Contrôle explicite d'ergodicité de chaînes de Markov:

Applications à l'analyse de convergence de l'algorithme Monte-Carlo EM

P. Priouret, Université Paris 6

E. Moulines, ENST

- Critères d'ergodicité classiques - Motivations.
- Caractérisation de la f-ergodicité polynomiale.
- Contrôle explicite de convergence.

Chaîne de Markov canonique $\Phi = (\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, \{\Phi_n\}, P_x)$
de noyau de transition P sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

(A-1) Définitions

ψ-irréductibilité: ψ probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ $\psi = \pi$

$$\psi(A) > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathcal{X}, \exists n > 0, P^n(x, A) > 0 \qquad (\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{X},\ \ P_x(\tau_A < \infty) > 0).$$

Apériodicité: (pour P ψ-irréductible)

d-cycle: $D_1, \cdots, D_d$ disjoints tq $P\left(x, D_{(k+1)[d]}\right) = 1, \ \forall x \in D_k.$

Théorème: $\mathcal{X} = D_1 \cup \cdots \cup D_d \cup E, \ \ \psi(E) = 0.$ (décomposition maximale)

Définition: Pas de 2-cycles.

Ensemble C ν_m-small: un entier $m \geq 1$, constante $\epsilon > 0$, probabilité ν_m sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tq

$$\forall x \in C, \ P^m(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot).$$

(A-2) Temps de retour et Ergodicité

Temps de passage

$$\tau_C := \inf\{n \geq 1, \Phi_n \in C\}, \qquad C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

Théorème [*ergodicité*] P ψ-irréductible, apériodique et C ν_m-small tq $\quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_C] < \infty$.

1. π unique probabilité invariante.
2. π p.s., $\quad \lim_n \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} = 0$.

avec $\|\mu\|_{VT} := \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} \mu(A) = \sup_{\{f; |f| \leq 1\}} |\mu(f)|$

(A-3) Temps de retour et f-ergodicité $f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$ v.a.

Norme f

$$\|\mu\|_f := \sup_{\{g; |g| \leq f\}} |\mu(g)|.$$

Théorème [f *-ergodicité*]

P ψ-irréductible apériodique et C ν_m-small tq $\quad \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x [\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} f(\Phi_k)] < \infty.$

1. π unique probabilité invariante.
2. π p.s. $\quad \lim_n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0.$

$\hookrightarrow$ [(f, r)*-ergodicité*] Quel critère pour vitesse de convergence $r = \{r(n)\}$ de $P^n(x, \cdot)$ vers $\pi(\cdot)$ en norme f?

(a) Vitesse géométrique: $r(n) = \kappa^n$, $\kappa > 1$.

(b) Vitesse sous-géométrique: $\{r(n)\}$ croissante, $r(0) = 1$, $\{\log r(n)\}/n \downarrow 0$.
Ex: $r(n) = \exp(\beta n^\gamma)$, $\beta > 0, 0 < \gamma < 1 \qquad r(n) = (n+1)^q$, $q \geq 0$

(A-4) Condition suffisante de f-ergodicité géométrique et sous-géométrique

P ψ-irréductible apériodique, $f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$ v.a.,

Meyn et Tweedie (1993)

Si il existe $\kappa > 1$ et C ν_m-small tq

$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} \kappa^k f(\Phi_k) \right] < \infty$

Alors

(a) π unique probabilité invariante

(b) $\exists\ r_* > 1, R < \infty$, tq π p.s

$\sum_n r_*^n \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_f \leq R f(x)$

Tuominen et Tweedie (1994)

Si il existe $r = \{r(n)\}$ sous-géométrique
et C ν_m-small tq

$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty$

Alors

(a) π unique probabilité invariante

(b) π p.s

$\lim_n r(n) \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_f = 0$

(A-5) Evaluation du moment (f, r)-pondéré $\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k)\right]$

$r := \{r(n)\}$ suite positive et $f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$ v.a.

Inégalité fondamentale: [*Formule de Dynkin*]

Si $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq Z_n - f_n(\Phi_n) + s_n(\Phi_n) \qquad f_n, s_n \geq 0$

$\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall \tau$ t.a. $\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} f_k(\Phi_k)\right] \leq Z_0 + \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} s_k(\Phi_k)\right]$

Condition de drift : $r = \{r(n)\}$ suite constante $r(n) = 1$

$$PV(x) \leq V(x) - f(x) + b\mathbb{1}_C(x).$$

Condition de drift de Foster-Lyapunov : r suite géométrique

$$Pf(x) \leq \lambda f(x) + b\mathbb{1}_C(x) \qquad 0 < \lambda < 1, \ b < \infty \qquad f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$$

Condition de drift de Tuominen-Tweedie : r suite sous-géométrique

$$\forall n \geq 0, \ PV_{n+1}(x) \leq V_n(x) - r(n)f(x) + b\, r(n)\mathbb{1}_C(x) \qquad b < \infty.$$

(A-6-a) Ex. Modèle autorégressif non linéaire

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}^l \qquad \{W_n\} \text{ i.i.d.}$$

Hypothèses

- $W_n \sim \Gamma(dy) := \gamma(y)dy, \qquad |y| \leq \delta \Rightarrow \gamma(y) \geq \epsilon > 0, \qquad \mathbb{E}[|W_n|^s] < \infty, \;\; s \geq 1.$
- F est continue **et** $\exists\, 0 < \rho < 1, \;\; |F(x)| \leq \rho\, |x|, \;\; |x| \geq M.$

Théorème (Ango Nze, 2000)

- π unique probabilité invariante.
- $\exists r > 1 \;\; \lim_n r^n \, \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^s} = 0.$

$\hookrightarrow$ Que dire lorsque $\quad \exists\, 0 < d \leq 2, \;\; r > 0, \qquad |F(x)| \leq |x|(1 - r|x|^{-d}), \qquad |x| \geq M$?

(A-6-b) Ex. Algorithme de Hastings-Métropolis

à marche aléatoire symétrique de loi cible $\pi(dx) = p(x)dx$ sur $\mathbb{R}^d$.

$$P(x, dy) = \left(1 \wedge \frac{p(y)k(y;x)}{p(x)k(x;y)}\right) \ k(x;y) \ dy + \delta_x(dy) \int \left(1 - 1 \wedge \frac{p(y)k(y;x)}{p(x)k(x;y)}\right) k(x;y) dy.$$

Hypothèses

- $k(x;y) = k(|y-x|)$ **et** $|z| \leq \delta \Rightarrow k(|z|) \geq \epsilon > 0$
- $p > 0$ est sous-exponentielle: $\lim_{|x|\to\infty} \left\langle \frac{x}{|x|}; \nabla \log p(x) \right\rangle = -\infty.$
- $\limsup_{|x|\to\infty} \left\langle \frac{x}{|x|}; \frac{\nabla p(x)}{|\nabla p(x)|} \right\rangle < 0.$ Régularité de $\{y; p(y) = p(x)\}$

Théorème (Jarner, Hansen 1998)

- π unique probabilité invariante.
- $\exists r_* > 1 \quad \lim_n r_*^n \, \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{p(x)^{-1/2}} = 0.$

$\hookrightarrow$ Que dire lorsque p est à décroissance sur-exponentielle ou polynomiale ?

$\hookrightarrow$ Peut-on quantifier la convergence de l'algorithme *i.e.* $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f$?

B. f-ergodicité polynomiale

Objectif: Pour $f \geq 1$ v.a., $l \in \mathbb{N}^*$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ donnés,

$$? \Longrightarrow \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty \qquad r(k) \sim k^l$$

P ψ-irréductible, apériodique et C ν_m-small tq $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} r(k) f(\Phi_k) \right] < \infty$.

1. π unique probabilité invariante.
2. π p.s., $\lim_n r(n) \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_f = 0$.

• Une condition de drift $\quad 1 \leq V_0 \leq V_1$

$$PV_1(x) \leq V_1(x) - V_0(x) + b\mathbb{1}_C(x) \Longrightarrow \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} V_0(\Phi_k)\Big] \leq V_1(x) + b\mathbb{1}_C(x).$$

• Deux conditions de drift “emboitées” $\quad 1 \leq V_0 \leq V_1 \leq V_2$

$$PV_2(x) \leq V_2(x) - V_1(x) + b_1\mathbb{1}_C(x), \qquad PV_1(x) \leq V_1(x) - V_0(x) + b_0\mathbb{1}_C(x),$$

entrainent

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} V_1(\Phi_k)\Big] \leq V_2(x) + b_1\mathbb{1}_C(x) \qquad \mathbb{E}_{\Phi_k}\Big[\sum_{l=0}^{\tau_C-1} V_0(\Phi_l)\Big] \leq V_1(\Phi_k) + b_0\mathbb{1}_C(\Phi_k)$$

et par suite

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} \mathbb{E}_{\Phi_k}\Big[\sum_{l=0}^{\tau_C-1} V_0(\Phi_l)\Big]\Big] \leq \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} V_1(\Phi_k)\Big] + b_0\mathbb{1}_C(x) \leq V_2(x) + (b_1 + b_0)\,\mathbb{1}_C(x).$$

càd

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} (k+1)V_0(\Phi_k)\Big] \leq V_2(x) + (b_0 + b_1)\,\mathbb{1}_C(x).$$

(B-1) Condition de drift polynomial

$f : \mathcal{X} \to [1, \infty[$ v.a., $\qquad q \in \mathbb{N}^*, \qquad C \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$

Condition D$[f, q, C]$

(a) Il existe $f := V_0 \leq \cdots \leq V_q, \qquad b_k < \infty, k \in \{0, \cdots, q-1\}$

$$PV_{k+1}(x) \leq V_{k+1}(x) - V_k(x) + b_k \mathbb{1}_C(x) \qquad k \in \{0, \cdots, q-1\}.$$

(b) $\sup_C V_q < \infty$

Proposition Si D$[f, q, C]$,

$$\mathbb{E}_x \Big[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} \mathbb{1}^{*(q-1)}(k+1) f(\Phi_k) \Big] \leq V_q(x) + \Big(\sum_{k=0}^{q-1} b_k \Big) \mathbb{1}_C(x),$$

où $\qquad \mathbb{1}^{*(q-1)}(k) \sim k^{q-1}/(q-1)! \qquad$ définie par $\mathbb{1}^{*0}(k) := 1, \qquad \mathbb{1}^{*(j+1)}(k) := \sum_{l=1}^{k} \mathbb{1}^{*j}(l).$

(B-2) Vitesse de convergence

$$f : \mathcal{X} \to [1, \infty[, \qquad q \in \mathbb{N}^*, \qquad C \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Théorème P ψ-irréductible apériodique, condition D$[f, q, C]$ vérifiée pour C ν_m-small.

1. π unique probabilité invariante.
2. π-p.s. $\quad \lim_n (n+1)^{q-1} \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_f = 0.$

Théorème [Interpolation]

Si de plus, $\exists\ 0 < \beta \leq 1$ tq $\quad \pi(V_q^\beta) < \infty$ ou $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_C - 1} V_q^\beta(\Phi_k) \right] < \infty$

3. $\forall\ 0 < \alpha \leq 1$, π-p.s. $\quad \lim_n (n+1)^{q\beta\alpha} \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{V_q^{\beta(1-\alpha)}} = 0.$

(B-3) Ex. Modèle autorégressif non-linéaire

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n) + W_{n+1} \qquad\qquad \mathcal{X} = \mathbb{R}^l$$

Hypothèses

• P Lebesgue-irréductible, apériodique; tout compact est petite.

• il existe $0 < d \leq 2$, $\quad r > 0$, $M < \infty$ tq

$$|F(x)| \leq |x| \left(1 - r|x|^{-d}\right), \qquad |x| \geq M \qquad\qquad \sup_{|x| \leq M} |F(x)| < \infty$$

• $\{W_n\}$ i.i.d. de loi $\Gamma(dx) = \gamma(x)dx$, $\qquad \int y\Gamma(dy) = 0$, $\qquad \phi_0$ et $\{W_n\}$ indep
il existe $s_* \geq 4$, $\int |y|^{s_*}\Gamma(dy) < \infty$.

Condition de drift $\quad \forall\ d \leq s \leq s_*,\ \ \exists\lambda > 0$ tq

$$\int P(x, dy)|y|^s \leq |x|^s - \lambda|x|^{s-d}(1 + \varepsilon(x)), \qquad \lim_{|x| \to \infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Vitesse de convergence

(1) $\forall\, x \in \mathcal{X}$,

$$\forall\ 1 \leq \kappa \leq s_*/d, \qquad \lim_n (n+1)^{\lfloor \kappa \rfloor - 1} \| P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot) \|_{1+|x|^{s_* - \kappa d}} = 0.$$

(2) [*Interpolation*] $\forall\, x \in \mathcal{X}$,

$$\forall\ 1 \leq \kappa \leq s_*/d, \qquad \lim_n (n+1)^{\kappa - 1} \| P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot) \|_{1+|x|^{s_* - \kappa d}} = 0.$$

$$\forall\ 0 \leq r \leq s_* - d, \qquad \lim_n (n+1)^{(s_* - r)/d - 1} \| P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot) \|_{1+|x|^{r}} = 0.$$

(B-4) Ex. Chaîne de Hastings-Métropolis (1)

Hypothèses

- *loi cible* p continue sur $\mathbb{R}$, et pour $|x| \geq M$, $\quad p \downarrow 0, \quad \forall y \in \{p(x+y) \leq p(x)\}$

$$\left|\frac{p(x+y)}{p(x)} - 1 - syx^{-1}\right| \leq C|x|^{-1}\rho(x)y^2 \qquad s > 1 \qquad \lim_{\infty} \rho(x) = 0$$

- *loi de proposition* k*:* symmétrique, $|x| \leq \delta \Rightarrow k(x) \geq \epsilon$, et $\quad \int |x|^{\zeta+3} k(x) dx < \infty, \zeta \geq 1.$

Condition de drift $s_* := \zeta \wedge s. \quad \forall\ 2 \leq \beta < s_* + 1, \quad \exists\ \lambda > 0$

$$\int P(x, dy)|y|^\beta \leq |x|^\beta - \lambda |x|^{\beta-2}(1 + \varepsilon(x)), \qquad \lim_{|x|\to\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Vitesse de convergence [*Interpolation*] $\quad \forall\ 0 \leq r < s_* - 1,\ \ 0 \leq \gamma < (s_* - 1 - r)/2,$

$$\forall\, x \in \mathcal{X} \qquad \lim_n (n+1)^\gamma \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{1+|x|^r} = 0.$$

(B-5) Ex. Chaîne de Hastings-Métropolis (2)

Hypothèses

- *loi cible* à décroissance sur-exponentielle $p(x) = \eta x^{\eta-1} \exp(-x^\eta), \qquad x > 0,\;\; 0 < \eta < 1.$
- *loi de proposition* k*:* k symétrique, $|x| \leq \delta \Rightarrow k(x) \geq \epsilon$, et

$$\int |x|^{\beta_* + 2\eta + 2} \exp(\alpha |x|^\eta) k(x) dx < \infty, \qquad \beta_* \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$$

Condition de drift $\exists \;\; \lambda > 0, \;\; \forall \;\; \beta \leq \beta_*,$

$$\int P(x, dy) y^\beta \exp(\alpha y^\eta) \leq x^\beta \exp(\alpha x^\eta) - \lambda x^{2(\eta-1)} x^\beta \exp(\alpha x^\eta)(1 + \varepsilon(x)),$$

avec $\lim_{|x|\to\infty} \varepsilon(x) = 0.$

Vitesse de convergence Pour tout $\beta \leq \beta_*$, $q \in \mathbb{N}^*$, tq $\qquad \beta + q(1-\eta) \leq \beta_*$

$$\lim_n (n+1)^q \left\| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\|_{(1 \vee x)^\beta \exp(\alpha x^\eta)} = 0.$$

(B-6) Conclusion

(a) Réduction en une seule condition de drift

$$PV(x) \leq V(x) - \phi \circ V(x) + b\mathbb{1}_C(x),$$

avec ϕ concave croissante et si $\phi_q(x) := c_q x$, pour tout $k \in \{0, \cdots, q\}$, les fonctions $\phi_k := c_k \phi'_{k+1}\phi$ sont concaves croissantes ($c_k \geq 1$) et $\phi_0 \leq \cdots \leq \phi_q$.

• Ex: $\phi(x) := c|x|^{1-\delta} \qquad 0 < \delta < 1$

$\hookrightarrow$ Nombre fini de conditions de drift emboitées $\rightarrow$ taux de convergence polynomial fini.

• Ex: $\phi(x) \propto x \log^b(x), \qquad b < 0$

$\hookrightarrow$ Nombre *infini* de conditions de drift emboitées $\rightarrow$ convergence à n'importe quel taux polynomial.

(b) Question ouverte: Condition de drift pour taux de convergence exponentiel?

Objectif:

$$\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq B(x,n)$$

$$0 < \liminf_n r(n)B(x,n) \leq \limsup_n r(n)B(x,n) < \infty$$

lorsque $r(n) \sim (n+1)^q$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Résultats connus: f-ergodicité géométrique, sous les hypothèses,

- existence d'un ensemble ν_1-small C: $\quad P(x,\cdot) \geq \epsilon\nu_1(\cdot) \quad x \in C$.
- existence d'une solution à la condition de drift de Foster-Lyapunov

$$Pf(x) \leq \lambda f(x) + \mathbb{1}_C(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$$

- condition de croissance de f sur C $\qquad \sup_C f \geq \frac{b}{2(1-\lambda)} - 1$.

(C-1) Hypothèses

C, D mesurables, $\qquad q \in \mathbb{N}^*$

H1$[C, D]$ $\;C \subseteq D$ et D est ν_1-small:

$$\forall x \in D, \qquad P(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_1(\cdot), \qquad \epsilon > 0, \nu_1 \text{ probabilité sur } \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

H2$[q, C, D]$ il existe $1 \leq V_0 \leq \cdots \leq V_q < \infty$, $\quad 0 < a_k < 1, b_k < \infty$ tq $\quad \sup_C V_q < \infty$

$$\begin{cases} PV_{k+1}(x) \leq V_{k+1}(x) - V_k(x) + b_k \mathbb{1}_C(x), \\ V_k(x) \geq b_k/(1-a_k) \qquad x \in D^c. \end{cases} \qquad k \in \{0, \cdots, q-1\}$$

(C-2) Couplage de chaînes

H1$[C, D]$: $\quad C \subseteq D$ et D est ν_1-small: $P(x, \cdot) \geq \epsilon \nu_1(\cdot) \quad x \in D$.

Soient

$$\Delta := C \times D \cup D \times C \qquad R(x, dy) := (1-\epsilon)^{-1} \left(P(x, dy) - \epsilon \nu_1(dy)\right) \mathbb{1}_D(x).$$

Construction d'un processus "étendu" (X_n, X'_n, d_n) sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \{0, 1\}$.
$(X_0, X'_0, d_0) = (x, x', 0)$.
Tant que $d_n = 0$,

- Si $(X_n, X'_n) \notin \Delta$, $\quad X_{n+1} \sim P(X_n, \cdot), \quad X'_{n+1} \sim P(X'_n, \cdot), \quad d_{n+1} = 0$.
- Si $(X_n, X'_n) \in \Delta$,
  - avec probabilité ϵ, $\quad X_{n+1} \sim \nu_1, \quad X'_{n+1} = X_{n+1}, \quad d_{n+1} = 1$.
  - avec probabilité $1-\epsilon$, $\quad X_{n+1} \sim R(X_n, \cdot), \quad X'_{n+1} \sim R(X'_n, \cdot), \quad d_{n+1} = 0$.

Lorsque $d_n = 1$, $\quad X_{n+1} \sim P(X_n, \cdot), \quad X'_{n+1} = X_{n+1}, \quad d_{n+1} = 1$.

(C-3) Ergodicité et Temps de couplage

$\longrightarrow$ Construction d'une chaîne de Markov: $(\Omega, \mathcal{A}, \{(X_n, X'_n, d_n)\}, P_{x,x',0})$.

$$P_{x,x',0}(X_n \in A) = P^n(x, A) \qquad P_{x,x',0}(X'_n \in A) = P^n(x', A)$$

$$\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq 2P_{x,\pi,0}(T > n) \qquad \text{avec } T := \inf\{n \geq 1, d_n = 1\}$$

Inégalité de Markov "améliorée" avec $r(n) = 1^{*l}(n) \qquad l \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{1}^{*l}(n) \sim n^l/l!$

Puisque $P_{x,x',0}(T > n + k | T > n) \geq (1 - \epsilon)^k$,

$$P_{x,\pi,0}(T > n) \leq U_\epsilon(l, n)^{-1} \mathbb{E}_{x,\pi,0}\left[\mathbb{1}^{*l}(T - 1)\right]$$

avec

$$U_\epsilon(l, n) := \mathbb{1}^{*l}(n) + (1 - \epsilon)^{-n} \sum_{j > n} (1 - \epsilon)^j \, \mathbb{1}^{*(l-1)}(j)$$

(C-4) Temps de couplage et Temps d'atteinte de $\triangle$

Tant que $d_n = 0$, si $(X_n, X'_n) \in \Delta$, $T - 1 = n$ avec probabilité ϵ.

Temps d'atteinte

$$\sigma_\Delta := \inf\{n \geq 0, (X_n, X'_n) \in \Delta\}.$$

Proposition: $\forall\ l \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}\Big[\mathbb{1}^{*l}(T-1)\Big] \leq \epsilon\ \textstyle\sum_{j=0}^{l} B_{l,j}\ \mathbb{E}_{x,x',0}\Big[\mathbb{1}^{*j}(\sigma_\Delta)\Big]$$

où l'on a défini

$$A(j) := (1-\epsilon) \sup_{(x,x')\in\Delta} \int R(x,dy)R(x',dy')\mathbb{E}_{y,y',0}\Big[\mathbb{1}^{*j}(\sigma_\Delta)\Big],$$

puis la matrice $A := [A_{i,j}]$, avec $A_{i,j} := A(i-j)$ si $i \geq j$ et $A_{i,j} = 0$ sinon;
et enfin $B := (I - A)^{-1}$.

(C-5) Temps d'atteinte de Δ et Conditions de drift

$C \subseteq D$ mesurables, $\qquad q \in \mathbb{N}^*$

Sol. 1 Condition de drift pour la chaîne étendue.

Sol. 2 Condition de drift pour la chaîne initiale **et** condition de croissance des solutions.

H2$[q, C, D]$ il existe $1 \leq V_0 \leq \cdots \leq V_q < \infty$, $0 < a_k < 1$, $b_k < \infty$ tq $\sup_C V_q < \infty$

$$\begin{cases} PV_{k+1}(x) \leq V_{k+1}(x) - V_k(x) + b_k \mathbb{1}_C(x), & \\ V_k(x) \geq b_k/(1-a_k) \qquad x \in D^c. & \end{cases} \qquad k \in \{0, \cdots, q-1\}$$

Proposition Pour tout $l \in \{1, \cdots, q\}$,

$$\mathbb{E}_{x,x',0}\left[\mathbb{1}^{*l}(\sigma_\Delta)\right] \leq \left(\prod_{k=0}^{l-1} a_k\right)^{-1} \inf_{(x,x') \in \Delta^c}(V_0(x) + V_0(x')) \left(V_l(x) + V_l(x')\right).$$

(C-6) Contrôle explicite d'ergodicité polynomiale

$$\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq 2P_{x,\pi,0}(T > n)$$

$$P_{x,\pi,0}(T > n) \leq U_\epsilon(l,n)^{-1}\ \mathbb{E}_{x,\pi,0}\left[\mathbb{1}^{*l}(T-1)\right]$$

$$\mathbb{E}_{x,x',0}\left[\mathbb{1}^{*l}(T-1)\right] \leq \epsilon\ \sum_{j=0}^{l} B_{l,j}\ \mathbb{E}_{x,x',0}\left[\mathbb{1}^{*j}(\sigma_\Delta)\right]$$

$$\mathbb{E}_{x,x',0}\left[\mathbb{1}^{*l}(\sigma_\Delta)\right] \leq \left(\prod_{k=0}^{l-1} a_k\right)^{-1} \inf_{(x,x')\in\Delta^c}(V_0(x)+V_0(x'))\left(V_l(x)+V_l(x')\right)$$

Théorème Si P ψ-irréductible apériodique, H1$[C,D]$ et H2$[q,C,D]$ vérifiées.

1. π unique probabilité invariante
2. $\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{VT} \leq \min_{l\in\{0,\cdots,q-1\}} U_\epsilon(l,n)^{-1}W_l(x)$

avec $U_\epsilon(l,n) \sim n^l$ et $W_l(x) \sim V_l(x)$.

(C-7) Extensions proposées

Norme f: Pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{f^{1-\alpha}} \leq 2^\alpha \; P^\alpha_{x,\pi,0}(T > n) \, \mathbb{E}^{1-\alpha}_{x,\pi,0}\left[\{f(X_n) + f(X'_n)\} \mathbb{1}_{T>n}\right]$$

Condition de minoration: (Hyp. H1)

Ensemble D ν_m-small: $P^m(x,\cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot)$ **et** condition de drift sur le noyau P.

Vitesse: (Hyp. H2) Taux interpolés, Taux sous-géométriques, Taux géométriques.

“Robustesse” de la borne d’ergodicité

- Constante de minoration ϵ.

+ Disymétrie de l’ensemble Δ **et** Condition de minoration sur P^m avec condition de drift sur P.

$$P(x,\cdot) \geq \epsilon \nu_1(\cdot) \mathbb{1}_C(x) \qquad Pf(x) \leq \lambda f(x) + b \mathbb{1}_C(x) \qquad \sup_C f \geq \frac{b}{2(1-\lambda)} - 1$$

$$P^m(x,\cdot) \geq \epsilon \nu_m(\cdot) \mathbb{1}_D(x) \quad PV_{k+1} \leq V_{k+1} - V_k + b_k \mathbb{1}_C \quad \inf_{D^c} V_k \geq b_k/(1-a_k)$$

(C-8) Extensions / Applications $\cdots$

$$\sum_n \|\lambda P^n - \mu P^n\|_f, \qquad \lambda, \mu \text{ probabilités sur } \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

$\hookrightarrow$ existence de solution $\hat{g}$ à l'équation de Poisson $\hat{g} - P\hat{g} = g - \pi(g)$:

- TCL
- Inégalité type-Rosenthal et calcul explicite de $C(p, g, x)$ tq

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=1}^{n} \{g(\Phi_k) - \pi(g)\} \right|^p \leq C(p, g, x) \;\; n^{p/2}.$$

$\cdots$ **vers le MCEM**