

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés. Application au SLAM sous-marin

Journée Département TSI, Jeudi 23 Juin 2011

Equipe STA

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Inférence statistique en
ligne dans les modèles
de Markov cachés.
Application au SLAM
sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions
envisagées

Actions menées au sein de
STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance
récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes
d'optimisation distribuée
pour l'inférence
statistique

Composée de

- ▶ 15 permanents (8 IT, 7 CNRS),
- ▶ ~ 30 doctorants et post-doctorants.

Modélisation et inférence statistique pour le Traitement de l'Information

Recherche méthodologique en prise avec les applications :

- ▶ Méthodologie

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Composée de

- ▶ 15 permanents (8 IT, 7 CNRS),
- ▶ ~ 30 doctorants et post-doctorants.

Modélisation et inférence statistique pour le Traitement de l'Information

Recherche méthodologique en prise avec les applications :

- ▶ **Méthodologie**
 - Apprentissage statistique
 - Méthodes statistiques pour l'astrophysique
 - (*) Traitement statistique du signal
 - (*) Méthodes de Monte Carlo
 - Séries temporelles

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Composée de

- ▶ 15 permanents (8 IT, 7 CNRS),
- ▶ ~ 30 doctorants et post-doctorants.

Modélisation et inférence statistique pour le Traitement de l'Information

Recherche méthodologique en prise avec les applications :

▶ Méthodologie

- Apprentissage statistique
- Méthodes statistiques pour l'astrophysique
- (*) Traitement statistique du signal
- (*) Méthodes de Monte Carlo
- Séries temporelles

▶ Domaines d'application

- Fouille de données
- Communications numériques
- (*) Poursuite, localisation
- (*) Réseaux de capteurs
- Analyse de données en cosmologie
- Traitement statistique de mesures pour la physique expérimentale
- Détection d'anomalies
- Modélisation aléatoire de réseaux quantiques

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions
envisagées

Actions menées au sein de
STA

Inférence en ligne dans
les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance
récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes
d'optimisation distribuée
pour l'inférence
statistique

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Inférence statistique en
ligne dans les modèles
de Markov cachés.
Application au SLAM
sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions
envisagées

Actions menées au sein de
STA

Inférence en ligne dans
les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance
récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes
d'optimisation distribuée
pour l'inférence
statistique

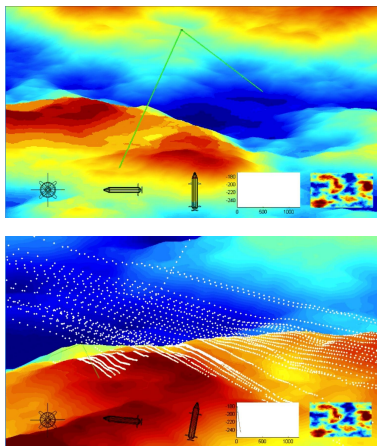
SLAM (Simultaneous Localization And Mapping)

- ▶ Un robot évolue dans un environnement inconnu.
- ▶ Il doit **apprendre la carte** (statique) du milieu qu'il visite, à l'aide d'observations du milieu environnant.
- ▶ Cette cartographie nécessite qu'il **apprenne sa position** (localisation).

Exemple 1.



FIG.: AUV Taipan (LIRMM, Montpellier)



Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

SLAM (Simultaneous Localization And Mapping)

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

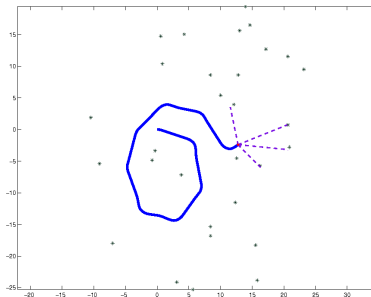
Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Exemple 2.

SLAM plan

Amers ponctuels (étoiles)



Modèle statistique : modèle de Markov caché

- ▶ **Etat non observé** X_t dont la dynamique est de la forme

$$X_t = F(X_{t-1}; \text{commandes } U_t) + \text{bruit}$$

- ▶ **Observations** $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$

$$Y_t = G(X_t; \text{carte } \theta) + \text{bruit}$$

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Modèle statistique : modèle de Markov caché

- ▶ Etat non observé X_t dont la dynamique est de la forme

$$X_t = F(X_{t-1}; \text{commandes } U_t) + \text{bruit}$$

- ▶ Observations $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$

$$Y_t = G(X_t; \text{carte } \theta) + \text{bruit}$$

- ▶ Exemple 2 (suite)

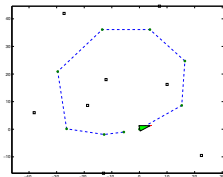
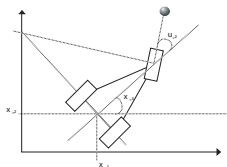
- ▶ Etat $X_t \in \mathbb{R}^3$

$$x_t = x_{t-1} +$$

$$\begin{pmatrix} (v_t + \varepsilon_{t,1}) dt \cos(x_{t-1,3} + (\psi_t + \varepsilon_{t,2})) \\ (v_t + \varepsilon_{t,1}) dt \sin(x_{t-1,3} + (\psi_t + \varepsilon_{t,2})) \\ (v_t + \varepsilon_{t,1}) dt \frac{\sin(\psi_t + \varepsilon_{t,2})}{B} + \varepsilon_{t,3} \end{pmatrix}$$

- ▶ Observation $Y_t = (y_{t,i})_{i \in \mathcal{A}_t}$

$$y_{t,i} = \begin{pmatrix} \sqrt{(\theta_{i,1} - x_{t,1})^2 + (\theta_{i,2} - x_{t,2})^2} \\ \arctan \frac{\theta_{i,2} - x_{t,2}}{\theta_{i,1} - x_{t,1}} - x_{t,3} \end{pmatrix} + \delta_{t,i}$$



Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Verrous et solutions envisagées

1. Cartographie :

- ▶ Comment modélise-t-on la “carte”? (**vecteur des positions des amers**; grille; contours; ...)
- ▶ Association
- ▶ **Stratégie d'exploration** (trajectoire prédéfinie; trajectoire redéfinie régulièrement en fonction des observations passées)
- ▶ **Estimation de la carte en ligne** (partie statique de l'état caché; **paramètre d'un modèle de Markov caché**; ...)
- ▶ **Estimation par flottilles d'agents** (robots, AUV)

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Verrous et solutions envisagées

1. Cartographie :

- ▶ Comment modélise-t-on la “carte”? (vecteur des positions des amers; grille; contours; ...)
- ▶ Association
- ▶ **Stratégie d'exploration** (trajectoire prédéfinie; trajectoire redéfinie régulièrement en fonction des observations passées)
- ▶ **Estimation de la carte en ligne** (partie statique de l'état caché; **paramètre d'un modèle de Markov caché**; ...)
- ▶ **Estimation par flottilles d'agents** (robots, AUV)

2. Localisation :

- ▶ Modèle de Markov caché \implies méthodes de filtrage pour approcher la loi de l'état caché.
- ▶ MAIS, modèle de Markov caché **non linéaire** et **non gaussien**
 - ▶ Les techniques de filtrage classiques (Kalman, et extensions) ne donnent pas de résultats satisfaisants.
 - ▶ Approche par **filtrage particulaire** : à chaque instant, la loi de \mathbf{X}_t étant donnée les observations $\mathbf{Y}_{1:t}$ est approchée par un nuage de particules pondérées.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Actions menées au sein de STA

- ▶ Actions de recherche :
 - ▶ stratégies d'exploration de l'environnement
 - ▶ (★) algorithmes pour l'inférence **en ligne** dans les **HMM**
 - ▶ (★) apprentissage multi-agent distribué.
 - ▶ ↪ applications au SLAM EN MILIEU SOUS-MARIN via un simulateur développé au LIRMM.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Actions menées au sein de STA

- ▶ Actions de recherche :
 - ▶ stratégies d'exploration de l'environnement
 - ▶ (★) algorithmes pour l'inférence **en ligne** dans les **HMM**
 - ▶ (★) apprentissage multi-agent distribué.
 - ▶ ↪ applications au SLAM EN MILIEU SOUS-MARIN via un simulateur développé au LIRMM.

- ▶ impliquant, au LTCI
 - ▶ P. Bianchi, O. Cappé, M. Charbit, G. Fort, J. Jakubowicz, E. Moulines
 - ▶ S. Le Corff, J. Perez (doct. et post-doct STA)
 - ▶ W. Hachem (Dpt COMELEC)

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Actions menées au sein de STA

▶ Actions de recherche :

- ▶ stratégies d'exploration de l'environnement
- ▶ (★) algorithmes pour l'inférence **en ligne** dans les **HMM**
- ▶ (★) apprentissage multi-agent distribué.
- ▶ ↪ applications au SLAM EN MILIEU SOUS-MARIN via un simulateur développé au LIRMM.

▶ impliquant, au LTCI

- ▶ P. Bianchi, O. Cappé, M. Charbit, G. Fort, J. Jakubowicz, E. Moulines
- ▶ S. Le Corff, J. Perez (doct. et post-doct STA)
- ▶ W. Hachem (Dpt COMELEC)

▶ Applications au SLAM sous-marin : projet ANR-ROBO CFLAM impliquant des chercheurs

- ▶ du LIRMM
- ▶ de l'I3S
- ▶ du LTCI (P. Bianchi, G. Fort, E. Moulines, S. Le Corff, J. Perez)

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Inférence statistique en
ligne dans les modèles
de Markov cachés.
Application au SLAM
sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions
envisagées

Actions menées au sein de
STA

Inférence en ligne dans
les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance
récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes
d'optimisation distribuée
pour l'inférence
statistique

Modèle

Pour répondre au problème du SLAM, on introduit un modèle de HMM avec paramètre inconnu

- ▶ état caché \longleftrightarrow état du robot
- ▶ le paramètre θ \longleftrightarrow la carte, constituée des positions des amers ponctuels.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Modèle

Pour répondre au problème du SLAM, on introduit un modèle de HMM avec paramètre inconnu

- ▶ état caché \longleftrightarrow état du robot
- ▶ le paramètre $\theta \longleftrightarrow$ la carte, constituée des positions des amers ponctuels.

On définit le modèle d'état et le modèle d'observation de sorte que le HMM est défini par

- ▶ densité $g(x, y; \theta)$: loi de l'observation $\mathbf{Y}_{t,i}$ étant donné l'état X_t , pour la valeur courante du paramètre.
- ▶ densité $m(x, x'; \theta)$ ou $m(x, x')$: transition de l'état.

\hookrightarrow on propose un algorithme qui permet de répondre au problème de

- ▶ localisation : par **filtrage particulaire**.
- ▶ cartographie : estimation du vecteur θ , au sens du **maximum de vraisemblance (récuratif)**

Maximum de vraisemblance récursif

Dans les HMM, pas d'expression explicite de la vraisemblance des observations :

- ▶ solution 1 : algorithme de type gradient stochastique.
- ▶ (★) solution 2 : algorithme de type Expectation Maximization.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Maximum de vraisemblance récursif

Dans les HMM, pas d'expression explicite de la vraisemblance des observations :

- ▶ solution 1 : algorithme de type gradient stochastique.
- ▶ (★) solution 2 : algorithme de type Expectation Maximization.

Du fait de l'acquisition séquentielle des observations, nécessité de procédures de type **EM en ligne** : construire itérativement une suite $\{\theta^{(T)}, T \geq 1\}$ par

Etape E

$$Q_{1:T}(\theta; \theta^{(T-1)}) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T \log \{ m(X_{t-1}, X_t; \theta) g(X_t, Y_t; \theta) \} \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right]$$

Etape M $\theta^{(T)} \in \operatorname{argmax}_{\theta} Q_{1:T}(\theta; \theta^{(T-1)})$.

Maximum de vraisemblance récursif

Dans les HMM, pas d'expression explicite de la vraisemblance des observations :

- ▶ solution 1 : algorithme de type gradient stochastique.
- ▶ (★) solution 2 : algorithme de type Expectation Maximization.

Du fait de l'acquisition séquentielle des observations, nécessité de procédures de type **EM en ligne** : construire itérativement une suite $\{\theta^{(T)}, T \geq 1\}$ par

Etape E

$$Q_{1:T}(\theta; \theta^{(T-1)}) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T \log \{ m(X_{t-1}, X_t; \theta) g(X_t, Y_t; \theta) \} \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right]$$

Etape M $\theta^{(T)} \in \operatorname{argmax}_{\theta} Q_{1:T}(\theta; \theta^{(T-1)})$.

Cas des **modèles exponentiels** :

$$Q_{1:T}(\theta; \theta^{(T-1)}) = \left\langle \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T S(X_{t-1}, X_t, Y_t) \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right]; \psi(\theta) \right\rangle$$

- ▶ Etape E stochastique : calcul **récurif** de l'espérance par des méthodes de filtrage particulières

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T S(X_{t-1}, X_t, Y_t) \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] = \mathbb{E} \left[S(X_{T-1}, X_T, Y_T) \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] \\ + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{T-1} S(X_{t-1}, X_t, Y_t) \mid X_T, Y_{1:T-1} \right] \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right]$$

nécessitant une **approximation** du mécanisme de propagation de la loi de filtrage.

- ▶ Etape M inchangée.

Algorithme I : EM en ligne Cappé, Moulines (2009); Cappé (2009, 2011); Le Corff, Fort, Moulines (2011)

- ▶ Etape **d'approximation** par modèle exponentiel :

$$\sum_{t=1}^T \log\{m(x_{t-1}, x_t; \theta)g(x_t, y_t; \theta)\} \sim \left\langle \sum_{t=1}^T S(x_{t-1}, x_t, y_t; \psi(\theta)) \right\rangle$$

à chaque itération, autour du point courant $\theta^{(T-1)}$.

- ▶ Etape E stochastique : calcul **récurif** de l'espérance par des méthodes de filtrage particulières

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T S(x_{t-1}, x_t, y_t) \mid y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] &= \mathbb{E} \left[S(x_{T-1}, x_T, y_T) \mid y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{T-1} S(x_{t-1}, x_t, y_t) \mid x_T, y_{1:T-1} \right] \mid y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] \end{aligned}$$

nécessitant une **approximation** du mécanisme de propagation de la loi de filtrage.

- ▶ Etape M inchangée.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récurif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Algorithme I : EM en ligne Cappé, Moulines (2009); Cappé (2009, 2011); Le Corff, Fort, Moulines (2011)

- ▶ Etape **d'approximation** par modèle exponentiel :

$$\sum_{t=1}^T \log\{m(x_{t-1}, x_t; \theta)g(x_t, y_t; \theta)\} \sim \left\langle \sum_{t=1}^T S(x_{t-1}, x_t, y_t; \psi(\theta)) \right\rangle$$

à chaque itération, autour du point courant $\theta^{(T-1)}$.

- ▶ Etape E stochastique : calcul **récurif** de l'espérance par des méthodes de filtrage particulières

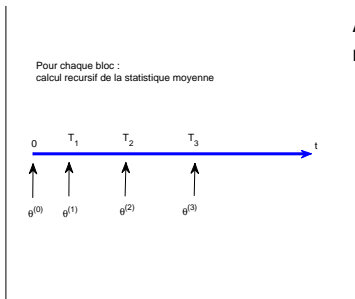
$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T S(x_{t-1}, x_t, y_t) \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] &= \mathbb{E} \left[S(x_{T-1}, x_T, y_T) \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{T-1} S(x_{t-1}, x_t, y_t) \mid X_T, Y_{1:T-1} \right] \mid Y_{1:T}; \theta^{(T-1)} \right] \end{aligned}$$

nécessitant une **approximation** du mécanisme de propagation de la loi de filtrage.

- ▶ Etape M inchangée.

↪ Il est difficile d'étudier le comportement asymptotique de cet algorithme et notamment de comparer les **points limites** aux **points stationnaires de la log-vraisemblance normalisée limite**

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \rho(Y_{1:T}; \theta)$$



Algorithme pour HMM exponentiels :

- ▶ calcul de l'espérance (cond) de la statistique exhaustive par méthodes de filtrage particulaire; **en ligne**.
- ▶ mise à jour du paramètre en fin de chaque **bloc**.

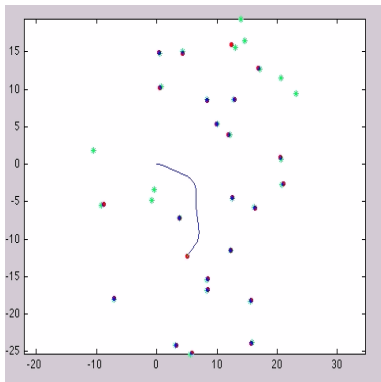
Analyse théorique :

- ▶ convergence de l'algorithme vers points stationnaires de la log-vraisemblance normalisée limite.
- ▶ discussion de l'influence de la taille des blocs sur la vitesse de convergence.

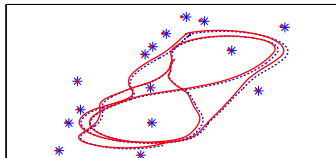
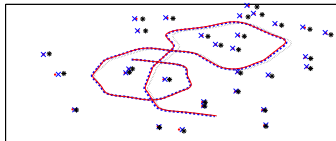
Mise en oeuvre :

- ▶ sur modèles HMM exponentiels

Applications



Run



Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Inférence statistique en
ligne dans les modèles
de Markov cachés.
Application au SLAM
sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions
envisagées

Actions menées au sein de
STA

Inférence en ligne dans
les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance
récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes
d'optimisation distribuée
pour l'inférence
statistique

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

- ▶ Introduction d'un problème générique : l'optimisation distribuée dans les réseaux multi-agent
- ▶ Application à l'estimation distribuée d'une carte par un réseau de capteurs (projet CFLAM)

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Minimiser $f(\theta)$ w.r.t. $\theta \in \mathbb{R}^d$

Inférence statistique en
ligne dans les modèles
de Markov cachés.
Application au SLAM
sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions
envisagées

Actions menées au sein de
STA

Inférence en ligne dans
les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance
récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

**Algorithmes
d'optimisation distribuée
pour l'inférence
statistique**

Minimiser $f(\theta)$ w.r.t. $\theta \in \mathbb{R}^d$

Algorithme du gradient déterministe

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_n \nabla f(\theta_n)$$

où $\gamma_n > 0$ est le pas.

Minimiser $f(\theta)$ w.r.t. $\theta \in \mathbb{R}^d$

Quand ∇f est inconnu: algorithme du gradient stochastique :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_n Y_{n+1}$$

où Y_{n+1} est une version bruitée de $-\nabla f(\theta_n)$ i.e.,

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = -\nabla f(\theta_n) \text{ où } \mathcal{F}_n = \sigma(Y_{1:n}) \text{ est la filtration naturelle}$$

Minimiser $f(\theta)$ w.r.t. $\theta \in \mathbb{R}^d$

Quand ∇f est inconnu: algorithme du gradient stochastique :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_n Y_{n+1}$$

où Y_{n+1} est une version bruitée de $-\nabla f(\theta_n)$ i.e.,

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = -\nabla f(\theta_n) \text{ où } \mathcal{F}_n = \sigma(Y_{1:n}) \text{ est la filtration naturelle}$$

Hypothèse: $\sum_n \gamma_n = \infty$ et $\sum_n \gamma_n^2 < \infty$.

Alors, pour de “bonnes” fonctions f , θ_n converge vers les points critiques de f .

Minimiser $f(\theta)$ w.r.t. $\theta \in \mathbb{R}^d$

Quand ∇f est inconnu: algorithme du gradient stochastique :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_n Y_{n+1}$$

où Y_{n+1} est une version bruitée de $-\nabla f(\theta_n)$ i.e.,

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = -\nabla f(\theta_n) \text{ où } \mathcal{F}_n = \sigma(Y_{1:n}) \text{ est la filtration naturelle}$$

Hypothèse: $\sum_n \gamma_n = \infty$ et $\sum_n \gamma_n^2 < \infty$.

Alors, pour de “bonnes” fonctions f , θ_n converge vers les points critiques de f .

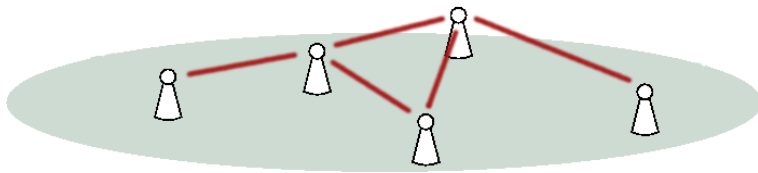


Nous allons :

- ▶ Etendre cet algorithme d'optimisation au cas de systèmes multi-agent
- ▶ En particulier, discuter de son application à l'estimation distribuée

Système multi-agent

Considérons un réseau de N agents (robots, capteurs, smart phones, etc.)



- ▶ Chaque agent collecte une information partielle sur l'environnement
- ▶ Agents connectés selon un graphe aléatoire, variant dans le temps.
- ▶ Deux agents connectés au temps n échangent de l'information

Objectif du réseau : Estimer un paramètre **commun** $\theta \in \mathbb{R}^d$

Contexte distribué : il n'existe pas de centre de fusion omniscient

On souhaite mettre en œuvre des algorithmes distribués permettant aux agents de trouver un **consensus** sur la valeur de θ

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Un problème d'optimisation distribué

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Chaque agent $i = 1 \dots N$ dispose d'une fonction d'utilité $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

(f_i continument dérivable et ∇f_i Lipschitz)

$$\text{Minimiser } f(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=1}^N f_i(\boldsymbol{\theta}) \text{ w.r.t. } \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{D}$$

où \mathcal{D} est un convexe ($\mathcal{D} = \mathbb{R}^d$ en l'absence de contraintes).

- ▶ Un agent i ignore les fonctions d'utilité f_j des autres agents $j \neq i$
⇒ coopération nécessaire
- ▶ Chaque agent i observe une version bruitée de sa fonction d'utilité
⇒ Optimisation par algorithme de type gradient stochastique

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Algorithme distribué (sans contrainte : $\theta \in \mathbb{R}^d$)

Chaque agent possède une estimée de $\theta_{n,i}$ à l'instant n .

A chaque instant n , l'algorithme comprend deux étapes :

- ▶ [Etape locale] Chaque agent i met à jour $\theta_{n,i}$ à partir de son observation récente :

$$\tilde{\theta}_{n+1,i} = \theta_{n,i} + \gamma_n Y_{n+1,i}$$

où $\mathbb{E}[Y_{n+1,i} | \mathcal{F}_n] = -\nabla f_i(\theta_{n,i})$.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Algorithme distribué (sans contrainte : $\theta \in \mathbb{R}^d$)

Chaque agent possède une estimée de $\theta_{n,i}$ à l'instant n .

A chaque instant n , l'algorithme comprend deux étapes :

- ▶ [Etape locale] Chaque agent i met à jour $\theta_{n,i}$ à partir de son observation récente :

$$\tilde{\theta}_{n+1,i} = \theta_{n,i} + \gamma_n Y_{n+1,i}$$

où $\mathbb{E}[Y_{n+1,i} | \mathcal{F}_n] = -\nabla f_i(\theta_{n,i})$.

- ▶ [Etape de gossip] Les agents connectés fusionnent leurs estimées temporaires :

$$\theta_{n+1,i} = \sum_{j=1}^N w_{n+1}(i,j) \tilde{\theta}_{n+1,j}$$

pour certaines pondérations $w_{n+1}(i,j)$ ($=0$ pour des nœuds non connectés i, j) tels que $\sum_j w_{n+1}(i,j) = 1$.

Algorithme distribué (avec contraintes : $\theta \in \mathcal{D}$)

Chaque agent possède une estimée de $\theta_{n,i}$ à l'instant n .

A chaque instant n , l'algorithme comprend deux étapes :

- ▶ [Etape locale] Chaque agent i met à jour $\theta_{n,i}$ à partir de son observation récente :

$$\tilde{\theta}_{n+1,i} = \Pi_{\mathcal{D}}[\theta_{n,i} + \gamma_n Y_{n+1,i}]$$

où $\mathbb{E}[Y_{n+1,i} | \mathcal{F}_n] = -\nabla f_i(\theta_{n,i})$.

- ▶ [Etape de gossip] Les agents connectés fusionnent leurs estimées temporaires :

$$\theta_{n+1,i} = \sum_{j=1}^N w_{n+1}(i,j) \tilde{\theta}_{n+1,j}$$

pour certaines pondérations $w_{n+1}(i,j)$ ($=0$ pour des nœuds non connectés i, j) tels que $\sum_j w_{n+1}(i,j) = 1$.

Analyse asymptotique ($n \rightarrow \infty$)

► Convergence presque sûre :

Le consensus est atteint : $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i,j} \|\theta_{n,i} - \theta_{n,j}\| = 0$

La moyenne $\bar{\theta}_n := N^{-1} \sum_i \theta_{n,i}$ converge vers l'ensemble des points KKT

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Analyse asymptotique ($n \rightarrow \infty$)

► Convergence presque sûre :

Le consensus est atteint : $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i,j} \|\theta_{n,i} - \theta_{n,j}\| = 0$

La moyenne $\bar{\theta}_n := N^{-1} \sum_i \theta_{n,i}$ converge vers l'ensemble des points KKT

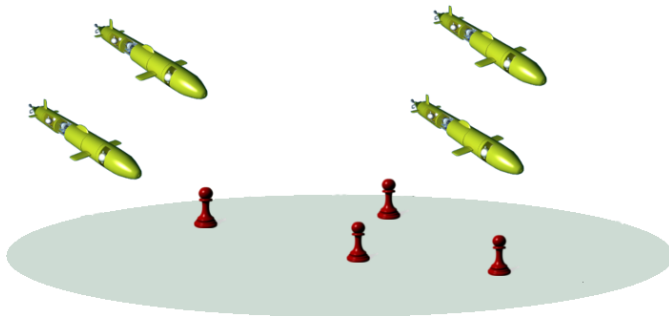
► Théorème central limite : Soit θ^* un point de l'intérieur de \mathcal{D} .

Conditionnellement à $\bar{\theta}_n \rightarrow \theta^*$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \begin{pmatrix} \theta_{n,1} - \theta_* \\ \vdots \\ \theta_{n,N} - \theta_* \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} X \\ \vdots \\ X \end{pmatrix} \quad \text{où } X \sim N(0, \Sigma)$$

- Le choix du protocole de communication (i.e. les pondérations $w_n(i,j)$) est important et affecte la covariance asymptotique Σ .
- Sous certaines conditions, l'algorithme atteint les performances asymptotiques d'un algorithme centralisé

Application à la localisation d'amers (1/2)



$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) = \text{position des amers.}$

Hypothèse : Le i ème robot collecte une suite d'observations i.i.d. $(X_{n,i})_{n \geq 1}$ pour laquelle on se donne une famille de lois $p_i(\cdot; \theta)$ indexées par θ

Objectif : Estimation de θ au sens du maximum de vraisemblance.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Application à la localisation d'amers (2/2)

Algorithme :

- ▶ [Local] : $\tilde{\theta}_{n+1,i} = \theta_{n,i} + \gamma_n Y_{n+1,i}$ où $Y_{n+1,i} = -\log p_i(X_{n+1,i}; \theta_{n,i})$
- ▶ [Gossip] : $\theta_{n+1,i} = \sum_{j=1}^N w_{n+1}(i,j) \tilde{\theta}_{n+1,j}$

La convergence de cet algorithme découle des résultats précédents.

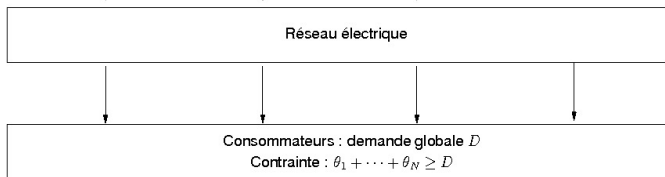
Extensions en cours :

- ▶ *Algorithme EM distribué.*
L'étape de gossip est inchangée, mais l'étape locale consiste en une actualisation du résumé exhaustif.
- ▶ *Réseaux de capteurs mobiles.*
La position des capteurs suit une dynamique markovienne \rightarrow les observations suivent un modèle de Markov caché. L'algorithme précédent peut être adapté à ce contexte.

Autres applications : réseaux ad-hoc, smart grid, ...

 θ_1  θ_2  θ_3 

...

 θ_N 

- ▶ θ_i la production d'électricité du i ème producteur/agent.
- ▶ $f_i(\theta_i)$ le coût payé par le i ème agent pour produire θ_i
- ▶ D la demande globale des consommateurs

Problème : minimiser $\sum_{i=1}^N f_i(\theta_i)$ sous contrainte $\sum_{i=1}^N \theta_i \geq D$.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin

(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique

Conclusion

- ▶ Etude d'un outil générique pour l'optimisation distribuée. Il fournit notamment une solution au problème de l'estimation statistique distribuée.
- ▶ Prochaines étapes :
 1. Evolution de l'algorithme vers des modèles de Markov cachés.
 2. Analyse de l'algorithme à pas constant.

Inférence statistique en ligne dans les modèles de Markov cachés.
Application au SLAM sous-marin
(exposé équipe STA)

Présentation équipe STA

SLAM :enjeux statistiques

SLAM :problématique

Modèle statistique

Verrous et solutions envisagées

Actions menées au sein de STA

Inférence en ligne dans les HMM

Modèle

Maximum de vraisemblance récursif

Algorithme I :EM en ligne

Algorithme II :EM-bloc en ligne

Applications

Algorithmes d'optimisation distribuée pour l'inférence statistique