Limites fluides de quelques echantillonneurs MCMC

- Gersende FORT, LTCI - CNRS / Télécom Paris .

Travail en collaboration

- Sean MEYN, (Université de l'Illinois, USA),
- Eric MOULINES, (ENST),
- Pierre PRIOURET, (Université Paris VI).

Limites fluides en file d'attente (i)

- `Newell (82)`, `Cruz (91)`, `Chen & Mandelbaum (91)`.
- Exemple : File M/M/1

$$X(t;x) = x + \mathcal{N}_\lambda([0,t]) - \int_0^t \mathbb{1}_{X(s^-,x)>0}\mathcal{N}_\mu(ds)$$

Limites fluides en file d'attente (i)

- `Newell (82)`, `Cruz (91)`, `Chen & Mandelbaum (91)`.
- Exemple : File M/M/1

$$X(t;x) = x + \mathcal{N}_\lambda([0,t]) - \int_0^t \mathbb{1}_{X(s^-,x)>0} \mathcal{N}_\mu(ds)$$

soit encore

$$\begin{aligned} X(t;x) =& x + (\lambda - \mu)t + (\mathcal{N}_\lambda([0,t]) - \lambda t) \\ & - \int_0^t \mathbb{1}_{X(s^-,x)>0} \left(\mathcal{N}_\mu(ds) - \mu ds\right) + \mu \int_0^t \mathbb{1}_{X(s^-,x)=0} ds \\ =& x + (\lambda - \mu)t + M_t + R_t \end{aligned}$$

Limites fluides en file d'attente (i)

- `Newell (82), Cruz (91), Chen & Mandelbaum (91).`
- Exemple : File M/M/1

$$X(t;x) = x + \mathcal{N}_\lambda([0,t]) - \int_0^t 1\!\!1_{X(s^-,x)>0} \mathcal{N}_\mu(ds)$$

soit encore

$$\begin{aligned} X(t;x) =& x + (\lambda-\mu)t + (\mathcal{N}_\lambda([0,t]) - \lambda t) \\ & - \int_0^t 1\!\!1_{X(s^-,x)>0} \left(\mathcal{N}_\mu(ds) - \mu ds\right) + \mu \int_0^t 1\!\!1_{X(s^-,x)=0} ds \\ =& x + (\lambda-\mu)t + M_t + R_t \end{aligned}$$

Processus normalisé :

$$\eta_r(t;x) = \frac{1}{r} X(rt;rx) \qquad\qquad \eta_r(0;x) = x,$$

$$\eta_r(t;x) = x + (\lambda-\mu)t + \frac{1}{r} M_{rt} + \frac{1}{r} R_{rt}$$

Limites fluides en file d'attente (i)

- `Newell (82), Cruz (91), Chen & Mandelbaum (91).`
- Exemple : File M/M/1

$$X(t;x) = x + \mathcal{N}_\lambda([0,t]) - \int_0^t \mathbb{1}_{X(s^-,x)>0} \mathcal{N}_\mu(ds)$$

soit encore

$$\begin{aligned} X(t;x) =& x + (\lambda-\mu)t + (\mathcal{N}_\lambda([0,t]) - \lambda t) \\ & - \int_0^t \mathbb{1}_{X(s^-,x)>0} \left(\mathcal{N}_\mu(ds) - \mu ds\right) + \mu \int_0^t \mathbb{1}_{X(s^-,x)=0} ds \\ =& x + (\lambda-\mu)t + M_t + R_t \end{aligned}$$

Processus normalisé :

$$\eta_r(t;x) = \frac{1}{r} X(rt;rx) \qquad\qquad \eta_r(0;x) = x,$$

$$\eta_r(t;x) = x + (\lambda-\mu)t + \frac{1}{r} M_{rt} + \frac{1}{r} R_{rt}$$

Passage à la limite : $\qquad \hookrightarrow \qquad (x + (\lambda-\mu)t)^+.$

Limites fluides en file d'attente (ii)

- Lien entre stabilité des limites fluides et stabilité des Chaînes de Markov :

  - `Malysev & Mensikov (79)`, `Dai (95)`. Puis `Meyn & Tweedie (93, 94)`.

  - Exemple (suite) :
    · $\eta(t;x) = (x + (\lambda - \mu)t)^+$.
    · Stabilité du processus limite :

$$\lambda - \mu < 0.$$

Limites fluides en file d'attente (ii)

- Lien entre stabilité des limites fluides et stabilité des Chaînes de Markov :
  - `Malysev & Mensikov (79)`, `Dai (95)`. Puis `Meyn & Tweedie (93, 94)`.
  - Exemple (suite) :
    $\cdot\ \eta(t;x) = (x + (\lambda - \mu)t)^+$.
    $\cdot$ Stabilité du processus limite :
    $$\lambda - \mu < 0.$$
- Littérature :
  - `P. Robert (2000)` *Réseaux et Files d'attente : méthodes probabilistes; Springer*.
  - `S. Meyn (2007)` *Control Techniques for Complex Networks; Cambridge University Press*

Processus normalisé d'une Chaîne de Markov

Soit $(\Phi_k)_{k \geq 0}$ une chaîne de Markov

On définit le processus normalisé :

$$\eta_r(t;x) = \frac{1}{r}\Phi_{\lfloor tr \rfloor} \qquad \eta_r(0;x) = \frac{1}{r}\Phi_0 = x.$$

· constant par morceaux : vaut $r^{-1}\,\Phi_k$ sur les intervalles $[\frac{k}{r}; \frac{(k+1)}{r}[$

· continu à droite, limité à gauche.

Processus normalisé d'une Chaîne de Markov

Soit $(\Phi_k)_{k\geq 0}$ une chaîne de Markov

On définit le processus normalisé :

$$\eta_r(t;x) = \frac{1}{r}\Phi_{\lfloor tr \rfloor} \qquad \eta_r(0;x) = \frac{1}{r}\Phi_0 = x.$$

· constant par morceaux : vaut $r^{-1}\,\Phi_k$ sur les intervalles $[\frac{k}{r}; \frac{(k+1)}{r}[$

· continu à droite, limité à gauche.

1. Quand $r \to +\infty$, convergence étroite des lois des processus $(\eta_r(\cdot, x))_{r\geq 0}$ $\hookrightarrow$ Existence de la limite fluide
2. Caractérisation de la limite fluide
3. Qu'en déduit-on pour la chaîne initiale ?

Recherche motivée par l'étude des chaînes de Markov issues des échantillonneurs par Chaînes de Markov.

Plan

1. Introduction
   - Méthodes Monte Carlo Markov Chain et algorithmes de Metropolis-Hastings.

Plan

1. Introduction
   - Méthodes Monte Carlo Markov Chain et algorithmes de Metropolis-Hastings.
2. Existence de limites fluides (I) : renormalisation en espace et en temps.
3. Existence de limites fluides (II) : renormalisation en temps, plus “rapide” qu’en espace.

Plan

1. Introduction
   - Méthodes Monte Carlo Markov Chain et algorithmes de Metropolis-Hastings.
2. Existence de limites fluides (I) : renormalisation en espace et en temps.
3. Existence de limites fluides (II) : renormalisation en temps, plus "rapide" qu'en espace.
4. Caractérisation des limites fluides.

Plan

1. Introduction
    - Méthodes Monte Carlo Markov Chain et algorithmes de Metropolis-Hastings.
2. Existence de limites fluides (I) : renormalisation en espace et en temps.
3. Existence de limites fluides (II) : renormalisation en temps, plus "rapide" qu'en espace.
4. Caractérisation des limites fluides.
5. Stabilité des limites fluides et Stabilité des chaînes de Markov.
6. Conclusion et perspectives.

I-1. Echantillonneurs MCMC type Metropolis-Hastings

$\hookrightarrow$ Simuler des v.a. de loi π, densité sur $\mathbb{R}^d$

- Algorithme de Metropolis-Hastings : $\{\Phi_t\}_t$ selon $\Phi_t \longrightarrow \Phi_{t+1}$
  - $\Phi_{t+1/2} \sim q(\Phi_t, \cdot)$.
  - $\Phi_{t+1} = \begin{cases} \Phi_{t+1/2} & \text{avec proba} \quad \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \\ \Phi_t & \text{avec proba} \quad 1 - \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \end{cases}$,

où le ratio d'acceptation-rejet est donné par

$$\alpha(x, z) = 1 \wedge \frac{\pi(z) q(z, x)}{\pi(x) q(x, z)}.$$

I-1. Echantillonneurs MCMC type Metropolis-Hastings

$\hookrightarrow$ Simuler des v.a. de loi π, densité sur $\mathbb{R}^d$

▶ Algorithme de Metropolis-Hastings : $\{\Phi_t\}_t$ selon $\Phi_t \longrightarrow \Phi_{t+1}$

- $\Phi_{t+1/2} \sim q(\Phi_t, \cdot)$.
- $\Phi_{t+1} = \begin{cases} \Phi_{t+1/2} & \text{avec proba} \quad \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \\ \Phi_t & \text{avec proba} \quad 1 - \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \end{cases}$,

où le ratio d'acceptation-rejet est donné par

$$\alpha(x, z) = 1 \wedge \frac{\pi(z)q(z, x)}{\pi(x)q(x, z)}.$$

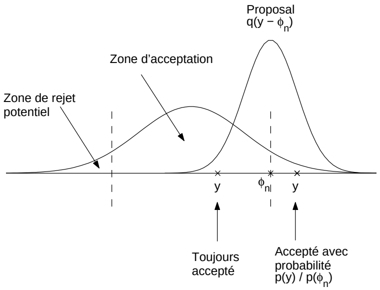
▶ MH à marche aléatoire symétrique

$$q(x; z) = q(z - x), \qquad\qquad q(x - z) = q(z - x).$$

si bien que

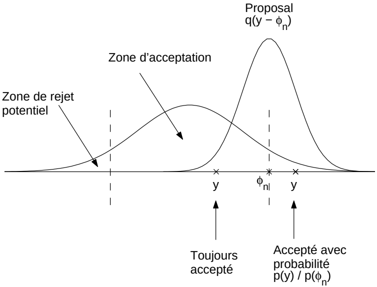
$$\alpha(x, z) = 1 \wedge \frac{\pi(z)}{\pi(x)}.$$

I-1 (suite)

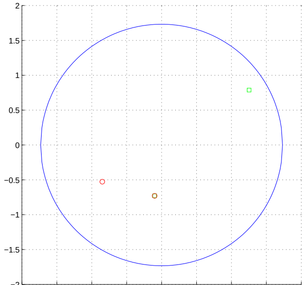


Proposal
q(y − ϕn)
Zone d'acceptation
Zone de rejet
potentiel
y
ϕn
y
Toujours
accepté
Accepté avec
probabilité
p(y) / p(ϕn)

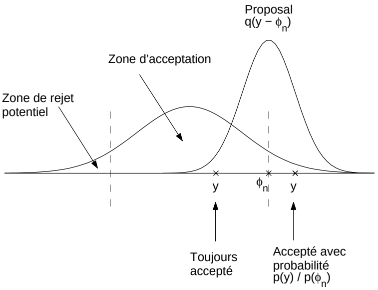
I-1 (suite)


Proposal
q(y − φn)
Zone d'acceptation
Zone de rejet
potentiel
y
φn
y
Toujours
accepté
Accepté avec
probabilité
p(y) / p(φn)

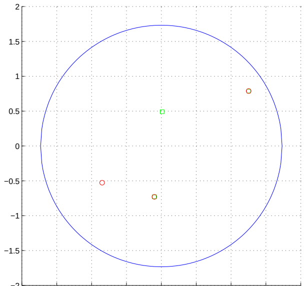
1, 2


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5

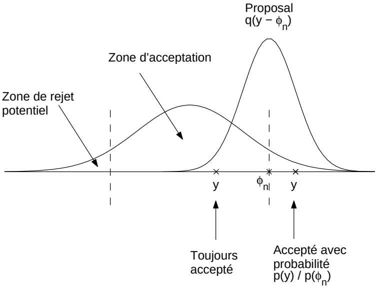
I-1 (suite)


Proposal
q(y − ϕn)
Zone d'acceptation
Zone de rejet
potentiel
y
ϕn
y
Toujours
accepté
Accepté avec
probabilité
p(y) / p(ϕn)

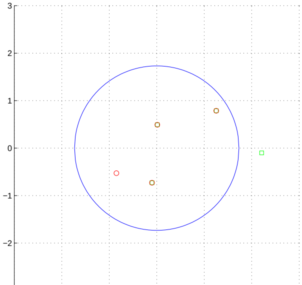
1, 2, 3


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2

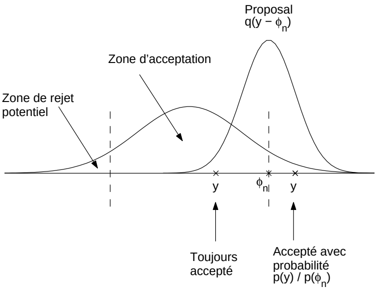
I-1 (suite)



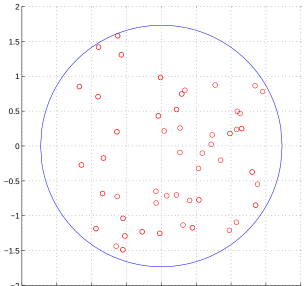
1, 2, 3, 4



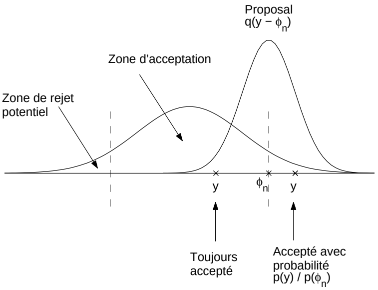
I-1 (suite)



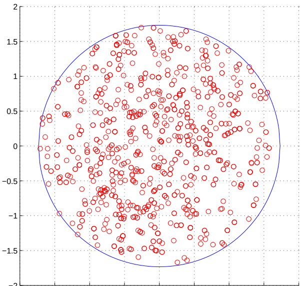
1, 2, 3, 4, 100



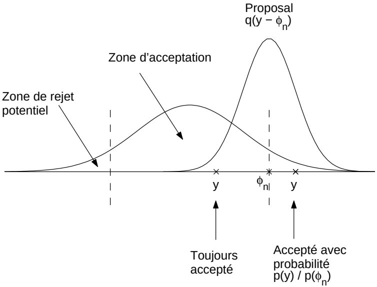
I-1 (suite)



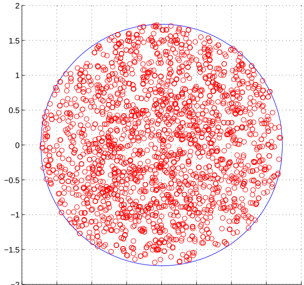
1, 2, 3, 4, 100, 1000



I-1 (suite)



1, 2, 3, 4, 100, 1000, 3000



I-2 Etude des échantillonneurs MCMC

Par ex.

$$\mathbb{E}_\pi\left[f(\Phi_0)\right] \sim \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\Phi_k).$$

$\hookrightarrow$ Objet de l'étude

- Etude de la convergence des algorithmes : *conditions suffisantes* pour
  - l'ergodicité des chaînes de Markov,
  - contrôle de convergence,
  - théorèmes limites.

I-2 Etude des échantillonneurs MCMC

Par ex.

$$\mathbb{E}_\pi\left[f(\Phi_0)\right] \sim \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\Phi_k).$$

$\hookrightarrow$ Objet de l'étude

- Etude de la convergence des algorithmes : *conditions suffisantes* pour
  - l'ergodicité des chaînes de Markov,
  - contrôle de convergence,
  - théorèmes limites.
- Choix des paramètres de mise en oeuvre :
  - choix de la loi de proposition q (par ex. par des méthodes adaptatives).

I-2 Etude des échantillonneurs MCMC

Par ex.

$$\mathbb{E}_\pi\left[f(\Phi_0)\right] \sim \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\Phi_k).$$

$\hookrightarrow$ Objet de l'étude

- Etude de la convergence des algorithmes : *conditions suffisantes* pour
  - l'ergodicité des chaînes de Markov,
  - contrôle de convergence,
  - théorèmes limites.
- Choix des paramètres de mise en oeuvre :
  - choix de la loi de proposition q (par ex. par des méthodes adaptatives).

$\hookrightarrow$ Techniques classiques

- Méthodes de "drift" (cf. partie V)

$$\mathbb{E}_x\left[V(\Phi_1)\right] \leq V(x) - \phi \circ V(x) + b\mathbb{1}_C(x),$$

dont la vérification nécessite des hyp. contraignantes sur π.

$\hookrightarrow$ Nouvelle technique : limites fluides.

II. Définition / Existence des Limites Fluides

Soit

$\{\Phi_k\}_k$ une chaîne de Markov,
à valeur dans $(\mathsf{X}, \mathcal{B}(\mathsf{X}))$.

$\hookrightarrow$ Construction d'un processus normalisé

(i) en le point initial

$$\eta_r(0; x) = \frac{1}{r}\Phi_0 = x, \qquad \Phi_0 = rx.$$

II. Définition / Existence des Limites Fluides

Soit

$\{\Phi_k\}_k$ une chaîne de Markov,
à valeur dans $(\mathsf{X}, \mathcal{B}(\mathsf{X}))$.

$\hookrightarrow$ Construction d'un processus normalisé

(i) en le point initial

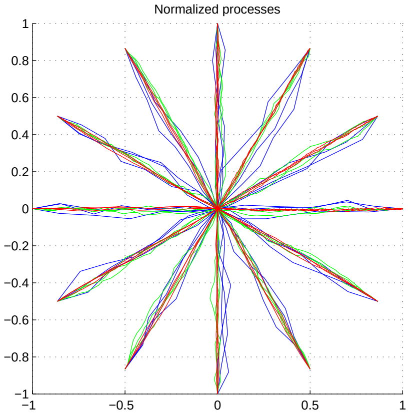
$$\eta_r(0; x) = \frac{1}{r}\Phi_0 = x, \qquad \Phi_0 = rx.$$

(ii) en temps et en espace

$$\eta_r(t; x) = \frac{1}{r}\Phi_{\lfloor tr \rfloor},$$

$$\eta_r(t; x) = \frac{1}{r}\Phi_k \qquad \text{sur l'intervalle } \left[\frac{k}{r}; \frac{(k+1)}{r}\right).$$

II-1. Influence de r



$$\pi(x, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2)\,\mathrm{exp}(-(x^2 + y^2)) \qquad q \sim \mathcal{N}(0, 4\mathrm{Id})$$

$t \mapsto \eta_r(t; x)$, aux points $t_q = q/r$, pour différentes valeurs initiales x sur la sphère unité et $r = 500$, 2000 et 10000

II-2. Définition

- $\eta_r(\cdot;x)$ est continue à droite, limité à gauche; $\eta_r(0,x) = x$.
  - $\mathbb{P}_x$: loi de la chaîne, de loi initiale δ_x.
  - $\mathbb{Q}_{r;x}$: loi image par $\eta_r(\cdot;x)$ proba. sur l'espace des fonctions cadlag $\mathbb{R}^+ \to \mathsf{X}$.

II-2. Définition

- $\eta_r(\cdot; x)$ est continue à droite, limité à gauche; $\eta_r(0, x) = x$.
  - $\mathbb{P}_x$: loi de la chaîne, de loi initiale δ_x.
  - $\mathbb{Q}_{r;x}$: loi image par $\eta_r(\cdot; x)$ proba. sur l'espace des fonctions cadlag $\mathbb{R}^+ \to \mathsf{X}$.

- Définition : $\mathbb{Q}_x$ est une limite fluide si il existe $\{r_n\}_n \to +\infty$, $\{x_n\}_n \to x$ tels que

$$\mathbb{Q}_{r_n;x_n} \Longrightarrow \mathbb{Q}_x$$

  - convergence étroite
  - probabilités sur l'espace des fonctions cadlag $\mathbb{R}^+ \to \mathsf{X}$.

II-3. Théorème d'existence

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]$$

II-3. Théorème d'existence

$$\begin{aligned}
\Phi_{k+1} &= \Phi_k + \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] \\
&= \Phi_k + \underbrace{\mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1} - \Phi_k|\mathcal{F}_k\right]}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{\left(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]\right)}_{\epsilon_{k+1} \quad \text{incrément de martingale}}.
\end{aligned}$$

II-3. Théorème d'existence

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= \Phi_k + \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] \\ &= \Phi_k + \underbrace{\mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1} - \Phi_k|\mathcal{F}_k\right]}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{\left(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]\right)}_{\epsilon_{k+1} \quad \text{incrément de martingale}}.\end{aligned}$$

- Théorème

Si

- $\exists p > 1, \qquad \lim_{K\to+\infty} \quad \sup_{x\in\mathsf{X}} \mathbb{E}_x\left[|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1|>K}\right] \to 0.$
- $\sup_{x\in\mathsf{X}} |\Delta(x)| < \infty.$

II-3. Théorème d'existence

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= \Phi_k + \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] \\ &= \Phi_k + \underbrace{\mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1} - \Phi_k|\mathcal{F}_k\right]}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{\left(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]\right)}_{\epsilon_{k+1} \quad \text{incrément de martingale}}.\end{aligned}$$

▶ Théorème

Si

- $\exists p > 1, \qquad \lim_{K\to+\infty} \quad \sup_{x\in\mathsf{X}} \mathbb{E}_x\left[|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1|>K}\right] \to 0.$
- $\sup_{x\in\mathsf{X}} |\Delta(x)| < \infty.$

Alors pour toutes suites $\{r_n\}_n \to +\infty$, $\{x_n\}_n \to x$,

- il existe $\{r_{n_j}\}_j \to +\infty$, $\{x_{n_j}\}_j \to x$
- et $\mathbb{Q}_x$, proba sur l'espace des fonctions continues : $\mathbb{R}^+ \to \mathsf{X}$ telles que

$$\mathbb{Q}_{r_n;x_n} \Longrightarrow \mathbb{Q}_x.$$

II-4. Etapes de démonstration

1. Il faut montrer que $\{\mathbb{Q}_{r_n;x_n}\}_n$ est relativement compacte.
2. Par le théorème de Prohorov, il suffit que $\{\mathbb{Q}_{r_n;x_n}\}_n$ soit *tight*.
3. Vérifié si

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n \mathbb{Q}_{r_n;x_n} \left(|\eta(0)| > a\right) = 0,$$

$$\forall T > 0, \lim_{a\to\infty} \limsup_n \mathbb{Q}_{r_n;x_n} \left(\eta, \sup_{t\in[0,T]} |\eta(t) - \eta(t^-)| > a\right) = 0,$$

$$\forall T, \epsilon > 0, \lim_{\delta\to 0} \limsup_n \mathbb{Q}_{r_n;x_n} \left(\eta, \omega(\eta,\delta) \geq \epsilon\right) = 0.$$

II-5. Application : MH à marche aléatoire symétrique

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \left| \begin{array}{lll} Y_{k+1} & \text{avec proba} & 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)} \\ 0 & \text{avec proba} & 1 - 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)}, \end{array} \right.$$

où $Y_{k+1} \sim q(\cdot)$.

- Moment : de l'incrément de martingale $\longleftrightarrow$ de la loi de proposition

$$\mathbb{E}_x \left[|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1| > K} \right] \leq 2^p \int |y|^p 1_{|y| \geq K - m_q} \; q(y) \lambda(dy) \qquad {\scriptstyle m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy).}$$

II-5. Application : MH à marche aléatoire symétrique

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \left| \begin{array}{lll} Y_{k+1} & \text{avec proba} & 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)} \\ 0 & \text{avec proba} & 1 - 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)}, \end{array} \right.$$

où $Y_{k+1} \sim q(\cdot)$.

- Moment : de l'incrément de martingale $\longleftrightarrow$ de la loi de proposition

$$\mathbb{E}_x \left[|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1| > K} \right] \leq 2^p \int |y|^p 1_{|y| \geq K - m_q} \; q(y) \lambda(dy) \qquad m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy).$$

- Accroissement moyen $\Delta(x)$ borné

$$\Delta(x) = - \int_{\{y, \pi(x+y) \leq \pi(x)\}} y \left(1 - \frac{\pi(x+y)}{\pi(x)} \right) q(y) \lambda(dy),$$

i.e. dès que $m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy) < \infty$.

II-5. Application : MH à marche aléatoire symétrique

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \left| \begin{array}{lll} Y_{k+1} & \text{avec proba} & 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)} \\ 0 & \text{avec proba} & 1 - 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)} \end{array} \right.,$$

où $Y_{k+1} \sim q(\cdot)$.

- Moment : de l'incrément de martingale $\longleftrightarrow$ de la loi de proposition

$$\mathbb{E}_x \left[|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1| > K} \right] \leq 2^p \int |y|^p 1_{|y| \geq K - m_q} \; q(y) \lambda(dy) \qquad m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy).$$

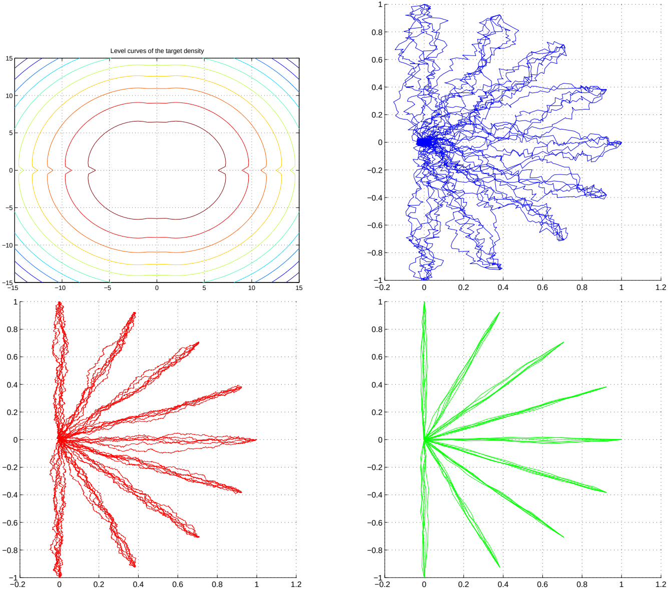
- Accroissement moyen $\Delta(x)$ borné

$$\Delta(x) = - \int_{\{y, \pi(x+y) \leq \pi(x)\}} y \left(1 - \frac{\pi(x+y)}{\pi(x)} \right) q(y) \lambda(dy),$$

i.e. dès que $m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy) < \infty$.

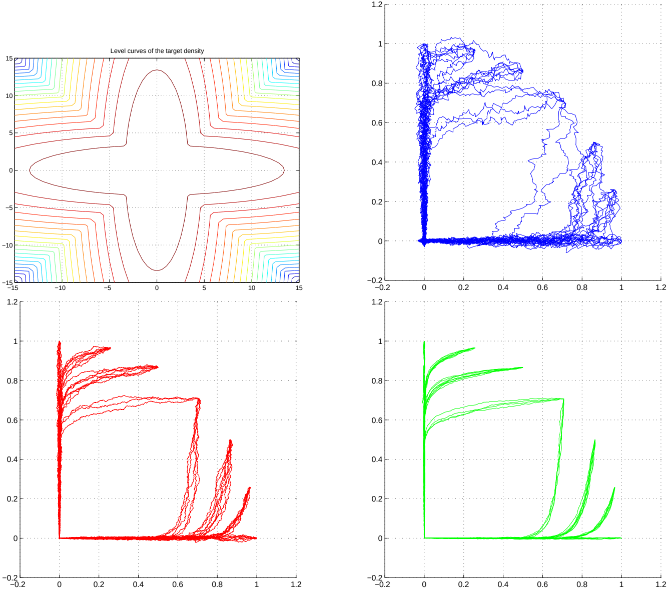
Il suffit : moments de la loi de proposition.

II-6a. Exemple 1 : (cas régulier, $\beta = 0$)



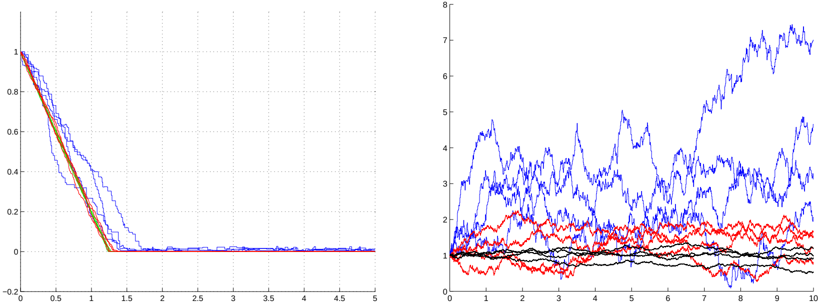
$\pi(x, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2) \exp(-(x^2 + y^2))$, $q \sim \mathcal{N}(0, 4Id)$, r=100, r=1000, r=5000

II-6b. Exemple 2 : (cas irrégulier, $\beta = 0$)



$\pi(x, y) \propto \mathcal{N}(0, \Gamma_1^{-1}) + \mathcal{N}(0, \Gamma_2^{-1})$, $q \sim \mathcal{N}(0, Id)$, r=100, r=1000, r=5000

II-6c. Exemple 3 : (normalisation inadaptée)



$$\pi(x,\, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2) \exp(-(x^2 + y^2)),$$

$$\pi(x,\, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2)^{0.1} \exp(-(x^2 + y^2)^{0.1}),$$

$q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, r=100, r=1000, r=5000, r=10 000 T=5

↪ Changement d'échelle : disymétrie temps / espace.

III-1. Disymétrie temps / espace

$\hookrightarrow$ Construction d'un processus normalisé, $\beta > 0$,

(i) en le point initial

$$\eta_r^\beta(0;x) = \frac{1}{r}\Phi_0 = x, \qquad\qquad \Phi_0 = rx.$$

III-1. Disymétrie temps / espace

$\hookrightarrow$ Construction d'un processus normalisé, $\beta > 0$,

(i) en le point initial

$$\eta_r^\beta(0;x) = \frac{1}{r}\Phi_0 = x, \qquad\qquad \Phi_0 = rx.$$

(ii) en temps et en espace

$$\eta_r^\beta(t;x) = \frac{1}{r}\Phi_{\lfloor tr^{1+\beta}\rfloor},$$

$$\eta_r^\beta(t;x) = \frac{1}{r}\Phi_k \qquad\qquad \text{sur l'intervalle } \left[\frac{k}{r^{1+\beta}}; \frac{(k+1)}{r^{1+\beta}}\right).$$

On note $\mathbb{Q}_{r;x}^\beta$ l'image de $\mathbb{P}_x$ par $\eta_r^\beta(\cdot;x)$.

III-2. Existence de la β-limite fluide

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{\left(\mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k\right)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{\left(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]\right)}_{\epsilon_{k+1}\text{incrément de martingale}}$$

- Théorème

Si

- $\exists\, p > 1,\ \sup_{x\in\mathsf{X}} \mathbb{E}_x\left[|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1|>K}\right] \to 0, \quad K \to +\infty.$
- $\exists\, 0 < \beta < 1 \wedge (p-1), \quad \sup_{x\in\mathsf{X}} \left(1 + |x|^\beta\right) |\Delta(x)| < \infty.$

III-2. Existence de la β-limite fluide

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{\left(\mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k\right)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{\left(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]\right)}_{\epsilon_{k+1}\text{incrément de martingale}}$$

▶ Théorème

Si

- $\exists\, p > 1,\ \sup_{x \in \mathsf{X}} \mathbb{E}_x\left[|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1|>K}\right] \to 0, \quad K \to +\infty.$
- $\exists\, 0 < \beta < 1 \wedge (p-1), \quad \sup_{x \in \mathsf{X}} \left(1 + |x|^\beta\right) |\Delta(x)| < \infty.$

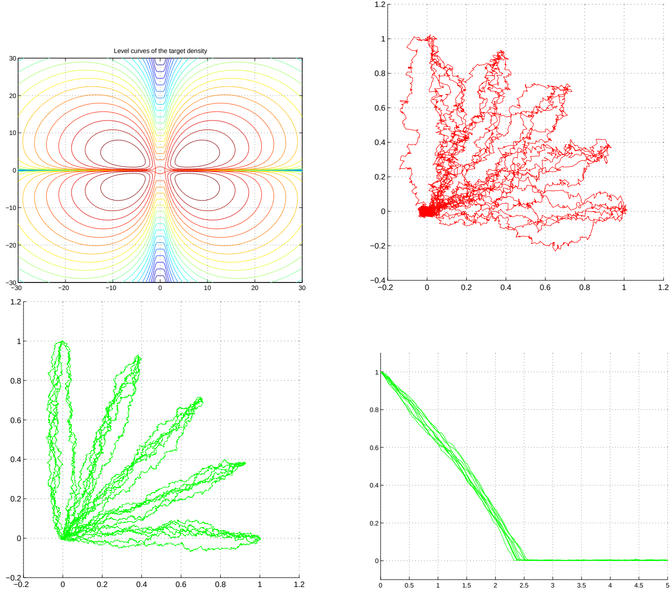
Alors pour tout $0 \le \alpha \le \beta$, et toutes suites $\{r_n\}_n \to +\infty$, $\{x_n\}_n \to x$,

- il existe $\{r_{n_j}\}_j \to +\infty$, $\{x_{n_j}\}_j \to x$
- et $\mathbb{Q}_x^\alpha$, proba sur l'espace des fonctions continues : $\mathbb{R}^+ \to \mathsf{X}$ telles que

$$\mathbb{Q}^\alpha_{r_n;x_n} \Longrightarrow \mathbb{Q}^\alpha_x.$$

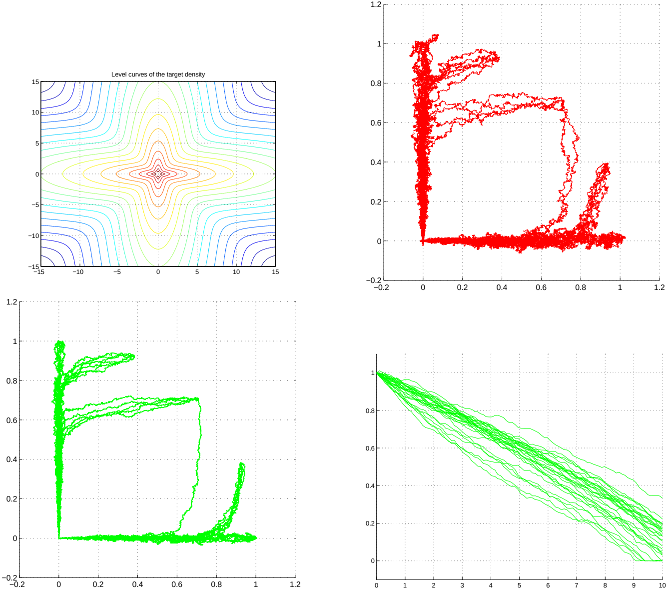
Et pour $0 \le \alpha < \beta$, $\mathbb{Q}^\alpha_x = \delta_x$.

III-3a. Exemple 1 : cas régulier, $\beta > 0$



$\pi(x, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2)^{0.4} \exp(-(x^2 + y^2)^{0.4})$, $q \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, r=1000, r=5000 T=5

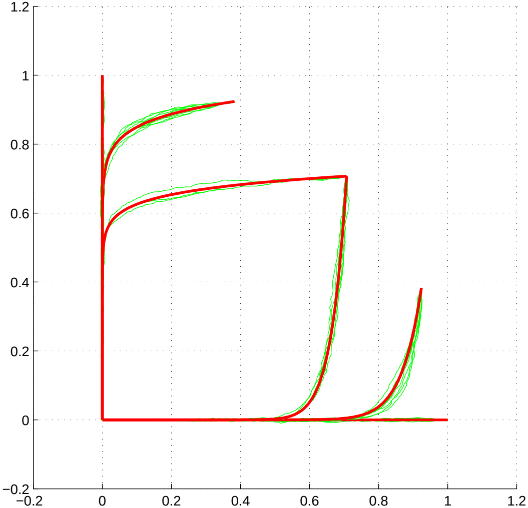
III-3b. Exemple 2 : cas irrégulier, $\beta > 0$



$\pi(x\,,\,y) \propto$ mélange de Weibull, $\quad q \sim \mathcal{N}(0,\,1.5^2\mathrm{Id})$, r=1000, r=5000 T=10

IV. Caractérisation de la Limite Fluide

$\hookrightarrow$ Peut-on décrire le support de la limite fluide $\mathbb{Q}_x^\beta$?



$\pi(x, y) \propto$ mélange de Gaussiennes,
$q \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, r=5000 T=5

IV-1. L'idée $\cdots$

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{\left(\mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k\right)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{\left(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]\right)}_{\epsilon_{k+1}\text{incrément de martingale}}$$

- Pour le processus normalisé : cas $\beta = 0$

$$\begin{aligned}
\eta_r\left[\frac{k+1}{r}, x\right] &= \frac{1}{r}\Phi_{k+1} \\
&= \eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right] + \frac{1}{r}\Delta\left(r\ \eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right]\right) + \frac{1}{r}\epsilon_{k+1} \\
&= \eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right] + \frac{1}{r}\quad h\left(\eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right]\right) + \frac{1}{r}\left(\xi_k + \epsilon_{k+1}\right)
\end{aligned}$$

en ayant posé

$$h(x) = \lim_{r\to+\infty} \Delta(r\ x).$$

IV-1. L'idée $\cdots$

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{\left(\mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] - \Phi_k\right)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{\left(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x\left[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]\right)}_{\epsilon_{k+1}\text{incrément de martingale}}$$

- Pour le processus normalisé : cas $\beta = 0$

$$\begin{aligned}\eta_r\left[\frac{k+1}{r}, x\right] &= \frac{1}{r}\Phi_{k+1}\\ &= \eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right] + \frac{1}{r}\Delta\left(r\ \eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right]\right) + \frac{1}{r}\epsilon_{k+1}\\ &= \eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right] + \frac{1}{r}\quad h\left(\eta_r\left[\frac{k}{r}, x\right]\right) + \frac{1}{r}\left(\xi_k + \epsilon_{k+1}\right)\end{aligned}$$

en ayant posé

$$h(x) = \lim_{r\longrightarrow+\infty} \Delta(r\ x).$$

- Ainsi version bruitée de

$$\mu\left(\frac{k+1}{r}\right) = \mu\left(\frac{k}{r}\right) + \frac{1}{r}h\left(\mu\left(\frac{k}{r}\right)\right) \longleftrightarrow \text{ODE} : \dot{\mu}(t) = h(\mu(t))$$

IV-2. Caractérisation

▶ Théorème

Si

- C.S. existence de la limite fluide.
- il existe un cône ouvert O de X $\setminus \{0\}$,
- h : O $\rightarrow$ X telle que

$$\sup_{x \in \mathsf{H}} \left| r^{\beta} \Delta(rx) - |x|^{-\beta} h(x) \right| \rightarrow 0, \qquad r \rightarrow +\infty,$$

pour tout compact H $\subseteq$ O

IV-2. Caractérisation

- Théorème

Si

- C.S. existence de la limite fluide.
- il existe un cône ouvert O de $\mathsf{X} \setminus \{0\}$,
- h : O $\to$ X telle que

$$\sup_{x \in \mathsf{H}} \left| r^{\beta} \Delta(rx) - |x|^{-\beta} h(x) \right| \to 0, \qquad r \to +\infty,$$

pour tout compact $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{O}$

Alors pour tout $0 \leq s \leq t$, sur $\{\eta, \eta(u) \in \mathsf{O}, s \leq u \leq t\}$,

$$\sup_{s \leq u \leq t} \left| \eta(u) - \eta(s) - \int_s^u h \circ \eta(v) \, dv \right| = 0, \quad \mathbb{Q}_x^{\beta} - p.s.$$

IV-2. Caractérisation

▶ Théorème

Si

- C.S. existence de la limite fluide.
- il existe un cône ouvert O de X $\setminus \{0\}$,
- h : O $\to$ X telle que

$$\sup_{x \in \mathsf{H}} \left| r^{\beta} \Delta(rx) - |x|^{-\beta} h(x) \right| \to 0, \qquad r \to +\infty,$$

pour tout compact H $\subseteq$ O

Alors pour tout $0 \le s \le t$, sur $\{\eta, \eta(u) \in \mathsf{O}, s \le u \le t\}$,

$$\sup_{s \le u \le t} \left| \eta(u) - \eta(s) - \int_s^u h \circ \eta(v) \, dv \right| = 0, \quad \mathbb{Q}_x^{\beta} - p.s.$$

▶ i.e. la limite fluide $\mathbb{Q}_x^{\beta}$ charge les fonctions continues qui vérifient

$$\eta(u) = \eta(s) + \int_s^u h \circ \eta(v) \, dv, \qquad s \le u \le t,$$

dès lors que $\eta([s,t]) \subset$ O.

IV-3. Application : MH à marche aléatoire symétrique

$$\Delta(r\ x) = -\int_{\{y, \pi(rx+y)<\pi(rx)\}} y\ \left(1 - \frac{\pi(rx+y)}{\pi(rx)}\right)\ q(y)\lambda(dy).$$

IV-3. Application : MH à marche aléatoire symétrique

$$\Delta(r\ x) = -\int_{\{y,\pi(rx+y)<\pi(rx)\}} y\ \left(1 - \frac{\pi(rx+y)}{\pi(rx)}\right)\ q(y)\lambda(dy).$$

- Cond. sur les zones de rejet

$$\{y, \pi(rx+y) < \pi(rx)\} \longrightarrow \{y, \langle y, \ell_\infty(x)\rangle < 0\}, \qquad \text{" } q\text{-p.p. "}$$

IV-3. Application : MH à marche aléatoire symétrique

$$\Delta(r\ x) = -\int_{\{y,\pi(rx+y)<\pi(rx)\}} y\ \left(1 - \frac{\pi(rx+y)}{\pi(rx)}\right)\ q(y)\lambda(dy).$$

- Cond. sur les zones de rejet

$$\{y, \pi(rx+y) < \pi(rx)\} \longrightarrow \{y, \langle y, \ell_\infty(x)\rangle < 0\}, \qquad \text{" } q\text{-p.p. "}$$

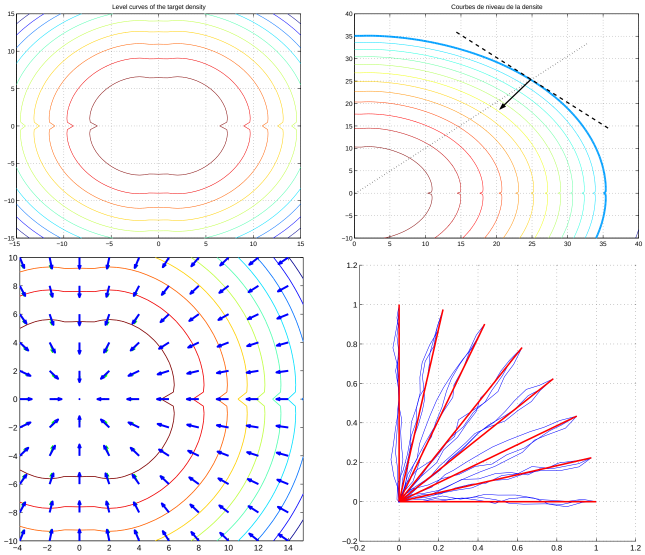
- Cond. sur la décroissance de π
  - Cas sur-exponentiel : $(\beta = 0)$

    $\lim_{|x|\to\infty} \langle |x|^{-1}x, \nabla \ln \pi(x)\rangle \to -\infty.$
  - Cas sous-exponentiel : $(0 < \beta < 1)$

    $\lim_{|x|\to\infty} \langle |x|^{-1}x, |\nabla \ln \pi(x)|^{-1}\ \nabla \ln \pi(x)\rangle < 0.$

    $\lim_{|x|\to\infty}\ |\nabla \ln \pi(x)| = 0.$

IV-4a. Exemple : Cas sur-exponentiel ($\beta = 0$), $O = X \setminus \{0\}$



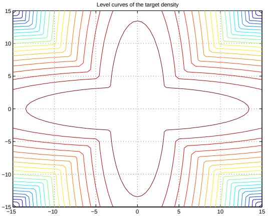
GHaut- Lignes de niveau de π

GBas- Lignes de niveau, Δ et h

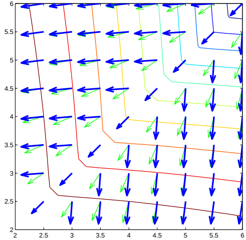
Dhaut- Plan "limite" de la zone de rejet.

DBas- Processus η_x^β et flot de l'ODE.

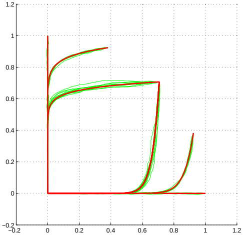
IV-4b. Exemple : Cas sur-exponentiel ($\beta = 0$), O $\subsetneq$ X $\setminus \{0\}$



Lignes de niveau de π

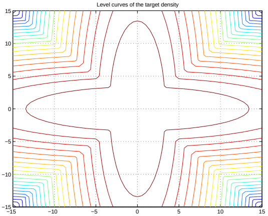


Lignes de niveau, Δ et h

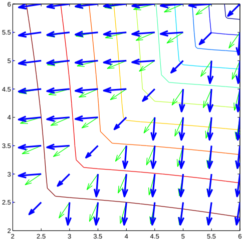


Processus η_x^β et flot de l'ODE.

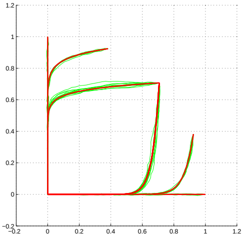
IV-4b. Exemple : Cas sur-exponentiel ($\beta = 0$), $\mathsf{O} \subsetneq \mathsf{X} \setminus \{0\}$



Lignes de niveau de π



Lignes de niveau, Δ et h



Processus η_x^β et flot de l'ODE.

$\hookrightarrow$ Il existe $T_0 < \infty$ tel que pour tout $x \in \mathsf{X}$, $|x| = 1$, et toute β-limite fluide $\mathbb{Q}_x^\beta$,

$$\mathbb{Q}_x^\beta \left(\eta, \eta([0, T_0]) \cap \mathsf{O} \neq \emptyset\right) = 1.$$

V-1. Stabilité des chaînes de Markov

$\hookrightarrow$ Existence d'une probabilité invariante π et convergence vers la loi stationnaire π

▶ C(N)S d'ergodicité

- phi-irréductibilité, apériodicité.
- Il existe $V \geq 1$, $\phi \geq 1$, C ensemble *petite*

$$\mathbb{E}_x\left[V(\Phi_1)\right] \leq V(x) - \phi \circ V(x) + b \mathbb{1}_C(x), \qquad \sup_C V < \infty.$$

V-1. Stabilité des chaînes de Markov

$\hookrightarrow$ Existence d'une probabilité invariante π et convergence vers la loi stationnaire π

▶ C(N)S d'ergodicité

- phi-irréductibilité, apériodicité.
- Il existe $V \geq 1$, $\phi \geq 1$, C ensemble *petite*

$$\mathbb{E}_x\left[V(\Phi_1)\right] \leq V(x) - \phi \circ V(x) + b\mathbb{1}_C(x), \qquad \sup_C V < \infty.$$

▶ Selon le rappel "$\phi \circ V$"

$\phi = 1$	$\pi(\mathsf{X}) < \infty$,	$\mathbb{E}_x[g(\Phi_n)] \to \pi(g), \lvert g \rvert \leq 1$.
ϕ concave	$\pi(\phi \circ V) < \infty$	$\mathbb{E}_x[g(\Phi_n)] \to \pi(g), \lvert g \rvert \leq f$ + vitesse sous-géom.
$\left.\begin{array}{l}\phi(x) = \lambda x \\ 0 < \lambda < 1\end{array}\right\}$	$\pi(V) < \infty$,	$\mathbb{E}_x[g(\Phi_n)] \to \pi(g), \lvert g \rvert \leq V$ + vitesse géom.

V-2. Stabilité : limite fluide/ Chaîne de Markov

- Stabilité des β-limites fluides $\exists\ T > 0$ et $0 < \rho < 1$, tels que

$$\forall\ x, |x| = 1, \quad \mathbb{Q}_x^\beta \left(\eta, \inf_{[0,T]} |\eta(\cdot)| \leq \rho \right) = 1.$$

V-2. Stabilité : limite fluide/ Chaîne de Markov

- Stabilité des β-limites fluides $\exists\, T > 0$ et $0 < \rho < 1$, tels que

$$\forall\, x, |x| = 1, \quad \mathbb{Q}_x^\beta\left(\eta, \inf_{[0,T]} |\eta(\cdot)| \leq \rho\right) = 1.$$

- Théorème Si
    - chaîne irréductible, apériodique, compacts sont petites.
    - CS existence de la β-limite fluide.
    - Stabilité des β-limites fluides.

Alors ergodicité polynomiale,

$$(n+1)^{q-1} \sup_{\{f, |f| \leq 1+|x|^{p-q(1+\beta)}\}} |\mathbb{E}_x[f(\Phi_n)] - \pi(f)| \to 0, \qquad 1 \leq q \leq p/(1+\beta).$$

V-2. Stabilité : limite fluide/ Chaîne de Markov

- Stabilité des β-limites fluides $\exists\, T > 0$ et $0 < \rho < 1$, tels que

$$\forall\, x, |x| = 1, \quad \mathbb{Q}_x^\beta \left(\eta, \inf_{[0,T]} |\eta(\cdot)| \le \rho \right) = 1.$$

- Théorème Si
  - chaîne irréductible, apériodique, compacts sont petites.
  - CS existence de la β-limite fluide.
  - Stabilité des β-limites fluides.

Alors ergodicité polynomiale,

$$(n+1)^{q-1} \sup_{\{f, |f| \le 1 + |x|^{p-q(1+\beta)}\}} |\mathbb{E}_x[f(\Phi_n)] - \pi(f)| \to 0, \qquad 1 \le q \le p/(1+\beta).$$

- Grandes lignes de la démonstration
  - (i) Stab de la LF $\to$ drift géom. pour la chaîne de noyau $\mathbb{P}_x(\Phi_{\tau_{\Phi_0}} \in \cdot)$

$$\tau_{\Phi_0} = \lfloor T|\Phi_0|^{1+\beta} \rfloor \wedge \sigma, \qquad \sigma = \inf\{k, |\Phi_k| \le \rho|\Phi_0|\}.$$

  - (ii) On en déduit une cond. de drift polynomial pour la chaîne initiale.

V-3. Stabilité : ODE / Limite fluide

$$\begin{cases} \dot{\mu} = h(\mu), \\ \mu(0) = x \end{cases} \longrightarrow \mu(\cdot; x) \text{ sur } [0, T_x].$$

La limite fluide est stable dès que

- Cas 1 : $\mathsf{O} = \mathsf{X} \setminus \{0\}$

$$\exists\, T, \rho \qquad \forall\, x, |x| = 1, \qquad\qquad \inf_{[0,T]} |\mu(\cdot; x)| \leq \rho < 1.$$

V-3. Stabilité : ODE / Limite fluide

$$\begin{cases} \dot{\mu} = h(\mu), \\ \mu(0) = x \end{cases} \longrightarrow \mu(\cdot; x) \text{ sur } [0, T_x].$$

La limite fluide est stable dès que

- **Cas 1 :** $\mathsf{O} = \mathsf{X} \setminus \{0\}$

$$\exists\, T, \rho \qquad \forall\, x, |x| = 1, \qquad \inf_{[0,T]} |\mu(\cdot; x)| \leq \rho < 1.$$

- **Cas 2 :** $\mathsf{O} \neq \mathsf{X} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Q}_x^\beta\,(\eta, \eta([0, T_0]) \cap \mathsf{O} \neq \emptyset) = 1.$

$$\forall K > 0,\ \exists\, T_K, \rho_K \qquad \forall\, x \in \mathsf{O}, |x| \leq K, \qquad \inf_{[0, T_K \wedge T_x]} |\mu(\cdot; x)| \leq \rho_K < 1.$$

Conclusion

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Delta(\Phi_k) + \quad \text{increment de martingale.}$$

Normalisation $\longrightarrow$ Limite fluide (''squelette'' de la chaîne).

Conclusion

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Delta(\Phi_k) + \text{ increment de martingale.}$$

Normalisation $\longrightarrow$ Limite fluide (''squelette'' de la chaîne).

- Chaînes / Limite fluide
  (i) Etude des chaînes de Markov $\longrightarrow$ Etude de la limite fluide.
  (ii) Stabilité des chaînes de Markov $\longrightarrow$ Stabilité des limites fluides.

Conclusion

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Delta(\Phi_k) + \text{ increment de martingale.}$$

Normalisation $\longrightarrow$ Limite fluide (''squelette'' de la chaîne).

- Chaînes / Limite fluide
  (i) Etude des chaînes de Markov $\longrightarrow$ Etude de la limite fluide.
  (ii) Stabilité des chaînes de Markov $\longrightarrow$ Stabilité des limites fluides.

- Limite fluide / O.D.E.
  (i) Caractérisation du support des limites fluides $\longrightarrow$ O.D.E. associée.
  (ii) Stabilité des limites fluides $\longrightarrow$ Stabilité de l'O.D.E.

Perspectives

- Applications des techniques limite fluides, sur des modèles où les techniques "drift" ne s'appliquent pas.

- Normalisation en $\beta = 1$: $\hookrightarrow$ limites diffusives. Théorie à faire.

Perspectives

Exploiter les limites fluides pour choisir les paramètres de mise en oeuvre des algorithmes de simulation (méthodes adaptatives par ex.)

- Algorithme hybride :
  - choix d'une direction $i \in \{1, \cdots, d\}$, avec proba ω_i
  - HM sur la droite réelle, dans la direction i.

Perspectives

Exploiter les limites fluides pour choisir les paramètres de mise en oeuvre des algorithmes de simulation (méthodes adaptatives par ex.)

- Algorithme hybride :
  - choix d'une direction $i \in \{1, \cdots, d\}$, avec proba ω_i
  - HM sur la droite réelle, dans la direction i.
- Paramètres de mise en oeuvre :
  - les poids $\omega_1, \cdots, \omega_d$,
  - les lois de proposition q_i sur $\mathbb{R}$ (par ex. variance σ_i^2 si gaussienne).

Perspectives

Exploiter les limites fluides pour choisir les paramètres de mise en oeuvre des algorithmes de simulation (méthodes adaptatives par ex.)

- Algorithme hybride :
  - choix d'une direction $i \in \{1, \cdots, d\}$, avec proba ω_i
  - HM sur la droite réelle, dans la direction i.
- Paramètres de mise en oeuvre :
  - les poids $\omega_1, \cdots, \omega_d$,
  - les lois de proposition q_i sur $\mathbb{R}$ (par ex. variance σ_i^2 si gaussienne).
- Le champs limite $\lim_{r\to\infty} \Delta(rx)$ est donné par loi de proposition gaussienne

$$\lim_{r\to\infty} \Delta_i(rx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \omega_i \ \sigma_i \ \mathrm{sign} \left(\lim_{r\to\infty} \frac{\nabla_i \ln \pi(rx)}{|\nabla \ln \pi(rx)|} \right)$$

Perspectives

Exploiter les limites fluides pour choisir les paramètres de mise en oeuvre des algorithmes de simulation (méthodes adaptatives par ex.)

- Algorithme hybride :
  - choix d'une direction $i \in \{1, \cdots, d\}$, avec proba ω_i
  - HM sur la droite réelle, dans la direction i.
- Paramètres de mise en oeuvre :
  - les poids $\omega_1, \cdots, \omega_d$,
  - les lois de proposition q_i sur $\mathbb{R}$ (par ex. variance σ_i^2 si gaussienne).
- Le champs limite $\lim_{r\to\infty} \Delta(rx)$ est donné par loi de proposition gaussienne

$$\lim_{r\to\infty} \Delta_i(rx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \omega_i \; \sigma_i \; \mathrm{sign} \left(\lim_{r\to\infty} \frac{\nabla_i \ln \pi(rx)}{|\nabla \ln \pi(rx)|} \right)$$

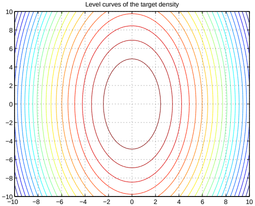
Donc les limites fluides sont dégénérées, et chargent des droites $\cdots$ jusqu'à atteindre les hyperplans définis par

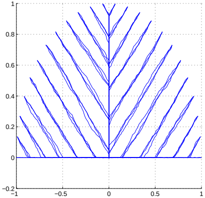
$$\lim_{r\to\infty} \frac{\nabla_i \ln \pi(rx)}{|\nabla \ln \pi(rx)|} = 0.$$

Perspectives

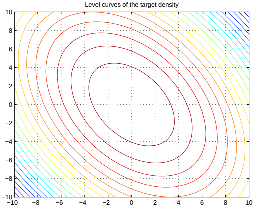
Densité cible gaussienne : $\ln \pi(x) = -0.5\ x'\Gamma^{-1}x$

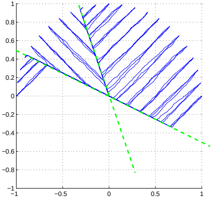
Hyperplans limite donnés par $e_i'\Gamma^{-1}x = 0$.





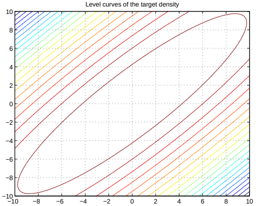
$\Gamma = \text{diag}(1, 4)$

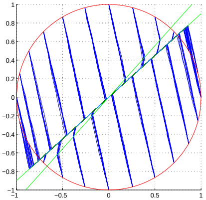




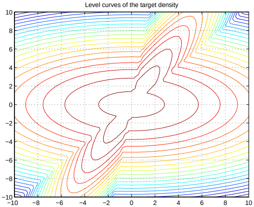
$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

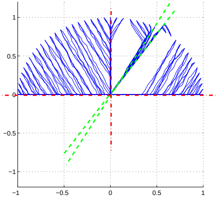
Perspectives

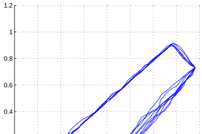




$$\Gamma^{-1} \propto \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{bmatrix}$$







Workshop

New Directions in Monte Carlo Methods

25 - 29 Juin 2007, France.

http://adapmc07.enst.fr

- 5 cours
  - *Recent Methodological advances in Monte Carlo methods*, C. Andrieu (Bristol, GB)
  - *Particle Methods for Stochastic Engineering and Physics*, P. Del Moral (Nice, France)
  - *Monte Carlo methods for molecular simulation*, B. Jourdain (ENPC, France)
  - *Coupling and Convergence for MCMC (I)*, G.O. Roberts (Lancaster, GB)
  - *Coupling and Convergence for MCMC (II)*, J.S. Rosenthal (Toronto, Canada)
- Sessions contribuées