Un algorithme EM récursif pour le SLAM

Gersende FORT, Sylvain LE CORFF, Eric MOULINES

LTCI, CNRS - TELECOM Paristech, Paris.

Gretsi 2011

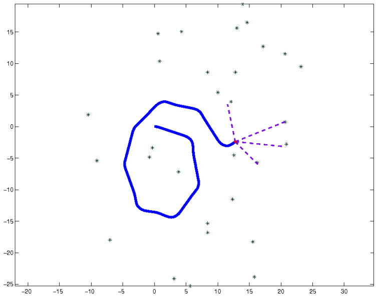
Le SLAM
Problème
Modélisation statistique
Solution proposée
EM en ligne pour HMM non exponentiels
EM en ligne
EM en ligne pour HMM exponentiels
EM en ligne pour HMM non exponentiels
EM en ligne pour le SLAM
Application au SLAM
Données simulées
Données réelles

SLAM : Simultaneous Localization and Mapping

- Un robot évolue dans un environnement (fixe) inconnu.
- Il doit apprendre la *carte* (position des amers, leur nombre), à partir d'observations partielles de son environnement.
- Cartographie et Localisation doivent être faites *en ligne*.

Exemple :

- SLAM plan
- Amers ponctuels (étoiles)
- Robot en mouvement (trait plein)
- Observations partielles de l'environnement (pointillés)



Modélisation statistique

- Observations (séquentielles) relatives à la position du robot

$$Y_t \text{ : observation à l'instant } t$$
$$X_t \text{ : position du robot à l'instant } t$$
$$\text{loi conditionnelle } g(Y_t|X_t)$$

- Dynamique markovienne sur la position du robot

$$\text{loi conditionnelle } m(X_t|X_{t-1})$$

i.e. Modèle de Chaînes de Markov cachées (HMM) :

$$\text{localisation} \equiv \text{filtrage}_{\text{ Kalman, Sequential Monte Carlo, } \cdot}$$

Modélisation statistique

- Observations (séquentielles) relatives à la position du robot

$$Y_t \text{ : observation à l'instant } t$$
$$X_t \text{ : position du robot à l'instant } t$$
$$\text{loi conditionnelle } g_{\theta}(Y_t | X_t)$$

- Dynamique markovienne sur la position du robot

$$\text{loi conditionnelle } m_{\theta}(X_t | X_{t-1})$$

i.e. Modèle de Chaînes de Markov cachées (HMM) :

localisation ≡ filtrage Kalman, Sequential Monte Carlo, ·

- la carte : deux modélisations dans la littérature
  - la carte est une partie (statique) de l'état caché -
  - *(notre approche)* la carte est vue comme un paramètre du modèle HMM [Martinez-Cantin (2008)]

cartographie ≡ Inférence en ligne dans un modèle HMM (à espace d'état général)

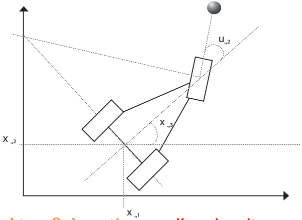
Modélisation statistique (suite)

Exemple de modèle HMM :

- Etat $\mathbf{X_t} \in \mathbb{R}^3$

  X_t est une fonction de X_{t-1},commandes,bruit

$$\mathbf{x_t} = \mathbf{x_{t-1}} + \begin{pmatrix} \left(v_t + \varepsilon_{t,1}\right) dt \cos(x_{t-1,3} + \left(\psi_t + \varepsilon_{t,2}\right)) \\ \left(v_t + \varepsilon_{t,1}\right) dt \sin(x_{t-1,3} + \left(\psi_t + \varepsilon_{t,2}\right)) \\ \left(v_t + \varepsilon_{t,1}\right) dt \, \frac{\sin(\left(\psi_t + \varepsilon_{t,2}\right))}{B} + \varepsilon_{t,3} \end{pmatrix}$$



- Observation $\mathbf{Y_t} = \left(\mathbf{y_{t,i}}\right)_{i \in \mathcal{A}_t}$

  Y_t est une fonction de X_t, du paramètre θ à estimer, d'un bruit

$$\mathbf{y_{t,i}} = \begin{pmatrix} \sqrt{(\theta_{\mathbf{i,1}} - \mathbf{x_{t,1}})^2 + (\theta_{\mathbf{i,2}} - \mathbf{x_{t,2}})^2} \\ \arctan \frac{\theta_{\mathbf{i,2}} - \mathbf{x_{t,2}}}{\theta_{\mathbf{i,1}} - \mathbf{x_{t,1}}} - \mathbf{x_{t,3}} \end{pmatrix} + \delta_{t,i}$$

A noter : modèle non linéaire, non gaussien, non exponentiel.

Solution proposée

$$\text{SLAM} \equiv \begin{cases} \text{filtrage} \\ \text{estimation au sens du maximum de vraisemblance} \end{cases}$$

dans un modèle HMM (à espace d'état général)

- Algorithmes possibles :
  - Algorithme de gradient stochastique en ligne - ["marginalSLAM" Martinez-Cantin (2008)]
  - Algorithme Expectation Maximization (EM) en ligne dans un contexte

    - de HMM non gaussien, non linéaire : filtrage par méthodes particulaires.
    - et de HMM non exponentiel.

  $\hookrightarrow$ nouvel algorithme "EM en ligne"

II. EM en ligne pour HMM non exponentiels

Rappel (I) : EM en ligne

Il s'agit de construire itérativement une suite $\{\theta_t, t \geq 0\}$ qui espère-t-on $\cdots$ converge vers les points stationnaires de la log-vraisemblance limite normalisée

$$\theta \mapsto \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log p_\theta(Y_1, \cdots, Y_T).$$

Algorithme : étant donnée θ_t :

Etape E calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$

$$Q_{t+1}(\theta) = \sum_{s=1}^{t+1} \mathbb{E}\left[\log\{g_\theta(Y_s|X_s)m_\theta(X_s|X_{s-1})\} \,|Y_{1:t+1}; \theta_t\right]$$

Etape M mise à jour de la suite

$$\theta_{t+1} = \mathrm{argmax}_\theta Q_{t+1}(\theta).$$

Difficultés :

- calcul d'une espérance pour tout θ
- calcul récursif de l'espérance
- et dans certains cas, maximisation.

Rappel (II) : EM en ligne pour HMM exponentiels [Cappé & Moulines (2009); Cappé (2009); DelMoral, Doucet & Singh (2010)]

- Dans le cas des modèles exponentiels

$$Q_{t+1}(\theta) = \left\langle \mathbb{E}_{\theta_t}\left[\sum_{s=1}^{t+1} S(X_{s-1}, X_s, Y_s) \,|\, Y_{1:t+1}\right] ; \psi(\theta) \right\rangle$$

i.e. calcul d'une seule espérance pour le calcul de $\theta \mapsto Q_{t+1}(\theta; \theta_t)$.

Rappel (II) : EM en ligne pour HMM exponentiels [Cappé & Moulines (2009); Cappé (2009); DelMoral, Doucet & Singh (2010)]

- Dans le cas des modèles exponentiels

$$Q_{t+1}(\theta) = \left\langle \mathbb{E}_{\theta_t}\left[\sum_{s=1}^{t+1} S(X_{s-1}, X_s, Y_s) \,|\, Y_{1:t+1}\right] ; \psi(\theta) \right\rangle$$

i.e. calcul d'une seule espérance pour le calcul de $\theta \mapsto Q_{t+1}(\theta; \theta_t)$.

- Approximation dans le mécanisme de propagation du calcul de l'espérance :
on saurait faire (algorithmes de propagation type Sequential Monte Carlo par ex.)

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\theta_t}(X_t | Y_{1:t}) \\ \mathbb{E}_{\theta_t}\left[\sum_{s=1}^{t} S(X_{s-1}, X_s, Y_s) | Y_{1:t}, X_t\right] \end{array} \right. \quad + \quad \text{Obs. } Y_{t+1}$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_{\theta_t}(X_{t+1} | Y_{1:t+1}) \\ \mathbb{E}_{\theta_t}\left[\sum_{s=1}^{t+1} S(X_{s-1}, X_s, Y_s) | Y_{1:t+1}, X_{t+1}\right] \end{array} \right.$$

Rappel (II) : EM en ligne pour HMM exponentiels [Cappé & Moulines (2009); Cappé (2009); DelMoral, Doucet & Singh (2010)]

- Dans le cas des modèles exponentiels

$$Q_{t+1}(\theta) = \left\langle \mathbb{E}_{\theta_t}\left[\sum_{s=1}^{t+1} S(X_{s-1}, X_s, Y_s) \,|Y_{1:t+1}\right] ; \psi(\theta) \right\rangle$$

i.e. calcul d'une seule espérance pour le calcul de $\theta \mapsto Q_{t+1}(\theta; \theta_t)$.

- Approximation dans le mécanisme de propagation du calcul de l'espérance : on va faire

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\theta_{t-1}}(X_t|Y_{1:t}) \\ \mathbb{E}_{\theta_{t-1}}\left[\sum_{s=1}^{t} S(X_{s-1}, X_s, Y_s)|Y_{1:t}, X_t\right] \end{array} \right. \quad + \quad \text{Obs. } Y_{t+1}$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_{\theta_t}(X_{t+1}|Y_{1:t+1}) \\ \mathbb{E}_{\theta_t}\left[\sum_{s=1}^{t+1} S(X_{s-1}, X_s, Y_s)|Y_{1:t+1}, X_{t+1}\right] \end{array} \right.$$

EM en ligne pour HMM non exponentiels [F., Le Corff & Moulines (2011)]

Algorithme :

Etape d'approximation par modèle exponentiel

$$\sum_{s=1}^{t+1} \log\{g_\theta(Y_s|X_s) m_\theta(X_s|X_{s-1})\} \approx \left\langle \sum_{s=1}^{t+1} S(X_{s-1}, X_s, Y_s; \theta_t); \ \psi(\theta) \right\rangle$$

de type "fonctionnelle additive" de la chaîne de Markov cachée.

Etape E (même que pour HMM exponentiel)

Etape M (inchangée)

Mais ... : bien que résultats très satisfaisants en pratique, difficile d'identifier les points limites de l'algorithme, et en particulier de les comparer aux points stationnaires de

$$\theta \mapsto \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log p_\theta(Y_1, \cdots, Y_T).$$

III. Application au SLAM

Mise en oeuvre de l'EM en ligne

Etat $\mathbf{X_t} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x_t} = \mathbf{x_{t-1}} + \begin{pmatrix} \left(v_t + \varepsilon_{t,1}\right) dt \cos(x_{t-1,3} + \left(\psi_t + \varepsilon_{t,2}\right)) \\ \left(v_t + \varepsilon_{t,1}\right) dt \sin(x_{t-1,3} + \left(\psi_t + \varepsilon_{t,2}\right)) \\ \left(v_t + \varepsilon_{t,1}\right) dt \, \frac{\sin(\left(\psi_t + \varepsilon_{t,2}\right))}{B} + \varepsilon_{t,3} \end{pmatrix}$$

Observation $\mathbf{Y_t} = \left(\mathbf{y_{t,i}}\right)_{i \in \mathcal{A}_t}$

$$\mathbf{y_{t,i}} = \begin{pmatrix} \sqrt{(\theta_{\mathbf{i,1}} - \mathbf{x_{t,1}})^2 + (\theta_{\mathbf{i,2}} - \mathbf{x_{t,2}})^2} \\ \arctan \frac{\theta_{\mathbf{i,2}} - \mathbf{x_{t,2}}}{\theta_{\mathbf{i,1}} - \mathbf{x_{t,1}}} - \mathbf{x_{t,3}} \end{pmatrix} + \delta_{t,i}$$

- Dans notre modèle et les applications numériques suivantes :
  - la loi de transition $X_{t-1} \to X_t$ ne dépend pas de $\theta \in \mathbb{R}^{2xd}$. Il faut donc une approximation par modèle exponentiel de

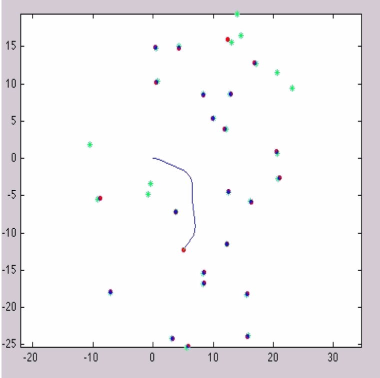
$$\sum_{s=1}^{t+1} \log g_\theta(Y_s | X_s)$$

  - $\delta_{t,i}$ est une famille de bruits gaussiens i.i.d.

$$\log g_\theta(Y_s | X_s) = \sum_{i \in \mathcal{A}_s} \left(h(X_s; \theta_{:,i}) - Y_{s,i}\right)^T R^{-1} \left(h(X_s; \theta_{:,i}) - Y_{s,i}\right)$$

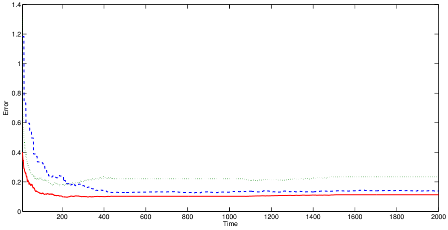
- Solution retenue : approximation linéaire de $\theta_{:,i} \mapsto h(X_s; \theta_{:,i})$ au voisinage du point courant $\theta_{t,i}$.

Données simulées (I)

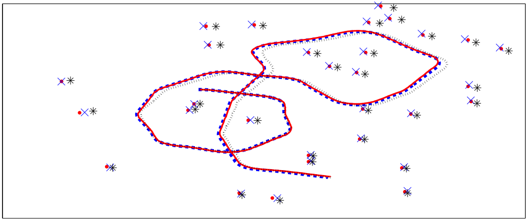


Run

Données simulées (II)



erreur (moyenne, sur 100 réplications Monte Carlo) dans l'estimation de la position d'un amer par **l'EM en ligne** (rouge), **le marginal SLAM**(bleu) et **le Fast SLAM** (vert)



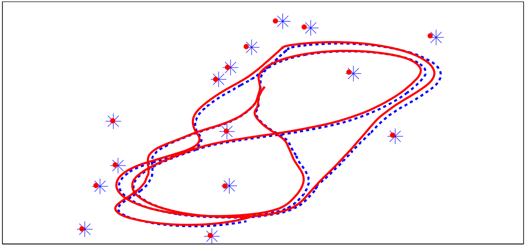
Après $T = 1492$ itérations : trajectoire (moyenne, sur 100 réplications Monte Carlo) estimée par **l'EM en ligne** (bleu) et le **marginal SLAM** (noir). Trajectoire réelle en rouge

Données réelles

[car park: www.cas.kth.se/SLAM]

Pour ces données

- nombre d'amer inconnu
- bruit dans l'équation d'observation : mélange de gaussiennes.



Amers en position • et trajectoire réelle du véhicule (rouge). Estimation des amers ($\star$) et de la trajectoire (bleu) par **l'EM en ligne**