

# Limites fluides et stabilité des Chaînes de Markov

## Applications à l'étude d'échantillonneurs MCMC

- ▶ Gersende FORT, CNRS - LTCI UMR 5141 (ENST).

### Travail en collaboration

- ▶ Sean MEYN (Université de l'Illinois, USA),
- ▶ Eric MOULINES (ENST),
- ▶ Pierre PRIOURET (Université Paris VI).

## Limites fluides en file d'attente \_\_\_\_\_

- ▶ Newell (82), Cruz (91), Chen & Mandelbaum (91).
- ▶ Exemple :

$$X(t; x) = x + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_\lambda([0,t])} Y_k.$$

· Normalisation :  $\bar{X}(x; t) = \frac{1}{|x|} X(|x|t; x)$

$$\bar{X}(x; t) = \frac{x}{|x|} - \lambda t \mathbb{E}[Y_0] + \text{martingale}$$

- Passage à la limite :  $\hookrightarrow \text{sign}(x) - \lambda t \mathbb{E}[Y_0]$ .
- ▶ Lien entre stabilité des limites fluides et stabilité des Chaînes de Markov : Malysev & Mensikov (79), Dai (95). Puis Meyn & Tweedie (93, 94).
  - ▶ Littérature : P. Robert (2000) *Réseaux et Files d'attente : méthodes probabilistes*; Springer.

# Plan

## 1. Introduction

- ▶ Méthodes Markov chain Monte Carlo et algorithmes de Metropolis-Hastings.

# Plan

## 1. Introduction

- ▶ Méthodes Markov chain Monte Carlo et algorithmes de Metropolis-Hastings.

2. Existence de limites fluides (I) : renormalisation en espace et en temps.

3. Existence de limites fluides (II) : renormalisation en temps, plus “rapide” qu’en espace.

# Plan

## 1. Introduction

- ▶ Méthodes Markov chain Monte Carlo et algorithmes de Metropolis-Hastings.

2. Existence de limites fluides (I) : renormalisation en espace et en temps.

3. Existence de limites fluides (II) : renormalisation en temps, plus “rapide” qu’en espace.

4. Caractérisation des limites fluides.

# Plan

## 1. Introduction

- ▶ Méthodes Markov chain Monte Carlo et algorithmes de Metropolis-Hastings.

2. Existence de limites fluides (I) : renormalisation en espace et en temps.
3. Existence de limites fluides (II) : renormalisation en temps, plus “rapide” qu’en espace.
4. Caractérisation des limites fluides.
5. Stabilité des limites fluides et Stabilité des chaînes de Markov.
6. Conclusion et perspectives.

# I-1. Echantillonneurs MCMC type Metropolis-Hastings —

↪ Simuler sous  $\pi$ , densité sur  $\mathbb{R}^d$

► Algorithme de Metropolis-Hastings :  $\{\Phi_t\}_t$  selon  $\Phi_t \longrightarrow \Phi_{t+1}$

- $\Phi_{t+1/2} \sim q(\Phi_t, \cdot)$ .

- $\Phi_{t+1} = \begin{cases} \Phi_{t+1/2} & \text{avec proba } \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \\ \Phi_t & \text{avec proba } 1 - \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \end{cases}$  ,

$$\text{où } \alpha(x, z) = 1 \wedge \frac{\pi(z)q(z, x)}{\pi(x)q(x, z)}.$$

# I-1. Echantillonneurs MCMC type Metropolis-Hastings —

↪ Simuler sous  $\pi$ , densité sur  $\mathbb{R}^d$

► Algorithme de Metropolis-Hastings :  $\{\Phi_t\}_t$  selon  $\Phi_t \longrightarrow \Phi_{t+1}$

- $\Phi_{t+1/2} \sim q(\Phi_t, \cdot)$ .

- $\Phi_{t+1} = \begin{cases} \Phi_{t+1/2} & \text{avec proba } \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \\ \Phi_t & \text{avec proba } 1 - \alpha(\Phi_t, \Phi_{t+1/2}) \end{cases}$  ,

$$\text{où } \alpha(x, z) = 1 \wedge \frac{\pi(z)q(z, x)}{\pi(x)q(x, z)}.$$

► MH à marche aléatoire symétrique

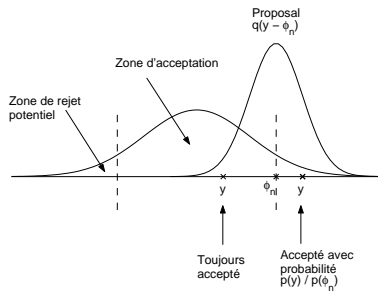
$$q(x; z) = q(z - x),$$

$$q(x - z) = q(z - x).$$



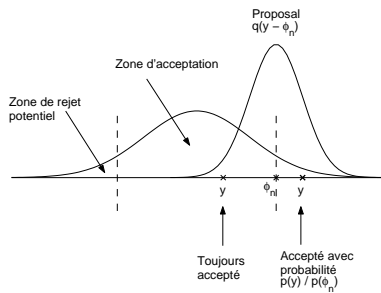
# I-1 (suite)

---

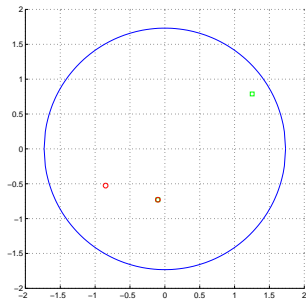


# I-1 (suite)

---

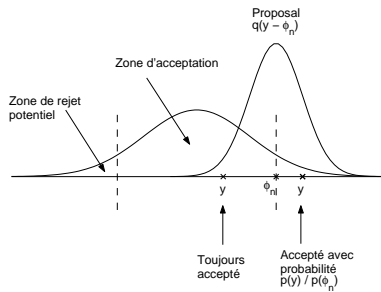


1, 2

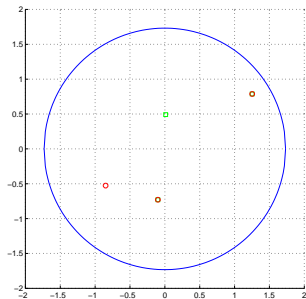


# I-1 (suite)

---

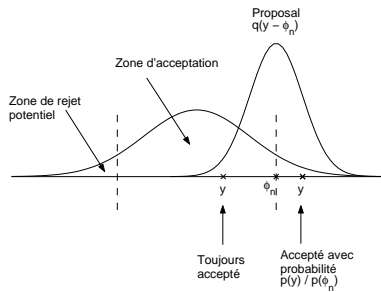


1, 2, 3

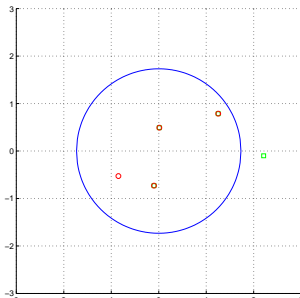


# I-1 (suite)

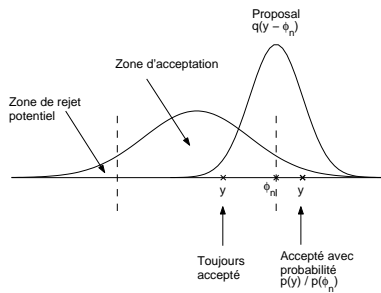
---



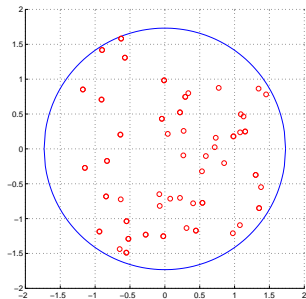
1, 2, 3, 4



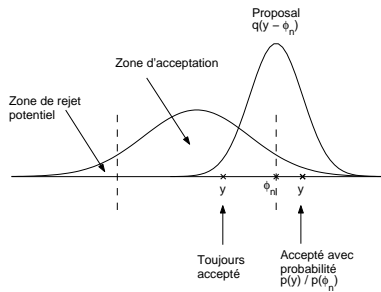
# I-1 (suite)



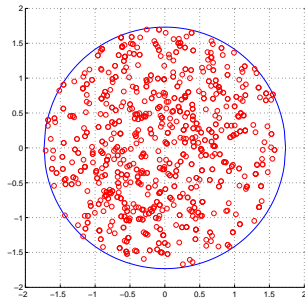
1, 2, 3, 4, 100



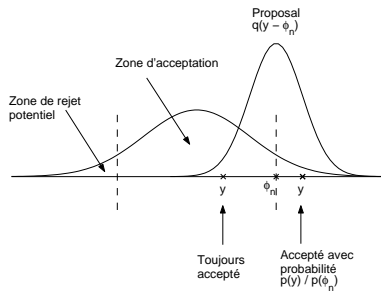
# I-1 (suite)



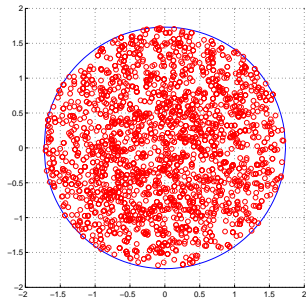
1, 2, 3, 4, 100, 1000



# I-1 (suite)



1, 2, 3, 4, 100, 1000, 3000



## I-2 Etude des échantillonneurs MCMC \_\_\_\_\_

Par ex.

$$\mathbb{E}_\pi [f(\Phi)] \sim \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\Phi_k).$$

↪ Objet de l'étude

- ▶ Etude de la convergence des algorithmes : *conditions suffisantes* pour
  - l'ergodicité des chaînes de Markov,
  - contrôle de convergence,
  - théorèmes limites.



## I-2 Etude des échantillonneurs MCMC \_\_\_\_\_

Par ex.

$$\mathbb{E}_\pi [f(\Phi)] \sim \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\Phi_k).$$

↪ Objet de l'étude

- ▶ Etude de la convergence des algorithmes : *conditions suffisantes* pour
  - l'ergodicité des chaînes de Markov,
  - contrôle de convergence,
  - théorèmes limites.
- ▶ Choix des paramètres de mise en oeuvre :
  - choix de la loi de proposition  $q$  (par ex. par des méthodes adaptatives).

## I-2 Etude des échantillonneurs MCMC \_\_\_\_\_

Par ex.

$$\mathbb{E}_\pi [f(\Phi)] \sim \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\Phi_k).$$

↪ **Objet de l'étude**

- ▶ Etude de la convergence des algorithmes : *conditions suffisantes* pour
  - l'ergodicité des chaînes de Markov,
  - contrôle de convergence,
  - théorèmes limites.
- ▶ Choix des paramètres de mise en oeuvre :
  - choix de la loi de proposition  $q$  (par ex. par des méthodes adaptatives).

↪ **Techniques classiques**

- ▶ Méthodes de "drift" (cf. partie V)

$$\mathbb{E}_x [V(\Phi_1)] \leq V(x) - \phi \circ V(x) + b\mathbb{1}_C(x),$$

dont la vérification nécessite des hyp. contraignantes sur  $\pi$ .

↪ **Nouvelle technique : limites fluides.**

## II. Définition / Existence des Limites Fluides \_\_\_\_\_

Soit

$\{\Phi_k\}_k$  une chaîne de Markov,  
à valeur dans  $(X, \mathcal{B}(X))$ .

↪ Construction d'un processus normalisé

(i) en le point initial

$$\eta_r(0; x) = \frac{1}{r} \Phi_0 = x, \quad \Phi_0 = rx.$$

## II. Définition / Existence des Limites Fluides \_\_\_\_\_

Soit

$\{\Phi_k\}_k$  une chaîne de Markov,  
à valeur dans  $(X, \mathcal{B}(X))$ .

↪ Construction d'un processus normalisé

(i) en le point initial

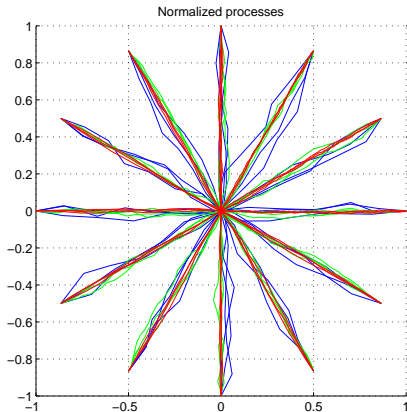
$$\eta_r(0; x) = \frac{1}{r} \Phi_0 = x, \quad \Phi_0 = rx.$$

(ii) en temps et en espace

$$\eta_r(t; x) = \frac{1}{r} \Phi_{\lfloor tr \rfloor},$$

$$\eta_r(t; x) = \frac{1}{r} \Phi_k \quad \text{sur l'intervalle } \left[ \frac{k}{r}; \frac{(k+1)}{r} \right).$$

## II-1. Influence de $r$ \_\_\_\_\_



$$\pi(x, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2) \exp(-(x^2 + y^2)) \quad q \sim \mathcal{N}(0, 4\text{Id})$$

$t \mapsto \eta_r(t; x)$ , aux points  $t_q = q/r$ , pour différentes valeurs initiales  $x$  sur la sphère unité et  $r = 500$ ,  $2000$  et  $10000$

## II-2. Définition ---

- $\eta_r(\cdot; x)$  est continue à droite, limité à gauche;  $\eta_r(0, x) = x$ .
- $\mathbb{P}_x$  : loi de la chaîne, de loi initiale  $\delta_x$ .
  - $\mathbb{Q}_{r;x}$  : loi image par  $\eta_r(\cdot; x)$  proba. sur l'espace des fonctions cadlag  $\mathbb{R}^+ \rightarrow X$ .

## II-2. Définition ---

- $\eta_r(\cdot; x)$  est continue à droite, limité à gauche;  $\eta_r(0, x) = x$ .
- $\mathbb{P}_x$  : loi de la chaîne, de loi initiale  $\delta_x$ .
  - $\mathbb{Q}_{r;x}$  : loi image par  $\eta_r(\cdot; x)$  proba. sur l'espace des fonctions cadlag  $\mathbb{R}^+ \rightarrow X$ .

► **Définition** :  $\mathbb{Q}_x$  est une **limite fluide** si il existe  $\{r_n\}_n \rightarrow +\infty$ ,  $\{x_n\}_n \rightarrow x$  tels que

$$\mathbb{Q}_{r_n; x_n} \implies \mathbb{Q}_x \quad \text{sur l'espace des fonctions cadlag } \mathbb{R}^+ \rightarrow X.$$

## II-3. Existence de limites fluides \_\_\_\_\_

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k]$$



## II-3. Existence de limites fluides \_\_\_\_\_

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= \Phi_k + \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\ &= \Phi_k + \underbrace{\mathbb{E}_x[\Phi_{k+1} - \Phi_k|\mathcal{F}_k]}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k])}_{\epsilon_{k+1} \quad \text{incrément de martingale}}.\end{aligned}$$

## II-3. Existence de limites fluides \_\_\_\_\_

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= \Phi_k + \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\ &= \Phi_k + \underbrace{\mathbb{E}_x[\Phi_{k+1} - \Phi_k|\mathcal{F}_k]}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k])}_{\epsilon_{k+1} \text{ incrément de martingale}}.\end{aligned}$$

### ► Théorème

Si

- $\exists p > 1, \quad \lim_{K \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_x [|\epsilon_1|^p \mathbb{I}_{|\epsilon_1| > K}] \rightarrow 0.$
- $\sup_{x \in \mathcal{X}} |\Delta(x)| < \infty.$

## II-3. Existence de limites fluides \_\_\_\_\_

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= \Phi_k + \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k] - \Phi_k + \Phi_{k+1} - \mathbb{E}[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\ &= \Phi_k + \underbrace{\mathbb{E}_x[\Phi_{k+1} - \Phi_k|\mathcal{F}_k]}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x[\Phi_{k+1}|\mathcal{F}_k])}_{\epsilon_{k+1} \text{ incrément de martingale}}.\end{aligned}$$

### ► Théorème

Si

- $\exists p > 1, \quad \lim_{K \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \mathbb{E}_x [|\epsilon_1|^p \mathbb{I}_{|\epsilon_1| > K}] \rightarrow 0.$
- $\sup_{x \in X} |\Delta(x)| < \infty.$

Alors pour toutes suites  $\{r_n\}_n \rightarrow +\infty, \{x_n\}_n \rightarrow x,$

- il existe  $\{r_{n_j}\}_j \rightarrow +\infty, \{x_{n_j}\}_j \rightarrow x$
- et  $\mathbb{Q}_x$ , proba sur l'espace des fonctions continues :  $\mathbb{R}^+ \rightarrow X$  telles que

$$\mathbb{Q}_{r_n; x_n} \Longrightarrow \mathbb{Q}_x.$$

## II-4. Etapes de démonstration \_\_\_\_\_

1. Il faut montrer que  $\{\mathbb{Q}_{r_n; x_n}\}_n$  est relativement compacte.
2. Par le théorème de Prohorov, il suffit que  $\{\mathbb{Q}_{r_n; x_n}\}_n$  soit *tight*.
3. Vérifié si

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n \mathbb{Q}_{r_n; x_n} (|\eta(0)| > a) = 0,$$

$$\forall T > 0, \lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n \mathbb{Q}_{r_n; x_n} \left( \eta, \sup_{t \in [0, T]} |\eta(t) - \eta(t^-)| > a \right) = 0,$$

$$\forall T, \epsilon > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n \mathbb{Q}_{r_n; x_n} (\eta, \omega(\eta, \delta) \geq \epsilon) = 0.$$

## II-5. Application : MH à marche aléatoire symétrique —

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \begin{cases} Y_{k+1} & \text{avec proba } 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)} \\ 0 & \text{avec proba } 1 - 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)}, \end{cases}$$

où  $Y_{k+1} \sim q(\cdot)$ .

► Moment : de l'incrément de martingale  $\longleftrightarrow$  de la loi de proposition

$$\mathbb{E}_x [|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1| > K}] \leq 2^p \int |y|^p \mathbb{1}_{|y| \geq K - m_q} q(y) \lambda(dy) \quad m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy).$$

## II-5. Application : MH à marche aléatoire symétrique —

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \begin{cases} Y_{k+1} & \text{avec proba } 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)} \\ 0 & \text{avec proba } 1 - 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)}, \end{cases}$$

où  $Y_{k+1} \sim q(\cdot)$ .

► Moment : de l'incrément de martingale  $\longleftrightarrow$  de la loi de proposition

$$\mathbb{E}_x [|\epsilon_1|^p \mathbb{I}_{|\epsilon_1| > K}] \leq 2^p \int |y|^p \mathbb{1}_{|y| \geq K - m_q} q(y) \lambda(dy) \quad m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy).$$

► Accroissement moyen  $\Delta(x)$  borné

$$\Delta(x) = - \int_{\{y, \pi(x+y) \leq \pi(x)\}} y \left( 1 - \frac{\pi(x+y)}{\pi(x)} \right) q(y) \lambda(dy),$$

i.e. dès que  $m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy) < \infty$ .

## II-5. Application : MH à marche aléatoire symétrique —

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \begin{cases} Y_{k+1} & \text{avec proba } 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)} \\ 0 & \text{avec proba } 1 - 1 \wedge \frac{\pi(\Phi_k + Y_{k+1})}{\pi(\Phi_k)}, \end{cases}$$

où  $Y_{k+1} \sim q(\cdot)$ .

► Moment : de l'incrément de martingale  $\longleftrightarrow$  de la loi de proposition

$$\mathbb{E}_x [|\epsilon_1|^p \mathbb{I}_{|\epsilon_1| > K}] \leq 2^p \int |y|^p \mathbb{1}_{|y| \geq K - m_q} q(y) \lambda(dy) \quad m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy).$$

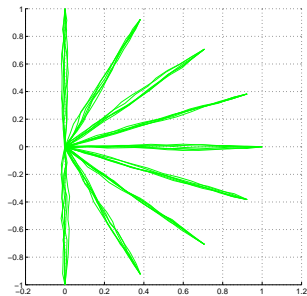
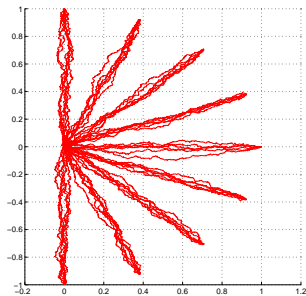
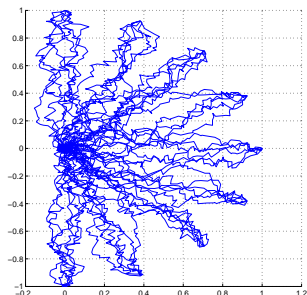
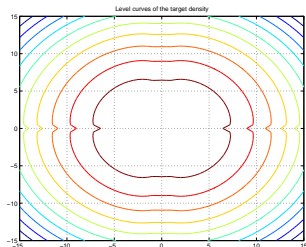
► Accroissement moyen  $\Delta(x)$  borné

$$\Delta(x) = - \int_{\{y, \pi(x+y) \leq \pi(x)\}} y \left( 1 - \frac{\pi(x+y)}{\pi(x)} \right) q(y) \lambda(dy),$$

i.e. dès que  $m_q = \int |y| q(y) \lambda(dy) < \infty$ .

Il suffit : moments de la loi de proposition.

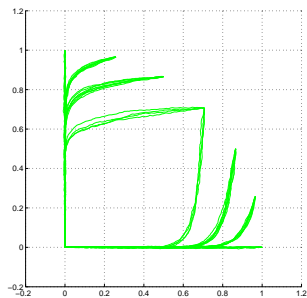
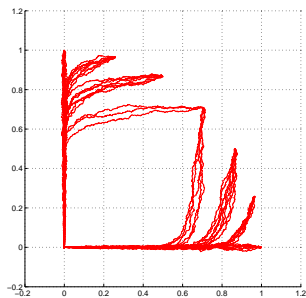
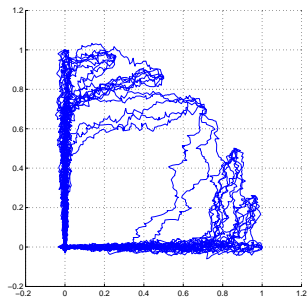
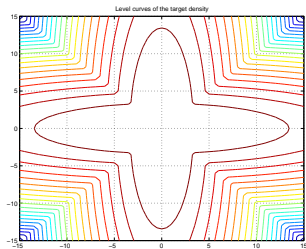
## II-6a. Exemple 1 : (cas régulier, $\beta = 0$ )



$$\pi(x, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2) \exp(-(x^2 + y^2)), \quad q \sim \mathcal{N}(0, 4), \quad r=100, r=1000, r=5000$$

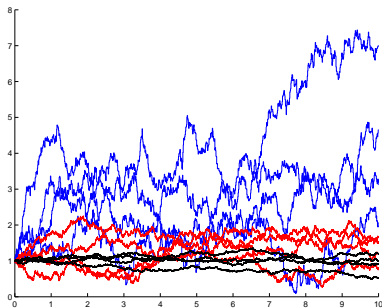
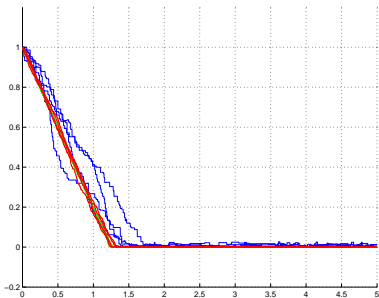


## II-6b. Exemple 2 : (cas irrégulier, $\beta = 0$ )



$$\pi(x, y) \propto \mathcal{N}(0, \Gamma_1^{-1}) + \mathcal{N}(0, \Gamma_2^{-1}), \quad q \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad r=100, r=1000, r=5000$$

## II-6c. Exemple 3 : (normalisation inadaptée) \_\_\_\_\_



$$\begin{aligned}\pi(x, y) &\propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2) \exp(-(x^2 + y^2)), \\ \pi(x, y) &\propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2)^{0.1} \exp(-(x^2 + y^2)^{0.1}), \\ q &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad r=100, r=1000, r=5000, r=10\,000 \quad T=5\end{aligned}$$

↪ Changement d'échelle : disymétrie temps / espace.

### III-1. Disymétrie temps / espace \_\_\_\_\_

↔ Construction d'un processus normalisé,  $\beta > 0$ ,

(i) en le point initial

$$\eta_r^\beta(0; x) = \frac{1}{r} \Phi_0 = x, \quad \Phi_0 = rx.$$

### III-1. Disymétrie temps / espace \_\_\_\_\_

↔ Construction d'un processus normalisé,  $\beta > 0$ ,

(i) en le point initial

$$\eta_r^\beta(0; x) = \frac{1}{r} \Phi_0 = x, \quad \Phi_0 = rx.$$

(ii) en temps et en espace

$$\eta_r^\beta(t; x) = \frac{1}{r} \Phi_{\lfloor tr^{1+\beta} \rfloor},$$

$$\eta_r^\beta(t; x) = \frac{1}{r} \Phi_k \quad \text{sur l'intervalle} \left[ \frac{k}{r^{1+\beta}}; \frac{(k+1)}{r^{1+\beta}} \right).$$

On note  $\mathbb{Q}_{r;x}^\beta$  l'image de  $\mathbb{P}_x$  par  $\eta_r^\beta(\cdot; x)$ .

## III-2. Existence de la $\beta$ -limite fluide \_\_\_\_\_

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{(\mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k] - \Phi_k)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k])}_{\epsilon_{k+1} \text{ incrément de martingale}}$$

### ► Théorème

Si

- $\exists p > 1, \sup_{x \in X} \mathbb{E}_x [|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1| > K}] \rightarrow 0, K \rightarrow +\infty.$
- $\exists 0 < \beta < 1 \wedge (p - 1), \sup_{x \in X} (1 + |x|^\beta) |\Delta(x)| < \infty.$

## III-2. Existence de la $\beta$ -limite fluide \_\_\_\_\_

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{(\mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k] - \Phi_k)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k])}_{\epsilon_{k+1} \text{ incrément de martingale}}$$

### ► Théorème

Si

- $\exists p > 1, \sup_{x \in X} \mathbb{E}_x [|\epsilon_1|^p \mathbb{1}_{|\epsilon_1| > K}] \rightarrow 0, K \rightarrow +\infty.$
- $\exists 0 < \beta < 1 \wedge (p - 1), \sup_{x \in X} (1 + |x|^\beta) |\Delta(x)| < \infty.$

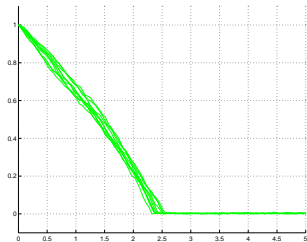
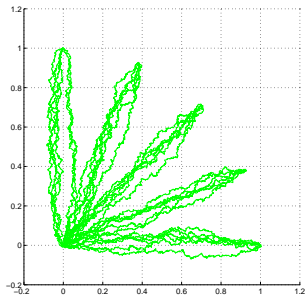
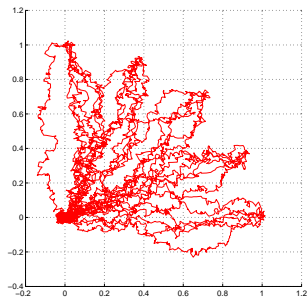
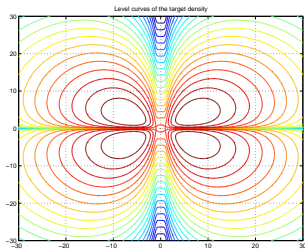
Alors pour tout  $0 \leq \alpha \leq \beta$ , et toutes suites  $\{r_n\}_n \rightarrow +\infty, \{x_n\}_n \rightarrow x$ ,

- il existe  $\{r_{n_j}\}_j \rightarrow +\infty, \{x_{n_j}\}_j \rightarrow x$
- et  $\mathbb{Q}_x^\alpha$ , proba sur l'espace des fonctions continues :  $\mathbb{R}^+ \rightarrow X$  telles que

$$\mathbb{Q}_{r_n; x_n}^\alpha \implies \mathbb{Q}_x^\alpha.$$

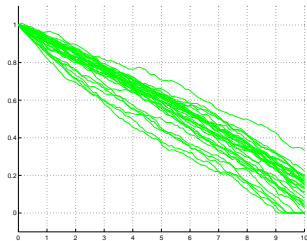
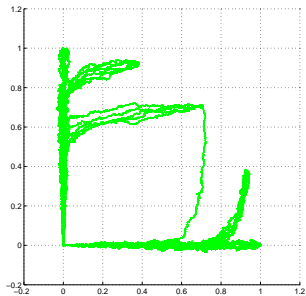
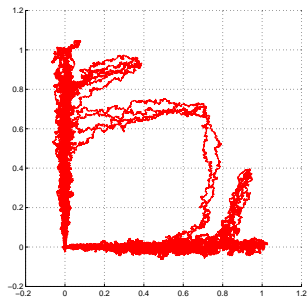
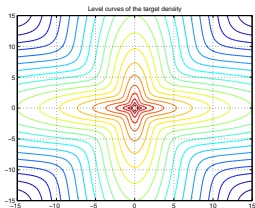
Et pour  $0 \leq \alpha < \beta, \mathbb{Q}_x^\alpha = \delta_x.$

### III-3a. Exemple 1 : cas régulier, $\beta > 0$ \_\_\_\_\_



$$\pi(x, y) \propto (1 + x^2 + y^2 + x^8 y^2)^{0.4} \exp(-(x^2 + y^2)^{0.4}), \quad q \sim \mathcal{N}(0, \text{Id}), \quad r=1000, r=5000 \quad T=5$$

### III-3b. Exemple 2 : cas irrégulier, $\beta > 0$

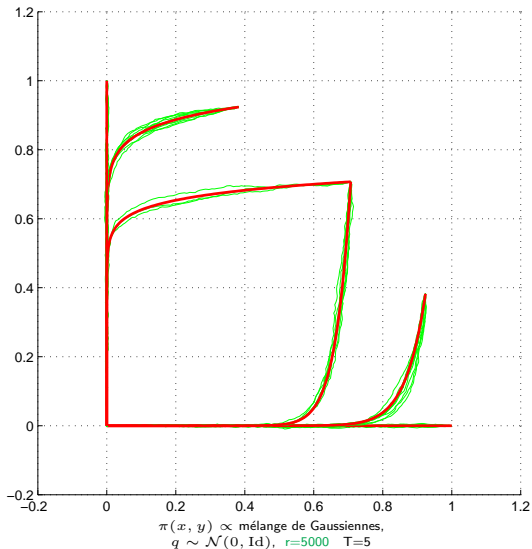


$\pi(x, y) \propto$  mélange de Weibull,  $q \sim \mathcal{N}(0, 1.5^2 \text{Id})$ ,  $r=1000$ ,  $r=5000$   $T=10$



## IV. Caractérisation de la Limite Fluide

↪ Peut-on décrire le support de la limite fluide  $\mathbb{Q}_x^\beta$  ?



## IV-1. L'idée ...

---

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{(\mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k] - \Phi_k)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k])}_{\epsilon_{k+1} \text{ incrément de martingale}}$$

► Pour le processus normalisé : cas  $\beta = 0$

$$\begin{aligned} \eta_r \left[ \frac{k+1}{r}, x \right] &= \frac{1}{r} \Phi_{k+1} \\ &= \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] + \frac{1}{r} \Delta \left( r \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] \right) + \frac{1}{r} \epsilon_{k+1} \\ &= \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] + \frac{1}{r} h \left( \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] \right) + \frac{1}{r} (\xi_k + \epsilon_{k+1}) \end{aligned}$$

en ayant posé

$$h(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^\beta \Delta(r x).$$

## IV-1. L'idée ...

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \underbrace{(\mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k] - \Phi_k)}_{\Delta(\Phi_k)} + \underbrace{(\Phi_{k+1} - \mathbb{E}_x [\Phi_{k+1} | \mathcal{F}_k])}_{\epsilon_{k+1} \text{ incrément de martingale}}$$

► Pour le processus normalisé : cas  $\beta = 0$

$$\begin{aligned}\eta_r \left[ \frac{k+1}{r}, x \right] &= \frac{1}{r} \Phi_{k+1} \\ &= \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] + \frac{1}{r} \Delta \left( r \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] \right) + \frac{1}{r} \epsilon_{k+1} \\ &= \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] + \frac{1}{r} h \left( \eta_r \left[ \frac{k}{r}, x \right] \right) + \frac{1}{r} (\xi_k + \epsilon_{k+1})\end{aligned}$$

en ayant posé

$$h(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^\beta \Delta(r x).$$

► Ainsi **version bruitée de**

$$\mu \left( \frac{k+1}{r} \right) = \mu \left( \frac{k}{r} \right) + \frac{1}{r} h \left( \frac{k}{r} \right) \longleftrightarrow \text{ODE : } \dot{\mu}(t) = h(\mu(t))$$

## IV-2. Caractérisation \_\_\_\_\_

### ► Théorème

Si

- C.S. existence de la limite fluide.
- il existe un cône ouvert  $O$  de  $X \setminus \{0\}$ ,
- $h : O \rightarrow X$  telle que

$$\sup_{x \in H} |r^\beta \Delta(rx) - |x|^{-\beta} h(x)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

pour tout compact  $H \subseteq O$

## IV-2. Caractérisation \_\_\_\_\_

### ► Théorème

Si

- C.S. existence de la limite fluide.
- il existe un cône ouvert  $O$  de  $X \setminus \{0\}$ ,
- $h : O \rightarrow X$  telle que

$$\sup_{x \in H} |r^\beta \Delta(rx) - |x|^{-\beta} h(x)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

pour tout compact  $H \subseteq O$

Alors pour tout  $0 \leq s \leq t$ , sur  $\{\eta, \eta(u) \in O, s \leq u \leq t\}$ ,

$$\sup_{s \leq u \leq t} \left| \eta(u) - \eta(s) - \int_s^u h \circ \eta(v) dv \right| = 0, \quad \mathbb{Q}_x^\beta - p.s.$$

## IV-2. Caractérisation

### ► Théorème

Si

- C.S. existence de la limite fluide.
- il existe un cône ouvert  $O$  de  $X \setminus \{0\}$ ,
- $h : O \rightarrow X$  telle que

$$\sup_{x \in H} |r^\beta \Delta(rx) - |x|^{-\beta} h(x)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

pour tout compact  $H \subseteq O$

Alors pour tout  $0 \leq s \leq t$ , sur  $\{\eta, \eta(u) \in O, s \leq u \leq t\}$ ,

$$\sup_{s \leq u \leq t} \left| \eta(u) - \eta(s) - \int_s^u h \circ \eta(v) dv \right| = 0, \quad \mathbb{Q}_x^\beta - p.s.$$

► i.e. la limite fluide  $\mathbb{Q}_x^\beta$  charge les fonctions continues qui vérifient

$$\eta(u) = \eta(s) + \int_s^u h \circ \eta(v) dv, \quad s \leq u \leq t,$$

dès lors que  $\eta([s, t]) \subset O$ .

### IV-3. Application : MH à marche aléatoire symétrique —

$$\Delta(r, x) = - \int_{\{y, \pi(rx+y) < \pi(rx)\}} y \left( 1 - \frac{\pi(rx+y)}{\pi(rx)} \right) q(y) \lambda(dy).$$

### IV-3. Application : MH à marche aléatoire symétrique —

$$\Delta(r, x) = - \int_{\{y, \pi(rx+y) < \pi(rx)\}} y \left( 1 - \frac{\pi(rx+y)}{\pi(rx)} \right) q(y) \lambda(dy).$$

► Cond. sur les zones de rejet

$$\{y, \pi(rx+y) < \pi(rx)\} \longrightarrow \{y, \langle y, \ell_\infty(x) \rangle < 0\}, \quad \text{" q-p.p. "}$$



## IV-3. Application : MH à marche aléatoire symétrique —

$$\Delta(r, x) = - \int_{\{y, \pi(rx+y) < \pi(rx)\}} y \left( 1 - \frac{\pi(rx+y)}{\pi(rx)} \right) q(y) \lambda(dy).$$

### ► Cond. sur les zones de rejet

$$\{y, \pi(rx+y) < \pi(rx)\} \longrightarrow \{y, \langle y, \ell_\infty(x) \rangle < 0\}, \quad \text{" q-p.p. "}$$

### ► Cond. sur la décroissance de $\pi$

- Cas sur-exponentiel : ( $\beta = 0$ )

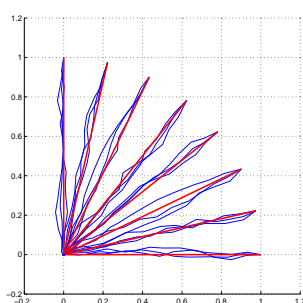
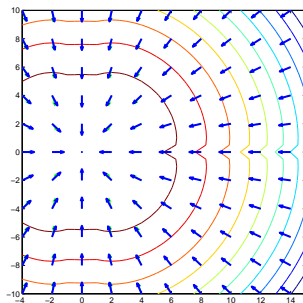
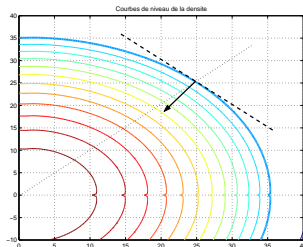
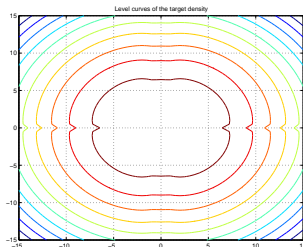
$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle |x|^{-1}x, \nabla \ln \pi(x) \rangle \rightarrow -\infty.$$

- Cas sous-exponentiel : ( $0 < \beta < 1$ )

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle |x|^{-1}x, |\nabla \ln \pi(x)|^{-1} \nabla \ln \pi(x) \rangle < 0.$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla \ln \pi(x)| = 0.$$

# IV-4a. Exemple : Cas sur-exponentiel ( $\beta = 0$ ), $O = X \setminus \{0\}$



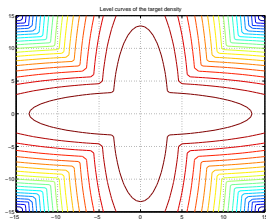
GHaut- Lignes de niveau de  $\pi$

GBas- Lignes de niveau,  $\triangle$  et  $h$

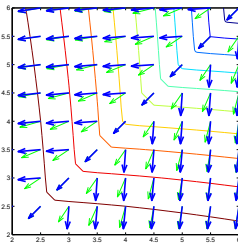
Dhaut- Plan "limite" de la zone de rejet.

DBas- Processus  $\eta_x^\beta$  et flot de l'ODE.

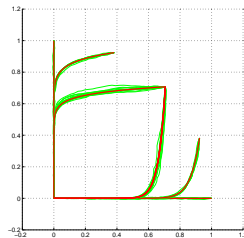
# IV-4b. Exemple : Cas sur-exponentiel ( $\beta = 0$ ), $0 \subsetneq X \setminus \{0\}$



Lignes de niveau de  $\pi$

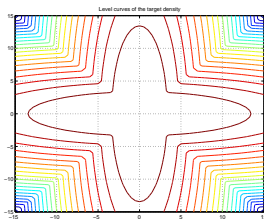


Lignes de niveau,  $\Delta$  et  $h$

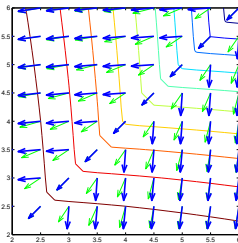


Processus  $\eta_x^\beta$  et flot de l'ODE.

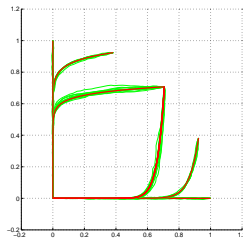
# IV-4b. Exemple : Cas sur-exponentiel ( $\beta = 0$ ), $\mathbf{O} \subsetneq X \setminus \{0\}$



Lignes de niveau de  $\pi$



Lignes de niveau,  $\Delta$  et  $h$



Processus  $\eta_x^\beta$  et flot de l'ODE.

$\Leftrightarrow$  Il existe  $T_0 < \infty$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $|x| = 1$ , et toute  $\beta$ -limite fluide  $\mathbb{Q}_x^\beta$ ,

$$\mathbb{Q}_x^\beta(\eta, \eta([0, T_0]) \cap \mathbf{O} \neq \emptyset) = 1.$$

## V-1. Stabilité des chaînes de Markov \_\_\_\_\_

↔ Existence d'une probabilité invariante  $\pi$  et convergence vers la loi stationnaire  $\pi$

### ► C(N)S d'ergodicité

- $\phi$ -irréductibilité, apériodicité.
- Il existe  $V \geq 1$ ,  $\phi \geq 1$ ,  $C$  ensemble *petite*

$$\mathbb{E}_x [V(\Phi_1)] \leq V(x) - \phi V(x) + b \mathbb{1}_C(x), \quad \sup_C V < \infty.$$

## V-1. Stabilité des chaînes de Markov \_\_\_\_\_

↔ Existence d'une probabilité invariante  $\pi$  et convergence vers la loi stationnaire  $\pi$

### ► C(N)S d'ergodicité

- phi-irréductibilité, apériodicité.
- Il existe  $V \geq 1$ ,  $\phi \geq 1$ ,  $C$  ensemble *petite*

$$\mathbb{E}_x [V(\Phi_1)] \leq V(x) - \phi \circ V(x) + b \mathbb{1}_C(x), \quad \sup_C V < \infty.$$

### ► Selon le rappel " $\phi \circ V$ "

$\phi = 1$	$\pi(X) < \infty,$	$\mathbb{E}_x [g(\Phi_n)] \rightarrow \pi(g),  g  \leq 1.$
$\phi$ concave	$\pi(\phi \circ V) < \infty$	$\mathbb{E}_x [g(\Phi_n)] \rightarrow \pi(g),  g  \leq f + \text{vitesse sous-géom.}$
$\left. \begin{array}{l} \phi(x) = \lambda x \\ 0 < \lambda < 1 \end{array} \right\}$	$\pi(V) < \infty,$	$\mathbb{E}_x [g(\Phi_n)] \rightarrow \pi(g),  g  \leq V + \text{vitesse géom.}$

## V-2. Stabilité : limite fluide/ Chaîne de Markov\_\_\_\_\_

► Stabilité des  $\beta$ -limites fluides  $\exists T > 0$  et  $0 < \rho < 1$ , tels que

$$\forall x, |x| = 1, \quad \mathbb{Q}_x^\beta \left( \eta, \inf_{[0, T]} |\eta(\cdot)| \leq \rho \right) = 1.$$

## V-2. Stabilité : limite fluide/ Chaîne de Markov\_\_\_\_\_

► Stabilité des  $\beta$ -limites fluides  $\exists T > 0$  et  $0 < \rho < 1$ , tels que

$$\forall x, |x| = 1, \quad \mathbb{Q}_x^\beta \left( \eta, \inf_{[0, T]} |\eta(\cdot)| \leq \rho \right) = 1.$$

► Théorème Si

- chaîne irréductible, apériodique, compacts sont petites.
- CS existence de la  $\beta$ -limite fluide.
- Stabilité des  $\beta$ -limites fluides.

Alors ergodicité polynomiale,

$$(n+1)^{q-1} \sup_{\{f, |f| \leq 1 + |x|^{p-q(1+\beta)}\}} |\mathbb{E}_x[f(\Phi_n)] - \pi(f)| \rightarrow 0, \quad 1 \leq q \leq p/(1+\beta).$$



## V-2. Stabilité : limite fluide/ Chaîne de Markov\_\_\_\_\_

► Stabilité des  $\beta$ -limites fluides  $\exists T > 0$  et  $0 < \rho < 1$ , tels que

$$\forall x, |x| = 1, \quad \mathbb{Q}_x^\beta \left( \eta, \inf_{[0, T]} |\eta(\cdot)| \leq \rho \right) = 1.$$

► Théorème Si

- chaîne irréductible, apériodique, compacts sont petites.
- CS existence de la  $\beta$ -limite fluide.
- Stabilité des  $\beta$ -limites fluides.

Alors ergodicité polynomiale,

$$(n+1)^{q-1} \sup_{\{f, |f| \leq 1 + |x|^{p-q(1+\beta)}\}} |\mathbb{E}_x[f(\Phi_n)] - \pi(f)| \rightarrow 0, \quad 1 \leq q \leq p/(1+\beta).$$

► Grandes lignes de la démonstration

(i) Stab de la LF  $\rightarrow$  drift géom. pour la chaîne de noyau  $\mathbb{P}_x(\Phi_{\tau_{\Phi_0}} \in \cdot)$

$$\tau_{\Phi_0} = \lfloor T|\Phi_0|^{1+\beta} \rfloor \wedge \sigma, \quad \sigma = \inf\{k, |\Phi_k| \leq \rho|\Phi_0|\}.$$

(ii) On en déduit une cond. de drift polynomial pour la chaîne initiale.

## V-3. Stabilité : ODE / Limite fluide \_\_\_\_\_

$$\begin{cases} \dot{\mu} = h(\mu), \\ \mu(0) = x \end{cases} \longrightarrow \mu(\cdot; x) \text{ sur } [0, T_x].$$

La limite fluide est stable dès que

► Cas 1 :  $\mathcal{O} = \mathcal{X} \setminus \{0\}$

$$\exists T, \rho \quad \forall x, |x| = 1, \quad \inf_{[0, T]} |\mu(\cdot; x)| \leq \rho < 1.$$

## V-3. Stabilité : ODE / Limite fluide \_\_\_\_\_

$$\begin{cases} \dot{\mu} = h(\mu), \\ \mu(0) = x \end{cases} \longrightarrow \mu(\cdot; x) \text{ sur } [0, T_x].$$

La limite fluide est stable dès que

► **Cas 1** :  $\mathcal{O} = \mathbb{X} \setminus \{0\}$

$$\exists T, \rho \quad \forall x, |x| = 1, \quad \inf_{[0, T]} |\mu(\cdot; x)| \leq \rho < 1.$$

► **Cas 2** :  $\mathcal{O} \neq \mathbb{X} \setminus \{0\}$  et  $\mathbb{Q}_x^\beta(\eta, \eta([0, T_0]) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset) = 1$ .

$$\forall K > 0, \exists T_K, \rho_K \quad \forall x \in \mathcal{O}, |x| \leq K, \quad \inf_{[0, T_K \wedge T_x]} |\mu(\cdot; x)| \leq \rho_K < 1.$$

## Conclusion \_\_\_\_\_

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Delta(\Phi_k) + \text{increment de martingale.}$$

Normalisation  $\longrightarrow$  Limite fluide ("squelette" de la chaîne).

## Conclusion \_\_\_\_\_

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Delta(\Phi_k) + \text{increment de martingale.}$$

Normalisation  $\longrightarrow$  Limite fluide ("squelette" de la chaîne).

► Chaînes / Limite fluide

- (i) Etude des chaînes de Markov  $\longrightarrow$  Etude de la **limite fluide**.
- (ii) Stabilité des chaînes de Markov  $\longrightarrow$  Stabilité des limites fluides.

# Conclusion \_\_\_\_\_

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Delta(\Phi_k) + \text{increment de martingale.}$$

Normalisation  $\longrightarrow$  Limite fluide ("squelette" de la chaîne).

► Chaînes / Limite fluide

- (i) Etude des chaînes de Markov  $\longrightarrow$  Etude de la **limite fluide**.
- (ii) Stabilité des chaînes de Markov  $\longrightarrow$  Stabilité des limites fluides.

► Limite fluide / O.D.E.

- (i) Caractérisation du support des limites fluides  $\longrightarrow$  **O.D.E.** associée.
- (ii) Stabilité des limites fluides  $\longrightarrow$  Stabilité de l'O.D.E.

# Perspectives \_\_\_\_\_

- ▶ Applications des techniques limite fluides, sur des modèles où les techniques "drift" ne s'appliquent pas.
- ▶ Normalisation en  $\beta = 1$  :  $\leftrightarrow$  limites diffusives. Théorie à faire.

## New Directions in Monte Carlo Methods

25 - 29 Juin 2007, Fleurance, France.

<http://adapmc07.enst.fr>

- ▶ 5 cours
  - ▶ C. Andrieu (Bristol, GB) *Recent Methodological advances in Monte Carlo methods*
  - ▶ P. Del Moral (Nice, France) *Particle Methods for Stochastic Engineering and Physics.*
  - ▶ B. Jourdain (ENPC, France) *Monte Carlo methods for molecular simulation.*
  - ▶ G.O. Roberts (Lancaster, GB) *Coupling and Convergence for MCMC (I)*
  - ▶ J.S. Rosenthal (Toronto, Canada) *Coupling and Convergence for MCMC (II)*
- ▶ Sessions contribuées