j+1) - r_\phi(j)\}}$$

and (ϵ^+, W_0) are given by (7.20) and (7.30).

(ii) if $r_\phi \in \Lambda_c$,

$$B_{r_\phi}(x, n) := \frac{\epsilon^+ \left\{ B_1 + B_2 \delta_x \otimes \pi(\phi(W_0)) \right\}}{r_\phi(n+1-m) + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} \{r_\phi(j+1) - r_\phi(j)\}},$$

$$B_1 := A_m^\phi \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^{j-1} j \rho_{r_\phi}(j+1) \quad B_2 := \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^j \rho_{r_\phi}(j+1)$$

and $(\epsilon^+, \rho_{r_\phi}, W_0)$ are given by (7.20), (7.24) and (7.30).

(iii) if $\tilde{r} \in \Lambda_c$,

$$B_{r_\phi}(x, n) := \frac{\phi \left(\epsilon^+ \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^{j-1} \rho_{\tilde{r}}(j+1) \{j A_m + (1 - \epsilon^-) \delta_x \otimes \pi(W_0)\} \right)}{r_\phi(n+1-m) + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} \{r_\phi(j+1) - r_\phi(j)\}}.$$

7.3.1 Geometrical ergodicity

The drift condition above is directly verified by V -geometrically ergodic chains. Assume that

H6 there exist a Lyapunov's drift function $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, bounded on \mathcal{D} , and some constants $0 < \lambda_* < 1$ and $b < \infty$ such that

$$PV(x) \leq \lambda_* V(x) + b \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x), \tag{7.32}$$

$$\lambda_* + \frac{b}{1 + \inf_{\mathcal{D}^c} V} < 1. \tag{7.33}$$

Condition (H5) is satisfied upon setting $g_n(x) := \lambda_*^{-n} V(x)$, $r(n) := \lambda_*^{-n}$ and $b(n) := \lambda_*^{-(n+1)} b$. In such case,

$$\psi(n) := \psi = \frac{\lambda_*^{-1} b}{1 + \inf_{\mathcal{D}^c} V}$$

and (7.27) is implied by (7.33). (7.33) is similar to the condition (41) of Roberts and Tweedie [99]. Nevertheless, our approach differs in the definition of the set Δ ; note also that our results directly apply for any m in the minorization condition (H2). Denote

$$\beta_* := \left(\lambda_* + \frac{b}{1 + \inf_{\mathcal{D}^c} V} \right)^{-1}; \quad (7.34)$$

it follows from (7.30) that $W_m(x, x') = \beta_*^m W_0(x, x')$. We apply Theorem 7.12 with $r_\phi(n) := \phi(\beta_*^n)$ where $\phi : x \mapsto x^{\ln \mu / \ln \beta_*}$, $1 \leq \mu \leq \beta_*$. Set

$$W(x, x') := \mathbb{I}_\Delta(x, x') + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x')\{V(x) + V(x')\}/2,$$

define for $1 < \mu \leq \beta_*$,

$$A(\mu) := \mu^m \sup_{(x, x') \in \Delta} (1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})) \int R_{x, x'}(x, dy) R_{x, x'}(x', dy') W(y, y')^{\ln \mu / \ln \beta_*}. \quad (7.35)$$

Note that $A(\mu)$ is finite for $\mu \in [1, \beta_*]$ but is not necessarily less than 1. Since $A(1) \leq 1 - \epsilon^- < 1$ and $\mu \mapsto A(\mu)$ is a continuous function, one may find $\mu > 1$ such that $A(\mu) < 1$. Define the largest value β_{FM} such that $A(\mu) < 1$ for $1 < \mu < \beta_{FM}$. Finally, denote

$$W_{x, \pi}(\mu) := \delta_x \otimes \pi(W^{\ln \mu / \ln \beta_*}). \quad (7.36)$$

Théorème 7.13 Assume (H1-2) and (H6). Then for any $1 < \mu < \beta_{FM}$, $x \in \mathcal{X}$, $n \geq m$, $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B_\mu(x, n)$ with

$$B_\mu(x, n) := \mu^{-(n+1-m)} \left(1 - (1 - \epsilon^+) \mu \right) \left(1 - A(\mu) \right)^{-1} W_{x, \pi}(\mu)$$

and $(\epsilon^+, A(\mu), W_{x, \pi}(\mu))$ are given by (7.20), (7.35) and (7.36).

If (H2) is substituted with the uniform minorization, i.e. for all $x \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A) \quad (7.37)$$

for some $\epsilon > 0$ and a measure of probability ν_m , then we can easily compute a lower bound for β_{FM} and compute $\hat{\beta} := \hat{\beta}(x, n)$ which minimizes the bound $B_\mu(x, n)$ for any given (x, n) . Following Roberts and Tweedie [99], define $\Delta := \mathcal{C} \times \mathcal{C}$,

$$M := \frac{1}{2} \sup_{(x, x') \in \Delta} [\lambda_*(V(x) + V(x')) + 2b] \quad J := \beta_*^m (M - \epsilon),$$

and

$$\xi := \frac{\ln W_{x, \pi}(\beta_*)}{\ln \beta_*} \quad \eta := \frac{\ln(J/(1 - \epsilon))}{\ln \beta_*}.$$

Then, as proved in Theorem 2.3. and Theorem 5.1. of Roberts and Tweedie [99], we have

$$\exp\left(\frac{-\ln \beta_* \ln(1-\epsilon)}{\ln J - \ln(1-\epsilon)}\right) \leq \beta_{FM} \leq \beta_*,$$

and $B_\mu(x, n)$ is approximatively minimized at $\mu = \hat{\beta}$ where

$$\hat{\beta}(x, n) := \left[(1-\epsilon) \left(1 + \frac{\eta}{n+1-m-\xi} \right) \right]^{-1/\eta}. \quad (7.38)$$

7.3.2 Example : A reflecting Random walk

Consider the random walk on \mathbb{N} defined by $P(n, n-1) = p > 0.5$, $P(n, n+1) = q := 1-p$ for $n > 0$ and $P(0, 0) = \alpha$. We assume that $P(0, 1) = 1-\alpha$. Denote m_C (resp. m_D) the non negative integers such that $C := \{0, \dots, m_C\}$ (resp. $D := \{0, \dots, m_D\}$). Values of β_{FM} (determined from Theorem 7.13) are given in Table 7.2 for different p and α . To that goal, we set

$$\rho_{x,x'}(dy) := \sum_{k=0}^{m_D+m} (P^m(x, k) \wedge P^m(x', k)) \delta_k(dy).$$

For the model (a), (b) and (c), we verify (7.32) with the kernel P , and

$$\lambda_* := \sqrt{4pq} \quad V(x) := (\sqrt{p/q})^{(x-m_C)\vee 0} \quad b := \sup_{x \in C} PV(x) - \lambda_* V(x).$$

In case (a'), we consider some m -skeleton $Q = P^m$. It is easily shown that $QV(x) \leq \lambda^m V(x) + b_m \mathbb{1}_C(x)$ with $\lambda := \sqrt{4pq}$, $V(x) := (\sqrt{p/q})^{(x-1)\vee 0}$ and

$$b_m := \sup_{x \in C} \left(p + (1-p)\sqrt{p/q} - \lambda \right) \left(\lambda^{m-1} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \lambda^{m-1-k} \{P^k(x, 0) + P^k(x, 1)\} \right).$$

Remark that the rate obtained using the m -skeleton is worse than the rate derived from the construction outlined here. In Table 7.3, we check (H2) by using a uniform minorization condition with

$$\epsilon := \inf_{(x,x') \in \Delta} P^m(x, 0) \wedge P^m(x', 0) \quad \nu_m(dy) := \delta_0(dy).$$

It is easily seen that in such case the non-uniform Doeblin condition leads to better bounds. In Table 7.4, we apply the results of Roberts and Tweedie [99] : in cases (a), (b) and (c), we verify (7.37) with $C = \{0, 1\}$, $m = 1$, $\epsilon = \alpha$ and $\nu_1(dy) = \delta_0(dy)$, as suggested in their Example 1. In cases (b) and (c), (H6) is established with

$$\lambda_* := \sqrt{4pq} \quad V(x) := (\sqrt{p/q})^x \quad b := \sup_{x \in C} PV(x) - \lambda_* V(x),$$

but in case (a), (7.33) does not hold. We overcome this by making \mathcal{C} larger (case (a')) and prove (H6) as in Table 7.2 (a'). The values of the rate β_{RT} defined by Theorem 2.3. of Roberts and Tweedie [99] is given in Table 7.4. It is worthwhile to note that β_{FM}^{-1} (given in Table 7.2) is sharper than β_{RT}^{-1} .

We finally compute $B_\mu(x, n)$ for the model (c) : we use the inequality $W_{x,\pi}(\mu) \leq W_{x,\pi}(\beta_*)^{\ln \mu / \ln \beta_*}$ and compute B_μ for different values of $W_{x,\pi}(\beta_*)$ and different number of iterations n . We check (H6) as in Table 7.2 (c). In Table 7.5, the bound is computed by verifying (7.37) as in Table 7.3 (c), and for given $(W_{x,\pi}(\beta_*), n)$, we evaluate B_μ at $\mu := \hat{\beta}$ such as defined by (7.38). In Table 7.6, we consider the general minorization condition (H2) as in Table 7.2 (c), and for given $(W_{x,\pi}(\beta_*), n)$, we evaluate B_μ at

$$\mu := \left[(1 - \epsilon^-) \left(1 + \frac{\tilde{\eta}}{n + 1 - m - \xi} \right) \right]^{-1/\tilde{\eta}},$$

where

$$\tilde{\eta} := \beta_*^m \frac{\ln(0.5 \sup_{\Delta} \{R_{x,x'}V(x) + R_{x,x'}V(x')\})}{\ln \beta_*}.$$

These numerical results show that the local Doeblin condition leads to better bounds than the uniform minorization condition.

7.3.3 Some extensions

In this last section, we adapt the drift criterion introduced by Tuominen and Tweedie [117].

H7 There exist a sequence of measurable functions $g_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $g_n \geq r(n)\omega$, a measurable function $\omega : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, some sequences $\{r(n)\} \geq 1$ and $\{b(n)\} < \infty$ and a constant $0 \leq a < \infty$ such that for all $n \geq 0$,

$$Pg_{n+1}(x) \leq g_n(x) - r(n)\omega(x) + b(n) \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(x), \quad (7.39)$$

$$r(n)\omega(x) - b(n) \geq r(n)a, \quad x \in \mathcal{D}^c, \quad (7.40)$$

$$\sup_{\mathcal{D}} g_0 < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{\mathcal{D}} P^m g_0 < \infty.$$

In addition, $\pi(g_0) < \infty$.

If there exists $b < \infty$ such that $b(n) \leq r(n)b$, then (7.39) is the drift criterion introduced by Tuominen and Tweedie [117]. As above, we have

Proposition 7.14 Let P be a transition kernel on $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ and $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Set $g_n(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathcal{C}}} r(n+k)\omega(\Phi_k) \right]$, $n \geq 0$, where $\sigma_{\mathcal{C}}$ is the hitting-time on \mathcal{C} , $r = \{r(n)\} \geq 1$ and $\omega : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ is measurable.

(i) $\{g_n\}$ satisfies the identity

$$Pg_{n+1}(x) = g_n(x) - r(n)\omega(x), \quad x \in \mathcal{C}^c,$$

$$Pg_{n+1}(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\sigma_{\mathcal{C}}} r(n+k)\omega(\Phi_k) \right], \quad x \in \mathcal{C}.$$

(ii) The functions $\{g_n\}$ are the minimal pointwise solution to the inequalities

$$\begin{aligned} Pg'_{n+1}(x) &\leq g'_n(x) - r(n)\omega(x), \quad x \in \mathcal{C}^c, \\ g'_n(x) &\geq r(n)\omega(x). \end{aligned}$$

Proof 14 The proof is on the same lines than the proof of Proposition 7.10 and is omitted. \square
Thus (H7) Eq. 7.39 and Proposition 7.14 imply that for any $l \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[r^0(\tau_c + l) \right] \leq r^0(l-1) + \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_c-1} r(k)\omega(\Phi_k) \right] + \mathbb{E}_x \left[g_{\tau_c+l}(\Phi_{\tau_c}) \right] \leq g_l(x) + b(l) \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(x), \quad (7.41)$$

where r^0 is defined by (7.25). (7.40) is to control the same moment of the return-time to Δ of (X, X') and is checked for \mathcal{D} large enough if ω is a norm-like function. Finally, when π is not explicitly known, the condition $\pi(g_0) < \infty$ can often be checked by using the following condition : there exist $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\pi(\mathcal{A}) > 0$, a measurable function $G : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, bounded on \mathcal{A} , and a constant $b < \infty$ such that

$$PG(x) \leq G(x) - g_0(x) + b \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(x). \quad (7.42)$$

The proof follows immediately from the Comparison Theorem and the representation of the invariant measure given in Theorem 10.4.9 of Meyn and Tweedie [72]. When substituting (H5) by (H7), we have analogous results to Theorems 7.11 and 7.12 with improved convergence rate.

Proposition 7.15 Assume (H1-2) and (H7). Then Theorem 7.11 and Theorem 7.12 hold by replacing \tilde{r} with r^0 and defining W_l , $l = 0, m$ by

$$W_l(x, x') := \mathbb{I}_{\Delta}(x, x') r^0(l) + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') \left\{ r^0(l-1) + \{g_l(x) + g_l(x')\}/((1+a) \wedge 2) \right\}.$$

7.3.4 Example : Non linear state space model

To illustrate Proposition 7.15, we revisit the non linear state space model (see Section 7.2).

Define

$$q := \begin{cases} s/\delta - 1 & \text{if } s \text{ is an integer multiple of } \delta, \\ \lfloor s/\delta \rfloor & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Set $g_n(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_c} r(n+k)\omega(\Phi_k) \right]$, with $r(n) := S(q-2, n+1)$ and $\omega(x) := 1 + |x|^\eta$ for some $0 < \eta \leq s - q\delta$. Then by Proposition 7.14, we have $Pg_{n+1}(x) \leq g_n(x) - r(n)\omega(x)$ on \mathcal{C}^c . In addition, by use of Lemma 7.9, we prove that $\sup_n \sup_{x \in \mathcal{C}} r(n)^{-1} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\tau_c} r(n+k)\omega(\Phi_k) \right] < \infty$ so that (7.39) is checked. Since ω is a norm-like function, (7.40) is automatically verified. Finally, g_0 is upper bounded by a linear combination of the functions $1 + |x|^{\eta+k\delta}$, $0 \leq k \leq q-1$ and thus, $\pi(g_0) < \infty$. Hence, (H7) is verified and Proposition 7.15 provides a direct route to determine computational bounds. Numerical evaluations (not presented here) however show that these bounds are worse than those computed using Theorem 7.3. It is also possible to use Proposition 7.15 to determine the "maximal rate of convergence".

Lemme 7.16 Assume (NSS). For any $0 < \eta \leq s - q\delta$, (H7) holds with $r_\eta \in \Lambda$ given by

$$r_\eta(n) := S(q-1, n+1)^{\frac{1}{(q-1)} \left(-2 + \frac{s-\eta}{\delta} \right)},$$

$\omega(x) := 1 + |x|^\eta$, $\{b(n)\}$ and $\{g_n\}$ defined by Proposition 7.14. Thus for $x \in \mathcal{X}$,

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq B_{r_\eta^0}(x, n) \quad \limsup_n n^{-1+(s-\eta)/\delta} B_{r_\eta^0}(x, n) < \infty,$$

with $B_{r_\eta^0}(x, n)$ given by Proposition 7.15.

Proof 16 The proof (see Appendix 7.6.4), based on the Hölder's inequality, follows from Theorem 2 of Ango Nze [3]. \square

The maximal rate of convergence n^{k_*} is obtained by letting $\eta \downarrow 0$ which yields to

$$k_* := \frac{s - \delta}{\delta},$$

which is similar to the rate obtained by use of the results of Section 7.1. This second approach may lead to very large bounds. Indeed, in the present case, we have to choose \mathcal{D} in such a way that

$$r_\eta(n) \left(1 + |x|^\eta \right) - b(n) \geq r_\eta(n)a > 0, \quad x \in \mathcal{D}^c.$$

Through the proof of Lemma 7.16, it may be shown that $b(n) \leq r_\eta(n)b$ where b depends upon $\sup_{x \in \mathcal{C}} |x|^{s-\delta}$ and of the constants $c(\delta)$, $b(\delta)$ appearing in Lemma 7.9. This condition may lead to a set \mathcal{D} far larger than the one obtained by establishing the conditions (H3). This is exactly what happens when considering the numerical example defined in Paragraph 7.2.2. To check the condition (H7) with $\mathcal{C} = [-8, 8]$, we have to choose $\mathcal{D} = [-1150, 1150]$ and obtain $a := 4.0137e-01$. If we suppose that $m = 1$, then we have $\epsilon^- < 2 \times 289^{-1} \exp(-0.5 \cdot 289^2) / \sqrt{2\pi}$ and the bound can only be computed by assuming $m > 1$ in order to obtain a reasonably large ϵ^- ; but this assumption leads to cumbersome computations.

7.4 Proofs

7.4.1 The coupling technique

Assume (H2). We define a markovian process $Z = \{Z_n = (X_n, X'_n, d_n)\}$ where X_n and X'_n are \mathcal{X} -valued, and d_n is a “bell variable” taking values 0 and 1. The bell rings (i.e. $d_n = 1$) when the processes X and X' are coupled. Sample X_0 (resp. X'_0) from λ (resp. λ') and set $d_0 = 0$; then proceed as follows

(C 1) if $d_n = 0$ and

- (i) $(X_n, X'_n) \notin \Delta$, then set $d_{n+1} = 0$ and sample independently X_{n+1} and X'_{n+1} from the distribution $P(X_n, \cdot)$ and $P(X'_n, \cdot)$.

- (ii) $(X_n, X'_n) \in \Delta$, draw $\xi \sim \rho_{X_n, X'_n} / \rho_{X_n, X'_n}(\mathcal{X})$ and
 - with probability $\rho_{X_n, X'_n}(\mathcal{X})$, set $d_{n+1} = 1$ and $X_{n+1} = X'_{n+1} = \xi$.
 - with probability $1 - \rho_{X_n, X'_n}(\mathcal{X})$, set $d_{n+1} = 0$ and sample $X_{n+1} \sim R_{X_n, X'_n}(X_n, \cdot)$ (resp. $X'_{n+1} \sim R_{X_n, X'_n}(X'_n, \cdot)$).

(C 2) if $d_n = 1$, set $d_{n+1} = 1$, draw $X_{n+1} \sim P(X_n, \cdot)$ and set $X'_{n+1} = X_{n+1}$,

where $R_{x, x'}$ is the residual kernel given by (7.18). It is easily seen that Z is an homogeneous Markov Chain with transition kernel P^* on $(\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}, \mathcal{B}(\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}))$ given by

$$\begin{aligned} P^*\left((x, x', d), A \times A' \times \{i\}\right) &:= \mathbb{1}_{\Delta \times \{0\}}(x, x', d) \left[\mathbb{1}_{\{1\}}(i) \rho_{x, x'}(A \cap A') \right. \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{0\}}(i) \left(1 - \rho_{x, x'}(\mathcal{X})\right) R_{x, x'}(x, A) R_{x, x'}(x', A') \Big] \\ &\quad + \mathbb{1}_{\Delta^c \times \{0\}}(x, x', d) \mathbb{1}_{\{0\}}(i) P(x, A) P(x', A') + \mathbb{1}_{\{1\}}(d) \mathbb{1}_{\{1\}}(i) P(x, A \cap A'). \end{aligned}$$

Denote (Ω, \mathcal{F}) the canonical space of the chain, and $P_{\lambda, \lambda', i}$ (resp. $\mathbb{E}_{\lambda, \lambda', i}$) the probability (resp. the expectation) on (Ω, \mathcal{F}) for the initial distribution $\lambda \otimes \lambda' \otimes \delta_i$. Endow the probability space with the natural filtration

$$\mathcal{F}_n := \sigma(Z_k, k \leq n).$$

If $m = 1$, we deduce easily from the construction above that for any $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $n \geq 1$

$$P_{x, x', 0}(X_n \in A) = P^n(x, A) \quad P_{x, x', 0}(X'_n \in A) = P^n(x', A).$$

For $m > 1$, this property does not hold and we have to define a sequence of r.v. $\{\tilde{Z}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{X}'_n, \tilde{d}_n)\}$ on (Ω, \mathcal{F}) for which $P_{x, x', 0}(\tilde{X}_n \in A) = P^n(x, A)$ and $P_{x, x', 0}(\tilde{X}'_n \in A) = P^n(x', A)$. The following procedure is adapted from Kalashnikov [52]. Set $Q_0 := 0$ and $\tilde{Z}_0 := Z_0$; then proceed as follows

- (C 1) if $d_n = 0$,
 - if $(X_n, X'_n) \notin \Delta$, set $Q_{n+1} := Q_n + 1$ and $\tilde{Z}_{Q_{n+1}} := Z_{n+1}$.
 - if $(X_n, X'_n) \in \Delta$, set $Q_{n+1} := Q_n + m$ and $\tilde{Z}_{Q_{n+1}} := Z_{n+1}$. Sample $\{\tilde{X}_{Q_n+k}\}$ (resp. $\{\tilde{X}'_{Q_n+k}\}$), $1 \leq k \leq m-1$, from the distribution of $\{\Phi_k\}$, $1 \leq k \leq m-1$ conditionally to $\Phi_0 = \tilde{X}_{Q_n}$ (resp. $\Phi_0 = \tilde{X}'_{Q_n}$) and $\Phi_m = \tilde{X}_{Q_{n+1}}$ (resp. $\Phi_m = \tilde{X}'_{Q_{n+1}}$). Finally, set $\tilde{d}_{Q_n+k} := \tilde{d}_{Q_n}$, $1 \leq k \leq m-1$.

(C 2) if $d_n = 1$, set $Q_{n+1} := Q_n + 1$ and $\tilde{Z}_{Q_{n+1}} := Z_{n+1}$.

Here, $\Phi = \{\Phi_n\}$ is a Markov process with transition kernel P .

Proposition 7.17 Assume (H2). For $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $n \geq 1$,

$$P_{x, x', 0}(\tilde{X}_n \in A) = P^n(x, A) \quad P_{x, x', 0}(\tilde{X}'_n \in A) = P^n(x', A).$$

Proof 17 The proof can be adapted from Kalashnikov [52]. It is omitted for brevity. \square

7.4.2 Ergodicity and coupling time

Define the \mathcal{F}_n -adapted coupling-time T as

$$T := \inf\{n \geq 1, \tilde{d}_n = 1\}$$

and the successive \mathcal{F}_n -adapted return-time to Δ of the process (X, X')

$$\begin{aligned} T_0 &:= \inf\{k \geq 0, (X_k, X'_k) \in \Delta\}, \\ T_{n+1} &:= \inf\{k \geq T_n + 1, (X_k, X'_k) \in \Delta\}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

with the convention that $\inf \emptyset = +\infty$ and $T_{-1} = -1$. By Proposition 7.17 and the definition of T , it holds

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq P_{x, \pi, 0}(T > n). \quad (7.44)$$

The tails of the coupling time are controlled by using the Markov's inequality. We have

Lemme 7.18 *Assume (H1-2). For a non-negative and non-decreasing sequence $r = \{r(n)\}$,*

$$P_{x, \pi, 0}(T > n) \leq \frac{\mathbb{E}_{x, \pi, 0}[r(T - m)]}{r(n + 1 - m) + \sum_{j \geq n+1-m} (1 - \epsilon^+)^{j-(n-m)} \{r(j+1) - r(j)\}}.$$

Proof 18 The proof is directly adapted from Roberts and Tweedie [99], Theorem 4.1. \square

Define the hitting-time sequence τ_n

$$\tau_0 := T_0 \quad \tau_{n+1} := T_{n+1} - T_n = \tau \circ \theta^{T_n}. \quad (7.45)$$

7.4.3 Polynomial rates : proofs of Theorems 7.3, 7.4 and 7.5

Proposition 7.19 *Assume (H3). Then for any $0 \leq l \leq q - 1$, and $(x, x') \in \Delta^c$,*

$$\left(\prod_{k=0}^l a_k \right) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} S(l, k+1) \{V_0(X_k) + V_0(X'_k)\} \right] \leq V_{l+1}(x) + V_{l+1}(x'). \quad (7.46)$$

Proof 19 The first step is to prove that for any $0 \leq i \leq q - 1$, $(x, x') \in \Delta^c$,

$$a_i \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \{V_i(X_k) + V_i(X'_k)\} \right] \leq V_{i+1}(x) + V_{i+1}(x'). \quad (7.47)$$

Define $W_i(x, x', d) = W_i(x, x') := V_i(x) + V_i(x')$ for $d = 0, 1$. Then for $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\begin{aligned} P^*W_{i+1}(x, x', 0) &\leq W_{i+1}(x, x') - W_i(x, x') + b_i\{\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x) + \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x')\} \\ &\leq W_{i+1}(x, x') - W_i(x, x') + b_i\{\mathbb{1}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c}(x, x') + \mathbb{1}_{\mathcal{D}^c \times \mathcal{C}}(x, x')\}. \end{aligned}$$

On \mathcal{D}^c , $b_i \leq (1 - a_i)V_i(x')$ and it follows that on Δ^c ,

$$P^*W_{i+1}(x, x', 0) \leq W_{i+1}(x, x') - a_iW_i(x, x'),$$

which implies (7.47) by use of the Comparison Theorem. Note that (7.47) implies that τ is finite $P_{x, x', 0}$ -p.s. The proof is concluded by induction : (7.47) establishes the proposition for $i = 0$. Assume that (7.46) holds for some $0 \leq i < q - 1$, *i.e.* for all $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\left(\prod_{j=0}^i a_j\right) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} S(i, k+1) \{V_0(X_k) + V_0(X'_k)\} \right] \leq V_{i+1}(x) + V_{i+1}(x').$$

Then for $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\begin{aligned} \{V_{i+2}(x) + V_{i+2}(x')\} &\geq a_{i+1} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \{V_{i+1}(X_k) + V_{i+1}(X'_k)\} \right] \\ &\geq a_{i+1} \left(\prod_{j=0}^i a_j \right) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \mathbb{E}_{X_k, X'_k, 0} \left[\sum_{j=0}^{\tau-1} S(i, j+1) \{V_0(X_j) + V_0(X'_j)\} \right] \right] \\ &\geq \left(\prod_{j=0}^{i+1} a_j \right) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} S(i+1, k+1) \{V_0(X_k) + V_0(X'_k)\} \right], \end{aligned}$$

by use of the Markov property in the last inequality. \square

Proof of Theorem 7.3 Define $\mathcal{O}(j) := \{d_{T_{j-1}+1} = 0\}$ with the convention $\mathcal{O}(0) := \Omega$, and set $T'_j := T_j + j(m-1)$. We show, by induction on j , that for $1 \leq l \leq q$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)} \right] \leq \langle A_m^j W(x, x'), e_l \rangle. \quad (7.48)$$

The induction implies that $T_j \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)} < \infty$ $P_{x, x', 0}$ -p.s. For $j = 0$, Proposition 7.19 shows that

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[S(l, T_0) \right] \leq \mathbb{1}_{\Delta}(x, x') + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') t_l(x, x') = W_l(x, x') \quad (7.49)$$

and (7.48) holds. Remark in addition that by (7.10) and (7.49), we have

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[S(l, m + T_0) \right] = \sum_{k=0}^l S(l-k, m) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[S(k, T_0) \right] \leq \sum_{k=0}^l S(l-k, m) W_k(x, x').$$

Let $j \geq 1$. The induction assumption implies that $T_k \mathbb{1}_{\mathcal{O}(k)} < \infty$ $P_{x,x',0}$ -p.s. for any $0 \leq k < j$. Note that $\mathcal{O}(j) \subset \mathcal{O}(j-1)$. It follows from the definition of T'_j and (7.10) that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] &= \sum_{k=0}^l \mathbb{E}_{x,x',0} [S(k, T'_{j-1}) S(l-k, \tau_j + m - 1) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] \\ &= \sum_{k=0}^l \mathbb{E}_{x,x',0} [\mathbb{E}_{x,x',0} [S(l-k, \tau_j + m - 1) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) | \mathcal{F}_{T_{j-1}}] S(k, T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j-1)}]. \end{aligned}$$

Since $\tau_j + m - 1 = m - 1 + \tau \circ \theta^{T_{j-1}}$, then the strong Markov property implies that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] &= \sum_{k=0}^l \mathbb{E}_{x,x',0} [(1 - \rho_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(\mathcal{X})) \times \\ &\quad \int R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X_{T_{j-1}}, dz) R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X'_{T_{j-1}}, dz') \mathbb{E}_{z,z',0} [S(l-k, m+T_0)] S(k, T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j-1)}] \\ &\leq \sum_{k=0}^l A_m(l-k) \mathbb{E}_{x,x',0} [S(k, T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j-1)}] \leq \langle A_m^j W(x, x'), e_l \rangle. \end{aligned}$$

We now conclude the proof. The sets $\mathcal{O}(j) \cap \{d_{T_j+1} = 1\}$, $j \geq 0$, define a partition of Ω ; since

$$P_{x,x',0} (d_{T_j+1} = 1 | \mathcal{F}_{T_j}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) = P_{x,x',0} (d_{T_j+1} = 1 | \mathcal{F}_{T_j}) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_j}) = \rho_{X_{T_j}, X'_{T_j}}(\mathcal{X}) \leq \epsilon^+,$$

then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T-m)] &= \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j) \cap \{d_{T_j+1}=1\}}] \\ &\leq \epsilon^+ \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} [S(l, T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] \leq \epsilon^+ \langle (I - A_m)^{-1} W(x, x'), e_l \rangle. \end{aligned}$$

The proof is concluded by applying Lemma 7.18.

Proof of Theorem 7.4 Define $r_l(n) := (S(l, n))^\beta$. The proof is similar to the previous one and relies on the Jensen's inequality. Define $\phi(x) := |x|^\beta$. Proposition 7.19 implies that for any $1 \leq l \leq q$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} [r_l(T'_0)] := \mathbb{E}_{x,x',0} [\phi(S(l, T'_0))] \leq \phi(W_l(x, x')). \quad (7.50)$$

Note in addition that

$$\mathbb{E}_{x,x',0} [r_l(m+T'_0)] \leq \sum_{k=0}^l r_{l-k}(m) \mathbb{E}_{x,x',0} [r_k(T'_0)] \leq \sum_{k=0}^l r_{l-k}(m) \phi(W_k(x, x')).$$

We show by induction that for any $0 \leq k \leq j$, $1 \leq l \leq q$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[r_l(T'_k) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(k)} \right] \leq \langle \left(A_m^{(\beta)} \right)^k \phi(W(x,x')), e_l \rangle. \quad (7.51)$$

Eq. (7.50) shows that (7.51) is true for $j = 0$. Assume that (7.51) is verified for $j \geq 1$. Then,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r_l(T'_j) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)} \right] &\leq \sum_{k=0}^l \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r_k(T'_{j-1}) r_{l-k}(\tau_j + m - 1) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^l \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{E}_{x,x',0} \left[r_{l-k}(\tau_j + m - 1) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) | \mathcal{F}_{T_{j-1}} \right] r_k(T'_{j-1}) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j-1)} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^l \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\left(1 - \rho_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(\mathcal{X}) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \int R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X_{T_{j-1}}, dz) R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X'_{T_{j-1}}, dz') \mathbb{E}_{z,z',0} \left[r_{l-k}(m + T_0) \right] r_k(T'_{j-1}) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j-1)} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^l A_m^{(\beta)}(l-k) \mathbb{E}_{x,x',0} \left[r_k(T'_{j-1}) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j-1)} \right] \leq \langle \left(A_m^{(\beta)} \right)^j \phi(W(x,x')), e_l \rangle. \end{aligned}$$

We conclude by applying Lemma 7.18. Remark that $|\delta_x \otimes \pi(\phi(W))| < \infty$ iff $\pi(\phi(V_q)) < \infty$.

Proof of Theorem 7.5 For notational simplicity, we assume that $m = 1$ (extensions to cover $m > 1$ are easy). Proposition 7.17 and the definition of the coupling-time T imply that

$$|P^n f(x) - \pi(f)| \leq \mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[\left(f(X_n) + f(X'_n) \right) \mathbb{I}_{n < T} \right]$$

and by use of the Hölder's inequality, it holds

$$|P^n f(x) - \pi(f)| \leq P_{x,\pi,0}^{1-\alpha}(T > n) \pi(V'_1)^\alpha \left(\|f^{1/\alpha}\|_{V'_1} \right)^\alpha + \mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[f(X_n) \mathbb{I}_{n < T} \right]. \quad (7.52)$$

Decompose the event $\{T > n\}$ on the successive visits to Δ

$$\begin{aligned} \{T > n\} &= \bigcup_{j \geq -1} \left\{ T_j < n \leq T_{j+1}, T \geq T_{j+1} + 1, T > n \right\} \\ &= \bigcup_{j \geq -1} \left\{ T_j < n \leq T_{j+1}, d_{T_{j+1}} = 0, T > n \right\}. \end{aligned}$$

Applying once again the Hölder's inequality together with the strong Markov property, we have

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[f(X_n) \mathbb{1}_{n < T} \right] \leq P_{x,\pi,0}^{1-\alpha}(T > n) \left(\|f^{1/\alpha}\|_{V'_1} \right)^\alpha \sum_{j \geq -1} \left(\mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[V'_1(X_n) \mathbb{1}_{T_j < n \leq T_{j+1}} \mathbb{1}_{d_{T_{j+1}}=0} \right] \right)^\alpha \\
& \leq P_{x,\pi,0}^{1-\alpha}(T > n) \left(\|f^{1/\alpha}\|_{V'_1} \right)^\alpha \sum_{j \geq -1} \left(\mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[\mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[V'_1(X_n) \mathbb{1}_{T_j < n \leq T_{j+1}} \mathbb{1}_{d_{T_{j+1}}=0} | \mathcal{F}_{T_j} \right] \mathbb{1}_{d_{T_j}=0} \right] \right)^\alpha \\
& \leq P_{x,\pi,0}^{1-\alpha}(T > n) \left(\|f^{1/\alpha}\|_{V'_1} \right)^\alpha \left\{ \left(\mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[V'_1(X_n) \mathbb{1}_{n \leq \tau} \mathbb{1}_{d_1=0} \right] \right)^\alpha \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j \geq 0} \left(\mathbb{E}_{x,\pi,0} \left[\mathbb{E}_{X_{T_j}, X'_{T_j}, 0} \left[V'_1(X_n) \mathbb{1}_{0 < n \leq \tau} \mathbb{1}_{d_1=0} \right] \mathbb{1}_{d_{T_j}=0} \right] \right)^\alpha \right\}. \tag{7.53}
\end{aligned}$$

The assumption on V'_1 implies that for $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\int P^* \left((x, x', 0), dy \times dy' \times \{0\} \right) \left(V'_1(y) + V'_1(y') \right) \leq V'_1(x) + V'_1(x')$$

so that

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\left(V'_1(X_n) + V'_1(X'_n) \right) \mathbb{1}_{\tau \geq n} \mathbb{1}_{d_1=0} \right] \leq V'_1(x) + V'_1(x'), \quad (x, x') \in \Delta^c, \tag{7.54}$$

whereas if $(x, x') \in \Delta$, by definition of the kernel, it holds

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\left(V'_1(X_n) + V'_1(X'_n) \right) \mathbb{1}_{\tau \geq n} \mathbb{1}_{d_1=0} \right] \leq C(\Delta). \tag{7.55}$$

Finally, since $P_{x,\pi,0}(d_{T_j} = 0) = (1 - \epsilon^-)^j$, the Proposition follows from (7.52-7.55).

7.4.4 General rate : proofs of Theorems 7.11 and 7.12

Proposition 7.20 Assume (H5). Then for any $l \geq 0$ and $(x, x') \in \Delta^c$

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\tilde{r}(l + \tau) \right] \leq \left(\prod_{k=0}^{l-1} (1 + \psi(k)) \right)^{-1} \{g_l(x) + g_l(x')\}/2,$$

with the convention that $\prod_{k=0}^{-1} (1 + \psi(k)) := 1$.

Proof 20 Consider the case $l = 0$. Define $G_n(x, x', d) = G_n(x, x') := g_n(x) + g_n(x')$, and $\tilde{G}_n(x, x', d) = \tilde{G}_n(x, x') := \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \psi(k))^{-1} G_n(x, x')$, $d = 0, 1$. The proof amounts to show that

$$P^* \tilde{G}_{n+1}(x, x', 0) \leq \tilde{G}_n(x, x') \text{ on } \Delta^c.$$

Under the stated assumptions,

$$P^* \tilde{G}_{n+1}(x, x', 0) \leq (1 + \psi(n))^{-1} \tilde{G}_n(x, x') + \prod_{k=0}^n (1 + \psi(k))^{-1} b(n) \{ \mathbb{1}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c}(x, x') + \mathbb{1}_{\mathcal{D}^c \times \mathcal{C}}(x, x') \}.$$

On $\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c$, $b(n) \leq \psi(n)G_n(x, x')$ and thus

$$\prod_{k=0}^n (1 + \psi(k))^{-1} b(n) \leq \frac{\psi(n)}{1 + \psi(n)} \tilde{G}_n(x, x');$$

the same inequality holds on $\mathcal{D}^c \times \mathcal{C}$. Finally, since $\tilde{G}_n(x, x') \geq 2r(n)$, the Proposition is proved for $l = 0$. Remark that for any $l > 0$, by defining $g'_n(x) := g_{l+n}(x)$, $b'(n) := b(n+l)$, and $\psi'(n) := \psi(n+l)$, then we have $g'(n) \geq r(n+l)$ and

$$Pg'_{n+1}(x) \leq g'_n(x) + b'(n) \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x).$$

Thus we adapt the preceding calculations and the Proposition is proved for any $l \geq 0$. \square

Proof of Theorem 7.11 (i) We show by induction that

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] \leq A_m^j W_0(x, x'). \quad (7.56)$$

The induction implies that $T_j \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)} < \infty$ $P_{x, x', 0}$ -p.s. For $j = 0$, Proposition 7.20 shows that

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(T_0)] \leq \mathbb{1}_{\Delta}(x, x') \tilde{r}(0) + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') (g_0(x) + g_0(x'))/2;$$

hence (7.56) holds. Let $j \geq 1$. The induction assumption implies that $T_k \mathbb{1}_{\mathcal{O}(k)} < \infty$ $P_{x, x', 0}$ -p.s. for any $0 \leq k < j$. Note that $\mathcal{O}(j) \subset \mathcal{O}(j-1)$ and

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(m + T_0)] \leq W_m(x, x').$$

It follows from the definition of T_j and of the class Λ that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] &\leq \mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(\tau_j + m - 1) \tilde{r}(T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] \\ &\leq \mathbb{E}_{x, x', 0} [\mathbb{E}_{x, x'} [\tilde{r}(\tau_j + m - 1) \mathbb{1}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) | \mathcal{F}_{T_{j-1}}] \tilde{r}(T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j-1)}]. \end{aligned}$$

By the strong Markov property and Proposition 7.20,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j)}] &\leq \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\left(1 - \rho_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(\mathcal{X}) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \int R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X_{T_{j-1}}, dz) R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X'_{T_{j-1}}, dz') \mathbb{E}_{z, z', 0} [\tilde{r}(m + T_0)] \tilde{r}(T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j-1)} \right] \\ &\leq A_m \mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(T'_{j-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j-1)}] \leq A_m^j W_0(x, x'). \end{aligned}$$

We now conclude the proof as in the proof of Theorem 7.3.

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(T - m)] = \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x, x', 0} [\tilde{r}(T'_j) \mathbb{1}_{\mathcal{O}(j) \cap \{d_{T_j+1}=1\}}] \leq \epsilon^+ \sum_{j \geq 0} A_m^j W_0(x, x').$$

(ii) The proof differs in the computation of $\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(T'_j) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}]$. Since $\tilde{r} \in \Lambda_c$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(T'_j) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] \leq \rho_{\tilde{r}}(j+1) \left(\sum_{k=1}^j \mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(\tau_k + m - 1) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] + \mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(\tau_0) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] \right).$$

We have

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(\tau_0) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] \leq (1 - \epsilon^-)^j W_0(x, x'),$$

and for $1 \leq k \leq j$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(\tau_k + m - 1) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] \leq (1 - \epsilon^-)^{j-k} \mathbb{E}_{x,x',0}[\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(\tau_k + m - 1) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{k-1}+1}) | \mathcal{F}_{T_{k-1}}] \mathbb{I}_{\mathcal{O}(k-1)}].$$

By the Strong Markov property,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(\tau_k + m - 1) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] &\leq (1 - \epsilon^-)^{j-k} \mathbb{E}_{x,x',0}\left[\left(1 - \rho_{X_{T_{k-1}}, X'_{T_{k-1}}}(\mathcal{X})\right) \times \right. \\ &\quad \left. \int R_{X_{T_{k-1}}, X'_{T_{k-1}}}(X_{T_{k-1}}, dz) R_{X_{T_{k-1}}, X'_{T_{k-1}}}(X'_{T_{k-1}}, dz') \mathbb{E}_{z,z',0}[\tilde{r}(m + T_0)] \mathbb{I}_{\mathcal{O}(k-1)}\right]. \end{aligned}$$

Thus, $\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(\tau_k + m - 1) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] \leq (1 - \epsilon^-)^{j-1} A_m$. Finally,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(T - m)] \leq \epsilon^+ \sum_{j \geq 0} (1 - \epsilon^-)^{j-1} \rho_{\tilde{r}}(j+1) \left\{ j A_m + (1 - \epsilon^-) W_0(x, x') \right\}.$$

The proof is concluded by applying Lemma 7.18.

Proof of Theorem 7.12

Note that

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[\phi(\tilde{r}(m + T_0))] \leq \phi(\mathbb{E}_{x,x',0}[\tilde{r}(m + T_0)]).$$

Hence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0}[r_\phi(\tau_j + m - 1) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) | \mathcal{F}_{T_{j-1}}] &\leq \left(1 - \rho_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(\mathcal{X})\right) \cdots \\ &\quad \int R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X_{T_{j-1}}, dz) R_{X_{T_{j-1}}, X'_{T_{j-1}}}(X'_{T_{j-1}}, dz') \phi(\mathbb{E}_{z,z',0}[\tilde{r}(m + T_0)]) \leq A_m^\phi \end{aligned}$$

so that $\mathbb{E}_{x,x',0}[r_\phi(T'_j) \mathbb{I}_{\mathcal{O}(j)}] \leq (A_m^\phi)^j \mathbb{E}_{x,x',0}[r_\phi(T_0)]$. Since $\mathbb{E}_{x,x',0}[r_\phi(T_0)] \leq \phi(W_0(x, x'))$, then

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[r_\phi(T - m)] \leq \epsilon^+ \left(1 - A_m^\phi\right)^{-1} \phi(W_0(x, x')).$$

The proof can be worked out similarly for (ii).

Proof of Proposition 7.15 The proof readily adapts from the proofs of Theorems 7.11 and 7.12 if one improves a control of $\mathbb{E}_{x,x',0}[r^0(l+\tau)]$ on Δ^c . This is done in

Proposition 7.21 *Assume (H7). Then for any integer $l \geq 0$, and $(x, x') \in \Delta^c$,*

$$\mathbb{E}_{x,x',0}[r^0(l+\tau)] \leq r^0(l-1) + (g_l(x) + g_l(x')) / ((1+a) \wedge 2).$$

Proof 21 Assume $l = 0$. Using the notations introduced in the proof of Proposition 7.20, it holds that

$$\begin{aligned} P^*G_{n+1}(x, x', 0) &\leq G_n(x, x') - r(n)\{\omega(x) + \omega(x')\} + b(n)\{\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(x) + \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(x')\} \\ &\leq G_n(x, x') - r(n)\{\omega(x) + \omega(x')\}\left(1 - \mathbb{I}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c}(x, x') - \mathbb{I}_{\mathcal{D}^c \times \mathcal{C}}(x, x')\right) \\ &\quad - (r(n)\omega(x) + r(n)\omega(x') - b(n))\{\mathbb{I}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c}(x, x') + \mathbb{I}_{\mathcal{D}^c \times \mathcal{C}}(x, x')\}. \end{aligned}$$

Under (H7), on $\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c \cup \mathcal{D}^c \times \mathcal{C}$, $r(n)\omega(x) + r(n)\omega(x') - b(n) \geq (1+a)r(n)$. Define

$$F(x, x') := \{\omega(x) + \omega(x')\}\left(1 - \mathbb{I}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c}(x, x') - \mathbb{I}_{\mathcal{D}^c \times \mathcal{C}}(x, x')\right) + (1+a)\{\mathbb{I}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}^c}(x, x') + \mathbb{I}_{\mathcal{D}^c \times \mathcal{C}}(x, x')\},$$

and note that $F(x, x') \geq 1+a$ on Δ^c and $F(x, x') \geq 2$ on Δ . Thus by use of the Dynkin's formula and Proposition 7.14 applied to the kernel P^* , for any $(x, x') \in \Delta^c$,

$$(1+a) \wedge 2 \mathbb{E}_{x,x',0}[r^0(\tau)] \leq \mathbb{E}_{x,x',0}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} r(k) F(X_k, X'_k)\right] + \mathbb{E}_{x,x',0}[G_\tau(X_\tau, X'_\tau)] \leq g_0(x) + g_0(x'),$$

which concludes the case $l = 0$. The preceding demonstration relies on the existence of a drift criteria such that

$$Pg_{n+1}(x) \leq g_n(x) - r(n)\omega(x) + b(n)\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(x).$$

For any $l \geq 0$, we have

$$P\hat{g}_{n+1}(x) \leq \hat{g}_n(x) + r(n+l)\omega(x) + b(n+l)\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(x),$$

with $\hat{g}_n(x) = g_{n+l}(x)$ so that the proof follows for any $l > 0$. \square

7.5 Acknowledgements

We are grateful to Soren Jarner, Gareth Roberts and Alexandre Veretennikov for useful discussions. A special thanks to Pierre Priouret for his many comments and insights on earlier version of the manuscript and for the many hours spent to proofread the paper. We acknowledge partial support from the EU TMR network ERB-FMRX-CT96-0095 on 'Computational and Statistics Methods for the Analysis of Spatial data'.

7.6 Some technical proofs

7.6.1 Proof of Proposition 7.10

(i) is obvious.

(ii) For any $N \geq 0$, define $\tilde{g}_n(x) := g'_{N+n}(x)$. The inequality implies that for $x \in \mathcal{C}^c$,

$$\tilde{g}_0(x) \geq \int_{\mathcal{C}} \tilde{g}_1(\Phi_1) + \int_{\mathcal{C}^c} \tilde{g}_1(\Phi_1) \geq \int_{\mathcal{C}} \tilde{g}_1(\Phi_1) + \int_{\mathcal{C}^c} P\tilde{g}_2(\Phi_1)$$

so that we state recursively that for $x \in \mathcal{C}^c$,

$$g'_N(x) = \tilde{g}_0(x) \geq \mathbb{E}_x[\tilde{g}_{\tau_{\mathcal{C}}}(\Phi_{\tau_{\mathcal{C}}})] \geq \mathbb{E}_x[r(N + \tau_{\mathcal{C}})] = g_N(x).$$

Which concludes the proof.

7.6.2 Proof of Lemma 7.8

Let $V(x) := 1 + |x|^\alpha$, $2 < \alpha < s + 1$. Denote $\mathcal{R}(x)$ the rejection region, *i.e.*

$$\mathcal{R}(x) := \{y \in \mathbb{R}, p(y)q(x - y) < p(x)q(y - x)\},$$

and $\mathcal{R}(x) - x := \{t \in \mathbb{R}, x + t \in \mathcal{R}(x)\}$. By definition of the Metropolis kernel, we have

$$PV(x) - V(x) = \int [V(x + t) - V(x)] q(t) dt + \int_{\mathcal{R}(x)-x} [V(x + t) - V(x)] \left(\frac{p(x + t)}{p(x)} - 1 \right) q(t) dt.$$

Assume that $x > 0$ (the case $x < 0$ trivially adapts). Then for any $0 < s' < s$, there exists M such that for $x \geq M$,

$$\begin{aligned} PV(x) - V(x) &= \int [(x + t)^\alpha - x^\alpha] q(t) dt + \int_{\mathcal{R}(x)-x} [(x + t)^\alpha - x^\alpha] \left(\frac{p(x + t)}{p(x)} - 1 \right) q(t) dt \\ &= \int [\alpha x^{\alpha-1} t + \alpha(\alpha-1)/2 x^{\alpha-2} t^2 + r_1(x, t)] q(t) dt \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}(x)-x} [\alpha x^{\alpha-1} t + r_2(x, t)] \left(\nabla p(x)/p(x) t + r_3(x, t) \right) q(t) dt \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} &\limsup_{x \rightarrow \infty} |x|^{-(\alpha-3)} \sup_{t \in \text{Supp } q} |r_1(x, t)| t^{-3} < \infty, \\ &\limsup_{x \rightarrow \infty} |x|^{-(\alpha-2)} \sup_{t \in \text{Supp } q} |r_2(x, t)| t^{-2} < \infty, \\ &\limsup_{x \rightarrow \infty} |x|^2 \sup_{t \in \text{Supp } q} |r_3(x, t)| t^{-2} < \infty, \end{aligned}$$

and for any $0 < s' < s$, $\nabla p(x)/p(x) \leq -s'x^{-1}$ for large x . Hence, since $\int tq(t)dt = 0$ and, for large x , $\int_{\mathcal{R}(x)-x} t^2 q(t)dt = \int t^2 q(t)dt/2$, it holds that for any $0 < s' < s$ and x large enough,

$$PV(x) - V(x) = -\alpha/2 \left(s' + 1 - \alpha \right) \int t^2 q(t)dt - x^{\alpha-2} + o(x^{\alpha-2})$$

which concludes the proof.

7.6.3 Proof of Lemma 7.9

Let $u, y \in \mathbb{R}^d$, $u \neq 0$, and $\alpha > 0$.

$$|u+y|^\alpha - |u|^\alpha = \begin{cases} \alpha|u|^{\alpha-1} < \frac{u}{|u|}, y > +\frac{\alpha}{2}|u|^{\alpha-2}(|y|^2 + (\alpha-2) < \frac{u}{|u|}, y >^2) + R_3(\alpha, u, y) & \text{if } \alpha > 3, \\ \alpha|u|^{\alpha-1} < \frac{u}{|u|}, y > +R_2(\alpha, u, y) & \text{if } 2 < \alpha \leq 3, \\ 2 < u, y > +|y|^2 & \text{if } \alpha = 2, \\ R_1(\alpha, u, y) & \text{if } 1 < \alpha < 2, \end{cases} \quad (7.57)$$

where for some constant $C := C(\alpha) < \infty$

$$\begin{aligned} |R_3(\alpha, u, y)| &\leq C(|u|^{\alpha-3} + |y|^{\alpha-3})|y|^3 \\ |R_2(\alpha, u, y)| &\leq \alpha(\alpha-1)/2 \left(|u|^{\alpha-2} + |y|^{\alpha-2} \right) |y|^2 \\ |R_1(\alpha, u, y)| &\leq C(|u|^{\alpha-1} + |y|^{\alpha-1})|y|. \end{aligned}$$

Case $\delta = 2$ Assume that $F(x) \neq 0$. Since $\alpha > 3$, we deduce from (7.57) that

$$|F(x) + y|^\alpha \leq |F(x)|^\alpha + \alpha|F(x)|^{\alpha-1} < \frac{|F(x)|}{|F'(x)|}, y > +\frac{\alpha}{2}(\alpha-1)|F(x)|^{\alpha-2}|y|^2 + R_3(\alpha, F(x), y)$$

so that there exists $0 < C < \infty$ such that

$$\int |F(x) + y|^\alpha \Gamma(dy) \leq |F(x)|^\alpha + \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)\Gamma(2)|F(x)|^{\alpha-2} + C(1 + |F(x)|^{\alpha-3}). \quad (7.58)$$

If $F(x) = 0$, then (7.58) remains true for all α .

Case $1 < \delta < 2$ Assume that $F(x) \neq 0$. Since $2 < \alpha$ we deduce from (7.57) that

$$|F(x) + y|^\alpha \leq |F(x)|^\alpha + \alpha|F(x)|^{\alpha-1} < \frac{|F(x)|}{|F'(x)|}, y > +\frac{\alpha}{2}(\alpha-1) \left(|F(x)| + |y|^2 \right)^{\alpha-2} |y|^2$$

so that there exists $0 < C < \infty$ such that

$$\int |F(x) + y|^\alpha \Gamma(dy) \leq |F(x)|^\alpha + C(1 + |F(x)|^{\alpha-2}). \quad (7.59)$$

If $F(x) = 0$, (7.59) remains true.

Case $\delta = 1$ The inequality (7.59) still holds.

Case $0 < \delta < 1$ For $\alpha > 2$, the inequality (7.59) still holds. If $\alpha = 2$,

$$\int |F(x) + y|^2 \Gamma(dy) = |F(x)|^2 + \Gamma(2). \quad (7.60)$$

If $1 < \alpha < 2$, we deduce from (7.57) that

$$|F(x) + y|^\alpha \leq |F(x)|^\alpha + \alpha \left(|F(x)| + |y| \right)^{\alpha-1} |y|$$

so that

$$\int |F(x) + y|^\alpha \Gamma(dy) \leq |F(x)|^\alpha + \alpha \Gamma(1) |F(x)|^{\alpha-1} + \Gamma(\alpha). \quad (7.61)$$

If $\delta < \alpha \leq 1$ then

$$\int |F(x) + y|^\alpha \Gamma(dy) \leq |F(x)|^\alpha + \Gamma(\alpha). \quad (7.62)$$

If $F(x) = 0$, (7.59), (7.60), (7.61) and (7.62) remain true.

7.6.4 Proof of Lemma 7.16

We prove (as to establish (7.11)) that for $1 \leq l \leq q$, $0 < \eta \leq s - \delta q$ and δ , there exist $c_l > 0$ and $b_l < \infty$ such that for $0 \leq i \leq q - 1$,

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} S(i, k+1) (1 + |\Phi_k|^\eta) \right] \leq c_{i+1} \left(1 + |x|^{\eta+(i+1)\delta} \right) + b_{i+1} \mathbb{I}_C(x). \quad (7.63)$$

Define

$$\begin{aligned} \beta &:= \frac{(q-1)\delta}{s-\eta-2\delta}, \\ \alpha &:= (1-\beta^{-1})^{-1}; \end{aligned}$$

since $q \geq 2$ then $s > \eta + 2\delta$. In addition, $s - q\delta - \eta < \delta$ so that $\beta > 1$ and $(\eta + q\delta)/\beta + (\eta + \delta)/\alpha = s - \delta$. Then by the Hölder's inequality, it holds that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r_\eta(k) (1 + |\Phi_k|^\eta) \right] &\leq \mathbb{E}_x \left[\left(\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r_\eta^\beta(k) (1 + |\Phi_k|^\eta) \right)^{1/\beta} \left(\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (1 + |\Phi_k|^\eta) \right)^{1/\alpha} \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r_\eta^\beta(k) (1 + |\Phi_k|^\eta) \right] \right)^{1/\beta} \left(\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (1 + |\Phi_k|^\eta) \right] \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} S(q-1, k+1) (1 + |\Phi_k|^\eta) \right] \right)^{1/\beta} \left(\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (1 + |\Phi_k|^\eta) \right] \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(c_q \{1 + |x|^{\eta+q\delta}\} + b_q \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x) \right)^{1/\beta} \left(c_1 \{1 + |x|^{\eta+\delta}\} + b_1 \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x) \right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

by use of (7.63) and the proof follows from straightforward calculations.

7.7 Figure and Tables

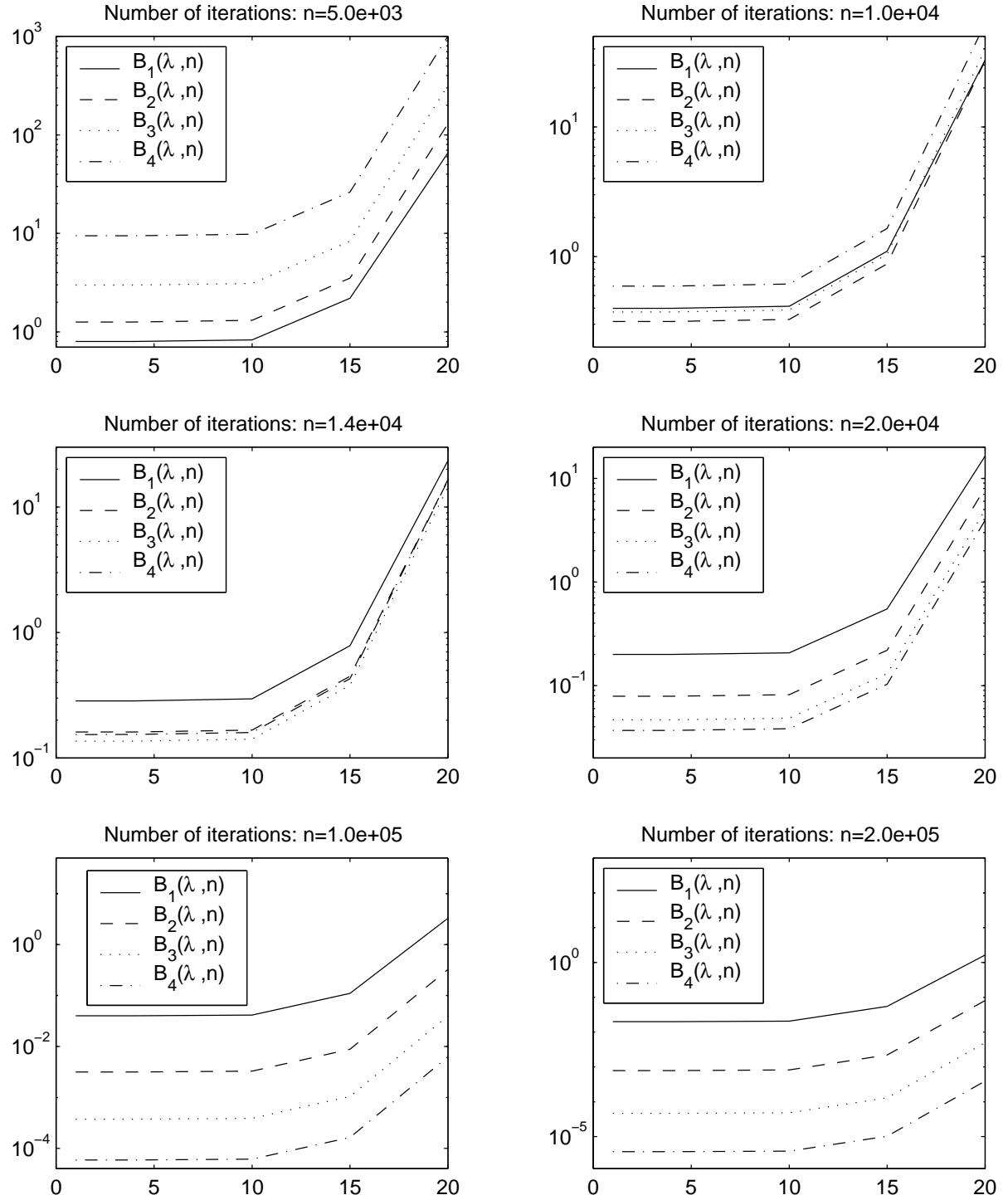


FIG. 7.1 – An upper bound of $B_l(\lambda, n)$, $1 \leq l \leq 4$ is plotted versus $\log_{10}(\lambda_4)$. A logarithmic scale is used for the Y-axis.

	$n = 5e + 03$	$n = 1e + 04$	$n = 2e + 04$	$n = 1e + 05$	$n = 2e + 05$
$\lambda_q = 1e + 01$	7.9887e-01	3.1575e-01	3.6958e-02	5.9147e-05	3.6968e-06
$\lambda_q = 1e + 04$	7.9914e-01	3.1575e-01	3.6971e-02	5.9167e-05	3.6981e-06
$\lambda_q = 1e + 10$	8.2898e-01	3.2755e-01	3.8352e-02	6.1378e-05	3.8362e-06
$\lambda_q = 1e + 15$	2.1979e+00	8.7875e-01	1.0291e-01	1.6469e-04	1.0293e-05
$\lambda_q = 1e + 20$	6.5738e+01	3.2467e+01	3.9475e+00	6.3176e-03	3.9486e-04

TAB. 7.1 -

	(a)	(a')	(b)	(c)
p	0.6	0.6	0.7	0.75
α	0.25	0.25	0.5	0.4
kernel	P	P^7	P	P
m	28	1	6	8
m_c	0	7	1	0
m_D	14	7	3	4
λ_*	0.9798	0.8669	0.9165	0.8660
b	0.1888	0.5587	0.2417	0.5732
β_{FM}^{-1}	0.9983	$0.9997^{1/7}$	0.9649	0.9413

TAB. 7.2 -

	(a)	(b)	(c)
p	0.6	0.7	0.75
α	0.25	0.5	0.4
kernel	P	P	P
m	28	6	8
m_c	0	1	0
m_D	14	3	4
ϵ	2.60e-02	2.71e-01	3.38e-01
β_{FM}^{-1}	0.9998	0.9854	0.9793

TAB. 7.3 -

	(a)	(a')	(b)	(c)
p	0.6	0.6	0.7	0.75
α	0.25	0.25	0.5	0.4
kernel	P	P^7	P	P
m	1	1	1	1
mc	1	7	1	1
ϵ	0.25	1.17e-02	0.5	0.4
λ_*	0.9798	0.8669	0.9165	0.8660
b	0.1888	0.5587	0.3472	0.5732
β_{RT}^{-1}	**	$0.9998^{1/7}$	0.9845	0.9796

TAB. 7.4 -

	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$
$W_{x,\pi}(\beta_*) = 10$	2.9493e-01	7.3337e-02	3.6342e-03	1.4554e-06
$W_{x,\pi}(\beta_*) = 1000$	5.1036e-01	1.3748e-01	7.1250e-03	2.9144e-06

TAB. 7.5 -

	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$
$W_{x,\pi}(\beta_*) = 10$	6.7984e-04	2.6108e-06	2.8634e-11	7.0544e-24
$W_{x,\pi}(\beta_*) = 1000$	7.2623e-03	3.0771e-05	3.5925e-10	9.1672e-23

TAB. 7.6 -

Chapitre 8

V -Subgeometric ergodicity for a Hastings-Metropolis algorithm

Ce travail, en collaboration avec Eric Moulines (ENST), est publié dans la revue *Statist. Probab. Lett.*, 49(4) :401–410, 2000.

Abstract We study the symmetric random-walk Hastings-Metropolis algorithm in situations where the density is not log-concave in the tails. We show that, under mild technical conditions this algorithm is V -ergodic at a subgeometrical rate.

Keywords Hastings-Metropolis algorithm, V -ergodicity, subgeometrical rates.

8.1 Introduction

The Hastings-Metropolis algorithm (Metropolis *et al.* [71] and Hastings [47]), which allows simulation of a probability density p on \mathcal{X} which is only known up to a factor, is now recognized as a central tool in computational statistic. It is especially relevant when p is the posterior distribution in a Bayesian context (see e.g. Besag and Green [8]; Smith and Gelfand [107]; Tierney [116] for a variety of implementations, properties of such methods and theirs applications). In order to describe the approach, it is useful to outline the standard construction of a Hastings-Metropolis algorithm. Consider a candidate transition kernel $Q(z, dy)$ on $\mathcal{X} \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$ with density $q(z, y)$, $z, y \in \mathcal{X}$. Here \mathcal{X} is a subset of \mathbb{R}^d , $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ is the Borel σ -field on \mathcal{X} and the densities are w.r.t the Lebesgue measure μ . A “candidate” y generated according to the density $q(z, y)$ is then

accepted with probability $\alpha(z, y)$ given by

$$\alpha(z, y) = \begin{cases} \frac{p(y)q(y, z)}{p(z)q(z, y)} \wedge 1 & \text{if } p(z)q(z, y) > 0 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

The actual transitions of the Hastings-Metropolis chain, which we denote by $\{\zeta_n\}$, take place according to a law P , with transition probability density $\alpha(z, y)q(z, y)$ and with probability of remaining at the same point $\int (1 - \alpha(z, y))q(z, y)d\mu(y)$. With this choice $\pi(dz) = p(z)d\mu(z)$ is invariant and provided the chain is suitably irreducible and aperiodic, it is standard that the n -step transition probability $P^n(z, A)$, $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ converges to π in the total variation norm

$$\|P^n(z, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} = \frac{1}{2} \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} |P^n(z, A) - \pi(A)| \rightarrow 0 \text{ when } n \rightarrow \infty.$$

The class of the Hastings-Metropolis algorithms is very broad. We consider in this note perhaps the simplest version of this algorithm, namely the symmetric random-walk Hastings-Metropolis algorithm (henceforth named the Metropolis algorithm), for which $q(z, y) = q(z - y) = q(y - z)$. Mengersen and Tweedie [70] show that when $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$, the Metropolis algorithm is V -geometrically ergodic when the target density is continuous, positive and log-concave in the tails *i.e.* $\log p(z) - \log p(y) \geq \alpha|z - y|$, for sufficiently large $|z| \leq |y|$. The proof is based on the Foster Lyapunov type technique, the drift condition being $V(z) \propto p(z)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. They prove that this condition is also necessary in the sense that the chain is geometrically ergodic only if $\int \exp(s|z|)p(z)d\mu(z) < \infty$ for some $s > 0$ *i.e.* $p(z)$ has an exponential moment. These types of conditions have later been extended to the multidimensional case by Roberts and Tweedie [98] under additional geometrical conditions on the level set $\{z \in \mathbb{R}^d, p(z) = c\}$ and later improved by Jarner and Hansen [51]. The purpose of this contribution is to prove that when the densities are not log-concave in the tails then a weaker form of ergodicity, namely at a subgeometrical rate, still holds.

The paper is organized as follows. In Section 8.2 we set some definitions and notations and recall the V -subgeometric drift criterion of Tuominen and Tweedie [117]. Then we state a practical sufficient condition. Finally, in Section 8.3, it is established that the Metropolis algorithm is V -ergodic at a subgeometrical rate. All the proofs are in Section 8.4.

8.2 V -subgeometric criteria

Let P be a transition kernel on $\mathcal{X} \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$ where \mathcal{X} is a topological state space and $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ is the Borel σ -field. Assume that P admits a unique invariant probability measure π . Denote P_z and \mathbb{E}_z the probability law and the expectation of the chain $\{\zeta_n\}$ under the initial condition $\zeta_0 = z$. Our notations and terminologies will generally follow that of Meyn and Tweedie [72].

We study the rate of ergodicity r for sequences $r = \{r(n)\}$ in the class of subgeometrical rates, originally introduced in Stone and Wainger [110] and defined as follows. Denote Λ_0 the class of

non-decreasing sequences $r = \{r(n)\}$, $r(n) \geq 2$, and such that $\log r(n)/n$ is non increasing and tends to zero as $n \rightarrow \infty$. Denote Λ the class of *subgeometrical rates* i.e. sequences $r' = \{r'(n)\}$ for which there exists $r = \{r(n)\} \in \Lambda_0$ such that $\liminf r'(n)/r(n) > 0$ and $\limsup r'(n)/r(n) < \infty$. Tuominen and Tweedie [117] considered the V -ergodicity for $r \in \Lambda$. Let $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ be a measurable function. For an arbitrary signed measure ν , define $\|\nu\|_V = \sup_{\{|g| \leq V\}} |\nu(g)|$. We shall say that the ψ -irreducible and aperiodic transition kernel P is V -ergodic with rate $r = \{r(n)\}$ if the kernel P is Harris positive with invariant distribution π , $\pi(V) < \infty$ and $r(n)\|P^n(z, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$.

The following result is shown in Tuominen and Tweedie [117].

Proposition 8.1 *Suppose that P is ψ -irreducible and aperiodic, and let $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ and $r \in \Lambda$ be given. Assume there exist a sequence $\{V_n\}$ of functions $V_n : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$, a petite set $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ and $b \in \mathbb{R}_+$ such that V_0 is bounded on \mathcal{C} , $\{z \in \mathcal{X}, V_0(z) = \infty\} \subset \{z \in \mathcal{X}, V_1(z) = \infty\}$ and*

$$PV_{n+1}(z) \leq V_n(z) - r(n)V(z) + br(n)\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(z). \quad (8.1)$$

Then $r(n)\|P^n(z, \cdot) - \pi\|_V \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ for $z \in \mathcal{S}(V, r)$ where

$$\mathcal{S}(V, r) = \{z \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{B}}-1} r(k)V(\zeta_k) \right] < \infty, \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})^+\}$$

and $\tau_{\mathcal{B}}$ is the first-return time to \mathcal{B} . In addition, $\mathcal{S}(V, r) \supset \{z \in \mathbb{R}^d, V_0(z) < \infty\}$.

In the sequel, we shall show that the Tuominen-Tweedie drift condition (8.1) holds for any polynomial rate $r(n) \propto n^s$, $s > 0$ and any function $V = 1 + f^\alpha$, $\alpha > 0$ as soon as a drift criterion on the form $Pf^{\beta+\gamma} \leq f^{\beta+\gamma} - C_1 f^\beta + C_2 \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ is established, for some convenient $\beta > 0$, finite positive constants γ, C_1, C_2 and a petite set \mathcal{C} . Proposition 8.2 is an extension of the conditions of Stramer and Tweedie (Theorem 4.1., [111]). The extension is twofold. Proposition 8.2 is valid for arbitrary topological state space \mathcal{X} whereas the results of Stramer and Tweedie [111] are restricted to $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Moreover, the drift function f is an arbitrary non negative function whereas Stramer and Tweedie focus on the specific "power moment" functions $f^\alpha(z) = |z|^\alpha$. This generalization is crucial for establishing the subgeometric convergence of multidimensional random walk procedure.

Proposition 8.2 *Let $\{\zeta_n\}$ be a ψ -irreducible and aperiodic \mathcal{F}_n -adapted Markov chain with transition kernel P and state space \mathcal{X} . Let $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ be a measurable function, s be a positive integer and $\alpha > 0$. Suppose there exist a real $\gamma > 0$, some constants $0 < C_i < \infty$, $i = 1, 2$ and a petite set \mathcal{C} of \mathcal{X} such that f is bounded on \mathcal{C} , $\{z \in \mathcal{X}, f(z) < 1\} \subset \mathcal{C}$, and*

$$Pf^{\beta+\gamma}(z) \leq f^{\beta+\gamma}(z) - C_1 f^\beta(z) + C_2 \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(z) \quad (8.2)$$

for any $\beta \in \{\alpha, \alpha + \gamma, \dots, \alpha + \gamma(s+1)\}$. Then

- (i) there exist a constant $C_3 < \infty$ and a sequence of finite measurable functions $\{V_n\} : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ such that

$$PV_{n+1}(z) \leq V_n(z) - r(n)V(z) + C_3 r(n)\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(z)$$

where $r(n) = n^s \vee 2$ and $V(z) = 1 + f^\alpha(z)$.

(ii) V_0 is bounded on \mathcal{C} and $\mathcal{S}(V, r) = \mathbb{R}^d$.

Proof 2 The proof follows the same lines as the proof of Theorem 4.1. of Stramer and Tweedie [111], which is upon earlier results by Tuominen and Tweedie [117]. For ease of reference, an abbreviated version of the proof is given in Section 8.4.1.

8.3 The Metropolis algorithm

In this section, we consider the Metropolis kernel and prove that the drift condition (8.2) holds for the class \mathcal{E} of the densities on \mathbb{R}^d which are not log-concave in the tails. We will note $\bar{B}(0, r)$ the closed ball of radius r , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the scalar product on \mathbb{R}^d , $|\cdot|$ the Euclidean and the operator norm, $n(z) = z/|z|$ and ∇ the differential operator. Assume that the proposal kernel $Q(z, dy) = q(z, y)d\mu(y)$ where μ is the Lebesgue measure, checks the conditions

- (RW1) $q(y - z) = q(z - y)$,
- (RW2) $\int_{\bar{B}(0, c_k)} q(y)d\mu(y) = 1$,
- (RW3) $|z| \leq c_k \Rightarrow q(z) \geq \epsilon_k$,

that is q is symmetric and compactly supported (this is mainly a technicality here). Define \mathcal{E} the class of the twice continuously differentiable densities p on \mathbb{R}^d w.r.t. the Lebesgue measure μ such that for any $p \in \mathcal{E}$, there exist $0 < m < 1$ and some finite positive constants $d_i, D_i, i = 0, 1, 2$ such that for large enough $|z|$

- (D1) $\limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\nabla p(z)}{|\nabla p(z)|}, n(z) > < 0$,
- (D2(m))

$$0 < d_0|z|^m \leq -\log p(z) \leq D_0|z|^m \quad (8.3)$$

$$0 < d_1|z|^{m-1} \leq |\nabla \log p(z)| \leq D_1|z|^{m-1} \quad (8.4)$$

$$d_2|z|^{m-2} \leq |\nabla^2 \log p(z)| \leq D_2|z|^{m-2} \quad (8.5)$$

When $d = 1$, it is easily seen that this class includes distributions with tails typically heavier than the exponential, for example, the Weibull distributions, for which the densities may be expressed as $p(z) = \frac{\gamma}{\beta} z^{\gamma-1} \exp(-z^\gamma/\beta)$, $z > 0$, $\beta > 0$ and $0 < \gamma < 1$. For $d \geq 1$, the class \mathcal{E} includes the homogeneous super-exponential family \mathcal{H} defined as follows. A function g is said to be *homogeneous of order $i > 0$* when for any $z \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \geq 0$, $g(\lambda z) = \lambda^i g(z)$. p is in the class \mathcal{H} of the *homogeneous super-exponential* densities if

- (H1) $p(z) = \exp(-f(z))$.
- (H2) $f(z) = \sum_{i \in I} f_i(z)$ where f_i is twice continuously differentiable and homogeneous of order i , I is a finite subset of $(-\infty, 1)$ and $0 < \sup_I i = m < 1$.
- (H3) $\inf_{S^{d-1}} f_m > 0$ where S^{d-1} is the unit sphere on \mathbb{R}^d .

The case $\sup_{i \in I} i > 1$ is covered by Jarner and Hansen [51]. It is possible (with little effort) to assume that I is countably infinite.

Proposition 8.3 $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$.

Proof 3 The proof is in Section 8.4.2. As it will be shown in a forthcoming paper, the condition (D2) can be relaxed to include heavy tailed distributions such as the Cauchy, the log normal or the Frechet distribution (appearing when dealing with the distributions of the extreme value statistics). In that case, however, only a weaker form of ergodicity, namely the V -ergodicity is obtained *i.e.* $\|P^n(z, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$.

As underlined in the following proposition, the class \mathcal{E} is stable under addition and multiplication, and external product with the class \mathcal{P} of twice continuously differentiable positive functions $h(z)$ on \mathbb{R}^d , such that for some $0 < m < 1$

- (P1(m)) $(\log h(z))|z|^{-m} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.
- (P2(m)) $|\nabla \log h(z)| |z|^{1-m} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.
- (P3(m)) $|\nabla^2 \log h(z)| |z|^{2-m} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

This class contains the positive multivariate polynomials on \mathbb{R}^d .

Proposition 8.4 *Let $p_i \in \mathcal{E}, i = 1, 2$ so that (D2) holds with the constants m_i , $i = 1, 2$. Let $a_i, i = 1, 2$ be two non negative real numbers such that $a_1 + a_2 = 1$. Then,*

$$(i) \ p(z) = p_1(z)p_2(z) \in \mathcal{E} \text{ and } m = m_1 \vee m_2.$$

$$(ii) \ p(z) = a_1p_1(z) + a_2p_2(z) \in \mathcal{E} \text{ and } m = m_1 \wedge m_2.$$

$$(iii) \ p(z) = h(z)p_1(z) \in \mathcal{E} \text{ and } m = m_1 \text{ where } h \in \mathcal{P} \text{ satisfies the conditions (Pi(m1)), } i = 1, 2, 3.$$

Proof 4 The proof is trivial and is omitted. We now conclude this section by proving Proposition 8.2 for the densities $p \in \mathcal{E}$. Under (RW1), (RW3) and the continuity assumption of p , it is a well-known result that P is ψ -irreducible, aperiodic and that any non-empty compact set is small (see Theorem 2.2. Roberts and Tweedie [98]). The following theorem states the V -subgeometric ergodicity at any polynomial rate $r(n) \propto n^s, s > 0$ and any function $V(z) = 1 + (-\log p(z))^\alpha$, $\alpha > 0$, for the Metropolis kernel and the density p described below. Note that we can suppose $-\log p(z) \geq 0$ on \mathbb{R}^d .

Théorème 8.5 *Assume (RW1-3). Let $p \in \mathcal{E}$ verifying (D1) and (D2(m)), and set $f(z) = -\log p(z)$. Then for any $\alpha > 0$ there exist a compact subset \mathcal{C} of \mathbb{R}^d and some constants $C_i < \infty$ $i = 1, 2$ such that*

$$Pf^{\alpha+\gamma}(z) \leq f^{\alpha+\gamma}(z) - C_1 f^\alpha(z) + C_2 \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z)$$

with $\gamma = \frac{2-m}{m} > 0$.

Proof 5 The proof is in Appendix 8.4.2. **Concluding remark :** by applying Theorem 8.5, this proves that for any integer $s > 0$ and real $\alpha > 0$, the Metropolis algorithm is V -ergodic at a polynomial rate $r(n) \propto n^s$ with $V(z) = 1 + (-\log p(z))^\alpha$. Then it is seen that the mixing of the Metropolis algorithm is reasonably fast, even when the density is not log-concave in the tails.

8.4 Proofs

8.4.1 Proof of Proposition 8.2

In the sequel, we denote C for a finite constant that may take different values upon each appearance.

Step 1 : Define $g_{n,\alpha}(z) = \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} k^n f^\alpha(\zeta_k) \right]$. We first prove by induction that

$$g_{s,\alpha}(z) \leq C \left(1 + f^{\alpha+\gamma(s+1)}(z) \right) \quad (8.6)$$

where C is a finite positive constant. From the Comparison Theorem (Theorem 14.2.2 Meyn and Tweedie [72]) we have for all $\beta \in \{\alpha, \dots, \alpha + \gamma(s+1)\}$,

$$g_{0,\beta}(z) = \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f^\beta(\zeta_k) \right] \leq C \left(1 + f^{\beta+\gamma}(z) \right). \quad (8.7)$$

(8.7) implies that for all $\beta \in \{\alpha, \dots, \alpha + \gamma(s+1)\}$,

$$\mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) \left(\mathbb{E}_z [\tau_C] - 1 \right) \leq \mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f^\beta(\zeta_k) \right] \leq C \mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) \left(1 + f^{\beta+\gamma}(z) \right). \quad (8.8)$$

Define $G_{n,\alpha}(z) = \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} g_{n,\alpha}(\zeta_k) \right]$ where σ_C is the first hitting time on \mathcal{C} . Under the induction assumption, $g_{n,\alpha}(z) \leq C \left(1 + f^{\alpha+\gamma(n+1)}(z) \right)$. Set $\beta = \alpha + \gamma(n+1)$ and denote $M_\beta = \sup_{\mathcal{C}} f^\beta$. Then using (8.7) and (8.8),

$$\begin{aligned} G_{n,\alpha}(z) &= \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z) g_{n,\alpha}(z) + \mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) \left\{ \mathbb{E}_z \left[g_{n,\alpha}(\zeta_{\sigma_C}) \right] + \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} g_{n,\alpha}(\zeta_k) \right] \right\} \\ &\leq C \left(1 + M_\beta \right) + C \mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \left\{ 1 + f^\beta(\zeta_k) \right\} \right] \\ &\leq C + C \mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) f^{\beta+\gamma}(z). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Note that $\mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) PG_{n,\alpha}(z) = \mathbb{I}_{\mathcal{C}^c}(z) \{G_{n,\alpha}(z) - g_{n,\alpha}(z)\}$ and on the other hand, (8.9) implies that

$$PG_{n,\alpha}(z) \leq C + CPf^{\beta+\gamma}(z) \leq C + C \left(f^{\beta+\gamma}(z) + C_2 \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z) \right)$$

so that $\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z) PG_{n,\alpha}(z) \leq C \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z)$. Thus there exists a constant $b(G_{n,\alpha}) < \infty$ such that $PG_{n,\alpha}(z) \leq G_{n,\alpha}(z) - g_{n,\alpha}(z) + b(G_{n,\alpha}) \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z)$. Hence, by applying the Comparison theorem,

$$\mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} g_{n,\alpha}(\zeta_k) \right] \leq G_{n,\alpha}(z) + b(G_{n,\alpha}) \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z). \quad (8.10)$$

In addition, note that for any $z \in \mathcal{X}$, by the Markov property,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} g_{n,\alpha}(\zeta_k) \right] &= \sum_{l \geq 0} \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_z \left[\mathbb{I}_{\tau_{\mathcal{C}} > l+j} j^n f^\alpha(\zeta_{j+l}) \right] \\ &= \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} \sum_{j=0}^k j^n f^\alpha(\zeta_k) \right].\end{aligned}\quad (8.11)$$

Finally, by (8.9), (8.10) and (8.11)

$$g_{n+1,\alpha}(z) \leq C(1 + f^{\alpha+\gamma(n+2)}(z)).$$

Step 2 : Define $r(n) = n^s \vee 2$. In this step, we prove that there exist $C' < \infty$ and $C'' < \infty$ such that

$$\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z) \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} r(k) \left\{ 1 + f^\alpha(\zeta_k) \right\} \right] \leq C' \quad (8.12)$$

$$\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z) \mathbb{E}_z \left[r(\tau_{\mathcal{C}}) \right] \leq C''. \quad (8.13)$$

For that purpose, we consider

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} r(k) \left\{ 1 + f^\alpha(\zeta_k) \right\} \right] \\ \leq r(0) \left\{ 1 + f^\alpha(z) + \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=1}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} r(k) f^\alpha(\zeta_k) \mathbb{I}_{\tau_{\mathcal{C}} \geq 2} \right] \right\}.\end{aligned}$$

By (8.6), $\mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} r(k) f^\alpha(\zeta_k) \right] \leq C(f^{\alpha+\gamma}(z) + f^{\alpha+\gamma(s+1)}(z))$ and since f is bounded on \mathcal{C} , (8.12) is proved. For $k, n \geq 1$, $(n+k)^s \leq r(2)n^sk^s$, then

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_z \left[r(\tau_{\mathcal{C}}) \right] &\leq r(2) \left\{ 1 + \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} r(k) \right] \right\} \\ \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z) \mathbb{E}_z \left[r(\tau_{\mathcal{C}}) \right] &\leq r(2) \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(z) \left\{ 1 + \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}-1} r(k) \left\{ 1 + f^\alpha(\zeta_k) \right\} \right] \right\} \\ &\leq r(2) \left\{ 1 + C' \right\}.\end{aligned}$$

Step 3 : Define $V(z) = 1 + f^\alpha(z)$ and

$$\begin{aligned}V_n(z) &= \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\mathcal{C}}} r(n+k) V(\zeta_k) \right] \\ W_n(z) &= \mathbb{E}_z \left[\sum_{k=1}^{\tau_{\mathcal{C}}} r(n+k) V(\zeta_k) \right].\end{aligned}$$

Note that $V_n(z) = r(n)V(z) + \mathbb{1}_{\mathcal{C}^c}(z)W_n(z)$ and $W_n(z) = r(n+1)\mathbb{E}_z[V(\zeta_1)] + P(\mathbb{1}_{\mathcal{C}^c}W_{n+1})(z)$. These relations imply that $PV_{n+1}(z) = W_n(z) = V_n(z) - r(n)V(z) + W_n(z)\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(z)$. To show the drift condition, it remains to prove that $W_n(z)$ is bounded on \mathcal{C} . By applying (8.12) and (8.13),

$$\begin{aligned} W_n(z) &\leq r(2)r(n)\mathbb{E}_z\left[\sum_{k=1}^{\tau_C} r(k)V(\zeta_k)\right] \\ &\leq r(2)r(n)\left\{\mathbb{E}_z\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k)V(\zeta_k)\right] + \mathbb{E}_z\left[r(\tau_C)V(\zeta_{\tau_C})\right]\right\} \\ \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(z)W_n(z) &\leq r(2)r(n)\left\{C' + M_\alpha C''\right\} \end{aligned}$$

which concludes the proof.

8.4.2 Proofs of the Section 8.3

Proof of Proposition 8.3

The proof relies on the following Lemma.

Lemme 8.6 *Let g be a twice continuously differentiable homogeneous function of order i . There exist some finite constants m_i and M_i , $i = 1, 2$ such that*

- (i) $m_1|z|^{i-1} \leq |\nabla g(z)| \leq M_1|z|^{i-1}$
- (ii) $m_2|z|^{i-2} \leq |\nabla^2 g(z)| \leq M_2|z|^{i-2}$

and $m_1 > 0$ whenever $\inf_{S^{d-1}} g(z) > 0$.

Proof 6 Since $g(z) = |z|^i g \circ n(z)$, we have

$$\langle \nabla g(z), y \rangle = i|z|^{i-1}g \circ n(z) \langle n(z), y \rangle + \langle \nabla g(n(z)), (y - \langle y, n(z) \rangle n(z)) \rangle$$

from which we deduce the first assertion. Similarly, we prove the second one. By the previous lemma and under (H1-3), there exist some finite non negative constants $d_i, D_i, i = 0, 1, 2$ such that for large enough $|z|$,

$$\begin{aligned} 0 < d_0|z|^m &\leq f(z) \leq D_0|z|^m \\ 0 < d_1|z|^{m-1} &\leq |\nabla f(z)| \leq D_1|z|^{m-1} \\ d_2|z|^{m-2} &\leq |\nabla^2 f(z)| \leq D_2|z|^{m-2} \end{aligned}$$

and $\langle \frac{\nabla p(z)}{|\nabla p(z)|}, n(z) \rangle = -\langle \frac{\nabla f(z)}{|\nabla f(z)|}, n(z) \rangle \leq -\frac{f_m \circ n(z)}{\inf_{S^{d-1}} f_m} < 0$.

Proof of Theorem 8.5

The proof uses the three following Lemmas. The second one is adapted from Lemma 4.2. of Jarner and Hansen [51].

Lemme 8.7 *Let $p \in \mathcal{E}$. $\limsup_{|z| \rightarrow \infty} \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} \frac{p(z+y)}{p(z)} = 1$.*

Proof 7 Note that

$$\frac{p(z+y)}{p(z)} \leq 1 + c_k \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} |\nabla \log p(z+y)| \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} \frac{p(z+y)}{p(z)}$$

so that

$$\left(1 - c_k \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} |\nabla \log p(z+y)|\right) \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} \frac{p(z+y)}{p(z)} \leq 1,$$

and we conclude by (8.4).

Lemme 8.8 *Let p be a positive continuously differentiable function on \mathbb{R}^d and set $f(z) = -\log p(z)$. Let $z \in \mathbb{R}^d$ and assume that there exists $0 < D < \infty$ such that for any $|y| \geq |z|$, $\langle n(y), \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle \leq -D$. Define $W(z) = \{x \in \mathbb{R}^d, x = z + a\xi, 0 < a \leq c_k, \xi \in S^{d-1}, |\xi - n(z)| \leq D/3\}$. Then*

(i) $W(z) \subset \{y \in \mathbb{R}^d, p(y) < p(z)\}$.

(ii) for any y such that $y + z \in W(z)$, $\left| \langle \frac{\nabla f(z)}{|\nabla f(z)|}, \frac{y}{|y|} \rangle \right| \geq D/3$.

Proof 8 Let $x \in W(z)$. We prove that the function $\phi(t) = p(z + t(x - z))$ defined on $[0, 1]$ is monotonically decreasing on $[z, x]$, and to this goal we state that $\langle \frac{x-z}{|x-z|}, \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle \leq 0$ for any $y \in [z, x]$.

$$\begin{aligned} \langle \frac{x-z}{|x-z|}, \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle &= \langle \frac{x-z}{|x-z|} - n(z), \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle \\ &\quad + \langle n(z) - n(y), \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle + \langle n(y), \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle. \end{aligned}$$

The definition of $W(z)$ implies that

$$\begin{aligned} \left| \langle \frac{x-z}{|x-z|} - n(z), \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle \right| &\leq D/3 \\ \left| \langle n(z) - n(y), \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle \right| &\leq D/3 \end{aligned}$$

so that $\langle \frac{x-z}{|x-z|}, \frac{\nabla p(y)}{|\nabla p(y)|} \rangle \leq -D/3$, which proves the first assertion. Finally, applying the previous calculations with $\frac{y}{|y|} = \frac{x-z}{|x-z|}$ and $z = y$, we obtain the second assertion. Denote for $\alpha > 0$ and $z, y \in \mathbb{R}^d$,

$$R(f^\alpha, z, y) = f^\alpha(z+y) - f^\alpha(z) - \alpha f^{\alpha-1}(z) \langle \nabla f(z), y \rangle \quad (8.14)$$

$$R(p, z, y) = \frac{p(z+y)}{p(z)} - 1 + \langle \nabla f(z), y \rangle. \quad (8.15)$$

Lemme 8.9 Let $p \in \mathcal{E}$. Set $f(z) = -\log p(z)$.

$$(i) \limsup_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{2-\alpha m} \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} |R(f^\alpha, z, y)| |y|^{-2} < \infty.$$

$$(ii) \limsup_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{2(1-m)} \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} |R(p, z, y)| |y|^{-2} < \infty.$$

Proof 9 Since

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \bar{B}(0, c_k)} |R(f^\alpha, z, y)| |y|^{-2} &\leq \sup_{t \in \bar{B}(z, c_k)} |\nabla^2 f^\alpha(t)| \\ &\leq \alpha \sup_{t \in \bar{B}(z, c_k)} f^{\alpha-2}(t) \left| (\alpha-1) \nabla f(t) \nabla f(t)^t + f(t) \nabla^2 f(t) \right| \end{aligned}$$

we obtain the first assertion by (D2).

Moreover, $|R(p, z, y)| |y|^{-2} \leq \sup_{t \in \bar{B}(z, c_k)} \frac{p(t)}{p(z)} |\nabla^2 f(t) - \nabla f(t) \nabla f(t)^t|$. By (8.4) and (8.5) $|\nabla^2 f(t) - \nabla f(t) \nabla f(t)^t| = O(|t|^{2(m-1)})$ and the proof is concluded by using Lemma 8.7. We now establish the drift relation. Define $R(z) = \{y \in \mathbb{R}^d, p(y) < p(z)\}$ the rejection region and $R(z) - z = \{y \in \mathbb{R}^d, y + z \in R(z)\}$. Using the definition of the Metropolis kernel, we may write

$$\begin{aligned} Pf^\alpha(z) - f^\alpha(z) &= \int (f^\alpha(z+y) - f^\alpha(z)) q(y) d\mu(y) \\ &+ \int_{R(z)-z} (f^\alpha(z+y) - f^\alpha(z)) \left(\frac{p(z+y)}{p(z)} - 1 \right) q(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Since the proposal distribution $qd\mu$ is symmetric, $\int y q(y) d\mu(y) = 0$ so that by the equations (8.14) and (8.15), $Pf^\alpha(z) - f^\alpha(z) = \sum_{i=0}^4 I_i(z)$,

$$\begin{aligned} I_0(z) &= -\alpha f^{\alpha-1}(z) |\nabla f(z)|^2 \int_{R(z)-z} \left(\left\langle \frac{\nabla f(z)}{|\nabla f(z)|}, y \right\rangle \right)^2 q(y) d\mu(y) \\ I_1(z) &= \int R(f^\alpha, z, y) q(y) d\mu(y) = O(|z|^{m\alpha-2}) \\ I_2(z) &= \int_{R(z)-z} \langle \nabla f(z), y \rangle R(f^\alpha, z, y) q(y) d\mu(y) = O(|z|^{m\alpha-2+m-1}) \\ I_3(z) &= \alpha f^{\alpha-1}(z) \int_{R(z)-z} \langle \nabla f(z), y \rangle R(p, z, y) q(y) d\mu(y) = O(|z|^{m\alpha-2+2m-1}) \\ I_4(z) &= \int_{R(z)-z} R(f^\alpha, z, y) R(p, z, y) q(y) d\mu(y) = O(|z|^{m\alpha-2+2(m-1)}). \end{aligned}$$

Since

$$\liminf_{|z| \rightarrow \infty} f^{\alpha-1}(z) |\nabla f(z)|^2 |z|^{\alpha m - 2 + m} > 0, \text{ and } \limsup_{|z| \rightarrow \infty} f^{\alpha-1}(z) |\nabla f(z)|^2 |z|^{\alpha m - 2 + m} < \infty,$$

$I_0(z)$ is the leading term in the expansion, provided that

$$i_0(z) = \int_{R(z)-z} \left(\left\langle \frac{\nabla f(z)}{|\nabla f(z)|}, y \right\rangle \right)^2 q(y) d\mu(y)$$

is uniformly bounded away from zero for z outside a compact set. It remains to prove that there exists $D < \infty$ such that $i_0(z) \geq D > 0$ for large enough $|z|$. The proof is adapted from Theorems 4.2. and 4.3. of Jarner and Hansen [51]. By (D1), for large enough $|z|$, there exists $D' > 0$ such that $\langle \frac{\nabla p(z)}{|\nabla p(z)|}, n(z) \rangle \leq -D'$. Define $W(z) = \{x \in \mathbb{R}^d, x = z + a\xi, 0 < a \leq c_k, \xi \in S^{d-1}, |\xi - n(z)| \leq D'/3\}$. By applying Lemma 8.8, we have

$$\begin{aligned} \int_{R(z)-z} \left(\langle \frac{\nabla f(z)}{|\nabla f(z)|}, \frac{y}{|y|} \rangle \right)^2 |y|^2 q(y) d\mu(y) \\ \geq \int_{W(z)-z} \left(\langle \frac{\nabla f(z)}{|\nabla f(z)|}, \frac{y}{|y|} \rangle \right)^2 |y|^2 q(y) d\mu(y) \\ \geq (D'/3)^2 \int_{W(z)-z} |y|^2 q(y) d\mu(y) = D > 0 \end{aligned}$$

so that $i_o(z) \geq D > 0$ for large enough $|z|$.

Hence, we have proved there exist a compact set \mathcal{C} and a constant $0 < C'_1 < \infty$ such that for $z \notin \mathcal{C}$, $Pf^\alpha(z) - f^\alpha(z) \leq -C'_1 f^{\alpha-1}(z) |\nabla f(z)|^2$. Finally, we achieve the proof by noting that

$$\liminf_{|z| \rightarrow \infty} f^{\alpha-1}(z) |\nabla f(z)|^2 f^{-\alpha-\frac{m-2}{m}}(z) > 0$$

and

$$\sup_{|z| \leq R} Pf^\alpha(z) \leq 2 \sup_{|z| \leq R+c_k} f^\alpha(z).$$

Chapitre 9

Convergence of the Monte Carlo EM for curved exponential families

Ce travail, en collaboration avec E. Moulines (ENST), est soumis pour publication à la revue *Ann. Statist.*.

SUMMARY The Monte Carlo Expectation Maximization (MCEM) algorithm (Wei and Tanner [122]), a stochastic version of EM, is a versatile tool for inference in incomplete data models, especially when used in combination with MCMC simulation methods. Examples of applications include, among many others : regression with missing values (Wei and Tanner [122]), time-series analysis (Chan and Ledolter [20]), genetic models (Guo and Thompson [45]).

In this contribution, the convergence of the MCEM algorithm is established under conditions on the imputation techniques weaker than those stated by Chan and Ledolter [20], and Sherman, Ho and Dalal [106]. It is shown, using uniform version of ergodicity theorems for Markov chains, that MCEM converges under weak conditions on the simulation kernel ; practical illustrations are presented, using an independence sampler and an hybrid random walk Metropolis-Hastings sampler. The rate of convergence is studied, showing the impact of the simulation schedule on the fluctuation of the parameter estimate at the convergence. A novel averaging procedure is then proposed to reduce the simulation variance and increase the rate of convergence.

Keywords : EM ALGORITHM ; MONTE-CARLO EM ALGORITHM ; HASTINGS-METROPOLIS ALGORITHMS ; AVERAGING PROCEDURE

Short Title : CONVERGENCE OF THE MCEM ALGORITHM

AMS-classification : PRIMARY : 65C05, 62-04, SECONDARY : 60J10

Introduction

Many problems in computational statistics reduce to the maximization of a criterion

$$g(\theta) = \int_{\mathcal{X}} h(z; \theta) \mu(dz)$$

on a feasible set Θ . Examples of such problems occur in missing data models (see e.g. Wei and Tanner [122]), statistical image analysis (Younes [124, 125]), non-linear time series analysis (Chib and Greenberg [23], Chan and Ledolter [20]).

The Expectation Maximization (EM) algorithm (see Dempster *et al.* [31]) is a popular sequential procedure for maximizing $g(\theta)$. The *E step* of the algorithm requires the computation of the expectation of $\log h(z; \theta)$ w.r.t to the *conditional* distribution $p(z; \theta) := h(z; \theta)/g(\theta)$. In many situations, this step is intractable ; to solve this problem, many approximations of the EM algorithm, which use simulations as an intermediate step, have been proposed (see, e.g. Tanner [114], Celeux and Diebolt [17], Delyon *et al.* [27]). Perhaps the most popular algorithm for this purpose is the Monte Carlo EM, initially proposed by Wei and Tanner [122] and later used and studied by many authors (Guo and Thompson [45], McCulloch [62, 63], Chan and Ledolter [20], Meng and Schilling [69], Chan and Kuk [19], Ravishanker and Qiou [92], Sherman, Ho and Dalal [106]). The basic principle behind this algorithm is to replace the expectation step by a blending of Monte-Carlo integration procedure with Markov chain sampling techniques such as the Gibbs or the Hastings-Metropolis algorithms. The MCEM algorithm has been successfully applied in many different settings, including non-linear time-series model (Chan and Ledolter [20]), generalized linear mixed models with missing data (Steele [109], McCulloch [62, 63], Chan and Kuk [19]), full-information item factor models (Meng and Schilling [69]), genetic models (Guo and Thompson [45]), the analysis of mixture and of continuous state space hidden Markov models and blind deconvolution (Cappé *et al.* [14]) .

The analysis of the convergence of the MCEM algorithm has been first formally addressed by Biscarat [9] as a specific example of a random iterative algorithm. The conditions in Biscarat [9] have been later weakened by Chan and Ledolter [20]. The assumptions in these works are however rather restrictive, because they involve a uniform law of large numbers, *i.e.*, uniform convergence in probability of the Monte-Carlo expectation to their corresponding sample average over θ in a compact subset of the feasible set Θ . This assumption fails to be verified when Monte-Carlo integration is carried out along a single-run MCMC algorithm in the simulation step. It can however be verified under reasonable assumptions when Monte-Carlo integration is done using independent chains, as shown by Sherman, Ho and Dalal [106], Theorem 2 (the difficulty when moving from single run to multiple runs has been overlooked by Chan and Ledolter [20]). Convergence of random iterative algorithms has also been considered by Shapiro and Wardi [105], Pierre-Loti-Viaud [86] and Brandière and Duflo [12], also under restrictive assumptions.

Sherman, Ho and Dalal [106] addresses a different class of results. These authors focus on the missing data problem, for which $g(\theta)$ is the incomplete data likelihood, depending on the sample

size, say N (the dependence on this parameter is implicit in our work, all the results we obtain being conditional to N). They assume that the Monte-Carlo integration is carried out by means of independent chains, and that the number of independent chains, the number of iterations for each chain at each step, and the number of the iterations of the algorithms are functions of N . Under these assumptions, the authors derive the rate of convergence of the Monte-Carlo estimator obtained as $N \rightarrow \infty$.

The purpose of this paper is to complement the results above, by providing a convergence analysis of the MCEM algorithm which remains valid under assumptions that are verified for a wide class of MCMC simulation techniques, including both single-run and multiple-runs chains. The proof of convergence is rather different from the schemes used before, avoiding any form of uniform law of large numbers. An averaging technique to improve the rate of convergence is also presented, based on a modification of the averaging techniques of Ruppert [104] and Polyak [89].

The paper is organized as follows. In Section 9.1 we present the EM and MCEM algorithms, and define the *stable MCEM* algorithm which guarantees the a.s. boundedness of the random recursion. In Section 9.2, we study the convergence of MCEM for curved exponential families, when the simulation step is based on MCMC techniques by assuming an *uniform* ergodic behavior of the kernels. In Section 9.3 the rate of convergence is derived ; it is shown how this rate can be improved, with a very small computational overhead, by using an *averaging* approach. Illustrations of these results using independent sampler and an hybrid random-scan type Hastings-Metropolis algorithm are presented in sections 9.4. The proofs of all of these results are given in Sections 9.5 and 9.6.

9.1 The Monte Carlo Expectation Maximization algorithm

Let \mathcal{X} be a separable and locally compact topological space, and μ be a σ -finite measure on the Borel σ -field $\mathcal{B}(\mathcal{X})$; let Θ be a convex subset of \mathbb{R}^l and $\mathcal{H} := \{h(z; \theta), \theta \in \Theta\}$ be a family of μ -integrable Borel functions on \mathcal{X} , μ -p.s. positive. Define

$$g(\theta) := \int_{\mathcal{X}} h(z; \theta) \mu(dz). \quad (9.1)$$

For all $\theta \in \Theta$, define $p(z; \theta)$ as

$$p(z; \theta) := h(z; \theta) / g(\theta); \quad (9.2)$$

$p(z; \theta)$ is a probability density function relatively to the measure μ . In the terminology introduced by Geyer [43], \mathcal{H} is a family of *unnormalized densities*, $\mathcal{P} := \{p(z; \theta), \theta \in \Theta\}$ is the family of *normalized densities* and $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ is the *normalizing function* for the family \mathcal{H} . We wish to find the value θ^* in Θ that maximizes $g(\theta)$. Many statistical inference problems belong to this framework. In the standard missing data problem, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$,

- $g(\theta)$ is the incomplete data likelihood, *i.e.* the likelihood of the observed data y (the dependence of $g(\theta)$ w.r.t. y is here implicit),

- $h(z; \theta)$ is the complete data likelihood, *i.e.* the likelihood of the complete data x obtained by augmenting the observed data y with the missing data $z : x := (y, z)$,
- $p(z; \theta)$ is the posterior distribution of the missing data z given the observed data y (referred to as the *predictive distribution*).

It is convenient to use the classical terminology of the *missing data problem*, even though the approach developed below applies to a more general context.

9.1.1 The EM algorithm

For any $(\theta, \theta') \in \Theta \times \Theta$, we set

$$\mathcal{Q}(\theta, \theta') := \int_{\mathcal{X}} \log h(z; \theta) p(z; \theta') \mu(dz). \quad (9.3)$$

The EM algorithm (Dempster *et al.* [31]) is an iterative procedure, which maximizes $\log g(\theta)$ by iteratively maximizing $\mathcal{Q}(\theta, \theta')$. Each iteration may be formally decomposed in two steps, an Expectation step (E-step) and a Maximization step (M-step). At iteration $(n + 1)$, the E-step consists in evaluating

$$\mathcal{Q}(\theta, \theta_n) = \int_{\mathcal{X}} \log h(z; \theta) p(z; \theta_n) \mu(dz).$$

In the M-step, a value of θ maximizing $\mathcal{Q}(\theta, \theta_n)$ is found. This yields the new parameter estimate θ_{n+1} .

Under standard regularity assumption, any iteration of the EM algorithm can be represented by an homogeneous point-to-point map $T : \Theta \rightarrow \Theta$ as follows : $\theta_{n+1} = T(\theta_n)$ where

$$T(\theta) := \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}(\phi, \theta) = \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \int_{\mathcal{X}} \log h(z; \phi) p(z; \theta) \mu(dz).$$

Note that when the maximum is not unique, T is rather a point-to-set map ; this difficulty is avoided here ; see Wu [123] for details. It is well known that $g(T(\theta)) \geq g(\theta)$ so that the function g is a natural Lyapunov function (see Section 9.5) relatively to (T, \mathcal{L}) where \mathcal{L} is the set of the fixed points of T

$$\mathcal{L} := \{\theta \in \Theta, T(\theta) = \theta\}. \quad (9.4)$$

The monotonicity is the key to prove convergence of the EM algorithm. When g and $\mathcal{Q}(\theta, \theta')$ are sufficiently smooth and Θ is open, it may be shown that the sequence $\{\theta_n := T(\theta_{n-1})\}$ converges to the set of the stationary points of the incomplete data likelihood g , $\{\theta \in \Theta, \nabla g(\theta) = 0\}$, where ∇ denotes the differentiation operator (see Wu [123], Lange [56]), so that

$$\{\theta \in \Theta, T(\theta) = \theta\} = \{\theta \in \Theta, \nabla g(\theta) = 0\}.$$

In some situations, the expectation step is intractable. To deal with these cases, Wei and Tanner [122] (see also Tanner [114]) propose to replace the expectation in the computation of $\mathcal{Q}(\theta, \theta_n)$ by a Monte-Carlo integration, leading to the so-called Monte-Carlo EM (MCEM algorithm).

9.1.2 The MCEM algorithm

Let $\{P_\theta\}$, $\theta \in \Theta$, be a family of transition kernel on $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ with invariant probability measure $\pi_\theta(dz) := p(z; \theta)\mu(dz)$. Let λ be a distribution on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ and $\{m_n\}$ be an increasing sequence of integer. Denote θ_n the current value of the parameter and $\{Z_j^n\}$ the Markov Chain with transition kernel P_{θ_n} and initial distribution λ (the initial distribution λ is constant over iterations). Define $\mathcal{Q}_n(\theta, \theta_n)$ as

$$\mathcal{Q}_n(\theta, \theta_n) := m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \log h(Z_j^n; \theta),$$

and set $\theta_{n+1} := \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}_n(\phi, \theta_n)$.

A first difficulty when dealing with random map is to guarantee the stability (a.s. boundedness) of the sequence $\{\theta_n\}$. To avoid unnecessary technical conditions, we present a simple modification of the iterative scheme $\theta_{n+1} = \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}_n(\phi, \theta_n)$, adapting the algorithm presented in Chen *et al.* [22] (see also Andradottir [1]).

9.1.3 The stable MCEM algorithm

It consists in the definition of a new sequence $\{\theta'_n\}$ obtained by truncating the original recursion : whenever $\operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}_n(\phi, \theta'_n)$ is outside a specific set, it is re-initialized at a point θ'_0 . In the technique proposed by Chen *et al.* [22], the truncation bounds are random functions of the recursion index n . The advantage of this approach (compared to projection) is that the truncation *does not* modify the set of stationary points of the original recursion. More formally, let $\{\mathcal{K}_n\}$ be a sequence of compact subsets such that for any $n \geq 0$,

$$\mathcal{K}_n \subsetneq \mathcal{K}_{n+1}, \quad \Theta = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{K}_n. \quad (9.5)$$

Set $p_0 := 0$ and choose $\theta'_0 \in \mathcal{K}_0$. The stable MCEM algorithm is defined as follows

$$\begin{cases} \text{If } \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}_n(\phi, \theta'_n) \in \mathcal{K}_{p_n}, & \theta'_{n+1} := \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}_n(\phi, \theta'_n) \text{ and } p_{n+1} := p_n, \\ \text{if } \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}_n(\phi, \theta'_n) \notin \mathcal{K}_{p_n}, & \theta'_{n+1} := \theta'_0 \text{ and } p_{n+1} := p_n + 1. \end{cases} \quad (9.6)$$

Note that p_n counts the number of projections. It is shown in the sequel that, under appropriate assumptions, p_n is a.s. finite, meaning that along any trajectory of the algorithm, the number of re-initialization is finite.

9.2 The curved exponential family

We further restrict our attention to the case where the complete data likelihood h is from the class of the *curved exponential densities*. We consider the following assumptions which are

satisfied in many scenarios.

M1 $\Theta \subseteq \mathbb{R}^l$ is a convex subset, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ is an open subset and μ is a σ -finite positive measure on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Denote $\langle \cdot; \cdot \rangle$ the scalar product, $|\cdot|$ the Euclidean norm, d the Euclidean distance *i.e.* to a closed set \mathcal{L} , $d(u, \mathcal{L}) := \inf_{t \in \mathcal{L}} |u - t|$ and ∇ the differentiation operator. Let \mathcal{S} be an open subset of \mathbb{R}^q . Let $\phi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^q$ and $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$. Define $L : \mathcal{S} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ and $h : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

$$L(s; \theta) := \phi(\theta) + \langle s; \psi(\theta) \rangle \quad h(z; \theta) := \exp(L(S(z); \theta)).$$

Assume that

- M2** (a) ϕ, ψ are continuous on Θ and S is continuous on \mathcal{X} .
(b) for all $\theta \in \Theta$, $g(\theta) := \int h(z; \theta) \mu(dz)$ is positive and finite, continuous on Θ , and for any $M > 0$, $\{\theta \in \Theta, g(\theta) \geq M\}$ is compact.
(c) for all $\theta \in \Theta$, $\int |S(z)| p(z; \theta) \mu(dz) < \infty$ where $p(z; \theta) := h(z; \theta)/g(\theta)$, and

$$\bar{S}(\theta) := \int S(z) p(z; \theta) \mu(dz)$$

is continuous on Θ .

- (d) there exists a continuous function $\hat{\theta} : \mathcal{S} \rightarrow \Theta$, such that for all $s \in \mathcal{S}$, $L(s; \hat{\theta}(s)) = \sup_{\theta \in \Theta} L(s; \theta)$.

Let $\{\mathcal{K}_n\}$ be a sequence of compact set satisfying (9.5), $\theta'_0 \in \mathcal{K}_0$ and λ be a probability measure on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. The stable MCEM sequence (given \mathcal{K}_n , θ'_0 , λ) under the assumption M1 and M2 is then defined as

$$\begin{cases} \text{If } \hat{\theta}(\tilde{S}_n) \in \mathcal{K}_{p_n}, & \theta'_{n+1} := \hat{\theta}(\tilde{S}_n) \text{ and } p_{n+1} := p_n, \\ \text{if } \hat{\theta}(\tilde{S}_n) \notin \mathcal{K}_{p_n}, & \theta'_{n+1} := \theta'_0 \text{ and } p_{n+1} := p_n + 1, \end{cases} \quad (9.7)$$

(see Paragraph 9.1.3) where

$$\tilde{S}_n := m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} S(Z_j^n),$$

and $\{Z_j^n\}$ is a Markov Chain with transition kernel $P_{\theta'_n}$. $\{\tilde{S}_n, p_n\}$ is an inhomogeneous Markov Chain w.r.t. the filtration $\mathcal{F}_n := \sigma\{\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_n\}$. We denote $\bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0}$ and $\bar{\mathbb{E}}_{\lambda, \theta'_0}$ the probability and the expectation of the canonical process $\{(\tilde{S}_n, p_n)\}$; and $P_{\lambda, \theta}$, $\mathbb{E}_{\lambda, \theta}$ the probability and the expectation of the canonical chain $\{\Phi_n\}$ with initial distribution λ and transition kernel P_θ . Note that for any positive Borel function f , and $n \geq 0$,

$$\bar{\mathbb{E}}_{\lambda, \theta'_0} [f(\tilde{S}_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{\lambda, \theta'_n} \left[f \left(m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} S(\Phi_j) \right) \right].$$

To go further, we need to control the L^p -norm of the fluctuations of the Monte-Carlo approximation of $\bar{S}(\theta'_n)$ by \tilde{S}_n . To that purpose, we need a uniform in θ Rosenthal's inequality.

M3 Let $p \geq 2$ and λ be a probability measure on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. For any compact set $\mathcal{K} \subset \Theta$, there exists a constant $C < \infty$ such that

$$\sup_{\theta \in \mathcal{K}} \mathbb{E}_{\lambda, \theta} \left| \sum_{k=1}^n \{S(\Phi_k) - \pi_\theta(S)\} \right|^p \leq C n^{p/2}.$$

We now state practical conditions upon which M3 is verified. The simplest case is when the kernel P_θ is uniformly ergodic. (See Meyn and Tweedie [72] for relevant definitions on Markov Chains).

Proposition 9.1 *Let P be a ψ -irreducible aperiodic Markov transition kernel on $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Assume that there exist an integer $m \geq 1$, a constant $\epsilon > 0$ and a probability measure ν_m on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ such that, for all $x \in \mathcal{X}$ $q, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,*

$$P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A). \quad (9.8)$$

Then, P possesses an unique invariant probability measure π ; for any $p \geq 2$ and any Borel function $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q$ such that $\sup_{\mathcal{X}} |g| < \infty$, it holds that for all $x \in \mathcal{X}$,

$$\sum_{k=1}^n \left| P^k g(x) - \pi(g) \right| \leq \sup_{\mathcal{X}} |g| \cdot 2 \left(1 - (1 - \epsilon)^{1/m} \right)^{-1},$$

and

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq 6^p C_p \sup_{\mathcal{X}} |g|^p \left\{ 1 + 2 \{1 - (1 - \epsilon)^{1/m}\}^{-1} \right\} n^{p/2},$$

where C_p is the Rosenthal's constant (see Hall and Heyde [46], Theorem 2.12).

The proof is in Section 9.7. Using this result, assumption M3 is verified provided that $\sup_{\mathcal{X}} |S| < \infty$, P_θ is for all $\theta \in \Theta$ uniformly ergodic (i.e. the skeleton $P_\theta^{m_\theta}$ satisfies (9.8) with minorizing constant ϵ_θ), and for θ in compact subset of Θ , (a) ϵ_θ is bounded away from zero and (b) m_θ is bounded. This condition is often verified when \mathcal{X} is compact and the kernel depends continuously on θ (Cf. Example 9.4.1 in Section 9.4). To deal with non-compact state space, the following proposition proved in Section 9.7 provides convenient sufficient conditions based on the Foster-Lyapunov drift criterion.

Proposition 9.2 *Let P be a ψ -irreducible aperiodic transition kernel on $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ and C be an accessible petite set. Assume that there exist some constants $0 < \lambda < 1$, $b < \infty$ and a Borel function $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $V(x) \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$, such that $\sup_C V < \infty$ and*

$$PV \leq \lambda V + b \mathbb{1}_C.$$

Let $p \geq 2$. Define $M := 1 + \{\sup_C V \vee b/(1 - \lambda^{1/p})^p\}$. Then the set $\{V \leq M\}$ is ν_m -small with minorizing constant $\epsilon > 0$ and for any Borel function $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $|g| \leq V^{1/p}$, it holds that for all $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left| P^k g(x) - \pi(g) \right| &\leq \frac{\|g\|_{f_0}}{1 - \lambda^{1/p}} \left(4(1 + \epsilon^{-1})(M + mb^{1/p}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2M^{1/p}}{(1 - \lambda^{1/p})M^{1/p} - b^{1/p}} \{V^{1/p}(x) + \frac{b^{1/p}}{1 - \lambda^{1/p}}\} \right) \end{aligned}$$

and

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq C(x) n^{p/2} \quad x \in \mathcal{X},$$

where

$$\begin{aligned} C(x) := \frac{12^p C_p M}{1-\lambda} & \{M^{1/p}(1-\lambda^{1/p}) - b^{1/p}\}^{-p} \left\{ \frac{b}{1-\lambda} + 5\epsilon^{-1}(2M+bm) \right. \\ & \left. + \frac{2M}{M(1-\lambda)-b} \{V(x) + \frac{b}{1-\lambda}\} \right\} \end{aligned}$$

and C_p is the Rosenthal's constant.

Hence, if the kernel P depends on a parameter θ , all the terms given in Proposition 9.2 may depend on θ and the condition M3 is verified if (a) λ_θ , b_θ , M_θ and m_θ are uniformly upper-bounded over θ for θ in a compact set ; (b) ϵ_θ is uniformly lower-bounded over θ for θ in a compact set ; (c) there exists a measure of probability λ on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ such that for any compact set $\mathcal{K} \subset \Theta$, $\sup_{\theta \in \mathcal{K}} \lambda(V_\theta) < \infty$. Finally, we need to assume that the number of simulation at each iteration grows at a given rate $\{m_n\}$. The rate of growth depends upon the control of the fluctuation of the Monte-Carlo sum provided by the Rosenthal's inequality. More precisely,

M4 $\{m_n\}$ is a sequence of integers such that $\sum_n m_n^{-p/2} < \infty$ where p is given by M3.

Under the assumptions M1 to M4, we prove in Section 9.5 the following convergence result. Denote $\text{Cl}(A)$ the closure of the set A .

Théorème 9.3 Assume M1 to M4. Let $\{\mathcal{K}_n\}$ be a sequence of compact set satisfying (9.5), $\theta'_0 \in \mathcal{K}_0$ and λ be given in M3. Consider the stable MCEM random sequence $\{\theta'_n\}$ defined by (9.7). Define

$$\mathcal{L} := \{\theta \in \Theta, \hat{\theta} \circ \bar{S}(\theta) = \theta\}. \quad (9.9)$$

Then,

- (a) $\lim_n p_n < \infty$ $\bar{\mathbb{P}}_{\lambda,\theta'_0}$ -a.s. and $\limsup_n |\theta'_n| < \infty$, $\bar{\mathbb{P}}_{\lambda,\theta'_0}$ -a.s.
- (b) $\{g(\theta'_n)\}$ converges w.p.1 to a connected component of $g(\mathcal{L})$.

If $g(\mathcal{L} \cap \text{Cl}(\{\theta'_n\}))$ has an empty interior, $\{g(\theta'_n)\}$ converges w.p.1 to g^* and $\{\theta'_n\}$ converges to the set $\mathcal{L}_{g^*} := \{\theta \in \mathcal{L}, g(\theta) = g^*\}$.

To conclude this section, recall from Wu (Theorem 2, [123]) that the set of fixed point of the EM algorithm coincides with the set of stationary points of g , under weak additional assumptions.

Proposition 9.4 Assume M1 to M4. Suppose in addition that Θ is open and ϕ and ψ are continuously differentiable on Θ . Then g is continuously differentiable on Θ and $\mathcal{L} = \{\theta \in \Theta, \nabla g(\theta) = 0\}$, where \mathcal{L} is given by (9.9).

Using the Sard's Theorem (Brocker [13]), it is known that $g(\{\nabla g = 0\})$ has an empty interior as soon as the function g is l -times differentiable (where l is the dimension of the parameter space) : hence, Theorem 9.3 applies under very weak regularity assumptions.

9.3 Rate of convergence and averaging

We have shown the convergence of the MCEM algorithm, to the set \mathcal{L} of the fixed points of the EM map $T := \hat{\theta} \circ \bar{S}$. In many instances, the set \mathcal{L} is made of isolated points and, under suitable conditions, the previous convergence results imply pointwise convergence. Depending upon the values of the Hessian of g , these stationary points may correspond either to local maxima, local minima or saddle point. A first question of interest is to state conditions upon which the stationary points coincide only with local maxima. We will see below that these conditions are very weak. To that goal, we formulate some additional regularity assumptions

M5 (a) Θ is open, (b) for any $s \in \mathcal{S}$, $L(s; \cdot)$ is twice continuously differentiable on Θ , (c) \bar{S} is twice continuously differentiable on Θ , (d) g is continuously differentiable on Θ and (e) $\hat{\theta}$ is twice continuously differentiable on \mathcal{S} .

M6 For any compact subset $\mathcal{K} \subset \Theta$, there exist a constant $C < \infty$ such that for all $\theta \in \mathcal{K}$,

$$\sum_{k \geq 1} \left| \{ \lambda P_\theta^k(S) - \pi_\theta(S) \} \right| \leq C.$$

Propositions 9.1 and 9.2 state practical conditions upon which M6 is verified. Define

$$G(s) := \bar{S} \circ \hat{\theta}(s). \quad (9.10)$$

The mapping G gives another way to look at the EM algorithm, not directly in the parameter space, but in the space of the complete data sufficient statistics. This parameterization is more convenient when assessing the rate of convergence (see below). Assume

L1 The stationary points of g are isolated (or, equivalently the fixed points of the EM map T).

L2 For every stationary point θ^* of g , the matrices $-\nabla_\theta^2 L(s^*; \theta^*)$ and

$$\int_{\mathcal{X}} \nabla_\theta L(S(u); \theta^*) {}^t \nabla_\theta L(S(u); \theta^*) p(u; \theta^*) \mu(du),$$

are positive definite.

We have

Lemme 9.5 Assume M1-2, M5 and L1-2. Let $\theta^* \in \Theta$ be a fixed point of the map $T := \hat{\theta} \circ \bar{S}$ and let $s^* := \bar{S}(\theta^*)$.

- i. s^* is a fixed point of the mapping G (given by 9.10).
- ii. $\nabla T(\theta^*) = [\nabla_\theta^2 L(s^*; \theta^*)]^{-1} (\nabla_\theta^2 L(s^*; \theta^*) - \nabla^2 \log g(\theta^*))$ is diagonalizable with positive real eigenvalues; $\nabla G(s^*)$ has the same eigenvalues as $\nabla T(\theta^*)$, counting multiplicities together with $(q - l)$ additional eigenvalues equal to zero.
- iii. θ^* is a stable fixed point of T iff it is a proper maximizer of g .
- iv. s^* is a stable fixed point of G iff θ^* is a proper maximizer of g .

The proof can be easily adapted from Lemma 3 in Delyon, Lavielle and Moulines [27]. Recall that θ^* is a stable fixed point of T if all the eigenvalues of $\nabla T(\theta^*)$ are strictly less than one. Saddle points and local minima are hyperbolic or unstable. This is why the EM sequences most often converge to local maxima and almost never to local minima, except in rather artificial examples (see Murray (1977) for such construction). Thanks to the simulation noise, convergence to saddle point and local minima never occurs for the MCEM sequence, as shown in Brandière and Duflo (Chapter 2 [12]).

We now study the rate of convergence of θ'_n to a local maximum θ^* . Rate of convergence is useful to understand how we should ideally tune the number of simulations m_n as a function of the iteration index. The results we have obtained will also be crucial to derive an accelerated version of the algorithm, based on averaging. Denote

$$s^* := \bar{S}(\theta^*), \quad \bar{s}_n := \bar{S}(\theta'_n), \quad (9.11)$$

so that for $n \geq \lim_n p_n$, $\bar{s}_n = G(\tilde{S}_{n-1})$. For n large enough (*i.e.* after the last re-projection $n \geq \lim_n p_n$) we may decompose the recursion (expressed in the complete data statistics domain)

$$\tilde{S}_n - s^* = \tilde{S}_n - \bar{s}_n + \bar{s}_n - s^* = (G(\tilde{s}_{n-1}) - G(s^*)) + \tilde{S}_n - \bar{s}_n,$$

a relation which can be linearized when \tilde{s}_n is in a neighborhood of s^* . We use the following notations. Let $\{X_n\}$ be a vector-valued sequence and $\{\gamma_n\}$ be a positive deterministic sequence ; $X_n = O_{w.p.1}(\gamma_n)$ (resp. $o_{w.p.1}(\gamma_n)$) if $\sup_n |\gamma_n^{-1} X_n| < \infty$ w.p.1 (resp. $\limsup_n |\gamma_n^{-1} X_n| = 0$ w.p.1), and $X_n = O_{L^q}(\gamma_n)$ (resp. $X_n = o_{L^q}(\gamma_n)$) if $\gamma_n^{-1} X_n$ is bounded in L^q (resp. tends to zero in L^q). $|A|_2$ denotes the spectral norm of a matrix A .

Théorème 9.6 *Assume M1 to M6 and L1-2. Let s^* be a stable fixed point of the map G and denote $\Gamma := \nabla G(s^*)$. Assume that $\gamma := |\Gamma|_2 < 1$ and $1 \leq m := \lim_n m_{n+1}/m_n < \gamma^{-1}$. Let $\delta > 0$ and $n \geq 0$. Then \tilde{S}_n may be decomposed as $\tilde{S}_n = s^* + \mu_n + \rho_n$ where*

$$\begin{aligned} \mu_n &:= \Gamma \mu_{n-1} + \epsilon_n, & \mu_{-1} &:= 0, \\ \epsilon_n &:= \left(\tilde{S}_n - m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \lambda P_{\theta'_n}^j S \right) \mathbb{1}(|\tilde{S}_{n-1} - s^*| \leq \delta). \end{aligned}$$

Then, $\mu_n = O_{L^p}(m_n^{-1/2})$ and for any $\gamma < \tilde{\gamma} < m^{-1}$, $\rho_n \mathbb{1}_{\lim_n \tilde{S}_n = s^*} = O_{w.p.1}(1)O_{L^1}(m_n^{-1}) + O_{w.p.1}(\tilde{\gamma}^n)$.

The proof is in Section 9.6.

Remarks

1. In many situations, γ is very close to one, explaining why the EM algorithm is sometimes slow to converge (see Jamshidian and Jennrich [49]). Most often, γ is unknown. It can however be estimated using e.g. the Louis Information principle (see Delyon *et al.* [27]) but this generally involves a significant computational overhead.

2. The constraint $m < \gamma^{-1}$ is always satisfied when $\{m_n\}$ is regularly varying at infinity of order α i.e. $\lim_n \frac{m_{[\rho n]}}{m_n} = \rho^\alpha$ for any $\rho > 1$. When $\{\rho^{-n} m_n\}$ is rapidly exploding at infinity for $\rho \geq \gamma^{-1}$ (e.g. when $\{m_n\}$ is exponential with a rate greater than γ^{-1}), the constraint is no longer satisfied. In such case, the rate is strictly lower than $m_n^{-1/2}$.

To get a better understanding on the fluctuation \tilde{S}_n , we compute the leading term in the decomposition of $\tilde{S}_n - s^*$. Under the stated assumptions, $\{\epsilon_n\}$ is a martingale-increment with bounded second-order moments such that $\epsilon_n = O_{L^2}(m_n^{-1/2})$. Then $\|\mu_n\|_2 \leq (1 - \sqrt{m}\gamma)^{-1}m_n^{-1/2}$ and $|\rho_n| \leq \tilde{\gamma}^n O_{w.p.1}(1)$. To compare the rate of convergence of the MCEM algorithm with other stochastic version of the EM algorithm, such as the Stochastic Approximation EM (SAEM), it is worthwhile to compute the rate as a function of the number of simulations rather than as a function of the number of iterations. For a generic sequence $\{X_n\}$, define the interpolated sequence $X_n^{(i)} = X_{\phi(n)}$ where ϕ is defined as the largest integer such that

$$\sum_{k=0}^{\phi(n)} m_k < n \leq \sum_{k=0}^{\phi(n)+1} m_k.$$

Assume first that $m_n := (n+1)^\alpha$. On the simulation time-scale, $\|\mu_n^{(i)}\|_2 \leq (1 - \gamma)^{-1} [n(1 + \alpha)]^{-\alpha/2(1+\alpha)}$ which should be balanced with the term $|\rho_n^{(i)}| \leq \tilde{\gamma}^{[n(1+\alpha)]^{1/(1+\alpha)}} O_{w.p.1}(1) : \|\mu_n^{(i)}\|_2$ decreases with α whereas $|\rho_n^{(i)}|$ increases, and the rate of convergence is always smaller than $n^{-1/2}$. Assume now that $m_n := m^n$, $m > 1$. We get similarly that $\|\mu_n^{(i)}\|_2 \leq (1 - \sqrt{m}\gamma)^{-1} \sqrt{m/(m-1)} n^{-1/2}$ and $|\rho_n^{(i)}| = o(\|\mu_n^{(i)}\|_2)$ whenever $1 < m < \gamma^{-1}$. Note that the variance depends upon the choice of m and that the optimal rate is obtained with $m = \gamma^{-2/3}$. This suggests to adapt the simulation schedule $\{m_n\}$ to γ . This procedure is however mainly of theoretical interest because γ (and other constants of the problem) are unknown.

The averaging procedure This discussion evidences that the performance depend critically upon the choice of the schedule which is of course a serious practical drawback. Recently, data-driven procedures have been proposed by Booth and Hobert [10]. These procedures require to evaluate the variance of $\tilde{S}_n - \bar{s}_n$ which is a very challenging problem when MCMC algorithms are used. We consider here an alternative procedure based on an averaging method. This is adapted from the so-called averaging procedure developed by Ruppert [104] and Polyak [89] (see also Polyak and Juditsky [90]) to improve the rate of convergence for stochastic approximation procedure. To motivate the construction, recall (Theorem 9.6) that

$$\tilde{S}_n = s^* + \sum_{k=0}^n \Gamma^{n-k} \epsilon_k + \rho_n. \quad (9.12)$$

Each value of \tilde{S}_n may be seen as an estimator of the *true* value s^* affected by a “noise” term. The stable MCEM algorithm estimates θ^* by taking the “last” value of θ'_n (or equivalently \tilde{S}_n)

which is of course a very inefficient estimation strategy. It is well-known that, in the regression problem (9.12), the minimum variance estimator of s^* is the weighted-least square estimator ; this estimator requires to know the covariance structure of the perturbation. We suggest to use a simpler solution, consisting in combining the different values \tilde{s}_n with relative weights m_n which is a crude estimate of the inverse of the variance of the perturbation. Hence, we consider the following averaged sequence, $n \geq 0$,

$$\Sigma_n := M_n^{-1} \sum_{j=0}^n m_j \tilde{S}_j, \quad \text{where} \quad M_n := \sum_{j=0}^n m_j. \quad (9.13)$$

We show that under weak conditions on the sequence $\{m_n\}$, the estimator $\bar{\theta}_{n+1} := \hat{\theta}(\Sigma_n)$ or equivalently Σ_n , has a rate proportional to $M_n^{-1/2}$. When the M-step is in simple closed form, the procedure has a negligible computational overhead with respect to the "plain" algorithm.

Lemme 9.7 *Under the assumptions of Theorem 9.6, it holds*

$$\left\{ \Sigma_n - s^* \right\} \mathbb{I}_{\lim_n \tilde{S}_n = s^*} = O_{L^2} \left(M_n^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=0}^{n-k} m_{j+k} \gamma^j \right]^2 m_k^{-1} \right\}^{1/2} \right) + O_{wp1}(n/M_n).$$

The proof is in Section 9.6.

For example, in the geometrical schedule $m_n := m^n$ with $1 \leq m < \gamma^{-1}$

$$\left\{ \Sigma_n - s^* \right\} \mathbb{I}_{\lim_n \tilde{S}_n = s^*} = O_{L^2} \left(M_n^{-1/2} \right) + O_{wp1}(1) o_{L^1}(M_n^{-1/2}) + O_{wp1}(M_n^{-1});$$

and the averaged sequence has the same rate than the original one. The averaging procedure is interesting for the polynomial schedule $m_n := (n+1)^\alpha$: we have $m_{j+k} \leq m_k m_k$ and $\sum_{j=0}^{n-k} m_{j+k} \gamma^j \leq m_k \sum_{j \geq 0} m_j \gamma^j$; then the leading term is always of order $M_n^{-1/2}$ which is proportional to the number of simulations up to the iteration n . When expressed on the simulation time-scale, the previous result shows that the variance of this term is asymptotically independent of the choice of the schedule $\{m_n\}$ in sharp contrast with the results obtained with the original MCEM algorithm. When an averaging procedure is used, the choice of the schedule is no longer critical.

9.4 Examples

9.4.1 An application to product diffusion modeling

We illustrate the previous results by considering the Bass product diffusion model which consists in predicting market penetration of new products and services. Sherman, Ho and Dalal [106], (hereafter SHD) proved the convergence in the case where the missing data are obtained (at each step) from m independent runs of a Gibbs sampler. In addition, these authors assume uniform

geometric ergodicity in the total variation distance, and uniform convergence in L^2 (Assumptions (C5-6)) which seem difficult to directly verify in practice.

The observations $y := \{(t_1, n_1), \dots, (t_q, n_q)\}$ collect successive cumulative numbers n_j of adopters of a new product at time points t_j . We set $t_0 = n_0 := 0$. It is assumed that the n_j 's are realizations of a process $N(t)$ at time t_j , and the t_j 's are selected independently of the adoption process. $N(t)$ is a pure birth Markov process with stationary transition probabilities and population adoption rate

$$\Lambda(t) := (M\pi - N(t))(\alpha + \beta N(t))$$

where M is the total number of population in the population of interest, π is the proportion of potential adopters of the new product, $\alpha \geq 0$ is the innovator coefficient and $\beta \geq 0$ is the imitator coefficient. M is supposed to be known. Our purpose is to compute the maximum likelihood estimator for $\theta = (\alpha, \beta, \pi)$; the incomplete data likelihood is given by

$$g(\theta) := \prod_{j=1}^q \sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} \left[\prod_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} \lambda_k(\theta) \right] \left[\prod_{k=n_{j-1}, k \neq i}^{n_j} \{\lambda_k(\theta) - \lambda_i(\theta)\} \right]^{-1} \exp \left(-\lambda_i(\theta)(t_j - t_{j-1}) \right),$$

where $\lambda_i(\theta) := (M\pi - i)(\alpha + \beta i)$ and θ is in the set

$$\Theta := \{(\alpha, \beta, \pi) \in (0, 1] \times [0, 1] \times [n_q/M, 1], \quad 0 < \alpha + \beta n(q) \leq 1\}.$$

Dalal and Weerahandi [26] reported that the computation and maximization of g is not tractable. In this contribution, we solve the problem by implementing the stable MCEM algorithm, the missing data being sampled using an independent sampler.

We use the missing data framework detailed above and write $g(\theta) := \int_{\mathcal{X}} h(z; \theta) \mu(dz)$ where

$$h(z; \theta) := \prod_{i=0}^{n_q-1} \lambda_i(\theta) \exp \left(-\lambda_i(\theta)(z_{i+1} - z_i) \right) \exp \left(-\lambda_q(\theta)(t_q - z_{n_q}) \right), \quad (9.14)$$

for $z := (z_1, \dots, z_{n_q}) \in \mathcal{X} := [0, t_q]^{n_q}$ (by convention $z_0 := 0$), and μ is absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure on \mathbb{R}^{n_q}

$$\mu(dz) := \mathbb{1}_{z_1 < \dots < z_{n_q}} \prod_{j=1}^{q-1} \mathbb{1}_{z_{n_j} \leq t_j < z_{n_j+1}} \mathbb{1}_{z_{n_q} \leq t_q} dz. \quad (9.15)$$

From (9.14) and Eq.(11) in SHD, we have with $S(z) := z$

$$\phi(\theta) := -\lambda_{n_q}(\theta)t_q + \sum_{k=0}^{n_q-1} \ln \lambda_k(\theta), \quad \psi(\theta) := (\lambda_1(\theta) - \lambda_0(\theta), \dots, \lambda_{n_q}(\theta) - \lambda_{n_q-1}(\theta)),$$

and M2 is easily checked. To impute the missing values, we use a Metropolis-Hastings Independent Sampler with proposal distribution m absolutely continuous w.r.t μ ; then the Markov transition kernel is given by

$$P_\theta(z, dz') := \alpha_\theta(z, z')m(z)\mu(dz') + \delta_z(dz') \int (1 - \alpha_\theta(z, z'))m(z')\mu(dz')$$

where $\alpha_\theta(z, z')$ is the acceptance ratio $\alpha_\theta(z, z') := 1 \wedge \{p(z'; \theta)m(z)/[p(z; \theta)m(z')]\}$. We choose $m(z)\mu(dz)$ as the product of q distributions of the order statistics of $(n_k - n_{k-1})$ independent random variable uniformly distributed on $[t_{k-1}, t_k]$, i.e.

$$m(z)\mu(dz) = \left[\prod_{k=1}^q \frac{(t_k - t_{k-1})^{n_k - n_{k-1}}}{(n_k - n_{k-1})!} \right]^{-1} \mathbb{1}_{z_1 < \dots < z_{n_q}} \prod_{j=1}^{q-1} \mathbb{1}_{z_{n_j} \leq t_j < z_{n_{j+1}}} \mathbb{1}_{z_{n_q} \leq t_q} dz.$$

Recall that for an homogeneous Poisson process of rate λ , the conditional distributions of the Poisson arrival in a given interval given the number of arrival is i.i.d uniform over that interval so that the choice of the proposal is well matched to the target density. With these definitions, P_θ is π_θ -irreducible and aperiodic.

It is easily seen that $p(z; \theta)$ is uniformly bounded for θ in a compact set \mathcal{K} of Θ . Thus, there exists some minorizing constant $0 < \epsilon < 1$ such that $\epsilon p(z; \theta) \leq m(z)$ for all $\theta \in \mathcal{K}, z \in \mathcal{X}$. Hence, for $z \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$P_\theta(z, A) \geq \int_A \alpha_\theta(z, z')m(z')\mu(dz') \geq \epsilon \int_A p(z'; \theta)\mu(dz') = \epsilon \pi_\theta(A).$$

The condition M3 deduces from Proposition 9.1.

Simulations We illustrate the performance of the stable MCEM procedure to estimate the maximum likelihood estimator : we generate $q := 30$ observations at time $t_j := 0.25j$ by choosing $M := 2000$, $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\pi}) := (0.03, 0.0004, 0.5)$. A sample path of corresponding cumulative numbers n_j is given in Figure 9.1. The initial values are $\theta'_0 = (\alpha_0, \beta_0, \pi_0) := (0.025, 0.00035, 0.45)$. Ten iterations are performed. The number of simulations at each step is set to $m_n := n^2$. We first plot the histogram (Figure 9.1) of 1000 estimates of the maximum likelihood θ^* obtained from 1000 vectors of observations y : the histograms have modes near the parameter true value. We also plot the histogram of the corresponding number of projections. We then run 1000 instances of stable MCEM computed from the same observation y and give the corresponding histograms (Figure 9.2).

9.4.2 Application to a time series models involving counts

We now illustrate our results on an example taken from Zeger [126] and discussed in Chan and Ledolter [20], consisting in fitting a model to the monthly number of cases of poliomyelitis from January 1970-December 1983. Chan and Ledolter [20] addressed the convergence (with *high probability*) of MCEM algorithm to a maximizer of g , in the case where the missing data are drawn (at each step) from m iterations of a Gibbs sampler ; the authors claim that they proved there exists a neighborhood of a local maximizer θ^* such that for starting values inside this neighborhood and any $\epsilon > 0$, there exists a k_0 such that $P(|\theta_k - \theta^*| < \epsilon \text{ for some } k \leq k_0) \rightarrow 1$ as m goes to infinity (Theorem 1, Chan and Ledolter [20]). As stressed in the introduction, these authors

assumed that the MCEM map converges in probability to the EM map T uniformly for θ over compact sets, which is equivalent here to showing that the Monte-Carlo sum $n^{-1} \sum_{k=1}^n S(Z_k)$ where $\{Z_k\}$ is a Markov Chain with transition kernel P_θ , converges in probability to $S(\theta)$, uniformly for θ over compact sets. Results to check this property are given in Sherman, Ho and Dalal [106] when the Monte-Carlo sum is obtained from multiple independent run. It is not clear (and this point has been overlooked in Chan and Ledolter [20]) that this property holds for single run Monte-Carlo approximation.

The observations $y := (y_1, \dots, y_d)$ generated from a doubly stochastic Poisson with mean λ_k satisfying

$$\ln \lambda_k := \alpha^t U_k + z_k$$

where $\{U_k\}$ are deterministic regressors and $\{z_k\}$ is a random effect modeled as a stationary Gaussian AR(1) latent process ($k \geq 1$),

$$z_{k+1} = az_k + \epsilon_{k+1} \quad |a| < 1,$$

and $\{\epsilon_k\}$ is an Gaussian white noise with variance λ^{-1} . We assume that λ^{-1} is bounded away from zero ($\lambda^{-1} \geq \lambda_*^{-1}$). The covariate vector $\{U_k\}$ is given in the model by

$$U_k := \left(1; k/1000; \cos(2\pi t_k/12); \sin(2\pi t_k/12); \cos(2\pi t_k/6); \sin(2\pi t_k/6) \right) \in \mathbb{R}^6.$$

The unknown parameters are $\theta := (\alpha^t, \lambda, a)$ which are to be fitted in the maximum likelihood sense. The likelihood function $g(\theta)$ may be expressed as $g(\theta) := \int_{\mathcal{X}} h(z; \theta) \mu(dz)$ where $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, μ is the Lebesgue measure on \mathbb{R}^d and h is given by

$$\begin{aligned} h(z; \theta) := & \left[\prod_{k=1}^d \frac{1}{y_k!} \right] \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}^d} \sqrt{1-a^2} \exp \left[\sum_{k=1}^d \{y_k(\alpha^t U_k + z_k) - \exp(\alpha^t U_k + z_k)\} \right] \\ & \times \exp \left[-\lambda/2 \sum_{k=2}^d (z_k - az_{k-1})^2 - \lambda/2(1-a^2)z_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Define the convex subset of \mathbb{R}^8

$$\Theta := \mathbb{R}^6 \times [0, \lambda_*] \times (-1, 1).$$

We set

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &:= - \sum_{k=1}^d \ln y_k! + \sum_{k=1}^d y_k \alpha^t U_k - d/2 \ln 2\pi + d/2 \ln \lambda + 1/2 \ln(1-a^2) \\ \psi(\theta) &:= \left[1; -\lambda(1+a^2)/2; \lambda a^2/2; a\lambda; -\exp(\alpha^t U_1); \dots; -\exp(\alpha^t U_d) \right], \\ S(z) &:= \left[\sum_{k=1}^d y_k z_k; |z|^2; z_1^2 + z_d^2; \sum_{k=2}^d z_k z_{k-1}; \exp z_1; \dots; \exp z_d \right] \in \mathbb{R}^{d+4}. \end{aligned}$$

The Random Scan Hastings-Metropolis sampler To impute the missing values, we use the hybrid sampler *random scan symmetric random walk Hastings-Metropolis* (henceforth denoted RSRW). To understand the behavior of this sampler, some notations are in order. Let (e_1, \dots, e_d) be the coordinate vectors; for $z \in \mathbb{R}^d$, set $z_k := \langle z; e_k \rangle$. Let p be a density w.r.t. the Lebesgue measure on \mathbb{R}^d , and $\{q_i\}$, $i = 1, \dots, d$, be a family of symmetric densities w.r.t. the Lebesgue measure on \mathbb{R} , bounded away from zero in a neighborhood of the origin. For $i = 1, \dots, d$, define a transition kernel P_i on $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$,

$$\begin{aligned} P_i(z, A_1 \times \dots \times A_d) &:= \prod_{k \neq i} \delta_{z_k}(A_k) \int_{A_i - z_i} \alpha(z, z + ye_i) q_i(y) dy \\ &\quad + \delta_z(A) \int_{\mathbb{R}} (1 - \alpha(z, z + ye_i)) q_i(y) dy \end{aligned}$$

where $A_i - z_i := \{y \in \mathbb{R}, z_i + y \in A_i\}$ and $\alpha(z, t) := 1 \wedge p(t)/p(z)$, $(z, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Then the RSRW kernel P_{RS} is defined as

$$P_{RS} := \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d P_i.$$

In the present setting, the target density depends on θ and we denote the RSRW kernel $P_{RS,\theta}$. The V -ergodicity at a geometrical rate of this sampler is studied in Roberts and Rosenthal [97] and Fort and Moulines [40]. The following result deduces from Example 2.5. of Fort, Moulines and Roberts [40]

Proposition 9.8 *Let $\{q_i\}$, $i = 1, \dots, d$, be a family of symmetric density w.r.t. the Lebesgue measure on \mathbb{R} , bounded away from 0 in a neighborhood of the origin. Let $p(z; \theta) \propto h(z; \theta)$ given by (9.16) and denote $P_{RS,\theta}$ the RSRW kernel with target density $p(z; \theta)$. Then for any $\theta \in \Theta$, the kernel is Lebesgue-irreducible, aperiodic and any bounded set is small.*

Choose $0 < s < 1$ such that $s(1-s)^{1/s-1} < (2d-2)^{-1}$ and set $V_\theta(z) := p(z; \theta)^{-s}$. Then there exists $\epsilon > 0$ and for any compact $\mathcal{K} \subset \Theta$, there exist some constants $0 < \lambda_\epsilon < 1$, $b < \infty$ and a compact set C_ϵ such that

$$P_{RS,\theta} V_\theta \leq \lambda_\epsilon V_\theta + b \mathbb{1}_{C_\epsilon} \quad \forall \theta \in \mathcal{K}$$

where

$$\lambda_\epsilon := 1 - \frac{1}{2d} + \frac{d-1}{d} s(1-s)^{1/s-1} + \epsilon \quad b := n^{-1} \left(1 + s(1-s)^{1/s-1} \right) \sup_{(z,\theta) \in C_\epsilon \times \mathcal{K}} V_\theta(z).$$

In addition, if the densities q_i are positive on \mathbb{R} , then the compact sets are ν_1 -small and the assumption M3 follows from Proposition 9.2.

Simulations To illustrate the results, we have generated 300 observations of the doubly stochastic Poisson process described above, with parameters $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{a})$,

$$\hat{\alpha} := (0.2; -4.5; -0.1; -0.5; 0.2; -0.4) \quad \hat{\lambda} := 10 \quad \hat{a} := 0.9.$$

A sample path of corresponding counts is given in Figure 9.3.

We have then run the stable MCEM algorithm with starting values $(-\hat{\alpha}, 2, 0.3)$; we have verified that the MCEM algorithm is in this case insensitive to the starting point. We initialize the Markov chains in the compact $\mathcal{C} := [-3, 3]^{300} : Z_0^{(n)}$ is obtained by truncating the sample $Z_{m_{n-1}}^{(n-1)}$ so that $Z_0^{(n)} \in \mathcal{C}$; the proposal densities q_i are Gaussian with standard deviation 0.6. As seen in Figure 9.8, the number of projections is rather high during the few hundred iterations. The sequence then converges to a stable attractor. It is clearly seen in the plot that the variance of the averaged sequence is smaller than the variance of the original MCEM estimator.

9.5 Proof of Theorem 9.3

The convergence of the stable MCEM algorithm can be seen as a particular instance of the convergence of a random iterative map that approximates a deterministic iterative map having a (well-behaved) Lyapunov function. This is a classical problem that has been studied by many authors, and in particular by Shapiro and Wardi [105] (see also Pierre-Loti-Viaud [86], Brandière and Duflo [12]). However, all these authors assume that the approximation of the deterministic map by the random map is uniform over compact subset of the definition space : as evidenced in the discussion above, this condition is not practical to check for single-run MCMC integration. In this section, we show how this condition can be weakened. Since our results go beyond the study of the MCEM algorithm, we have decided to present them in an abstract setting. The application to the stable MCEM algorithm is straightforward.

9.5.1 Deterministic results

We denote $T : \Theta \rightarrow \Theta$ a point to point map. Let \mathcal{L} be a non empty subset of Θ . A positive function W defined on Θ is said to be a Lyapunov function relatively to (T, \mathcal{L}) when, **(i)** for all $u \in \Theta$, $W \circ T(u) - W(u) \geq 0$ and **(ii)** for any compact set $\mathcal{C} \subset (\Theta \setminus \mathcal{L})$, $\inf_{u \in \mathcal{C}} \{W \circ T(u) - W(u)\} > 0$. We first state our main convergence result.

Proposition 9.9 *Let $\Theta \subset \mathbb{R}^l$ and $\mathcal{L} \subset \Theta$ be a closed set. Let W be a continuous Lyapunov function relatively to (T, \mathcal{L}) . Assume that there exists a Θ -valued sequence $\{u_n\}$ such that **(i)** for all $n \geq 0$, $u_n \in \mathcal{K}$ for some compact set $\mathcal{K} \subset \Theta$ and **(ii)** $|W(u_{n+1}) - W \circ T(u_n)| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Then $\{W(u_n)\}$ converges to a connected component of $W(\mathcal{L} \cap \mathcal{K})$. If $W(\mathcal{L} \cap \mathcal{K})$ has an empty interior, $\{W(u_n)\}$ converges to w^* and $d(u_n, \mathcal{L}_{w^*} \cap \mathcal{K}) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ where $\mathcal{L}_{w^*} := \{\theta \in \mathcal{L}, W(\theta) = w^*\}$.*

Proof 9 Define $\mathcal{D} := W(\mathcal{L} \cap \mathcal{K})$. Without loss of generality, we can suppose that $\mathcal{L} \cap \mathcal{K}$ is a non-empty compact subset of Θ and thus \mathcal{D} is a compact set of \mathbb{R} . Let \mathcal{D}_α be the α -neighborhood of the closed set \mathcal{D} in \mathbb{R} , $\mathcal{D}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}, d(x, \mathcal{D}) < \alpha\}$. As \mathcal{D} is compact, $\mathcal{D} = \bigcap_{\alpha > 0} \mathcal{D}_\alpha$. Let $\alpha > 0$. Since \mathcal{D}_α is a finite union of disjoint bounded open intervals, there exist $n_\alpha \geq 0$ and two

increasing real valued sequences $\{a_\alpha(k)\}$ and $\{b_\alpha(k)\}$, $1 \leq k \leq n_\alpha$, such that

$$\mathcal{D}_\alpha = \bigcup_{k \in \{1, \dots, n_\alpha\}} (a_\alpha(k), b_\alpha(k)). \quad (9.17)$$

$W^{-1}(\mathcal{D}_{\alpha/2})$ is an open neighborhood of \mathcal{L} , and we define

$$\begin{cases} \epsilon_\alpha := \inf_{\{u \in \mathcal{K} \setminus W^{-1}(\mathcal{D}_{\alpha/2})\}} \{W \circ T(u) - W(u)\}, \\ \rho_\alpha := \epsilon_\alpha \wedge \alpha. \end{cases} \quad (9.18)$$

Since $\mathcal{K} \setminus W^{-1}(\mathcal{D}_{\alpha/2})$ is a compact subset of \mathbb{R}^d , ϵ_α and ρ_α are both positive. We define $\eta_{n+1} := W(u_{n+1}) - W \circ T(u_n)$. Then

$$W(u_{n+1}) - W(u_n) = W \circ T(u_n) - W(u_n) + \eta_{n+1}. \quad (9.19)$$

and there exists $N_\alpha \geq 0$, such that for any $n \geq N_\alpha$,

$$|\eta_{n+1}| \leq \rho_\alpha/2. \quad (9.20)$$

By (9.18), (9.19),

$$(n \geq N_\alpha \text{ and } u_n \in \mathcal{K} \setminus W^{-1}(\mathcal{D}_{\alpha/2})) \implies W(u_{n+1}) - W(u_n) \geq \rho_\alpha/2. \quad (9.21)$$

Define $k_\alpha^* := \min\{1 \leq k \leq n_\alpha, \limsup_n W(u_n) < b_\alpha(k)\}$ and $I(\alpha) := (a_\alpha(k_\alpha^*); b_\alpha(k_\alpha^*))$. (9.21) shows that $\{W(u_n)\}$ is infinitely often (i.o.) in $\mathcal{D}_{\alpha/2} \subset \mathcal{D}_\alpha$, and since \mathcal{D}_α is a finite union of intervals, $\{W(u_n)\}$ is i.o. in an interval of (9.17); thus, $\limsup_n W(u_n) \in I(\alpha)$. Let $p \geq N_\alpha$ such that $W(u_p) \in I(\alpha)$. We prove by induction that for all $n \geq p$, $W(u_n) \in I(\alpha)$. By definition, $W(u_p) \in I(\alpha)$. Assume now that for $p \leq k \leq n$, $W(u_k) \in I(\alpha)$.

– Case 1 : If $W(u_n) \in \mathcal{D}_{\alpha/2}$, we have $W(u_n) \geq a_\alpha(k_\alpha^*) + \alpha/2$. Thus,

$$W(u_{n+1}) \geq W(u_n) + \eta_{n+1} \geq a_\alpha(k_\alpha^*) + \alpha/2 - \rho_\alpha/2 \geq a_\alpha(k_\alpha^*).$$

– Case 2 : If $W(u_n) \in \mathcal{D}_\alpha \setminus \mathcal{D}_{\alpha/2}$, then under (9.18), $W \circ T(u_n) - W(u_n) \geq \rho_\alpha$, and (9.19) and (9.20) imply that $W(u_{n+1}) \geq a_\alpha(k_\alpha^*) + \rho_\alpha/2 \geq a_\alpha(k_\alpha^*)$.

Hence, the set of the limit points \mathcal{I} of $\{W(u_n)\}$ is non empty and included in the interval $I(\alpha)$. Let $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. By definition, $\mathcal{D}_{\alpha_1} \subset \mathcal{D}_{\alpha_2}$, thus $I(\alpha_1) \subset I(\alpha_2)$ and $\mathcal{I} \subset I(\alpha_1) \cap I(\alpha_2)$. Let $\{\alpha_n\}$ be a decreasing sequence such that $\lim_n \alpha_n = 0$; then $\mathcal{I} \subset \bigcap_n I(\alpha_n)$. $\{I(\alpha_n)\}$ is a decreasing sequence of intervals, $\bigcap_n I(\alpha_n)$ is an interval and $\bigcap_n I(\alpha_n) \subset W(\mathcal{L} \cap \mathcal{K})$. Hence, $\{W(u_n)\}$ converges to this interval which concludes the first part of the proof. The last part is a consequence of (9.19).

Remarque 9.10 When $u_{n+1} = F_n(u_n)$, where F_n is a random iterative map approximating T , our main assumptions read, (i) $|W \circ F_n(u_n) - W \circ T(u_n)| \rightarrow 0$ a.s. as $n \rightarrow \infty$ and (ii) $\{u_n\}$ is a.s. bounded. In Shapiro and Wardy [105] (see also Chan and Ledolter [20], Pierre Loti-Viaud [86], Sherman, Ho and Dalal [106]), (i) is substituted by (i') $\sup_{u \in \mathcal{K}} |W \circ F_n(u) - W \circ T(u)| \rightarrow 0$, the other assumptions remaining unchanged. This is why these authors have to prove a form of uniform law of large numbers.

The second part of the proof consists in showing that, along any trajectory, $\{u_n\}$ stays in a compact subset (depending upon the trajectory) of Θ . This problem which has been often overlooked by the authors writing on this subject is in fact rather difficult to prove. To prove the result, we will proceed in two steps. We first show (Proposition 9.11) that this compactness assumption can be replaced by a recurrence condition, provided that there exists a Lyapunov function controlling the excursion outside the compact sets of Θ . We will then propose a stabilization procedure when $\{u_n\}$ is defined by a sequence of map $\{F_n\}$, close to T in a sense to precise (Proposition 9.13).

Proposition 9.11 *Let Θ be a subset of \mathbb{R}^l and \mathcal{L} be a compact subset of Θ . Let W be a Lyapunov function for (T, \mathcal{L}) . Assume that*

A1 (a) $T(\mathcal{L})$ is relatively compact, (b) for all $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\{\theta \in \Theta, W(\theta) \geq M\}$ is a compact subset of Θ , (c) $\Theta = \bigcup_{M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{\theta \in \Theta, W(\theta) \geq M\}$.

A2 there exists a Θ -valued sequence $\{u_n\}$ such that (a) $\{u_n\}$ is infinitely often in a compact subset $\mathcal{G} \subset \Theta$ and (b) for any compact set $\mathcal{K} \subset \Theta$, $\lim_n |W(u_{n+1}) - W \circ T(u_n)| \mathbb{I}_{u_n \in \mathcal{K}} = 0$.

Then $\{u_n\}$ is in a compact subset of Θ .

Proof 11 Let $\alpha > 0$ and \mathcal{L}_α be the α -neighborhood of \mathcal{L} . Under (A2a), (A1a) and (A1c), there exists M_α such that

$$\text{Cl}\left(T(\mathcal{L})\right) \cup \mathcal{L}_\alpha \cup \mathcal{G} \subset \{\theta \in \Theta, W(\theta) \geq M_\alpha\} \quad (9.22)$$

where Cl denotes the closure. Let $M'_\alpha < M_\alpha$ and define

$$\begin{cases} \epsilon_\alpha := \inf_{\{\theta \in \Theta, W(\theta) \geq M'_\alpha\} \setminus \mathcal{L}_\alpha} \{W \circ T(\theta) - W(\theta)\} \\ \rho_\alpha := \epsilon_\alpha \wedge \{M_\alpha - M'_\alpha\}. \end{cases} \quad (9.23)$$

By assumption, $\epsilon_\alpha > 0$ and $\rho_\alpha > 0$. Define $\eta_{n+1} := W(u_{n+1}) - W \circ T(u_n)$. (A2b) and (A1c) imply that there exists $N_\alpha := N(\alpha, M'_\alpha)$ such that

$$\left(n \geq N_\alpha \text{ and } u_n \in \{\theta \in \Theta, W(\theta) \geq M'_\alpha\}\right) \Rightarrow |\eta_{n+1}| \leq \rho_\alpha/2. \quad (9.24)$$

Note that

$$W(u_{n+1}) - W(u_n) = W \circ T(u_n) - W(u_n) + \eta_{n+1}. \quad (9.25)$$

Since $\{u_n\}$ is infinitely often in the compact set \mathcal{G} , there exists $p \geq N_\alpha$ such that $W(u_p) \geq M'_\alpha$. We show by induction that for all $n \geq p$, $W(u_n) \geq M'_\alpha$. The property holds for $n = p$. Assume it holds for $p \leq k \leq n$.

- Case 1 : If $W(u_n) \geq M_\alpha$, then (9.23-9.25) imply that $W(u_{n+1}) \geq M'_\alpha$.
- Case 2 : If $M'_\alpha \leq W(u_n) < M_\alpha$ then (9.22-9.25) imply that $W(u_{n+1}) > W(u_n) \geq M'_\alpha$.

Hence for any $q \geq n$, u_q is in the compact set $\{\theta \in \Theta, W(\theta) \geq M'_\alpha\}$.

Remarque 9.12 Proposition 9.11 weakens the conditions presented in Meyn and Tweedie (Theorem 11.2.1. [72]) for the convergence of an iterative scheme since it does not impose a minimal rate of increase of the Lyapunov function W outside \mathcal{L} .

Let $\{F_n\} : \Theta \rightarrow \Theta$ be a family of point-to-point map. Choose a sequence of compact subsets $\{\mathcal{K}_n\}$ such that for any $n \geq 0$,

$$\mathcal{K}_n \subsetneq \mathcal{K}_{n+1} \quad \Theta = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{K}_n.$$

Let $u_0 \in \mathcal{K}_0$. Set $p_0 := 0$ and for $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \text{If } F_n(u_n) \in \mathcal{K}_{p_n}, & u_{n+1} := F_n(u_n) \text{ and } p_{n+1} := p_n, \\ \text{if } F_n(u_n) \notin \mathcal{K}_{p_n} & u_{n+1} := u_0 \text{ and } p_{n+1} := p_n + 1. \end{cases} \quad (9.26)$$

Proposition 9.13 *Let Θ be a subset of \mathbb{R}^l . Let $\{F_n\}$ be a sequence of map onto Θ and denote $\{u_n\}$ the sequence obtained by the previous algorithm (9.26). Assume that (A1) holds and W is a continuous function. Assume in addition that (a) for all $u \in \mathcal{K}_0$, $\lim_n |W \circ F_n - W \circ T|(u) = 0$ and (b) for any compact subset $\mathcal{K} \subset \Theta$, $\lim_n |W \circ F_n(u_n) - W \circ T(u_n)| \mathbb{I}_{u_n \in \mathcal{K}} = 0$. Then, p_n is finite and $\{u_n\}$ is a compact sequence.*

The proof is along the same lines as Proposition 9.11 and is omitted for brevity.

9.5.2 Application : proof of Theorem 9.3

We use Proposition 9.9 and Proposition 9.13 with the EM map $T := \hat{\theta} \circ \bar{S}$ and the random sequence of map $\{F_n\}$,

$$F_n(\theta) := \operatorname{argmax}_{\phi \in \Theta} \mathcal{Q}_n(\phi, \theta).$$

Application of Proposition 9.13 As emphasized in Section 9.1, the incomplete data likelihood g is a natural Lyapunov function relatively to the EM map T and to the set $\mathcal{L} := \{\theta \in \Theta, T(\theta) = \theta\}$. Thus we apply Proposition 9.13 with $u'_n := \theta'_n$ and $W := g$. Under M1 and M2, the condition (A1) is verified with a continuous Lyapunov function. Let $\epsilon > 0$ and $\mathcal{K} \subset \Theta$ be a compact. We prove that $\sum_n \mathbb{I}_{\{|g \circ F_n(\theta'_n) - g \circ T(\theta'_n)| \mathbb{I}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon\}}$ is finite $\bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0}$ -a.s. By the second Borel-Cantelli Lemma, the convergence of the series is implied by the convergence of $\sum_n \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(|g \circ F_n(\theta'_n) - g \circ T(\theta'_n)| \mathbb{I}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon \mid \mathcal{F}_{n-1} \right)$ $\bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0}$ -a.s.

By assumption, $\bar{S}(\mathcal{K})$ is a compact subset of \mathcal{S} . For $\delta > 0$, define the compact $\bar{S}(\mathcal{K}, \delta) := \{s \in \mathbb{R}^q, d(s, \mathcal{K}) \leq \delta\}$. Then there exists $\eta(\epsilon, \delta)$ such that for any $x, y \in \bar{S}(\mathcal{K}, \delta)$,

$$|x - y| \leq \eta(\epsilon, \delta) \implies |g \circ \hat{\theta}(x) - g \circ \hat{\theta}(y)| \leq \epsilon.$$

Hence,

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g \circ F_n(\theta'_n) - g \circ T(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \\
&= \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g \circ \hat{\theta}(\tilde{S}_n) - g \circ \hat{\theta}(\bar{S}(\theta'_n)) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \\
&= \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g \circ \hat{\theta}(\tilde{S}_n) - g \circ \hat{\theta}(\bar{S}(\theta'_n)) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon, \left| \tilde{S}_n - \bar{S}(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \leq \delta \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \\
&\quad + \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g \circ \hat{\theta}(\tilde{S}_n) - g \circ \hat{\theta}(\bar{S}(\theta'_n)) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon, \left| \tilde{S}_n - \bar{S}(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} > \delta \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \\
&\leq 2 \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| \tilde{S}_n - \bar{S}(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \alpha \mid \mathcal{F}_{n-1} \right)
\end{aligned}$$

with $\alpha := \delta \wedge \eta(\epsilon, \delta)$. Thus,

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g \circ F_n(\theta'_n) - g \circ T(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \leq 2 \alpha^{-p} \bar{\mathbb{E}}_{\lambda, \theta'_0} \left[\left| \tilde{S}_n - \bar{S}(\theta'_n) \right|^p \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \\
&\leq 2 \alpha^{-p} m_n^{-p} \mathbb{E}_{\lambda, \theta'_n} \left[\left| \sum_{j=1}^{m_n} \{S(\Phi_j) - \pi_{\theta'_n}(S)\} \right|^p \right] \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}}.
\end{aligned}$$

Then M3 implies that there exists a finite constant $C := C(\mathcal{K})$ such that

$$\mathbb{E}_{\lambda, \theta'_n} \left[\left| \sum_{j=1}^{m_n} \{S(\Phi_j) - \pi_{\theta'_n}(S)\} \right|^p \right] \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \leq C m_n^{p/2},$$

and by M4,

$$\bar{\mathbb{E}}_{\lambda, \theta'_0} \left[\sum_n \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g \circ F_n(\theta'_n) - g \circ T(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \right] < \infty$$

which concludes the proof.

Application of Proposition 9.9 It remains to prove that for any compact set $\mathcal{K} \subset \Theta$,

$$\left| g(\theta'_{n+1}) - g \circ T(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \rightarrow 0 \quad \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} - \text{a.s. as } n \rightarrow \infty.$$

We proceed as in the proof of Proposition 9.13 and consider the a.s. convergence of the random series

$$\sum_n \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g(\theta'_{n+1}) - g \circ T(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon \mid \mathcal{F}_{n-1} \right). \tag{9.27}$$

By definition, either $\theta'_{n+1} = F_n(\theta'_n)$ or $\theta'_{n+1} = \theta'_0$. We have just proved that the number of re-initialization is finite w.p.1 so that

$$\sum_n \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g(\theta'_{n+1}) - g \circ T(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon, \theta'_{n+1} = \theta'_0 \mid \mathcal{F}_{n-1} \right)$$

is finite $\bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0}$ -a.s. Then (9.27) is finite iff $\sum_n \bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0} \left(\left| g(\theta'_{n+1}) - g \circ T(\theta'_n) \right| \mathbb{1}_{\theta'_n \in \mathcal{K}} \geq \epsilon, \theta'_{n+1} = F_n(\theta'_n) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right)$ is finite $\bar{\mathbb{P}}_{\lambda, \theta'_0}$ -a.s., which is established in the proof above.

9.6 Proofs of Theorem 9.6 and Lemma 9.7

We approximate the non-linear error $\tilde{S}_n - s^*$ by a linear one as follows. For $n \geq \lim_n p_n$,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n - s^* &= G(\tilde{S}_{n-1}) - G(s^*) + \tilde{S}_n - \bar{s}_n \\ &= \Gamma(\tilde{S}_{n-1} - s^*) + \epsilon_n + \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)} + \sum_{i,j} R_{n-1}(i,j) (\tilde{S}_{n-1,i} - s_i^*) (\tilde{S}_{n-1,j} - s_j^*)\end{aligned}$$

where

$$R_{n-1}(i,j) := \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 G(s^* + t(\tilde{S}_{n-1} - s^*))}{\partial s_i \partial s_j} dt$$

and

$$\delta_n^{(1)} := \left(\tilde{S}_n - m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \lambda P_{\theta_n^j} S \right) \mathbb{I}_{|\tilde{S}_{n-1} - s^*| \geq \delta} \quad \delta_n^{(2)} := \left(m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \lambda P_{\theta_n^j} S - \bar{s}_n \right) \mathbb{I}_{|\tilde{S}_{n-1} - s^*| \leq \delta}.$$

Note that $\delta_n^{(1)} \mathbb{I}(\lim_n \tilde{S}_n = s^*)$ has, w.p. 1 only a finite number of non zero values and $\delta_n^{(2)} = O_{wp1}(m_n^{-1})$. The following technical Lemma, from Polya and Szegő [88], vol.1, p-39, is useful in the sequel.

Lemme 9.14 *Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$, $b_n \neq 0$, be two sequences such that (i) the power series $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ has a radius of convergence r , (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/b_{n+1} =: q$, with $|q| < r$. Define $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Then, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n b_n^{-1} = f(q)$.*

9.6.1 Proof of Theorem 9.6

The proof of the first assertion is by direct application of M3, M6 and Lemma 9.14. In addition, $\mu_n = o_{wp1}(1)$ so that $\rho_n \mathbb{I}_{\{\lim_n \tilde{S}_n = s^*\}} = o_{wp1}(1)$. Define

$$H_n := \sum_{1 \leq i \leq q} R_n(i, \cdot) (2\mu_{n,i} + \rho_{n,i}) \quad \text{and} \quad \psi(n, k) := (H_n + \Gamma) \cdots (H_k + \Gamma),$$

with $\psi(n, n+1) = I$ and $\psi(n, k) = 0$ if $k > n+1$. Since G is twice continuously differentiable, and according to the preceding assertion, $R_n \mathbb{I}_{\{\lim_n \tilde{S}_n = s^*\}} = O_{wp1}(1)$, and for any constant $\gamma < \tilde{\gamma} < m^{-1}$, $H_n \mathbb{I}_{\{\lim_n \tilde{S}_n = s^*\}} = o_{wp1}(1)$, and $\|\psi(n, k+1) \mathbb{I}_{\{\lim_n \tilde{S}_n = s^*\}}\|_2 = O_{wp1}(\tilde{\gamma}^{n-k})$ for k large enough. Since

$$\begin{aligned}\rho_n &= (H_n + \Gamma) \rho_{n-1} + r_n + \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)} = \psi(n, 1) \{\bar{s}_0 - s^*\} + \sum_{k=1}^n \psi(n, k+1) r_k \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \psi(n, k+1) (\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)})\end{aligned}$$

with $r_n := \sum_{1 \leq i, j \leq q} R_n(i, j) \mu_{n,i} \mu_{n,j}$, then

$$\rho_n \mathbb{1}_{\{\lim_n \tilde{S}_n = s^*\}} = O_{w.p.1}(1) O_{L^1}(m_n^{-1}) + O_{w.p.1}(\tilde{\gamma}^n).$$

9.6.2 Proof of Lemma 9.7

Define $\bar{\mu}_n := M_n^{-1} \sum_{k=0}^n m_k \mu_k$ and $\bar{\rho}_n := M_n^{-1} \sum_{k=0}^n m_k \rho_k$. We have

$$\bar{\mu}_n = M_n^{-1} \sum_{k=0}^n \left\{ \sum_{j=0}^{n-k} m_{j+k} \Gamma^j \right\} \epsilon_k,$$

so that, since $\{\epsilon_k\}$ is a martingale-increment and $\bar{\mathbb{E}}_{\lambda, \theta'_0} [|\epsilon_k|^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = O_{L^p}(m_k^{-1})$, there exists a finite constant C such that

$$\|\bar{\mu}_n\|_2 \leq CM_n^{-1} \left(\sum_{k=0}^n m_k^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k} m_{j+k} \gamma^j \right)^2 \right)^{-1/2}.$$

Finally, by use of Theorem 9.6, $\bar{\rho}_n = O_{wp1}(1) O_{L^1}(n M_n^{-1}) + O_{wp1}(M_n^{-1})$.

9.7 Uniform Rosenthal's inequality

Let $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$ be a measurable function. For some function $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q$, define

$$\|g\|_f := \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{|g|(x)}{f(x)}.$$

Denote $\mathcal{L}_f := \{g, \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q, \|g\|_f < \infty\}$. Finally, for any signed measure ν on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, denote

$$\|\nu\|_f := \sup_{g, |g| \leq f} |\nu(g)|.$$

Proposition 9.15 *Let P be a ψ -irreducible and aperiodic transition kernel on a general state space $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Let D be an accessible ν_m -small set i.e. there exist a constant $\epsilon > 0$, an integer $m \geq 1$ and a probability measure ν_m on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ such that*

$$P^m(x, A) \geq \epsilon \nu_m(A), \quad x \in D, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \quad (9.28)$$

Let $C \subseteq D$ be an accessible set. Assume there exist some Borel functions $f, V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $f \leq V$, some constants $b < \infty$ and $0 < a < 1$ such that $\sup_D V < \infty$ and

$$\begin{cases} PV(x) \leq V(x) - f(x) + b \mathbb{1}_C(x), \\ f(x) - b \geq af(x), \end{cases} \quad x \in D^c. \quad (9.29)$$

Then, P possesses an invariant probability measure π such that $\pi(f) < \infty$ for any $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\sum_n \|P^n(x, \cdot) - P^n(y, \cdot)\|_f \leq M_{1,f} + M_{2,f} \left(V(x) + V(y) \right), \quad (9.30)$$

where,

$$M_{2,f} := (2 - \epsilon)a^{-1} \quad (9.31)$$

$$M_{1,f} := (2 - \epsilon + \epsilon^{-1}) \sup_{(x, x') \in C \times D} \sum_{k=1}^{m-1} \{P^k f(x) + P^k f(x')\} + \epsilon^{-1} \sup_{(x, x') \in C \times D} \{P^m V(x) + P^m V(x')\}, \quad (9.32)$$

with the convention that $\sum_{k=1}^0 P^k f(x) = 0$.

Corollaire 9.16 For any probability measure (λ, μ) on $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$, and any Borel function $g \in \mathcal{L}_f$,

$$\sum_n |\lambda P^n g - \mu P^n g| \leq \sum_n \int \lambda(dx) \mu(dy) |P^n g(x) - P^n g(y)| \leq M_{1,f} + M_{2,f} (\lambda(V) + \mu(V)).$$

Note that by assumption,

$$\sup_{(x, x') \in C \times D} \sum_{k=1}^{m-1} \{P^k f(x) + P^k f(x')\} \leq \sup_{(x, x') \in C \times D} \{V(x) - f(x) + V(x') - f(x')\} + 2bm$$

and

$$\sup_{(x, x') \in C \times D} \{P^m V(x) + P^m V(x')\} - 2\epsilon\nu_m(V) \leq \sup_{(x, x') \in C \times D} \{V(x) - f(x) + V(x') - f(x')\} + 2bm.$$

Hence, $M_{1,f}$ and $M_{2,f}$ may be bounded by a function of $(m, \epsilon, b, a, \sup_D V)$.

Remarque 9.17 Let P be a ψ -irreducible and aperiodic transition kernel and C be an accessible petite set. It is known from Theorem 14.0.1 in Meyn and Tweedie [72] that if there exist some Borel functions $f, V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $f \leq V$, such that $V(x_0) < \infty$ for some x_0 , and $PV \leq V - f + b\mathbb{1}_C$, then the set $S_V := \{V < \infty\}$ is non-empty, full and absorbing, and for any $x \in S_V$, $\lim_n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0$. In addition, Theorem 14.3.4 in Meyn and Tweedie [72] states that there exist some constants $M_{i,f}$, such that (9.30) is verified, but these authors do not provide an explicit expression for the constants $M_{i,f}$. The construction used by Meyn and Tweedie [72] based on the Nummelin's splitting procedure, which consists in creating a chain with an atom on an extended probability space such that the properties of the split chain inherits from or passes on to the initial chain P . The constants $M_{i,f}$ depend in an intricate way on the increment of the renewal process associated to the time of the successive visits of the atom by the split chain. It is rather difficult to get an explicit expression for this bound in full generality. This explicit expression of the bound is crucial for most the discussion that follows, because we need to control the moments of the Monte-Carlo sum for a family of Markov transition kernels indexed by a parameter θ .

Proof 17 (Proof of Proposition 9.15) For notational simplicity, it is assumed that $m = 1$. Generalization to arbitrary m can be done along the lines of the proof of Theorem 3 in Fort and Moulines [38]. The proof is based on coupling technique (Thorisson [115]). Denote $\Delta := C \times D \cup D \times C$. Let R be the residual kernel defined as

$$R(x, A) := (1 - \epsilon)^{-1} (P(x, A) - \epsilon \nu_m(A)), \quad x \in D, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \quad (9.33)$$

Let $Z := \{\Omega, \mathcal{A}, P_{x,x',d}, Z_n = (X_n, X'_n, d_n)\}$ be a canonical Markov process with transition kernel P^* on $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} P^*((x, x', d), A \times A' \times \{i\}) &:= \mathbb{1}_{\Delta \times \{0\}}(x, x', d) [\mathbb{1}_{\{1\}}(i) \epsilon \nu_m(A \cap A') + \mathbb{1}_{\{0\}}(i) (1 - \epsilon) R(x, A) R(x', A)] \\ &\quad + \mathbb{1}_{\Delta^c \times \{0\}}(x, x', d) \mathbb{1}_{\{0\}}(i) P(x, A) P(x', A') + \mathbb{1}_{\{1\}}(d) \mathbb{1}_{\{1\}}(i) P(x, A \cap A'), \end{aligned}$$

for $(x, x', d) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$, $(A, A') \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $i = 0, 1$. In words, set $Z_0 := (x, x', 0)$. Each time (X_k, X'_k, d_k) hits the set $\Delta \times \{0\}$, an ϵ -biased coin is tossed. If the coin comes up head, then the coupling is successful : the next value of $X_{k+1} = X'_{k+1}$ is simulated from ν_m , $d_{k+1} = 1$, and the two components remain forever coupled. Otherwise, the next value X_{k+1} and X'_{k+1} are drawn independently from the residual kernel and $d_{k+1} = 0$. If $(X_k, X'_k, d_k) \in \Delta^c \times \{0\}$, then the processes are updated independently from P . It is easily seen that

$$P_{x,x',0}(X_n \in A) = P^n(x, A) \quad P_{x,x',0}(X'_n \in A) = P^n(x', A),$$

for all $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Define $T := \inf\{n \geq 1, d_n = 1\}$ the coupling time (with the convention that $\inf \emptyset = \infty$), $T_0 := \inf\{k \geq 0, (X_k, X'_k) \in \Delta\}$ and, for $i \geq 1$, $T_i := \inf\{k > T_{i-1}, (X_k, X'_k) \in \Delta\}$ the successive hitting times on Δ . By definition of T , we have $X_n \mathbb{1}_{T \geq n} = X'_n \mathbb{1}_{T \geq n}$ and for any Borel function $g \in \mathcal{L}_f$,

$$\sum_{n \geq 0} \int \lambda(dx) \mu(dy) |P^n g(x) - P^n g(y)| \leq \|g\|_f \mathbb{E}_{\lambda, \mu, 0} \left[\sum_{n=0}^{T-1} (f(X_n) + f(X'_n)) \right].$$

Define

$$A(f) := (1 - \epsilon) \sup_{(x, x') \in \Delta} \int R(x, dy) R(x', dy') \mathbb{E}_{y, y', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} (f(X_n) + f(X'_n)) \right]. \quad (9.34)$$

The first set in the proof consists in showing that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} (f(X_n) + f(X'_n)) \right] &\leq \mathbb{1}_{\Delta}(x, x') \{f(x) + f(x')\} + a^{-1} \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \{V(x) + V(x')\} \\ &\leq a^{-1} \{V(x) + V(x')\}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

When $(x, x') \in \Delta$ the bound above is obvious by definition of T_0 . Define $W(x, x', d) = W(x, x') := V(x) + V(x')$, $d = 0, 1$. Note that, for $(x, x') \in \Delta^c$,

$$P^* W(x, x', 0) \leq W(x, x') - (f(x) + f(x')) + b(\mathbb{1}_C(x) + \mathbb{1}_C(x')).$$

Since $(x, x') \in \Delta^c$, $x \in C$ (resp. $x' \in C$) implies that $x' \notin D$ (resp. $x \notin D$), so that

$$f(x') - b\mathbb{I}_C(x) \geq af(x) \quad f(x) - b\mathbb{I}_C(x') \geq af(x).$$

Hence, for $(x, x') \in \Delta^c$,

$$P^*W(x, x', 0) \leq W(x, x') - a(f(x) + f(x'))$$

and the proof of (9.35) follows from the so-called Dynkin's formula (Proposition 11.3.2 [72]). Note that (9.35) shows that $\mathbb{E}_{x, x', 0}[T_0] < \infty$, which implies that $P_{x, x', 0}(T < \infty) = 1$ for all $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. We now prove that

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T-1} (f(X_n) + f(X'_n)) \right] \leq (2 - \epsilon) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} \{f(X_n) + f(X'_n)\} \right] + A(f)/\epsilon. \quad (9.36)$$

By the strong Markov property, and by noting that $P_{x, x', 0}(d_{T_j} = 0) = (1 - \epsilon)^j$, for $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_{j+1}} (f(X_n) + f(X'_n)) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right] &= (1 - \epsilon) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_j} (f(X_n) + f(X'_n)) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \mathbb{E}_{X_{T_j+1}, X'_{T_j+1}, 0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} (f(X_n) + f(X'_n)) \right] \right], \\ &\leq (1 - \epsilon) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_j} (f(X_n) + f(X'_n)) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j-1}+1}) \right] + A(f)(1 - \epsilon)^j, \end{aligned}$$

with the convention $T_{-1} + 1 = 0$. By straightforward recursion,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_{j+1}} (f(X_n) + f(X'_n)) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right] &\leq (1 - \epsilon)^j \left((1 - \epsilon) \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} (f(X_n) + f(X'_n)) \right] + (j + 1)A(f) \right). \end{aligned}$$

(9.36) then follows from the decomposition,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T-1} (f(X_n) + f(X'_n)) \right] &= \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} (f(X_n) + f(X'_n)) \right] + \\ &\quad \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\sum_{n=0}^{T_{j+1}} (f(X_n) + f(X'_n)) \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \mathbb{I}_{\{1\}}(d_{T_{j+1}+1}) \right] \end{aligned}$$

and the strong Markov property upon noting that $P_{X_{T_j}, X'_{T_j}, 0}(d_{T_j+1} = 1) = \epsilon$. The proposition follows from (9.34) to (9.36).

Proposition 9.18 Let P be a ψ -irreducible aperiodic transition kernel on $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Let D_i be some accessible ν_{m_i} -small sets with minorizing constants $\epsilon_i > 0$, and $C_i \subseteq D_i$, $i = 0, 1$, be some accessible sets. Let $p \geq 2$. Assume that there exist some Borel functions $f_i, V_i : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $i = 0, 1$, $f_0 \leq V_0 \leq V_0^p \leq f_1 \leq V_1$, some constants $b_i < \infty$, $0 < a_i < 1$, such that $\sup_{D_i} V_i < \infty$ and

$$\begin{cases} PV_i(x) \leq V_i(x) - f_i(x) + b_i \mathbb{1}_{C_i}(x), \\ f_i(x) - b_i \geq a_i f_i(x), \end{cases} \quad x \in D_i^\circ, \quad (9.37)$$

for $i = 0, 1$. Then, for any Borel function $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $g \in \mathcal{L}_{f_0}$,

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq \|g\|_{f_0}^p n^{p/2} C(x) \quad x \in \mathcal{X}, \quad (9.38)$$

where π is the invariant probability measure,

$$C(x) := 6^p C_p \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{\left[M_{1,f_0} + M_{2,f_0} \{V_0(x) + \pi(V_0)\} \right]^p}{V_0^p(x)} \left(\pi(f_1) + M_{1,f_1} + M_{2,f_1} \{V_1(x) + \pi(V_1)\} \right),$$

C_p is the Rosenthal's constant, and M_{i,f_j} , $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, are given in Proposition 9.15.

Proof 18 (Proof of Proposition 9.18) By Theorem 14.0.1. of Meyn and Tweedie [72], there exists an invariant probability measure π such that $\pi(f_1) < \infty$. Hence, $\pi(V_0) < \infty$ and by application of Corollary 9.16, we have for any $x \in \mathcal{X}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P^k g(x) - \pi(g)| \leq \|g\|_{f_0} \sum_{k \geq 0} \|P^k(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_0} \leq \|g\|_{f_0} \left(M_{1,f_0} + M_{2,f_0} \{V_0(x) + \pi(V_0)\} \right).$$

Denote

$$\hat{g}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \{P^k g(x) - \pi(g)\},$$

the unique solution (up to a constant) of the Poisson equation $\hat{g} - P\hat{g} = g - \pi(g)$ so that $\hat{g} \in \mathcal{L}_{V_0}$. Write

$$\sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} = \sum_{k=1}^n \{\hat{g}(\Phi_k) - P\hat{g}(\Phi_{k-1})\} - P\hat{g}(\Phi_n) + P\hat{g}(\Phi_0).$$

$\{\hat{g}(\Phi_k) - P\hat{g}(\Phi_{k-1})\}$ is a L^p -martingale increment (w.r.t. the initial distribution δ_x) and by applying the Rosenthal's and Minkovsky's inequalities, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \right] &\leq 3^{p-1} \left\{ C_p \mathbb{E}_x \left[\left\{ \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_x \left[|\hat{g}(\Phi_k) - P\hat{g}(\Phi_{k-1})|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \right\}^{p/2} \right] \right. \\ &\quad \left. + C_p \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^n |\hat{g}(\Phi_k) - P\hat{g}(\Phi_{k-1})|^p \right] + \mathbb{E}_x \left[|P\hat{g}(\Phi_n)|^p \right] + |P\hat{g}(x)|^p \right\} \end{aligned}$$

where C_p is the Rosenthal's constant and $\{\mathcal{F}_n\}$ is the natural filtration of the Markov Chain $\{\Phi_n\}$. In addition,

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_x \left[|\hat{g}(\Phi_k) - P\hat{g}(\Phi_{k-1})|^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] \right\}^{p/2} \leq \left\{ \sum_{k=1}^n P|\hat{g}|^2(\Phi_{k-1}) \right\}^{p/2} \leq n^{p/2-1} \sum_{k=1}^n P|\hat{g}|^p(\Phi_{k-1}).$$

Hence,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[\left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \right] \\ & \leq 3^{p-1} \left\{ C_p n^{p/2-1} \sum_{k=1}^n P^k |\hat{g}|^p(x) + C_p 2^p \sum_{k=1}^n P^k |\hat{g}|^p(x) + P|\hat{g}|^p(x) + P^{n+1} |\hat{g}|^p(x) \right\} \\ & \leq 3^{p-1} \left\{ C_p \left(n^{p/2-1} + 2^p \right) + 1 \right\} \left\{ \sum_{k \geq 1} \left| P^k |\hat{g}|^p(x) - \pi(|\hat{g}|^p) \right| + n\pi(|\hat{g}|^p) \right\} \\ & \leq 6^p C_p n^{p/2} \left\{ \sum_{k \geq 1} \left| P^k |\hat{g}|^p(x) - \pi(|\hat{g}|^p) \right| + \pi(|\hat{g}|^p) \right\}. \end{aligned}$$

Since $|\hat{g}|^p \in \mathcal{L}_{f_1}$, $\pi(|\hat{g}|^p) < \infty$, an application of Proposition 9.15 shows that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P^k |\hat{g}|^p(x) - \pi(|\hat{g}|^p) \right| \leq \| |\hat{g}|^p \|_{V_0^p} \left(M_{1,f_1} + M_{2,f_1} \{V_1(x) + \pi(V_1)\} \right).$$

This yields the desired result.

Uniform geometric ergodicity Let P be a ψ -irreducible aperiodic transition kernel. Assume that the whole state space is ν_m small *i.e.* there exist $\epsilon > 0$, a probability measure ν_m on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ and an integer $m \geq 1$ such that for all $x \in \mathcal{X}$,

$$P^m(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot).$$

Then for any Borel function g such that $\sup_{\mathcal{X}} |g| < \infty$, $p \geq 2$ we have

$$\mathbb{E}_x \left[\left| \sum_{k=0}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \right] \leq 6^p C_p \sup_{\mathcal{X}} |g|^p \left\{ 1 + 2 \{1 - (1 - \epsilon)^{1/m}\}^{-1} \right\} n^{p/2}, \quad (9.39)$$

where C_p is the Rosenthal's constant.

To that goal, we prove easily that

$$\sum_n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \leq 2 \left(1 - (1 - \epsilon)^{1/m} \right)^{-1},$$

since the whole space is small, and the proof of (9.39) is along the same lines than the proof of Proposition 9.18.

The Foster-Lyapunov drift condition Let P be a ψ -irreducible and aperiodic transition kernel and C be an accessible petite set. Assume that there exist some constants $0 < \lambda < 1$, $b < \infty$ and a Borel function $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $V(x) \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$, such that $\sup_C V < \infty$ and

$$PV \leq \lambda V + b \mathbb{1}_C.$$

Let $p \geq 2$. Define $M := 1 + \{\sup_C V \vee b/(1 - \lambda^{1/p})^p\}$. Then the set $\{V \leq M\}$ is ν_m -small with minorizing constant $\epsilon > 0$, and for any Borel function $g : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty)$, $|g| \leq V^{1/p}$,

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^n \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq C(x) n^{p/2} \quad x \in \mathcal{X},$$

where

$$\begin{aligned} C(x) := & \frac{6^p C_p M}{1 - \lambda} \left[\frac{(2 - \epsilon)}{M^{1/p}(1 - \lambda^{1/p}) - b^{1/p}} \right]^p \\ & \times \left\{ \frac{b}{1 - \lambda} + (2 - \epsilon + 3\epsilon^{-1})(2\lambda M + bm) + \frac{(2 - \epsilon)M(1 - \lambda)}{M(1 - \lambda) - b} \{V(x) + \frac{b}{1 - \lambda}\} \right\} \end{aligned}$$

and C_p is the Rosenthal's constant.

Proof 18 The first step is to prove that the level set $D := \{V \leq M\}$ is small. By assumption, $\sup_{x \in D} \mathbb{E}_x[\tau_C] < \infty$, then for any $\eta > 0$, there exists $n_0 = n_0(\eta)$ such that $P_x(\sigma_C \geq n) \leq \eta$, $x \in D$ and $n \geq n_0$. Then we can define a distribution $a = \{a(n)\}$ on \mathbb{N} such that for $x \in D$ and $0 < l < 1$, $\sum_n a(n)P^n(x, C) \geq \sum_{n \leq n_0} a(n)P^n(x, C) \geq l(1 - \eta)$. Finally, since C is petite, there exist some measure ν on $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ and some distribution $b = \{b(n)\}$ on \mathbb{N} such that $\sum_n a * b(n)P^n(x, A) \geq l(1 - \eta)\nu(A)$ which proves that D is petite and then small (Theorem 5.5.7. [72]). Note in addition that by definition, $D \supseteq C$.

Define

$$f_0 := V^{1/p} \quad V_0 := V^{1/p}/(1 - \lambda^{1/p}) \quad b_0 := b^{1/p}/(1 - \lambda^{1/p}),$$

and

$$f_1 := V/(1 - \lambda^{1/p})^p \quad V_1 := V/\{(1 - \lambda)(1 - \lambda^{1/p})^p\} \quad b_1 := b/\{(1 - \lambda)(1 - \lambda^{1/p})^p\}.$$

It is easily seen that $PV_i \leq V_i - f_i + b_i \mathbb{1}_C$, $i = 0, 1$, and $1 \leq f_0 \leq V_0 \leq V_0^p \leq f_1 \leq V_1$. Set

$$a_0 := 1 - \frac{b^{1/p}}{(1 - \lambda^{1/p})M^{1/p}} \quad a_1 := 1 - \frac{b}{(1 - \lambda)M};$$

then $0 < a_i < 1$ and $f_i - b_i \geq a_i f_i$ on D^c , $i = 0, 1$. We then conclude by use of Proposition 9.18.

9.8 Tables and Histograms

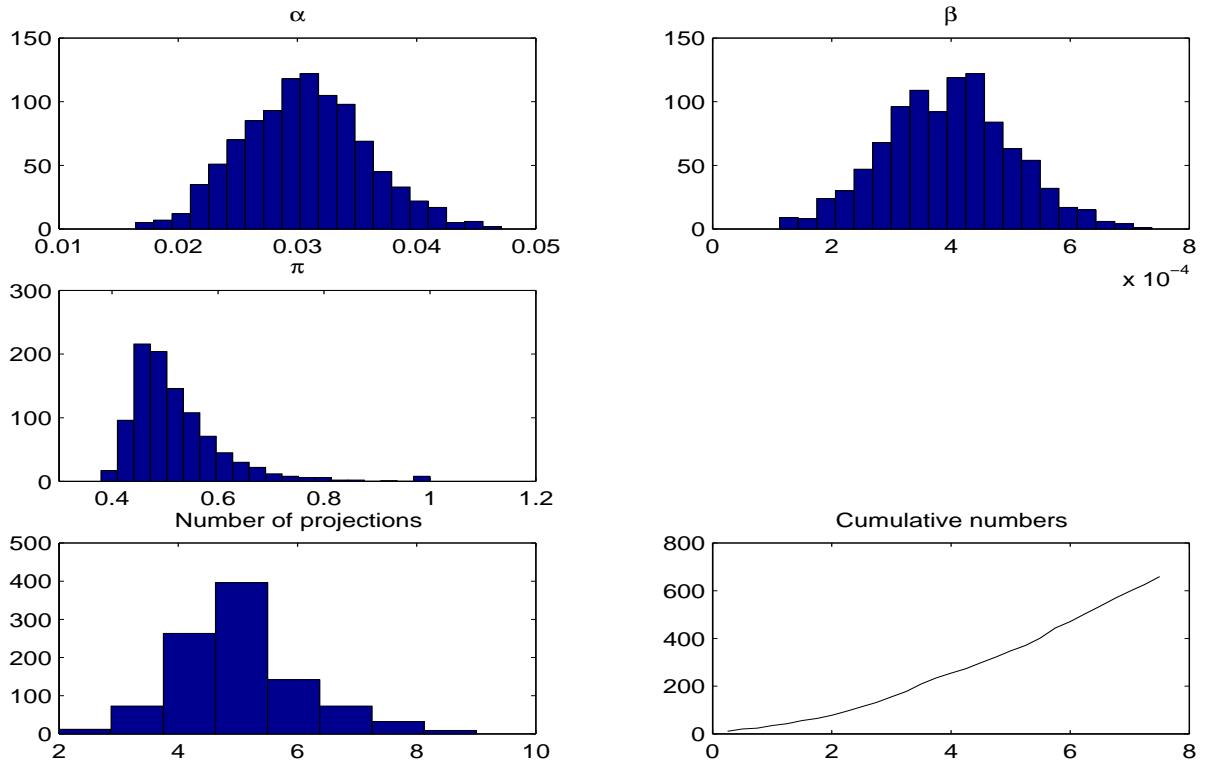


FIG. 9.1 – Simulation results : 1000 estimates of the maximum likelihood computed from 1000 vectors of observations. (sample) mean=[$3.05e - 02$; $3.95e - 04$; $5.20e - 01$].

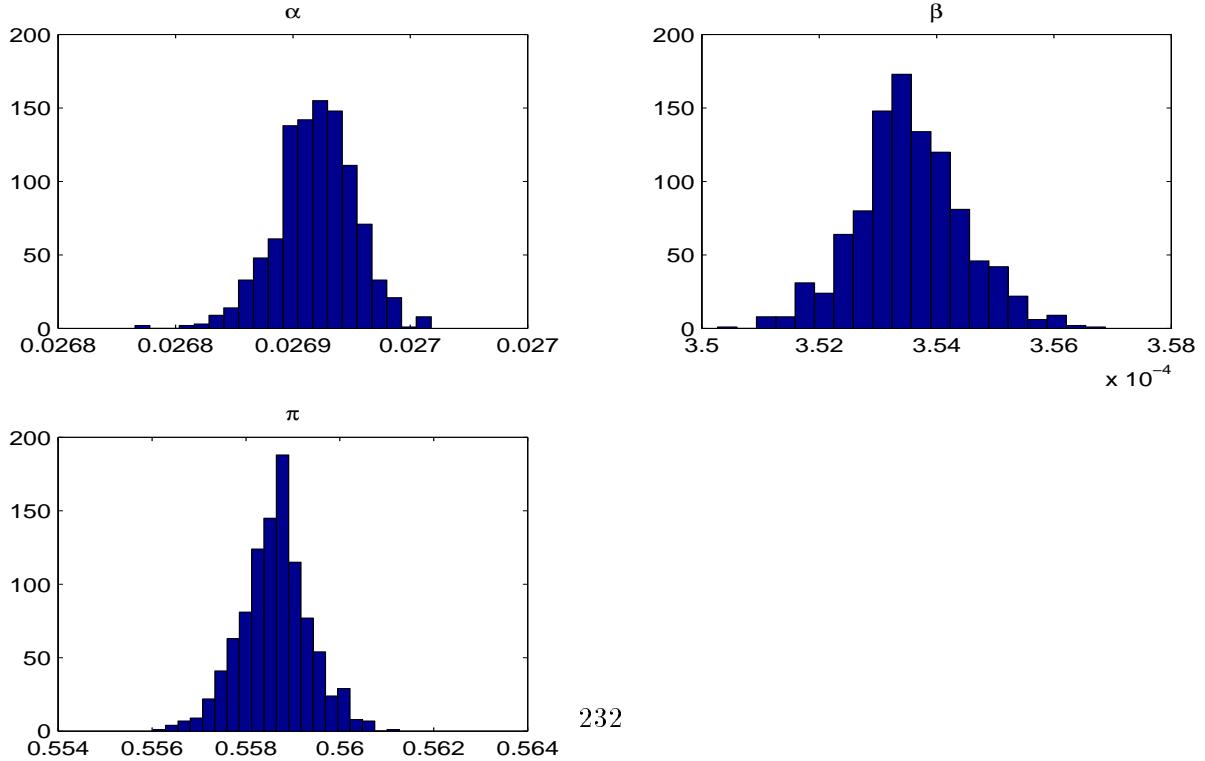


FIG. 9.2 – Simulation results : 1000 stable MCEM estimates of the maximum likelihood θ^* from a given vector of observation.

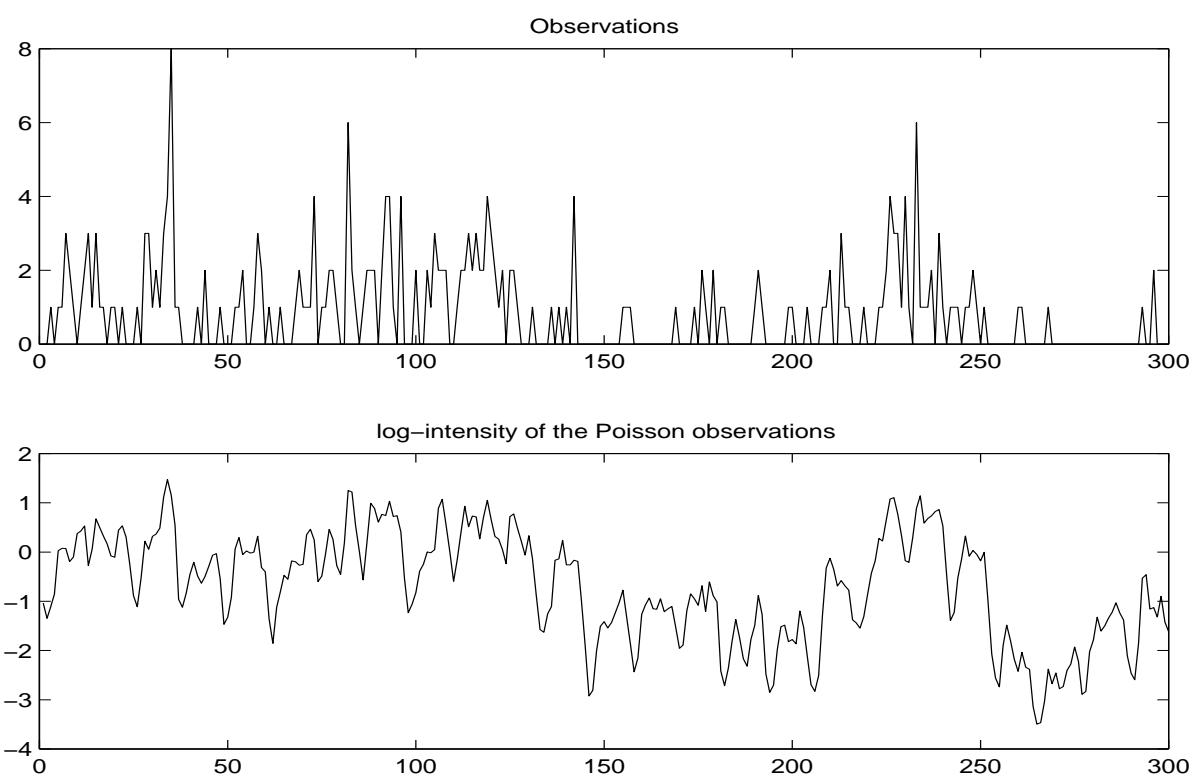


FIG. 9.3 – Observations and log-intensity of the observations

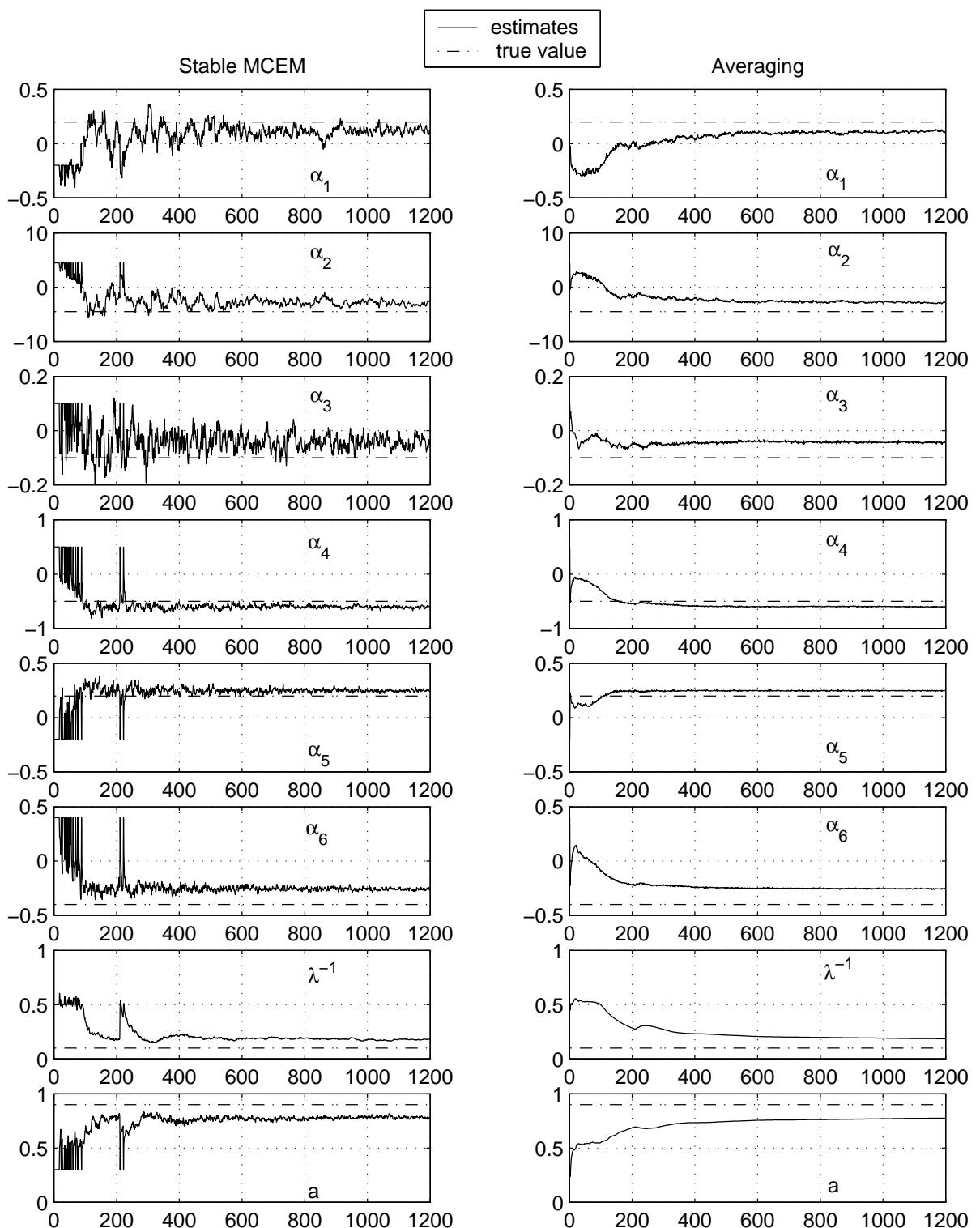


FIG. 234 –
9.4 –

Annexe

Annexe A : Annexe du Chapitre 2

A.1 Démonstration du Lemme 2.9

A.1.1 Cas sous-géométrique

Soit $M := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^0(\tau)]$. Puisque

$$r^0(n+m) \leq r^0(m) + r(m)r^0(n), \quad (\text{A.40})$$

on écrit

$$\mathbb{E}_x[r^0(\tau^\eta)] \leq \sum_n \mathbb{E}_x[r^0(\tau^n) \mathbb{1}_{\eta \geq n}] \leq \sum_n a_x(n) + M b_x(n)$$

où $a_x(n) := \mathbb{E}_x[r^0(\tau^{n-1}) \mathbb{1}_{\eta \geq n}]$ et $b_x(n) := \mathbb{E}_x[r(\tau^{n-1}) \mathbb{1}_{\eta \geq n}]$. Soit $\epsilon > 0$ tel que

$$(1+\epsilon)(1-\gamma) + M\epsilon < 1,$$

et n_ϵ tel que

$$r(n) \leq \epsilon r^0(n), \quad n \geq n_\epsilon.$$

Soit $c := c(\epsilon, n_\epsilon)$ tel que

$$r(n+m) \leq r(m)(1+\epsilon) + c, \quad m \geq 0, n \leq n_\epsilon.$$

En utilisant ces trois relations et la propriété de Markov, pour $r(\tau^{n-1}) = r(\tau^{n-2} + \tau \circ \theta^{\tau^{n-2}})$, on montre que $b_x(n)$ vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned} b_x(n) &\leq (1+\epsilon)(1-\gamma)b_x(n-1) + c(1-\gamma)^{n-1} + M\epsilon b_x(n-1) \\ &\leq \{(1+\epsilon)(1-\gamma) + M\epsilon\}b_x(n-1) + c(1-\gamma)^{n-1} \end{aligned}$$

et $\sum_n b_x(n) < \infty$. D'autre part, $a_x(n) = a_x(n-1)(1-\gamma) + M b_x(n-1)$, et par suite, $\sum_n a_x(n) < \infty$. Ce qui conclut la démonstration. La seconde assertion résulte de la majoration

$$\tau^\eta \leq \tau + \tau^\eta \circ \theta^\tau.$$

A.1.2 Cas géométrique

Soit $\kappa > 1$. Par l'inégalité de Jensen, on a $\mathbb{E}_x[\kappa^\tau] \leq (\mathbb{E}_x[r^\tau])^{\ln \kappa / \ln r}$ donc

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\kappa^\tau] \leq \left(\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^\tau] \right)^{\ln \kappa / \ln r}.$$

On écrit

$$\mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^n}] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^n} \mathbb{1}_{\eta=n}] \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^n} \mathbb{1}_{\eta>n-1}]$$

et par la propriété de Markov fort,

$$\mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^n}] \leq \mathbb{E}_x[\kappa^\tau] + \left\{ \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\kappa^\tau] \right\} \sum_{n \geq 2} \mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^{n-1}} \mathbb{1}_{\eta>n-1}].$$

Puisque

$$xy \leq \rho^n x^2 + \rho^{-n} y^2,$$

pour tous x, y positifs et $0 < \rho < 1$, il vient que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^{n-1}} \mathbb{1}_{\eta>n-1}] &\leq \rho^n \mathbb{E}_x[\kappa^{2\tau^{n-1}}] + \rho^{-n} P_x(\eta > n-1) \\ &\leq \mathbb{E}_x[\kappa^{2\tau}] \left\{ \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\kappa^{2\tau}] \right\}^{n-2} \rho^n + \rho^{-n} (1-\gamma)^{n-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^n}] &\leq \mathbb{E}_x[\kappa^\tau] + \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\kappa^\tau] \left\{ \rho^{-2} \sum_{n \geq 0} ((1-\gamma)\rho^{-1})^n + \mathbb{E}_x[\kappa^{2\tau}] \rho^2 \sum_{n \geq 0} \left(\rho \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\kappa^{2\tau}] \right)^n \right\} \\ &\leq \mathbb{E}_x[r^\tau]^{\ln \kappa / \ln r} + \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^\tau]^{\ln \kappa / \ln r} \left\{ \rho^{-2} \sum_{n \geq 0} ((1-\gamma)\rho^{-1})^n \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}_x[r^\tau]^{2 \ln \kappa / \ln r} \rho^2 \sum_{n \geq 0} \left(\rho \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^\tau]^{2 \ln \kappa / \ln r} \right)^n \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $M := \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^\tau]$, pour tout $1-\gamma < \rho < 1$ et $1 < \kappa < \rho^{-\ln r / \{2 \ln M\}}$,

$$\mathbb{E}_x[\kappa^{\tau^n}] \leq \mathbb{E}_x[r^\tau]^{\ln \kappa / \ln r} + \frac{\rho^{-2} M^{\ln \kappa / \ln r}}{1 - (1-\gamma)\rho^{-1}} + \mathbb{E}_x[r^\tau]^{2 \ln \kappa / \ln r} \frac{\rho^2 M^{\ln \kappa / \ln r}}{1 - \rho M^{2 \ln \kappa / \ln r}}.$$

Annexe B : Annexe du Chapitre 3

B.2 Résultat de Meyn et Tweedie sur l'ergodicité géométrique

Nous rappelons les Théorèmes 15.0.1. et 15.2.1 [72].

Soit P un noyau ψ -irréductible apériodique. Soit $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ un ensemble petite. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $\lambda < 1$ tel que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x [\lambda^{-\tau_C}] < \infty$.
- (ii) **Condition de drift de Foster-Lyapunov** il existe une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$, finie en un point x_0 , et des constantes $\lambda < 1$, $b < \infty$ telles que

$$Pf(x) \leq \lambda f(x) + b \mathbb{1}_C(x).$$

- (iii) C est accessible et f -géométriquement régulier *i.e.* pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ accessible, il existe $r > 1$ tel que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A - 1} r^k f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

Si l'une de ces conditions est vérifiée, il existe des constantes $r_* > 1$, $R < \infty$ telles que

$$\sum_n r_*^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \leq R f(x) \quad (\text{B.41})$$

pour tout $x \in \{f < \infty\}$, ensemble plein et absorbant, où f est une solution de la condition de drift.

B.3 Résultat de Tuominen et Tweedie sur l'ergodicité sous-géométrique

Nous rappelons les Théorèmes 2.1. et 4.3. [117].

Soit P un noyau ψ -irréductible apériodique. Soit $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ un ensemble petite. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty;$$

(ii) **Condition de drift de Tuominen-Tweedie** il existe une famille de fonctions $\{V_n\}$, $V_n : \mathcal{X} \rightarrow [1, \infty]$ et une constante $b < \infty$ telles que $\sup_C V_0 < \infty$ et

$$V_0(x) = \infty \implies V_1(x) = \infty,$$

$$PV_{n+1}(x) + r(n)f(x) \leq V_n(x) + br(n)\mathbb{I}_C(x),$$

(iii) C est accessible et (f, r) -régulier *i.e.* pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ accessible,

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_A - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty;$$

Si l'une de ces conditions est vérifiée,

$$\lim_n r(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0,$$

pour tout x dans l'ensemble plein et absorbant

$$\left\{ x \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ accessible} \right\}$$

et qui contient $\{V_0 < \infty\}$. Si de plus, $\Delta r(n) := r(n) - r(n-1) \in \Lambda_s$,

$$\sum_n \Delta r(n) \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f < \infty$$

pour tout x dans l'ensemble $\left\{ x \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_B - 1} \Delta r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ accessible} \right\}$.

B.4 Démonstration de la Proposition 3.4

Nous construisons une solution à la condition de drift D2 $[f, r, C]$, en posant

$$V_n(x) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_C} r(k+n) f(\Phi_k) \right].$$

En itérant la condition de drift, nous obtenons

$$P^m V_{m(n+1)}(x) \leq V_{mn}(x) - 1/2 r_m(n) f^{(m)}(x) + b^{(m)} r_m(n) \mathbb{I}_{C'}(x)$$

pour un ensemble petite $C' \supseteq C$ et une constante $b^{(m)} < \infty$ (Lemme 14.2.8. [72]). En particulier, cela entraîne

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C^{(m)} - 1} r_m(k) f^{(m)}(\Phi_{km}) \right] \leq 2V_0(x) + 2b^{(m)} \mathbb{E}_x \left[r_m^0(\tau_C^{(m)}) \right] \leq 2V_0(x) + 2b^{(m)} \mathbb{E}_x \left[r^0(m\tau_C^{(m)}) \right] \quad (\text{B.42})$$

où

$$V_0(x) \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] (1 + r(1) \sup_C f). \quad (\text{B.43})$$

Nous appliquons le Lemme 2.9 avec $\tau = \tau_C : \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[r^0(\tau)] < \infty$ et pour tout $x \in S(f, r, C)$,

$$\mathbb{E}_x \left[r^0(\tau) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty \quad (\text{B.44})$$

et en particulier, τ est fini P_x -p.s. On définit la suite $\{u_n\}$ par

$$u_n := 1 \text{ si } \tau_C = m\tau_C^{(m)}, \quad u_n := 0 \text{ sinon,}$$

de sorte que $P_x(u_n = 1 | \mathcal{H}_{n-1}) = 1/m > 0$.

Nous obtenons le résultat à l'aide de (B.42), (B.43) et du Lemme 2.9.

B.5 Démonstration de la Proposition 3.5

Soit

$$\check{C} := C \times \{0\} \cup C \times \{1\}.$$

Nous commençons par montrer que pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\check{\mathbb{E}}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\check{C}} - 1} r(k) f(X_k) \right] = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right]. \quad (\text{B.45})$$

Nous écrivons

$$\check{\mathbb{E}}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\check{C}} - 1} r(k) f(X_k) \right] = \sum_{n \geq 0} \check{\mathbb{E}}_x \left[r(n) f(X_n) \mathbb{I}_{\tau_{\check{C}} > n} \right].$$

Par définition du processus $Z = (X, d)$, $\check{P}_{(x,d)}(X_1 \in A | X_0 = x) = P(x, A)$ donc pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[f(X_n) \mathbb{I}_{\tau_{\check{C}} > n} \right] &= \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[\mathbb{I}_{C^c}(X_1) \cdots \mathbb{I}_{C^c}(X_n) f(X_n) \right] \\ &= \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[\mathbb{I}_{C^c}(X_1) \cdots \mathbb{I}_{C^c}(X_{n-1}) \int_{C^c} f(x_n) P(X_{n-1}, dx_n) \right] \\ &= \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[\mathbb{I}_{C^c}(X_1) \cdots \mathbb{I}_{C^c}(X_{n-2}) \int_{C^c} P(X_{n-2}, dx_{n-1}) \int_{C^c} f(x_n) P(x_{n-1}, dx_n) \right] \end{aligned}$$

et par récurrence,

$$\check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[f(X_n) \mathbb{1}_{\tau_{\tilde{C}} > n} \right] = \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[g_n(X_1) \right]$$

où

$$g_n(x) := \mathbb{1}_{C^c}(x) \int_{C^c} P(x, dx_2) \int_{C^c} P(x_2, dx_3) \cdots \int_{C^c} P(x_{n-2}, dx_{n-1}) \int_{C^c} f(x_n) P(x_{n-1}, dx_n).$$

Ainsi,

$$\check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[f(X_n) \mathbb{1}_{\tau_{\tilde{C}} > n} \right] = \mathbb{1}_{C \times \{0\}}((x,d)) Rg_n(x) + \mathbb{1}_{C^c \times \{0\}}((x,d)) Pg_n(x) + \mathbb{1}_{C \times \{1\}}((x,d)) \nu_1(g_n),$$

et en appliquant $(\delta_x)^*$, nous avons,

$$\check{\mathbb{E}}_x \left[f(X_n) \mathbb{1}_{\tau_{\tilde{C}} > n} \right] = Pg_n(x);$$

ce qui conclut la démonstration de (B.45).

(B.45) entraîne

$$\sup_{(x,d) \in \tilde{C}} \check{\mathbb{E}}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\tilde{C}}-1} r(k) \check{f}(Z_k) \right] = \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty.$$

En conséquence, il existe une solution à la condition drift D2 $[f, r, C]$ pour le noyau \check{P} et les fonctions $\{\check{V}_n((x,d))\}$ de sorte que , par le Théorème 2.4, il existe $b < \infty$ tel que

$$\check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[\sum_{k=0}^{\tau_\alpha-1} r(k) \check{f}(Z_k) \right] = \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[\sum_{k=0}^{\tau_\alpha-1} r(k) f(X_k) \right] \leq \check{V}_0((x,d)) + b \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[r^0(\tau_\alpha) \right]$$

avec $\check{V}_0((x,d)) := \check{\mathbb{E}}_{(x,d)} \left[\sum_{k=0}^{\tau_\alpha} r(k) f(X_k) \right]$. Donc,

$$\check{\mathbb{E}}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_\alpha-1} r(k) f(X_k) \right] \leq (\delta_x)^* (\check{V}_0) + b \check{\mathbb{E}}_x \left[r^0(\tau_\alpha) \right]. \quad (\text{B.46})$$

Pour conclure, nous appliquons le Lemme 2.9 pour la chaîne de Markov bifurquée Z , avec $\tau = \tau_{\tilde{C}}$ et $u_n = 1$ si $d_{\tau^n} = 1$. Pour $x \in S(f, r, C)$, $\check{\mathbb{E}}_x[r^0(\tau)] < \infty$ et cela entraîne en particulier que τ est fini $P_{(x,d)}$ p.s ; de plus,

$$\check{P}_{(x,d)} \left(u_n = 1 | \mathcal{H}_{n-1} \right) = \check{P}_{(x,d)} \left(u_n = 1 | \mathcal{H}_n \right) = \epsilon > 0.$$

Puisque $\sup_{(x,d) \in \tilde{C}} \check{\mathbb{E}}_{(x,d)}[r^0(\tau)] < \infty$, nous en déduisons l'existence d'une constante c et d'une suite r' telles que

$$\check{\mathbb{E}}_x \left[r'^0(\tau_\alpha) \right] \leq c \check{\mathbb{E}}_x \left[r'^0(\tau_{\tilde{C}}) \right] \leq c \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} r'(k) f(\Phi_k) \right] \quad (\text{B.47})$$

où $r' = r$ si $r \in \Lambda_s$ et $r' \leq r$, $r' \in \Lambda_g$ si $r \in \Lambda_g$. La proposition se déduit donc de (B.46) et (B.47) en remarquant que

$$\left(\delta_x\right)^* \left(\check{V}_0\right) \leq \left(1 + r(1) \sup_C f\right) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right].$$

B.6 Démonstration de la Proposition 3.7

Soient n_0 et $\gamma > 0$ tels que $u(n) \geq \gamma$ pour tout $n \geq n_0$: l'existence de telles constantes est justifiée par le théorème de renouvellement. Nous construisons une suite de v.a. $\{H_k\}$ et $\{\nu_k\}$ de la façon suivante :

$$H_0 := \max\{S_0, S'_0\} \quad \nu_0 := 0.$$

Nous présentons la construction en supposant $H_0 = S'_0$. Pour $n \geq 0$, soit

$$\begin{aligned} H_{2n+1} &:= \min_j \left\{ S_j - S'_{\nu_{2n}+n_0}, S_j - S'_{\nu_{2n}+n_0} \geq 0 \right\} =: S_{\nu_{2n+1}} - S'_{\nu_{2n}+n_0}, \\ H_{2n+2} &:= \min_j \left\{ S'_j - S_{\nu_{2n+1}+n_0}, S'_j - S_{\nu_{2n+1}+n_0} \geq 0 \right\} =: S'_{\nu_{2n+2}} - S_{\nu_{2n+1}+n_0}. \end{aligned}$$

Autrement dit, partant de $H_0 = S'_0$, on laisse passer n_0 renouvellements du processus S' puis on attend (pendant la durée H_1) le premier renouvellement du processus S qui suit S'_{n_0} . On le note S_{ν_1} . On laisse passer n_0 renouvellements du processus S puis on attend (pendant la durée H_2) le premier renouvellement du processus S' qui suit $S_{\nu_1+n_0}$. On le note S_{ν_2} . Et ainsi de suite. On définit la filtration $\{\mathcal{G}_n\}$, $n \geq 0$, avec la convention $\nu_{-1} := -n_0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2n} &:= \sigma(S_l, S'_k, l \leq \nu_{2n-1} + n_0, j \leq \nu_{2n} + n_0), \\ \mathcal{G}_{2n+1} &:= \sigma(S_l, S'_k, l \leq \nu_{2n+1} + n_0, j \leq \nu_{2n} + n_0), \end{aligned}$$

en sorte que le processus

$$L_n := H_n + \sum_{k=1}^{n_0} Y_k \quad Y_k \text{ i.i.d. de loi } p \text{ et indépendants de } H_n$$

est \mathcal{G}_n -adapté. Soit $\{d_n\}$ une suite de v.a. \mathcal{G}_n -adaptée à valeurs dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\begin{cases} d_n = 1 & \text{si } H_n = 0, \\ d_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que pour $j > k$, $n \geq 0$

$$P_{a,a'}(d_{2n+1} = 1 | S'_{\nu_{2n}+n_0} = j, S_{\nu_{2n-1}+n_0} = k) = u(j - k)$$

et puisque par construction, $S'_{\nu_{2n}+n_0} - S_{\nu_{2n-1}+n_0} \geq n_0$, il vient que

$$P_{a,a'}(d_{2n+1} = 1 | \mathcal{G}_{2n}) \geq \gamma. \quad (\text{B.48})$$

De même, $P_{a,a'}(d_{2n} = 1 | \mathcal{G}_{2n-1}) \geq \gamma$. Enfin, on définit

$$\eta := \inf\{n \geq 0, d_{n+1} = 1\}$$

si bien que nous avons la majoration

$$T \leq \sum_{k=0}^{\eta} L_k.$$

Le calcul du moment r^T s'effectue de la même façon que le calcul du moment du temps aléatoire

$$\tau^\eta = \tau^0 + \tau^1 - \tau^0 + \cdots + \tau^\eta - \tau^{\eta-1}$$

présenté au Lemme 2.9. Il suffit de faire l'analogie entre τ^0 et L_0 , puis $\tau^n - \tau^{n-1}$ et L_n , $n \geq 1$, et enfin entre u_n et d_n . Tout d'abord

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,a'}[r^{L_0}] &= \mathbb{E}_{a,a'}[r^{H_0 + \sum_{k=1}^{n_0} Y_k}] = \left(\sum_n r^n p(n)\right)^{n_0} \mathbb{E}_{a,a'}[r^{H_0}] \\ &\leq \left(\sum_n r^n p(n)\right)^{n_0} \{m_a + m_{a'}\}, \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

puisque $r^{H_0} \leq r^{Y_0} + r^{Y'_0}$. De plus, il existe $M < \infty$ tel que pour tout $n \geq 1$, $1 \leq \kappa \leq r$,

$$\mathbb{E}_{a,a'}[\kappa^{L_n} | \mathcal{G}_{n-1}] \leq M^{\ln \kappa / \ln r}. \quad (\text{B.50})$$

En effet,

$$\mathbb{E}_{a,a'}[\kappa^{L_n} | \mathcal{G}_{n-1}] = \left(\sum_n \kappa^n p(n)\right)^{n_0} \mathbb{E}_{a,a'}[\kappa^{H_n} | \mathcal{G}_{n-1}].$$

Or, pour $n \geq 1$, H_n est un "over-shot" i.e H_{2n} (resp. H_{2n+1}) est le temps qu'il reste avant le prochain renouvellement du processus S' (resp. S). Par conséquent, pour $n \geq 0$,

$$P_{a,a'}(H_{2n+1} = l | S'_{\nu_{2n}+n_0} = j, S_{\nu_{2n-1}+n_0} = k) = \sum_{m=0}^{j-k} p(j-k+l-m) u(m) \leq \sum_{m \geq l} p(m),$$

et

$$P_{a,a'}(H_{2n+2} = l | S'_{\nu_{2n+1}+n_0} = j, S_{\nu_{2n}+n_0} = k) \leq \sum_{m \geq l} p(m).$$

Donc,

$$\mathbb{E}_{a,a'}[\kappa^{H_n} | \mathcal{G}_{n-1}] \leq \left(\mathbb{E}_{a,a'}[r^{H_n} | \mathcal{G}_{n-1}]\right)^{\ln \kappa / \ln r} \leq \left((r-1)^{-1} \sum_n r(n)p(n)\right)^{\ln \kappa / \ln r}.$$

On conclut la démonstration comme dans le Lemme 2.9, en utilisant (B.48), (B.49) et (B.50).

B.7 Scission selon Nummelin et Tuominen

On suppose que $m = 1$. On montre que

$$\lambda(Q_r h) = \lambda^*(\check{\mathbb{E}}_{(x,0)}[r(\tau_\alpha)]),$$

en établissant par récurrence que

$$\lambda([P - h \otimes \nu]^q)h = \lambda^*(\check{P}_{(x,0)}(\tau_\alpha = q)).$$

Par définition de la chaîne bifurquée,

$$\begin{aligned} \check{P}_{(x,0)}(\tau_\alpha = 1) &= \epsilon \left\{ \mathbb{1}_{C^c}(x)P(x,C) + \mathbb{1}_C(x)(1-\epsilon)R(x,C) \right\} \\ \text{et } \lambda^*(\check{P}_{(x,0)}(\tau_\alpha = 1)) &= \epsilon \nu \left(\mathbb{1}_{C^c}(x)P(x,C) + \mathbb{1}_C(x)(1-\epsilon)R(x,C) \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \lambda(P - h \otimes \nu)h &= \epsilon \lambda \left(P(x,C) - \epsilon \mathbb{1}_C(x)\nu(C) \right) \\ &= \epsilon \lambda \left(\mathbb{1}_{C^c}(x)P(x,C) + (1-\epsilon) \mathbb{1}_C(x)R(x,C) \right) \end{aligned}$$

donc $\lambda(P - h \otimes \nu)h = \lambda^*(\check{P}_{(x,0)}(\tau_\alpha = 1))$. Supposons que $\lambda([P - h \otimes \nu]^q)h = \lambda^*(\check{P}_{(x,0)}(\tau_\alpha = q))$. Puisque

$$\begin{aligned} P(x,dy) - h(x)\nu(dy) &= P(x,dy) - \epsilon \mathbb{1}_C(x)\nu(dy) = \mathbb{1}_{C^c}(x)P(x,dy) + \mathbb{1}_C(x)(1-\epsilon)R(x,dy) \\ &= \check{P}((x,0),dy \times \{0,1\}) \end{aligned}$$

il vient que

$$[P - h \otimes \nu](\check{P}_{(x,0)}(\tau_\alpha = q)) = \int_{\mathcal{X} \times \{0\}} \check{P}((x,0),dy \times \{0\}) \check{P}_{(y,0)}(\tau_\alpha = q) = \check{P}_{(x,0)}(\tau_\alpha = q+1)$$

ce qui termine la récurrence.

Annexe C : Annexe du Chapitre 4

C.8 Démonstration du Théorème 4.3

Lemme C.19 Supposons $H1$ et $H2[C, D]$. Soient $1 \leq W_0 \leq W_1$ mesurables et une constante $b < \infty$ telles que

$$\begin{cases} PW_1(x) + W_0(x) \leq W_1(x) + b\mathbb{1}_C(x), \\ W_0(x) - b \geq 0, \end{cases} \quad x \in D^c.$$

Pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{1}_{0 \leq n \leq T_0} \right] \leq \{W_1(x) + W_1(x')\}.$$

Démonstration du Lemme C.19 Si $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\int P^* \left((x, x', 0), dy \times dy' \times \{0\} \right) (W_1(y) + W_1(y')) = PW_1(x) + PW_1(x').$$

Or,

$$PW_1(x) + PW_1(x') + W_0(x) + W_0(x') \leq W_1(x) + W_1(x') + b\mathbb{1}_C(x) + b\mathbb{1}_C(x')$$

et si $(x, x') \in \Delta^c$, $x \in C \Rightarrow x' \in D^c$ donc $W_0(x') - b\mathbb{1}_C(x) \geq 0$. Par conséquent,

$$PW_1(x) + PW_1(x') \leq W_1(x) + W_1(x') \quad (x, x') \in \Delta^c,$$

soit encore

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\{W_1(X_1) + W_1(X'_1)\} \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \right] &= \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\{W_1(X_1) + W_1(X'_1)\} \mathbb{1}_{\{0\}}(d_1) \right] \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \\ &\leq W_1(x) + W_1(x'). \end{aligned} \tag{C.51}$$

Pour $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{1}_{0 \leq n \leq T_0} \right] &= \mathbb{1}_{\Delta}(x, x') \{W_1(x) + W_1(x')\} \\ &+ \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \{W_1(x) + W_1(x')\} \mathbb{1}_{n=0} + \mathbb{1}_{\Delta^c}(x, x') \mathbb{E}_{x, x', 0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{1}_{1 \leq n \leq T_0} \right]. \end{aligned}$$

Si $(x, x') \in \Delta^c$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} & \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{1 \leq n \leq T_0} \right] \\ & = \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(Z_{n-1}) \cdots \mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(Z_0) \right] \end{aligned}$$

et (C.51) entraîne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} & \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{1 \leq n \leq T_0} \right] \leq \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{W_1(X_1) + W_1(X'_1)\} \mathbb{I}_{\{0\}}(d_1) \mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(Z_0) \right] \\ & \leq W_1(x) + W_1(x'). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Lemme.

Nous démontrons le théorème lorsque $m = 1$. Soit $F(x, x') := f(x) + f(x')$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\lambda,\lambda',0} & \left[F(X_n, X'_n) \mathbb{I}_{T>n} \right] = \int \lambda(dx) \lambda(dx') \mathbb{E}_{x,x',0} \left[F(X_n, X'_n) \mathbb{I}_{T>n} \right] \\ & \leq \int \lambda(dx) \lambda(dx') P_{x,x',0}^{1-\alpha}(T > n) \mathbb{E}_{x,x',0}^\alpha \left[F^{1/\alpha}(X_n, X'_n) \mathbb{I}_{T>n} \right] \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, si $0 < \alpha < 1$; si $\alpha = 1$, la majoration est trivialement vraie. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\lambda,\lambda',0} & \left[F(X_n, X'_n) \mathbb{I}_{T>n} \right] \leq 2^{1-\alpha} \int \lambda(dx) \lambda(dx') P_{x,x',0}^{1-\alpha}(T > n) \cdots \\ & \quad \mathbb{E}_{x,x',0}^\alpha \left[\{f^{1/\alpha}(X_n) + f^{1/\alpha}(X'_n)\} \mathbb{I}_{T>n} \right] \\ & \leq 2^{1-\alpha} \|f\|_{W_1^\alpha} \int \lambda(dx) \lambda(dx') P_{x,x',0}^{1-\alpha}(T > n) \mathbb{E}_{x,x',0}^\alpha \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{T>n} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} & \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{T>n} \right] = \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{0 \leq n \leq T_0} \right] \\ & \quad + \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{T_j < n \leq T_{j+1}} \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j+1}}) \right] \\ & \leq W_1(x) + W_1(x') + \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{T_j < n \leq T_{j+1}} \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j+1}}) \right]. \end{aligned}$$

Soit $j \geq 0$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{T_j < n \leq T_{j+1}} \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j+1}}) \right] \\
&= \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta \times \{0\}}(Z_{T_{j+1}}) \{W_1(X_{T_{j+1}}) + W_1(X'_{T_{j+1}})\} \right] \\
&+ \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(Z_{T_{j+1}}) \{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{T_j < n \leq T_{j+1}} \right] \\
&= \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta \times \{0\}}(Z_{T_{j+1}}) \{W_1(X_{T_{j+1}}) + W_1(X'_{T_{j+1}})\} \right] \\
&+ \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(Z_{T_{j+1}}) \mathbb{E}_{X_{T_{j+1}}, X'_{T_{j+1}}, 0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{0 \leq n \leq T_0} \right] \right] \\
&\leq \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_{j+1}}) \{W_1(X_{T_{j+1}}) + W_1(X'_{T_{j+1}})\} \right] \\
&\leq \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j}) \left(1 - \rho_{X_{T_j}, X'_{T_j}}(\mathcal{X}) \right) \int R_{X_{T_j}, X'_{T_j}}(X_{T_j}, dy) R_{X_{T_j}, X'_{T_j}}(X'_{T_j}, dy') \{W_1(y) + W_1(y')\} \right] \\
&\leq C(W_1) P_{x,x',0}(d_{T_j} = 0) \leq C(W_1)(1 - \epsilon^-)^j.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\{W_1(X_n) + W_1(X'_n)\} \mathbb{I}_{T > n} \right] \leq W_1(x) + W_1(x') + C(W_1)/\epsilon^- \leq C_1(x, x'),$$

ce qui termine la démonstration.

C.9 Démonstration du Théorème 4.5

Lemme C.20 Supposons H1 et H2[C, D]. Soient $1 \leq W_0 \leq W_1$ mesurables et une constante $0 < a < 1$, $b < \infty$ telles que

$$\begin{cases} PW_1(x) + W_0(x) \leq W_1(x) + b \mathbb{I}_C(x), \\ W_0(x) - b \geq a W_0(x), \end{cases} \quad x \in D^c.$$

Pour tout $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \right] \leq \mathbb{I}_{\Delta}(x, x') \{W_0(x) + W_0(x')\} + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') a^{-1} \{W_1(x) + W_1(x')\}.$$

Démonstration du Lemme C.20 Pour tout $(x, x') \in \Delta^c$,

$$PW_1(x) + PW_1(x') + W_0(x) + W_0(x') \leq W_1(x) + W_1(x') + b \left(\mathbb{I}_{C \times D^c}(x, x') + \mathbb{I}_{D^c \times C}(x, x') \right)$$

donc pour $(x, x') \in \Delta^c$,

$$PW_1(x) + PW_1(x') + a \left(W_0(x) + W_0(x') \right) \leq W_1(x) + W_1(x').$$

Par suite, en procédant comme dans la démonstration de la Proposition 2.2, il vient

$$a \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T_0} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \right] \leq W_1(x) + W_1(x'), \quad (x, x') \in \Delta^c.$$

Soit $F(x, x') := f(x) + f(x')$. En appliquant l'inégalité de Hölder lorsque $0 < \alpha < 1$, on obtient

$$\mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_n r(n)^{(1-\alpha)} F(X_n, X'_n) \mathbb{I}_{T>n} \right] \leq \mathbb{E}_{x,x',0}^{1-\alpha} \left[\sum_n r(n) \mathbb{I}_{T>n} \right] \mathbb{E}_{x,x',0}^\alpha \left[\sum_n F^{1/\alpha}(X_n, X'_n) \mathbb{I}_{T>n} \right],$$

inégalité qui est encore vraie si $\alpha = 1$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_n r(n)^{(1-\alpha)} F(X_n, X'_n) \mathbb{I}_{T>n} \right] &\leq 2^{1-\alpha} \|f\|_{W_0^\alpha} \mathbb{E}_{x,x',0}^{1-\alpha} \left[\sum_n r(n) \mathbb{I}_{T>n} \right]^{1-\alpha} \cdots \\ &\quad \mathbb{E}_{x,x',0}^\alpha \left[\sum_n \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \mathbb{I}_{T>n} \right]. \end{aligned}$$

Nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{n=0}^{T-1} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \right] &= \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \right] \\ &\quad + \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{n=T_j+1}^{T_{j+1}} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right] \\ &\leq \mathbb{I}_\Delta(x, x') \{W_0(x) + W_0(x')\} + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') \{W_1(x) + W_1(x')\} \\ &\quad + \sum_{j \geq 0} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{n=T_j+1}^{T_{j+1}} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right]. \end{aligned}$$

Soit $j \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{n=T_j+1}^{T_{j+1}} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \mathbb{I}_{\{0\}}(d_{T_j+1}) \right] &= \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta \times \{0\}}(Z_{T_j+1}) \{W_0(X_{T_j+1}) + W_0(X'_{T_j+1})\} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(Z_{T_j+1}) \mathbb{E}_{X_{T_j+1}, X'_{T_j+1}, 0} \left[\sum_{n=0}^{T_0} \{W_0(X_n) + W_0(X'_n)\} \right] \right] \\ &\leq \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta \times \{0\}}(Z_{T_j+1}) \{W_0(X_{T_j+1}) + W_0(X'_{T_j+1})\} \right] \\ &\quad + a^{-1} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\mathbb{I}_{\Delta^c \times \{0\}}(Z_{T_j+1}) \{W_1(X_{T_j+1}) + W_1(X'_{T_j+1})\} \right] \\ &\leq (C(W_0, \Delta) + a^{-1} C(W_1, \Delta^c)) P_{x,x',0}(d_{T_j} = 0) \leq (C(W_0, \Delta) + a^{-1} C(W_1, \Delta^c))(1 - \epsilon^-)^j. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,x',0} \left[\sum_{k=0}^{T-1} \{W_0(X_k) + W_0(X'_k)\} \right] &\leq \mathbb{I}_\Delta(x, x') \{W_0(x) + W_0(x')\} + \mathbb{I}_{\Delta^c}(x, x') \{W_1(x) + W_1(x')\} \\ &+ \left(C(W_0, \Delta) + a^{-1} C(W_1, \Delta^c) \right) / \epsilon^-. \end{aligned}$$

C.10 Démonstration de la propriété (4.18) des suites $S^{*\eta}$

Nous démontrons la propriété par récurrence. En utilisant la convexité de l'application $x \mapsto |x|^\eta$, $0 < \eta < 1$, il vient

$$\begin{aligned} S^{*\eta}(0, n+m) &= \bar{S}(\eta, n+m) \leq \bar{S}(\eta, n) + \bar{S}(\eta, m) \\ &= S^{*\eta}(0, n) + S^{*\eta}(0, m) = S^{*\eta}(0, n)S(0, m) + S^{*\eta}(0, m). \end{aligned}$$

Supposons que pour $l \geq 0$

$$S^{*\eta}(l, n+m) \leq \sum_{q=0}^l S^{*\eta}(l-q, n)S(q, m) + S^{*\eta}(l, m).$$

En utilisant la propriété de récurrence,

$$\begin{aligned} S^{*\eta}(l+1, n+m) &= \sum_{k=1}^{n+m} S^{*\eta}(l, k) = S^{*\eta}(l+1, n) + \sum_{k=n+1}^{n+m} S^{*\eta}(l, k) \\ &\leq S^{*\eta}(l+1, n) + \sum_{k=1}^m S^{*\eta}(l, k+n) \\ &\leq S^{*\eta}(l+1, n) + \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{q=0}^l S^{*\eta}(l-q, n)S(q, k) + S^{*\eta}(l, k) \right\} \\ &\leq S^{*\eta}(l+1, n) + \sum_{q=0}^l S^{*\eta}(l-q, n)S(q+1, m) + S^{*\eta}(l+1, m) \\ &\leq S^{*\eta}(l+1, n) + \sum_{q=1}^{l+1} S^{*\eta}(l+1-q, n)S(q, m) + S^{*\eta}(l+1, m) \\ &\leq \sum_{q=0}^{l+1} S^{*\eta}(l+1-q, n)S(q, m) + S^{*\eta}(l+1, m) \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Bibliographie

- [1] S. Andradottir. A stochastic approximation algorithm with varying bounds. *Oper. Res.*, 43(6) :1037–1048, 1995.
- [2] P. AngoNze. *Critères d'ergodicité de modèles markoviens. Estimation non-paramétrique sous des hypothèses de dépendance*. PhD thesis, Univ. Paris IX- Dauphine, Paris, 1994.
- [3] P. AngoNze. Geometric and subgeometric rates for Markovian processes : a robust approach. Preprint-Université de Lille III, 2000.
- [4] L. E. Baum, T. P. Petrie, G. Soules, and N. Weiss. A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains. *Ann. Math. Statist.*, 41(1) :164–171, 1970.
- [5] P.H. Baxendale. Uniform estimates for geometric ergodicity of recurrent Markov processes. University of Southern California, 1993.
- [6] A. Benveniste, M. Métivier, and P. Priouret. *Adaptive algorithms and stochastic approximations*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Translated from the French by Stephen S. Wilson.
- [7] J. Besag, J. York, and A. Mollié. Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 43(1) :1–59, 1991. With discussion and a reply by Besag.
- [8] J.E. Besag and P.J. Green. Spatial statistics and Bayesian computation. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 55(1) :25–38, 1993.
- [9] J.C. Biscarat. Almost sure convergence of a class of stochastic approximation algorithms. *Stochastic Processes Appl.*, 50(1) :83–100, 1994.
- [10] J.G. Booth and J.P. Hobert. Maximizing generalized linear mixed model likelihoods with an automated Monte Carlo EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 61 :265–285, 1999.
- [11] R. A. Boyles. On the convergence of the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 45(1) :47–50, 1983.
- [12] O. Brandière and M. Duflo. Les algorithmes stochastiques contournent-ils les pièges ? *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 32(3) :395–427, 1996.
- [13] T. Bröcker. *Differentiable germs and catastrophes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975. London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 17.

- [14] O. Cappé, A. Doucet, M. Lavielle, and E. Moulines. Simulation-based methods for blind maximum-likelihood filter identification. *Signal Processing*, 73(1-2) :3–25, 1999.
- [15] G. Celeux and J. Diebolt. The SEM algorithm : a probabilistic teacher algorithm derived from the EM algorithm for the mixture problem. *Comput. Statist. Quart.*, 2(1) :73–82, 1985.
- [16] G. Celeux and J. Diebolt. *A probabilistic teacher algorithm for iterative maximum likelihood estimation*, pages 617–623. Classification and related methods of Data Analysis, North-Holland, Amsterdam, h.h. bock edition, 1987.
- [17] G. Celeux and J. Diebolt. A stochastic approximation type EM algorithm for the mixture problem. *Stochastics Stochastics Rep.*, 85 :119–134, 1992.
- [18] D. Cellier. *Méthode de fission pour l'étude de la récurrence des chaînes de Markov*. PhD thesis, Université de Rouen, 1980.
- [19] J.S.K. Chan and A.Y.C. Kuk. Maximum likelihood estimation for probit-linear mixed models with correlated random effects. *Biometrics*, 53(1) :86–97, 1997.
- [20] K.S. Chan and J. Ledolter. Monte Carlo EM estimation for time series models involving counts. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 90(429) :242–252, 1995.
- [21] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
- [22] H.F. Chen, L. Guo, and A.J. Gao. Convergence and robustness of the Robbins- Monro algorithm truncated at randomly varying bounds. *Stochastic Processes Appl.*, 27 :217–231, 1988.
- [23] S. Chib and E. Greenberg. Markov Chain Monte Carlo simulation methods in econometrics. *Econometric theory*, 12(3) :409–431, 1996.
- [24] S. Clemençon. *Méthodes d'ondelettes pour la statistique non paramétrique des chaînes de Markov*. PhD thesis, Université Paris VII, 2000.
- [25] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probabilités et statistiques. Tome 2*. Masson, Paris, 1983. Problèmes à temps mobile. [Movable-time problems].
- [26] S. Dalal and S. Weerahandi. Estimation of innovation diffusion models with application to a consumer durable. *Marketing Letters*, 6, 1995.
- [27] B. Delyon, M. Lavielle, and E. Moulines. Convergence of a stochastic approximation version of the EM algorithm. *Ann. Statist.*, 27(1) :94–128, 1999.
- [28] A. Dembo and O. Zeitouni. Parameter estimation of partially observed continuous time stochastic processes via the EM algorithm. *Stochastic Process. Appl.*, 23(1) :91–113, 1986.
- [29] A. Dembo and O. Zeitouni. Corrigendum : “Parameter estimation of partially observed continuous time stochastic processes via the EM algorithm” [Stochastic Process. Appl. **23** (1986), no. 1, 91–113]. *Stochastic Process. Appl.*, 31(1) :167–169, 1989.
- [30] A. Dembo and O. Zeitouni. Erratum : “Parameter estimation of partially observed continuous time stochastic processes via the EM algorithm” [Stochastic Process. Appl. **23** (1986), no. 1, 91–113]. *Stochastic Process. Appl.*, 40(2) :359–361, 1992.

- [31] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 39(1) :1–38, 1977. With discussion.
- [32] P. Diaconis. *Group representations in probability and statistics*. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988.
- [33] P. Diaconis and D. Stroock. Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 1(1) :36–61, 1991.
- [34] J. Diebolt and G. Celeux. Asymptotic properties of a stochastic EM algorithm for estimating mixing proportions. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 9(4) :599–613, 1993.
- [35] J. Diebolt and E.H. S. Ip. Stochastic EM : method and application. In *Markov chain Monte Carlo in practice*, pages 259–273. Chapman & Hall, London, 1996.
- [36] P. Doukhan and M. Ghindès. Etude du processus $x_{n+1} = f(x_n) + \epsilon_n$. *CR Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 291(1) :61–63, 1980.
- [37] M. Duflo. *Méthodes récursives aléatoires*. Masson, Paris, 1990.
- [38] G. Fort and E. Moulines. Computable bounds for subgeometrical and geometrical ergodicity. Submitted for publication in Stochastic Processes Appl., 2000.
- [39] G. Fort and E. Moulines. V-subgeometric ergodicity for a Hastings-Metropolis algorithm. *Statist. Probab. Lett.*, 49(4) :401–410, 2000.
- [40] G. Fort, E. Moulines, G.O. Roberts, and J. Rosenthal. On the geometric ergodicity of hybrid samplers. Submitted for publication, 2001.
- [41] A.E. Gelfand and A.F.M. smith. Sampling Based Approaches to Calculating Marginal Densities. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85(410) :398–409, 1990.
- [42] S. Geman and D. Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6 :721–741, 1984.
- [43] C.J. Geyer. On the convergence of Monte Carlo maximum likelihood calculations. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 56(1) :261–274, 1994.
- [44] E. Giné, G. R. Grimmett, and L. Saloff-Coste. *Lectures on probability theory and statistics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. Lectures from the 26th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, August 19–September 4, 1996, Edited by P. Bernard.
- [45] S.W. Guo and A. Thompson. Monte-Carlo estimation of variance component models for large complex pedigrees. *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, 8 :171–189, 1991.
- [46] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. Probability and Mathematical Statistics.
- [47] W.K. Hastings. Monte-Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57 :97–109, 1970.
- [48] N. Jain and B. Jamison. Contributions to Doeblin’s theory of Markov processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 8 :19–40, 1967.

- [49] M. Jamshidian and R.I. Jennrich. Acceleration of the EM algorithm by using quasi-Newton methods. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 59(3) :569–587, 1997.
- [50] S. Jarner and G. Roberts. Polynomial convergence rates of Markov Chains. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/S.Brooks/MCMC/pages/>, 2000.
- [51] S.F. Jarner and E. Hansen. Geometric ergodicity of Metropolis algorithms. *Stochastic Processes Appl.*, 85(2) :341–361, 2000.
- [52] V. V. Kalashnikov. Regeneration and general Markov Chains. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 7(3) :357–371, 1994.
- [53] S. Karlin and H. M. Taylor. *A first course in stochastic processes*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, second edition, 1975.
- [54] J. G. Kemeny, J. L. Snell, and A.W. Knapp. *Denumerable Markov chains*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1976. With a chapter on Markov random fields, by David Griffeth, Graduate Texts in Mathematics, No. 40.
- [55] H. J. Kushner and G. G. Yin. *Stochastic approximation algorithms and applications*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [56] K. Lange. A gradient algorithm locally equivalent to the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 75(2) :425–437, 1995.
- [57] G. Lawler and A. Sokal. Bounds on L^2 spectrum for Markov chains and Markov processes : a generalization of Cheeger’s inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 309 :557–580, 1988.
- [58] T. Lindvall. On coupling of discrete renewal processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 48 :57–70, 1979.
- [59] C. Liu and D. Rubin. The ECME algorithm : a simple extension of EM and ECM with faster monotone convergence. *Biometrika*, 81 :633–648, 1994.
- [60] J. R. Liukkonen and A. Levine. On convergence of iterated random maps. *SIAM J. Control Optim.*, 32(6) :1752–1762, 1994.
- [61] R. B. Lund and R. L. Tweedie. Geometric convergence rates for stochastically ordered Markov Chains. *Math. Oper. Res.*, 20(1) :182–194, 1996.
- [62] C. E. McCulloch. Maximum likelihood variance components estimation for binary data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 89 :330–335, 1994.
- [63] C. E. McCulloch. Maximum likelihood algorithms for generalized linear mixed models. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 92(437) :162–170, 1997.
- [64] G.J. McLachlan and T. Krishnan. *The EM algorithm and extensions*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1997. A Wiley-Interscience Publication.
- [65] X. Meng and D. van Dyk. The EM algorithm – an old folk-song sung to a fast new tune (with discussion). *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 59(3) :511–567, 1997.
- [66] X.L. Meng. On the rate of convergence of the ECM algorithm. *Ann. Statist.*, 22(1) :326–339, 1994.

- [67] X.L. Meng and D. B. Rubin. On the global and componentwise rates of convergence of the EM algorithm. *Linear Algebra Appl.*, 199 :413–425, 1994.
- [68] X.L. Meng and D.B. Rubin. Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm : a general framework. *Biometrika*, 80(2) :267–278, 1993.
- [69] X.L. Meng and S. Schilling. Fitting full-information item factor models and an empirical investigation of bridge sampling. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 91 :1254–1267, 1996.
- [70] K.L. Mengersen and R.L. Tweedie. Rates of convergence of the Hastings and Metropolis algorithms. *Ann. Statist.*, 24(1) :101–121, 1996.
- [71] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller. Equations of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 21 :1087–1091, 1953.
- [72] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Springer-Verlag London Ltd., London, 1993.
- [73] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. Computable bounds for geometric convergence rates of Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 4(4) :981–1011, 1994.
- [74] L. Miclo. Une variante de l'inégalité de Cheeger pour les chaînes de Markov finies. *ESAIM Probab. Statist.*, 2 :1–21, 1998.
- [75] A. Mokkadem. Sur un modèle autorégressif non linéaire : ergodicité et ergodicité géométrique. *J. Time Ser. Anal.*, 8(2) :195–204, 1987.
- [76] A. Mokkadem. Propriétés de mélange des processus autorégressifs polynomiaux. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 26(2) :219–260, 1990.
- [77] G. Murray. Maximum-likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, pages 27–28, 1977. Discussion on P. Dempster *et al.*
- [78] D. Nettleton. Convergence properties of the EM algorithm in constrained parameter spaces. *Canad. J. Statist.*, 27(3) :639–648, 1999.
- [79] J. Neveu. Potentiel markovien des Chaînes de Markov Harris récurrentes. *Ann. Inst. Fourier*, 22(2) :85–130, 1972.
- [80] S.F. Nielsen. The stochastic EM algorithm : estimation and asymptotic results. *Bernoulli*, 6(3) :457–489, 2000.
- [81] E. Nummelin. A splitting technique for Harris recurrent Markov Chains. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 43 :309–318, 1978.
- [82] E. Nummelin. *General irreducible Markov chains and nonnegative operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [83] E. Nummelin and P. Tuominen. Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applications to renewal theory. *Stochastic Processes Appl.*, 2 :187–202, 1982.
- [84] E. Nummelin and P. Tuominen. The rate of convergence in Orey's theorem for Harris recurrent Markov chains with applications to renewal theory. *Stochastic Processes Appl.*, 15 :295–311, 1983.

- [85] S. Orey. *Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities*. Van Nostrand Reinhold Co., London, 1971. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, No. 34.
- [86] D. Pierre-Loti-Viaud. Random perturbations of recursive sequences with an application to an epidemic model. *J. Appl. Probab.*, 32(3) :559–578, 1995.
- [87] J.W. Pitman. Uniform rates of convergence for Markov chain transition probabilities. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 29 :194–227, 1974.
- [88] G. Pólya and G. Szegő. *Problems and theorems in analysis. Vol. II*. Springer-Verlag, New York, study edition, 1976.
- [89] B.T. Polyak. New stochastic Approximation type procedures. *Automation and remote control*, 51(7) :98–107, 1990.
- [90] B.T. Polyak and A.B. Juditski. Acceleration of stochastic approximation by averaging. *SIAM J. Control Optim.*, 30(4) :838–855, 1992.
- [91] N. N. Popov. Geometric ergodicity conditions for countable Markov chains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 234(2) :316–319, 1977.
- [92] N. Ravishanker and Z. Qiou. Monte Carlo EM estimation for multivariate stable distributions. *Statist. Probab. Lett.*, 45(4) :335–340, 1999.
- [93] R. A. Redner and H. F. Walker. Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *SIAM Rev.*, 26(2) :195–239, 1984.
- [94] D. Revuz. A survey of limit theorems for Markov chains and processes on general state spaces. *Bull. Inst. Internat. Statist.*, 48(2), 1979.
- [95] D. Revuz. *Markov chains*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1984.
- [96] C.P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [97] G.O. Roberts and J.S. Rosenthal. Two convergence properties of hybrid samplers. *Ann. Appl. Probab.*, 8(2) :397–407, 1998.
- [98] G.O. Roberts and R.L. Tweedie. Geometric convergence and central limit theorems for multidimensional Hastings and Metropolis algorithms. *Biometrika*, 83(1) :95–110, 1996.
- [99] G.O. Roberts and R.L. Tweedie. Bounds on regeneration times and convergence rates for Markov Chains. *Stochastic Processes Appl.*, 80(2) :211–229, 1999.
- [100] F.S. Rosenthal. A review of asymptotic convergence for general state space Markov Chains. To appear in Far East Journal of Mathematical Sciences, 1999.
- [101] J. S. Rosenthal. Minorization conditions and convergence rates for Markov chain Monte Carlo. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 90(430) :558–566, 1995.
- [102] J. S. Rosenthal. Markov chain convergence : from finite to infinite. *Stochastic Processes Appl.*, 62(1) :55–72, 1996.
- [103] J.S. Rosenthal. Correction : “Minorization conditions and convergence rates for Markov chain Monte Carlo”. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 90(431) :1136, 1995.

- [104] D. Ruppert. Efficient estimators from a slowly convergent Robbins-Monro process. Technical Report 781, School of Oper. Res. and Ind. Eng., Cornell University, Ithaca, N.Y., 1988.
- [105] A. Shapiro and Y. Wardi. Convergence analysis of stochastic analysis. *Math. Oper. Res.*, 21(3) :615–628, 1996.
- [106] R.P. Sherman, Y.Y.K. Ho, and S.R. Dalal. Conditions for convergence of Monte Carlo EM sequences with an application to product diffusion modeling. *Econom. J.*, 2(2) :248–267, 1999.
- [107] A.F.M. Smith and A.E. Gelfand. Bayesian statistics without tears : a sampling-resampling perspective. *Amer. Statist.*, 46(2) :84–88, 1992.
- [108] A.F.M. Smith and G.O. Roberts. Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods (with discussion). *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 55(1) :3–24, 1993.
- [109] B.M. Steele. A modified EM algorithm for estimation in generalized mixed models. *Biometrics*, 52(4) :1295–1310, 1996.
- [110] C. Stone and S. Wainger. One-sided error estimates in renewal theory. *J. Analyse Math.*, 20 :325–352, 1967.
- [111] O. Stramer and R.L. Tweedie. Langevin-Type Models I : Diffusions with given stationary distributions, and their discretizations. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 1(3) :283–306, 1999.
- [112] A. Tanikawa. The rate of convergence of a homogeneous Markov chain arising from two-queue networks. *Comput. Math. Appl.*, 31(2) :103–109, 1996.
- [113] A. Tanikawa. Geometric ergodicity of nonlinear first order autoregressive models. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 15(2) :227–245, 1999.
- [114] M. A. Tanner. *Tools for statistical inference*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1996. Methods for the exploration of posterior distributions and likelihood functions.
- [115] H. Thorisson. *Coupling, stationarity, and regeneration*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [116] L. Tierney. Markov chains for exploring posterior distributions. *Ann. Statist.*, 22(4) :1701–1762, 1994. With discussion and a rejoinder by the author.
- [117] P. Tuominen and R.L. Tweedie. Subgeometric rates of convergence of f -ergodic Markov Chains. *Adv. in Appl. Probab.*, 26(3) :775–798, 1994.
- [118] R. L. Tweedie. Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains on a general state space. *Stochastic Processes Appl.*, 3(4) :385–403, 1975.
- [119] R. L. Tweedie. Criteria for rates of convergence of Markov chains, with application to queueing and storage theory. In *Probability, statistics and analysis*, pages 260–276. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.
- [120] D. A. Van Dyk and X. Meng. On the orderings and groupings of conditional maximizations within ECM-type algorithms. *J. Comput. Graph. Statist.*, 6(2) :202–223, 1997.

- [121] A.Y. Veretennikov. On polynomial mixing and the rate of convergence for stochastic differential and difference equations. *Theory Probab. Appl.*, 44(2) :361–374, 2000.
- [122] G.C.G. Wei and M.A. Tanner. A Monte-Carlo implementation of the EM algorithm and the poor man’s data augmentation algorithms. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85 :699–704, 1991.
- [123] C.F.J. Wu. On the convergence properties of the EM algorithm. *Ann. Statist.*, 11(1) :95–103, 1983.
- [124] L. Younes. Parametric inference for imperfectly observed Gibbsian fields. *Probab. Theory Related Fields*, 82(4) :625–645, 1989.
- [125] L. Younes. *Parameter estimation for imperfectly observed Gibbs fields and some comments on Chalmond’s EM Gibbsian algorithm*. Proc. of Stoch. models, statistical methods and algorithms in image analysis, P. Barone and A. Frigessi, Lecture notes in Statistics, Springer edition, 1992.
- [126] S. L. Zeger. A regression model for time series of counts. *Biometrika*, 75(4) :621–629, 1988.