Critère d'ergodicité polynomiale

(pour les chaînes de Markov):

Applications à l'analyse d'algorithmes MCMC

Chaîne de Markov canonique $\Phi = (\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, \{\Phi_n\}, P_x)$

de noyau de transition P sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$

$\mathcal{X}$ espace d'état général $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^d, \cdots$.

Objectif

(G. Fort, E. Moulines, P. Priouret et S. Jarner, G.Roberts)

A) ?? $\Longrightarrow$? $\Longrightarrow$ $\exists!\, \pi$ probabilité invariante, π-pp: $r(n)\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_f \longrightarrow_n 0$

où

- $r(n) \sim (n+1)^\alpha, \qquad \alpha > 0.$
- $f \geq 1, \quad \mu$ mesure signée, $\qquad \|\mu\|_f := \sup_{|g|\leq f} |\mu(g)|.$

$\hookrightarrow$ Approche "probabiliste": ergodicité par *splitting* (scission/fission/bifurcation)

$?$ $\equiv$ Contrôle des excursions de la chaîne à l'extérieur "du centre de l'espace".

$??$ $\equiv$ Conditions de drift.

B) Ex: Chaîne de Hastings-Metropolis (à marche aléatoire symétrique)

- Rôle de la densité *cible*,
- Rôle de la loi de proposition.

Motivations

Ex. 1 Modèle auto-régressif non-linéaire. (a) Doukhan, AngoNze, (b) AngoNze, Veretennikov

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \qquad \{W_n\} \text{ i.i.d.}$$

Résultats d'ergodicité géométrique lorsque $\exists\, 0 < \rho < 1, \;\; |F(x)| \leq \rho\,|x|, \;\; |x| \geq M.$

$\hookrightarrow$ Que dire lorsque $\exists\, 0 < d \leq 2, \;\; r > 0, \qquad |F(x)| \leq |x|(1 - r|x|^{-d}), \qquad |x| \geq M$?

Ex. 2 RWHM, de loi cible $\pi(dx) = p(x)dx$.

Résultats d'ergodicité géométrique lorsque p décroît (sous)-exponentiellement.

Ex. $p(x) \sim \exp(-|x|^l), \; l \geq 1.$

$\hookrightarrow$ Que dire lorsque p décroît sur-exponentiellement / polynomialement?

(A-1-a) Cas simple: $\mathcal{X}$ fini ou dénombrable

Temps de passage

$$\tau_a := \inf\{n \geq 1, \Phi_n = a\}, \qquad a \in \mathcal{X}$$

(i) P irréductible et $\mathbb{E}_a[\tau_a] < \infty$: $\exists!$ π probabilité invariante,

(ii) et apériodique $\forall x, y \quad P^n(x,y) \longrightarrow_n \pi(y)$.

Extension au cas général:

$\cdots$ par extension des notions: ψ-irréductibilité, apériodicité, ensemble *small*, temps de passage.

(A-1-b) Définitions

Temps de passage: $\tau_C := \inf\{n \geq 1, \Phi_n \in C\}, \qquad C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$

ψ-irréductibilité: ψ probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ $\qquad \psi = \pi$

$$\psi(A) > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathcal{X}, \exists n > 0, P^n(x, A) > 0 \qquad (\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{X},\ \ P_x(\tau_A < \infty) > 0).$$

Apériodicité: (pour P ψ-irréductible)

d-cycle: $D_1, \cdots, D_d$ disjoints tq $\quad P\left(x, D_{(k+1)[d]}\right) = 1,\ \forall x \in D_k.$

Théorème: $\mathcal{X} = D_1 \cup \cdots \cup D_d \cup E,\ \ \psi(E) = 0.$ (décomposition maximale)

Définition: Pas de 2-cycles.

Ensemble C ν_m-small: un entier $m \geq 1$, constante $\epsilon > 0$, probabilité ν_m sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tq

$$\forall x \in C,\ P^m(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot).$$

ex: $\quad \forall x \in C, P(x, \cdot) = \epsilon \nu_1(\cdot)$

(A-1-c) Intérêt des ensembles *small* C

Discussion dans le cas $m = 1$: $\forall x \in C, P(x, \cdot) \geq \epsilon\nu(\cdot)$

Si C est un atome $\forall x \in C, P(x, \cdot) = \epsilon\nu(\cdot)$,

$\hookrightarrow$ Contrôle des excursions de la chaîne entre x et C, et entre deux passages consécutifs à C.

Sinon,

Construction d'une chaîne auxiliaire $\tilde{P}$, (a) possédant un *atome*, (b) étude de $P \Leftrightarrow$ etude de $\tilde{P}$.

$$x \in C, \qquad P(x, \cdot) = \epsilon \quad \nu(\cdot) + (1 - \epsilon) \quad \frac{P(x, \cdot) - \epsilon\nu(\cdot)}{1 - \epsilon}$$

technique $\sim$ couplage

$\hookrightarrow$ Contrôle des excursions de la chaîne entre x et C, et entre deux passages consécutifs à C.

Existence d'ensemble small (Neveu, Meyn et Tweedie)

Pour P ψ-irréductible, apériodique, tout ensemble A tq $\psi(A) > 0$ contient un ensemble small C.

(A-1-d) CS d'ergodicité

$$\tau_C := \inf\{n \geq 1, \Phi_n \in C\}, \qquad C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

Si P ψ-irréductible, apériodique et C ν_m-small tq $\quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_C] < \infty$,

Alors • π unique probabilité invariante.

• π p.p., $\quad \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\mathrm{VT}} \longrightarrow_n 0$,

avec $\|\mu\|_{\mathrm{VT}} := \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \mu(A) = \sup_{\{g; |g| \leq 1\}} |\mu(g)| = \|\mu\|_1$

$\hookrightarrow$ Quel critère pour f-ergodicité? i.e. $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \longrightarrow_n 0$

(A-1-e) CS de f-ergodicité $f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$ v.a.

Si P ψ-irréductible apériodique et C ν_m-small tq $\quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} f(\Phi_k)\right] < \infty,$

Alors • π unique probabilité invariante,

• π p.p. $\quad \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \longrightarrow_n 0.$ $\qquad \|\mu\|_f := \sup_{\{g; |g| \leq f\}} |\mu(g)|.$

$\hookrightarrow$ Quel critère pour (f, r)-ergodicité? $\qquad$ i.e. $r(n)\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \longrightarrow_n 0$

(a) Vitesse géométrique: $r(n) = \kappa^n$, $\kappa > 1.$

(b) Vitesse sous-géométrique: $\{r(n)\}$ croissante, $r(0) = 1$, $\{\log r(n)\}/n \downarrow 0.$

Ex: $r(n) = \exp(\beta n^\gamma)$, $\beta > 0, 0 < \gamma < 1$ $\qquad r(n) = (n+1)^\alpha$, $\alpha \geq 0$

(A-1-f) CS de f-ergodicité géométrique et sous-géométrique

$f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$ v.a.

Si P ψ-irréductible apériodique, et

Meyn et Tweedie (1993)

il existe $\kappa > 1$ et C ν_m-small tq

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} \kappa^k f(\Phi_k) \right] < \infty,$$

Alors

(a) π unique probabilité invariante

(b) $\exists\ r_* > 1, R < \infty$, tq π p.p.

$$\sum_n r_*^n \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_f \leq R f(x)$$

Tuominen et Tweedie (1994)

il existe $r = \{r(n)\}$ sous-géométrique
et C ν_m-small tq

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty,$$

Alors

(a) π unique probabilité invariante

(b) π p.p.

$$r(n) \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_f \longrightarrow_n 0$$

(A-1-g) Conclusion (1)

Pour établir la f-ergodicité polynomiale d'une chaîne de Markov P

$$(n+1)^{\alpha} \| P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot) \|_f \longrightarrow_n 0$$

il suffit

1. d'établir la ψ-irréductibilité et apériodicité de la chaîne,
2. de "vérifier" $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} (k+1)^{\alpha} f(\Phi_k) \right] < \infty,$ pour C small.

$\hookrightarrow$ Quelles conditions pour contrôler ce *moment* (f,r)*-pondéré?*

(A-2-a) Inégalité fondamentale

Formule de Dynkin:

Si $\quad \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq Z_n - f_n(\Phi_n) + s_n(\Phi_n) \qquad f_n, s_n \geq 0$

$\forall x \in \mathcal{X}, \forall \tau$ t.a. $\quad \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} f_k(\Phi_k)\right] \leq Z_0 + \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} s_k(\Phi_k)\right]$

Application: $\quad Z_n := V(\Phi_n) \qquad f_n := f \leq V \qquad s_n := \mathbb{1}_C \qquad \tau := \tau_C \qquad 1 \leq f \leq V$

▶ $\quad \forall x, \quad PV(x) \leq V(x) - f(x) + b\mathbb{1}_C(x) \Longrightarrow \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)\right] \leq V(x) + b\mathbb{1}_C(x)$

avec $\quad PV(x) := \int V(y) P(x, dy)$

(A-2-b) Rappel vers le "centre de l'espace" $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$,

Souvent,

$$PV \leq V - f + b\mathbb{1}_C \qquad \text{avec } 1 \leq f \leq V$$

(i) $\lim_{x \to \partial \mathcal{X}} V(x) = +\infty$ et $V = 1$ sur C.

(ii) C est compact $\Longleftrightarrow$ le centre de l'espace.

$PV \leq V - 1 + b\mathbb{1}_C$ $\qquad \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \longrightarrow_n 0$

$PV \leq \lambda V + b\mathbb{1}_C \qquad \lambda < 1$ $\qquad r^n \, \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_V \longrightarrow_n 0$

Que dire sinon? $\quad f = o_{+\infty}(V)$, par ex. $\quad f(x) = V^\alpha(x) \qquad \alpha < 1$

(A-2-c) Construction d'un drift polynomial

Objectif: $\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C-1}(k+1)^\alpha f(\Phi_k)\right] \leq ??$

- Une condition de drift $1 \leq V_0 \leq V_1$

$$PV_1(x) \leq V_1(x) - V_0(x) + b\mathbb{1}_C(x) \Longrightarrow \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} V_0(\Phi_k)\Big] \leq V_1(x) + b\mathbb{1}_C(x).$$

- Deux conditions de drift "emboitées" $1 \leq V_0 \leq V_1 \leq V_2$

$$PV_2(x) \leq V_2(x) - V_1(x) + b_1\mathbb{1}_C(x), \qquad PV_1(x) \leq V_1(x) - V_0(x) + b_0\mathbb{1}_C(x),$$

entrainent

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} V_1(\Phi_k)\Big] \leq V_2(x) + b_1\mathbb{1}_C(x) \qquad \mathbb{E}_{\Phi_k}\Big[\sum_{l=0}^{\tau_C-1} V_0(\Phi_l)\Big] \leq V_1(\Phi_k) + b_0\mathbb{1}_C(\Phi_k)$$

càd

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)V_0(\Phi_k)\Big] \leq V_2(x) + (b_0+b_1)\,\mathbb{1}_C(x).$$

(A-2-d) Condition de drift polynomial

$f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$ v.a., $\qquad q \in \mathbb{N}^*$,

Si il existe $f =: V_0 \le V_1 \le \cdots \le V_q, \qquad b_k < \infty, k \in \{0, \cdots, q-1\} \qquad C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, tq

$$PV_{k+1}(x) \le V_{k+1}(x) - V_k(x) + b_k \mathbb{1}_C(x) \qquad\qquad k \in \{0, \cdots, q-1\},$$

Alors

$$\mathbb{E}_x \Big[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} \mathbb{1}^{*(q-1)}(k+1) f(\Phi_k) \Big] \le V_q(x) + \Big(\sum_{k=0}^{q-1} b_k \Big) \mathbb{1}_C(x),$$

où $\qquad \mathbb{1}^{*(q-1)}(k) \sim k^{q-1}/(q-1)! \qquad$ définie par $\mathbb{1}^{*0}(k) := 1, \qquad \mathbb{1}^{*(j+1)}(k) := \sum_{l=1}^{k} \mathbb{1}^{*j}(l)$.

Si de plus, P ψ-irréductible, apériodique, C small et $\sup_C V_q < \infty$,

$$(n+1)^{q-1} \, \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \longrightarrow_n 0.$$

(A-2-e) Interpolation(s)

Res. 1 Souvent (ex: MCMC) on sait $\exists\, 0 < \beta \leq 1$ tq $\pi(V_q^\beta) < \infty$. Alors:

$$\forall\ 0 < \alpha \leq 1,\ \pi\text{-p.p.} \qquad (n+1)^{q\beta\alpha} \, \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{V_q^{\beta(1-\alpha)}} \longrightarrow_n 0.$$

Res. 2 Souvent, $\boxed{PV \leq V - cV^{1-\delta} + b\mathbb{1}_C \quad 0 < \delta < 1.}$

Alors:

$$\forall\ 1 \leq l \leq 1/\delta,\ \pi\text{-p.p.} \qquad (n+1)^{l-1} \, \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{V^{1-l\delta}} \longrightarrow_n 0.$$

En particulier,

$$(n+1)^{1/\delta - 1} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \longrightarrow_n 0 \qquad \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{V^{1-\delta}} \longrightarrow_n 0$$

$\hookrightarrow$ Vitesse de convergence d'autant plus rapide, que *l'espace à poids* est faible.

(A-2-f) Ex. Modèle auto-régressif non linéaire

$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1}$ $\quad \{W_n\}$ i.i.d

- P Lebesgue-irréductible, apériodique; tout compact est petite.
- $\exists 0 < d \leq 2$, $r > 0$ tq $\quad |F(x)| \leq |x| \left(1 - r|x|^{-d}\right), \quad |x| \geq M;$ $\quad \sup_{|x|\leq M} |F(x)| < \infty$
- $\{W_n\}$ tq $\quad \mathbb{E}[W_1] = 0 \quad \mathbb{E}[|W_1|^{s_*}] < \infty$, $s_* \geq 4$.

Condition de drift $\quad \exists \lambda > 0$ tq $\quad \int P(x, dy)|y|^{s_*} \leq |x|^{s_*} - \lambda |x|^{s_*-d} + o(|x|^{s_*-d})$.

Ergodicité polynomiale

$$\forall \ 0 \leq r \leq s_* - d, \qquad (n+1)^{(s_*-r)/d-1} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} \longrightarrow_n 0.$$

$(n+1)^{s_*/d-1} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \longrightarrow_n 0$ $\qquad \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^{s_*-d}} \longrightarrow_n 0$

(A-2-g) Conséquences

Supposons: $\begin{cases} P\ \psi\text{-irréductible, apériodique, } C \text{ small} \\ PV \leq V - cV^{1-\delta} + b\mathbb{1}_C \quad \sup_C V < \infty \end{cases}$

Temps de retour dans "centre" de l'espace

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} (k+1)^{l-1} V^{1-l\delta}(\Phi_k) \right] < \infty \qquad \forall\, 1 \leq l \leq 1/\delta.$$

Inégalité type Rosenthal Si $\delta \leq 1/3$

$$\mathbb{E}_x \left[\left| \sum_{k=1}^{n} \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \right] \leq C\, V(x)\, n^{p/2} \qquad 2 \leq p \leq (1-\delta)/\delta, \quad |g| \leq V^{(1-\delta)/p-\delta}$$

Théorème Central Limite Si $\delta \leq 1/3$

$$\sqrt{n} \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g(\Phi_k) - \pi(g) \right) \longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_g^2), \qquad |g| \leq V^{(1-3\delta)/2}$$

$$0 \leq \sigma_g^2 := \lim_n n^{-1} \mathbb{E}_\pi \left[\{n^{-1} \textstyle\sum_{k=1}^n \bar{g}(\Phi_k)\}^2 \right] = \mathbb{E}_\pi \left[\bar{g}^2(\Phi_0) \right] + 2 \textstyle\sum_n \mathbb{E}_\pi \left[\bar{g}(\Phi_0)\bar{g}(\Phi_n) \right] < \infty$$

(B-a) Echantillonneurs MCMC Monte Carlo Markov Chain

$p(x) \geq 0$

Pbm: $\int_{\mathbb{R}^d} S(x)p(x)dx =?$ lorsque domaine d'intégration complexe p complexe $\cdots$

▷ Sol 1: $\int_{\mathbb{R}^d} S(x)p(x)dx \sim n^{-1} \sum_{k=1}^{n} S(\Phi_k)$ $\{\Phi_k\}$ i.i.d loi $\propto p(x)dx$

▶ Sol 2: $\int_{\mathbb{R}^d} S(x)p(x)dx \sim n^{-1} \sum_{k=1}^{n} S(\Phi_k)$ $\{\Phi_k\}$ CM de loi stationnaire $\propto p(x)dx$

Définir une chaîne P ayant pour unique mesure invariante $\pi(dx) := p(x)dx$,

Etudier le "bon" comportement de la chaîne.

(B-b) Echantillonneur de Hastings-Metropolis

Produire une chaîne P d'unique mesure invariante $\pi(dx) = p(x)dx$, sur $\mathbb{R}^d$

Pour une loi de proposition donnée $\quad Q(x, dy) := q(x, y)dy,$

Algorithme $\quad \phi_n \longrightarrow \phi_{n+1}$

1. Proposer un candidat $Y \sim Q(\phi_n, dy)$
2. (a) $\phi_{n+1} := Y$ avec la probabilité $1 \wedge \frac{p(y)q(y,\phi_n)}{p(\phi_n)q(\phi_n,y)}$,

   (b) Sinon, $\phi_{n+1} := \phi_n$.

Noyau de transition

$$P(x, dy) = \alpha(x, y)Q(x, dy) + \delta_x(dy) \int (1 - \alpha(x, y))\ Q(x, dy)$$

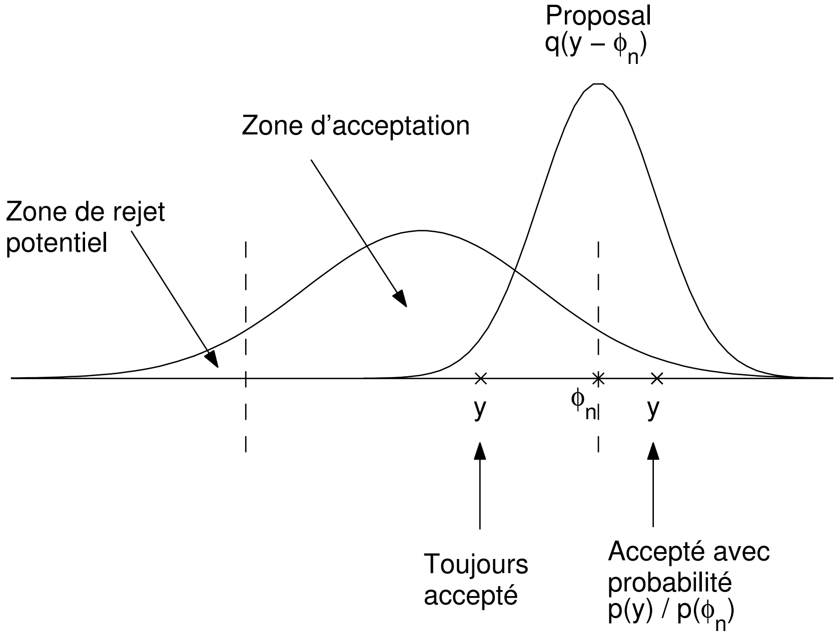
avec

$$\alpha(x, y) := 1 \wedge \frac{p(y)q(y, x)}{p(x)q(x, y)}$$

(B-c) Hastings-Metropolis à marche aléatoire symétrique (RWHM)

$$q(x,y) = q(|y-x|)$$

$$P(x,dy) = \left(1 \wedge \frac{p(y)}{p(x)}\right)\ q(y-x)dy + \delta_x(dy)\ \int \left(1 - 1 \wedge \frac{p(y)}{p(x)}\right)\ q(y-x)dy$$



(B-d) Irréductibilité - Apériodicité du RWHM

Conditions usuelles

- Densité: $0 < \inf_C p \leq \sup_C p < \infty$ pour tout compact C de $\mathbb{R}^d$.
- Loi de proposition: $q(y) \geq \epsilon > 0, \quad$ si $|y| \leq \delta$

Ergodicité xxx du RWHM

- Ergo. géométrique $\longleftrightarrow$ décroissance exp. ou sous-exp. de p $\qquad p(x) \sim \exp(-|x|^l), l \geq 1$
- Ergo. polynomiale^{++} $\longleftarrow$ décroissance sur-exponentielle de p $\qquad p(x) \sim \exp(-|x|^l), l < 1$
- Ergo. polynomiale $\longleftrightarrow$ décroissance polynomiale de p $\qquad p(x) \sim |x|^{-\alpha}, \alpha > 0$

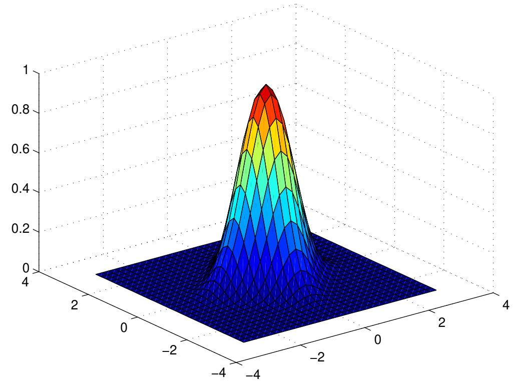
(B-e) Ergodicité géométrique du RWHM

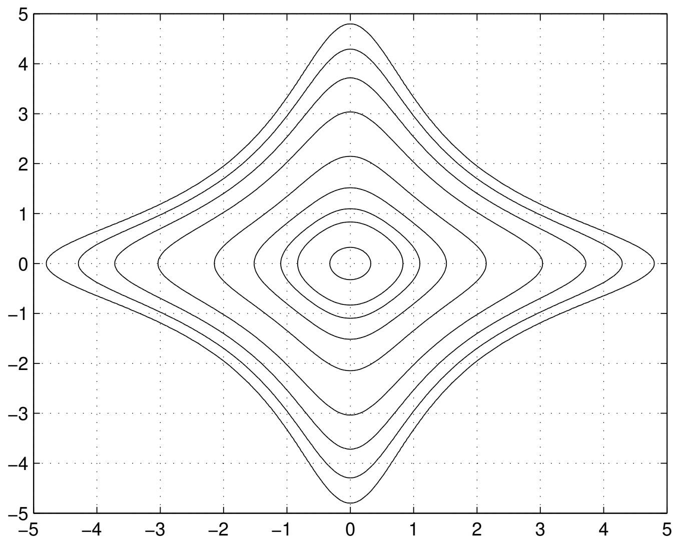
CN Si P est géom. ergo.: $\exists s > 0, \int_{\mathbb{R}^d} \exp(s|x|)\, p(x)\, dx < \infty.$

CS dans $\mathbb{R}^d$, $d > 1$

- p à décroissance sous-exponentielle $\lim_{|x|\to\infty} \langle \nabla \log p(x); x/|x| \rangle = -\infty$
- régularité de la zone d'acceptation $\limsup_{|x|\to\infty} \langle \nabla p(x)/|\nabla p(x)|; x/|x| \rangle < 0$

$$p(x) \propto \exp\left(-(x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2)\right)$$





(B-f) Ergodicité polynomiale du RWHM

Supposons, sur $\mathbb{R}$ $\quad p(x) = l(|x|)/|x|^{-(1+r)}, \quad |x|$ grand $\quad l(x) \in$ classe de Zygmund

1er cas: Loi de proposition à variance finie

On établit

$$\forall\, 2 < s < r+2, \quad \exists\, c > 0, \qquad \int P(x, dy)|y|^s \leq |x|^s - c|x|^{s-2} + o(|x|^{s-2}).$$

On en déduit

$$\forall\, 2 < s < r+2, \quad \forall\, 1 \leq l \leq 2/s, \qquad (n+1)^{l-1} \, \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^{1-2l/s}} \longrightarrow_n 0.$$

$$\hookrightarrow \forall \gamma < r/2, \;\; (n+1)^{\gamma} \, \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \longrightarrow_n 0.$$

(B-f') Ergodicité polynomiale du RWHM

Supposons sur $\mathbb{R}$ $\quad p(x) = l(|x|)/|x|^{-(1+r)}, \quad |x|$ grand $\quad l(x) \in$ classe de Zygmund

2nd cas: Loi de proposition $\quad q(x) = l_q(x)/|x|^{1+\eta}$**,** $\quad 0 < \eta < 2$

On établit

$$\forall\, \eta < s < r + \eta, \quad \exists\, c > 0, \qquad \int P(x, dy)|y|^s \leq |x|^s - c|x|^{s-\eta} + o(|x|^{s-\eta}).$$

On en déduit

$$\forall\, \eta < s < r+\eta, \quad \forall\, 1 \leq l \leq \eta/s, \qquad (n+1)^{l-1} \left\| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\|_{1+|x|^{1-\eta l/s}} \longrightarrow_n 0.$$

$$\hookrightarrow \forall \gamma < r/\eta, \;\; (n+1)^{\gamma} \left\| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\|_{VT} \longrightarrow_n 0.$$

(B-g) Ergodicité polynomiale du RWHM
Et conclusion.

Supposons, sur $\mathbb{R}^+$, $\qquad p(x) = l x^{l-1} \exp(-x^l) \quad 0 < l < 1.$

Si loi de proposition gaussienne (par ex.)

On établit $\qquad \forall\, \beta, 0 < \alpha < 1 \quad \exists\, c > 0$

$$\int P(x, dy) y^\beta \exp(\alpha y^\eta) \leq x^\beta \exp(\alpha x^\eta) - c x^{\beta + 2(\eta - 1)} \exp(\alpha x^\eta) + o(|x|^{\beta + 2(\eta-1)} \exp(\alpha x^\eta)).$$

On en déduit

$$\forall\, \beta, \quad \forall l \qquad (n+1)^l \, \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{1 + x^\beta \exp(\alpha x^\eta)} \longrightarrow_n 0.$$

$\hookrightarrow$ Enfin une condition de drift polynomial qui n'est pas de la forme $\quad PV \leq V - cV^{1-\delta} + b\mathbb{1}_C$!

$\hookrightarrow$ Convergence à toute vitesse polynomiale $\cdots$.