Problème en temps libre n°2 : L'urne de Polya :corrigé.

Question 1. On a $s(X_{n+1}) = s(X_n) + 1$, et $s(X_0) = 0$. Donc, $s(X_n) = n$.

Question 2.

$$Pf_i(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\pi_j(x) + 1}{s(x) + d} \frac{\pi_i(\theta_j(x) + 1}{s(\theta_j(x) + d}$$

. Or, $\pi_i(\theta_j(x)) = \pi_i(x)$ si $x \neq j$, et $\pi_i(\theta_i(x) = \pi_i(x) + 1$. D'autre part, $s(\theta_j)(x) = s(x) + 1$.

On obtient donc

$$Pf_i(x) = \sum_{j \neq i} \frac{(\pi_i(x) + 1)(\pi_j(x) + 1)}{(s(x) + d)(s(x) + d + 1)} + \frac{(\pi_i(x) + 1)(\pi_i(x) + 2)}{(s(x) + d)(s(x) + d + 1)},$$

d'où encore

$$Pf_i(x) = \frac{\pi_i(x) + 1}{(s(x) + d)(s(x) + d + 1)} [\pi_i(x) + 2 + \sum_{i \neq i} \pi_j(x) + 1].$$

Mais

$$\sum_{j \neq i} \pi_j(x) + 1 = s(x) + d - 1 - \pi_i(x),$$

et on obtient donc

$$Pf_i(x) = \frac{\pi_i(x) + 1}{(s(x) + d)} = f_i(x).$$

On voit donc que $f_i(X_n)$ est une martingale, positive et donc presque sûrement convergente vers une variable Z_i. De plus, elle est bornée parv 1, elle converge donc dans tous les espaces L^p.

On en déduit que $\pi_i(X_n)/n = \frac{n+d}{n} f_i(x) - 1/n$ converge vers la même limite Z_i, presque sûrement et dans L^p.

On a $\mathbf{E}(f(X_n)) = \mathbf{E}(f(X_0)) = 1/d$, et par suite, $\mathbf{E}(Z_i) = 1/d$, puisqu'il y a convergence dans L^1.

Question 3. Commençons par calculer

$$I_{k_1,k_2}(v) = \int_0^{1-v} u^{k_1}(1 - u - v)^{k_2} du.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$I_{k_1,k_2} = \frac{k_2}{k_1 + 1} I(k_1 + 1, k_2 - 1),$$

et par une récurrence immédiate

$$I(k_1, k_2) = \frac{k_2! k_1!}{(k_1 + k_2)!} I(K_1 + k_2, 0) = \frac{k_2! k_1!}{(k_1 + k_2 + 1)!} (1 - v)^{k_1 + k_2 + 1}.$$

En utilisant cette formule, et en intégrant d'abord en u_{d-1} dans la formule qui définit m_k, nous obtenons

$$m_{k_1,\ldots,k_d} = \frac{k_d!k_{d-1}!}{(k_d + k_{d-1} + 1)!} m_{k_1,k_2,\ldots,k_d+k_{d-1}+1},$$

ce qui donne en itérant cette formule

$$m_{k_1,\ldots,k_d} = \frac{k_1!\ldots k_d!}{(k_1 + \ldots + k_d + d - 1)!}.$$

En faisant $k = (0, \ldots, 0)$, on obtient $c_d = (d-1)!$.

Question 4. On a $\pi_i(\theta_j(x)) = \pi_i(x)$ si $i \neq j$ et $\pi_i(\theta_i(x) = \pi_i(x) + 1$, ainsi que $s(\theta_i(x)) = s(x) + 1$. Ces formules montrennt immédiatement que

$$h_u(\theta_i(x)) = \frac{s(x) + d}{\pi_i(x) + 1} u_i h_u(x).$$

On en déduit immédiatement que

$$Ph_u = h_u(\sum_i u_i) = h_u,$$

et par conséquent que $h_u(X_n)$ est une martingale.

Question 5. De même,

$$Pg_k(x) = \sum_i P(x, \theta_i(x)) \int_\Delta h_u(x) u_1^{k_1} \ldots u_d^{k_d} \lambda_d(du) = \int_\Delta Ph_u(x) u_1^{k_1} \ldots u_d^{k_d} \lambda_d(du) = g_k(x).$$

Donc, $g_k(X_n)$ est une martingale. La formule démontrée à la question précédente pour m_k donne immédiatement que $M_n^k = g_k(X_n)$.

En majorant $\pi_i(x)$ par $s(x)$, on voit que M_n^k est majorée par

$$\frac{\prod_{i=1}^d \prod_{p=1}^{k_i} (1 + p/n)}{\prod_{p=0}^{s(k)-1}} (1 + (d + p)/n),$$

et cette dernière quantité est bornée, par une constante qui ne dépend que de k (par exemple par $2^{s(k)}$.

La martingale M_n^k est donc uniformément intégrale, et, puisque $\pi_i(X_n)/n$ converge vers Z_i, on voit que sa limite est $Z_1^{k_1} \ldots Z_d^{k_d}$.

Puisque la convergence a lieu dans L^1, on obtient donc que

$$\mathbf{E}(Z_1^{k_1} \ldots Z_d^{k_d}) = \mathbf{E}(M_0^k) = \frac{(d-1)! \prod_i k_i!}{(s(k) + d - 1)!},$$

, et on reconnait

$$\int_D u_1^{k_1} \ldots u_d^{k_d} c_d \lambda_d(du).$$

Si μ désigne la loi de $(Z_1, \ldots, Z_d)$, qui est une mesure de probabilité portée par Δ, alors $c_d\lambda_d$ est μ ont même moments. Or, Δ est compact, et sur un compact, les moments caractérisent une mesure de probabilité (utiliser le théorème des classes monotones). Donc, $\mu = c_d\lambda_d$. La limite Z a une loi uniforme sur Δ.

Question 6. On appelle Y_n^i le nombre de boules de couleur i rajoutées dans l'urne à l'étape n, et Y_n le vecteur des (Y_i). La loi de (Y_{n+1}) sachant tout le passé ne dépend que de l'état de l'urne à l'instant n.

La proportion de boules de couleur i présente dans l'urne à l'étape n est donc $\frac{Y_i^n+1}{s(Y^n)+d}$, et c'est la probabilité de rajouter une boule de couleur i, c'est à dire la probabilité que Y_{n+1}^i soit égal à $\theta_i(Y^n)$. On voit donc que (Y^n) est une chaîne de markov dont le noyau de transition est celui de (X_n), et donc Y_n/n converge vers une limite qui a la loi uniforme sur Δ. Il en va de même des N_i^n/n.