Chap. I

• GÉOMÉTRIE EN 2D : RAPPELS
• CONIQUES

" Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit."

G. BACHELARD

1ère partie : GÉOMETRIE EN 2D : RAPPELS.

Dans tout ce chapitre, le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; une orientation est choisie, de sorte que $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit direct.

1. MODES DE REPÉRAGE D'UN POINT.

1.1 Coordonnées cartésiennes.

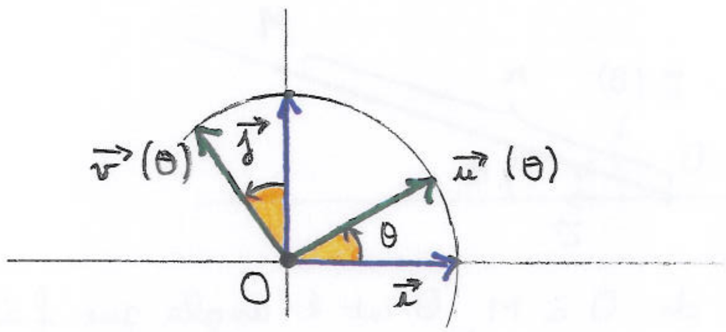
Tout point M du plan peut être repéré par ses coordonnées (dites) cartésiennes (x, y) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Cela signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On note alors $M = (x, y)$ ou $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou encore $M \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$.

Un nouveau repère que l'on utilise souvent est $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ où

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath}, \quad \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath}. \qquad (1)$$

Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (x', y') les coordonnées de ce même point dans $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, on a les formules de changement de coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases} \qquad (2)$$



Exercice 1. 1°) Vérifier que la nouvelle base $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ du plan (vectoriel) est orthonormale.

2°) Vérifier que $P_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale (c'est-à-dire ?).

3°) Calculer $(P_\theta)^{-1}$, $P_\theta \cdot P_{\theta'}$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

4°) Quelle est la forme générale des matrices P orthogonales (2,2) ? [Ind. Il y a 2 classes à distinguer, celle pour laquelle dét P = 1, et celle pour laquelle dét P = −1].

On dit que "$F(x,y)=0$" est une <u>équation cartésienne</u> d'une partie A du plan lorsque :

$$M=(x,y)\in A \text{ si et seulement si } F(x,y)=0.$$

Par exemple, que reconnaissez-vous en

$$\{M=(x,y) \mid x^2+y^2=R^2\}, \text{ où } R>0,$$
$$\{M=(x,y) \mid x^2-y^2=0\} \ ?$$

1.2. Coordonnées polaires.

Le point O est appelé <u>pôle</u>, et la droite orientée $(O;\vec{\imath})$ <u>l'axe polaire</u>.

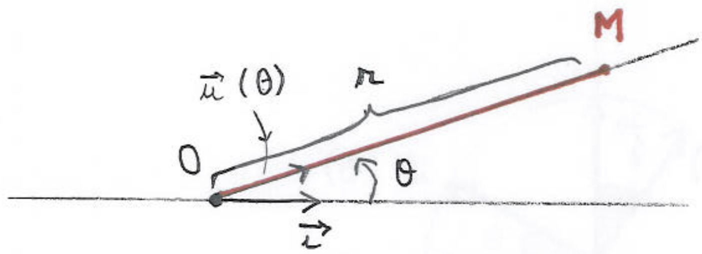
On appelle système de coordonnées polaires du point M du plan un couple $(r,\theta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) \quad \left(=(r\cos\theta)\vec{\imath}+(r\sin\theta)\vec{\jmath}\right). \tag{3}$$

Si M est distinct du pôle O, il admet un système unique de coordonnées polaires (r,θ) tel que

$$\underline{r>0} \quad \text{et} \quad -\pi<\theta\leq\pi \quad (\theta\in\,]-\pi,\pi]). \tag{4}$$

Bien entendu, si (r,θ) est un système de coordonnées polaires (on dit aussi "sont des coordonnées polaires") du point M, il en est de même de $(r,\theta+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.



r est la distance de O à M ; θ est l'angle que fait l'axe polaire avec la demi-droite d'origine O et dirigée par $\vec{u}(\theta)$ (ou $\overrightarrow{OM}$).

<u>Passage de coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.</u>

- $(r,\theta)\longrightarrow(x,y)$: $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ (5)
- $(x,y)\longrightarrow(r,\theta)$: si $M=(x,y)$ est différent du pôle O, on détermine r et θ de la manière suivante

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta=\frac{x}{r} \text{ et } \sin\theta=\frac{y}{r} \quad (\theta \text{ défini modulo } 2\pi). \tag{6}$$

Autre possibilité : si $M=(x,y)$ n'est pas sur l'axe des y (c'est-à-dire la droite d'équation cartésienne $x=0$), on peut déterminer θ par la relation $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

On dit que " $G(r,\theta)=0$ " est une <u>équation polaire</u> d'une partie A du plan lorsque " $M \in A$ " est caractérisée par " l'un de ses couples de coordonnées polaires (r,θ) vérifie $G(r,\theta)=0$ ".

Par exemple, que reconnaissez-vous en les ensembles d'équations polaires $r-1=0$, $\theta = \pi/6$?

1.3 <u>Affixes</u>.

Comme déjà vu en Terminale et en L1, il peut être commode d'identifier le plan et $\mathbb{C}$. A ce sujet, rappelons qu'une fois le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ fixé,

- on appelle <u>image du nombre complexe</u> $z = x+iy$ le point de coordonnées (cartésiennes) (x,y) ;
- on appelle <u>affixe</u> d'un point $M=(x,y)$ le nombre complexe $x+iy$;
- on appelle <u>affixe</u> d'un vecteur $\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}$ le nombre complexe $\alpha+i\beta$.

Ainsi, si $z \neq 0$ est l'affixe d'un point M du plan, le module et l'argument (en fait, un argument) de z constituent un système de coordonnées polaires de M.

<u>Exercice 2.</u> Que représentent géométriquement (dans le plan) les transformations suivantes

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto e^{i\theta_0}.z \in \mathbb{C}, \text{ où } \theta_0 \in \mathbb{R} \text{ est donné ;}$$
$$z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \longmapsto 1/z \in \mathbb{C} \ ?$$

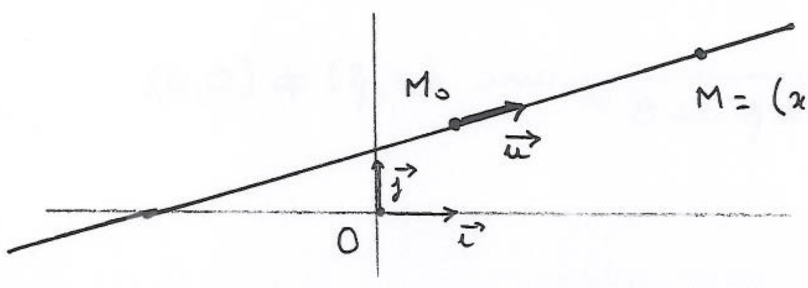
2. <u>DROITES</u>.

2.1 <u>Représentations diverses</u>.

- <u>Représentation paramétrique</u>.

La droite passant par le point $M_0 = (x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} = (\alpha,\beta)$ est paramétrée par :

$$x = x_0 + t\alpha \ , \quad y = y_0 + t\beta \ , \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \qquad (7)$$



• Equation cartésienne.

Elle est de la forme

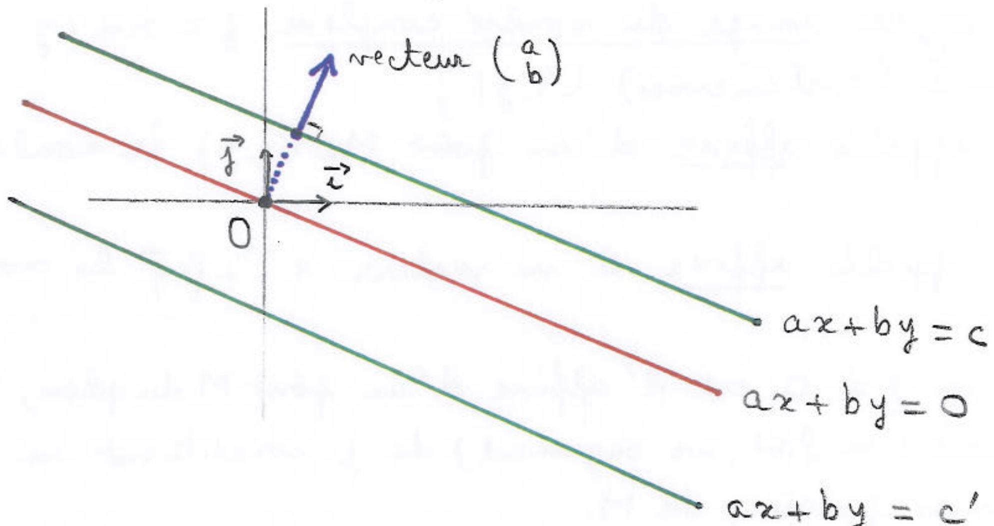
$$ax + by = c \quad \text{avec } (a,b) \neq (0,0),\ c \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Sa "direction" est la droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$ (la "direction" est la droite vectorielle, c.e. passant par l'origine O, tell que la droite décrite en (8) soit une translatée de cette direction).

Il est bon de représenter (8) sous la forme équivalente suivante

$$< \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > = c\,; \tag{8'}$$

i.e., le produit scalaire de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vaut c (cf. Annexe si nécessaire).



Exercice 3. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les trois points $M_0 = (x_0, y_0)$, $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ soient alignés est que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (|A| = \text{déterminant de } A)$$

• Equation polaire.

Une droite passant par le pôle O a une équation polaire de la forme $\theta = \theta_0$, avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Une droite ne passant pas par le pôle O a une équation polaire de la forme :

$$r = \frac{1}{\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta}, \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \neq (0,0). \tag{9}$$

En effet, partant de (8) avec $c \neq 0$ (puis-que la droite ne passe pas par $O = (0,0)$), et sachant que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on arrive à $r\left(\frac{a}{c}\cos\theta + \frac{b}{c}\sin\theta\right) = 1$, soit encore

$$r = \frac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}, \quad \text{où } \alpha = \frac{a}{c} \text{ et } \beta = \frac{b}{c}.$$

Réciproquement, l'équation $r = \dfrac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}$ est l'équation polaire de la droite d'équation cartésienne

$$\alpha(r\cos\theta) + \beta(r\sin\theta) = 1,$$

soit

$$\alpha x + \beta y = 1.$$

2.2 <u>Orthogonalité, distances, angles.</u>

- <u>Orthogonalité</u>.

Deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix}$ sont (dits) <u>orthogonaux</u> lorsque

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix} \right\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des points $M = (x,y)$ du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur non nul $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est une droite, orthogonale à $\vec{v}$. On pourrait réécrire l'équation cartésienne (8') en

$$\langle \overrightarrow{OM}, \vec{v} \rangle = 0, \quad \text{avec } \vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Toutes les droites (affines) parallèles à la droite (vectorielle) d'équation

$$ax + by = 0, \quad \text{i.e.} \quad \langle \overrightarrow{OM}, \vec{v} \rangle = 0$$

ont pour équation

$$ax + by = c, \quad \text{i.e.} \quad \langle \overrightarrow{OM}, \vec{v} \rangle = c \qquad (\text{où } c \in \mathbb{R})$$

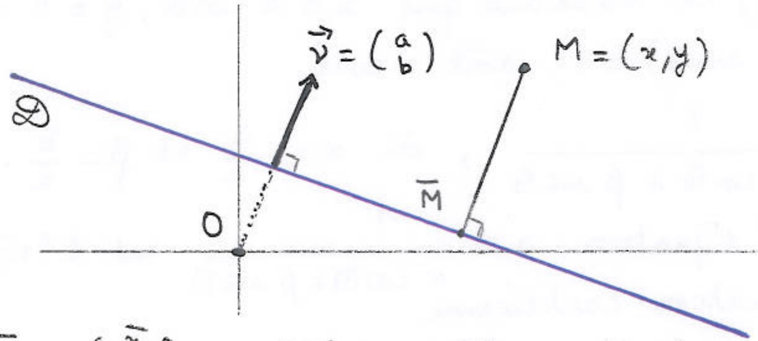
Le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est appelé "<u>vecteur normal</u>" à ces droites.

En conséquence, deux droites d'équations cartésiennes respectives

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs normaux $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}' = \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux, i.e. $aa' + bb' = 0$ (on comprend qu'ici les constantes c et c' n'interviennent pas).

• Distance d'un point à une droite.



Le point $\overline{M} = \binom{\bar{x}}{\bar{y}}$ projection orthogonale (ou le projeté orthogonal) de M sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by = c$ est facile à déterminer : la droite passant par M et dirigée par $\vec{v}$ coupe $\mathcal{D}$ en $\overline{M}$. Ainsi, $\bar{x} = x + \bar{t}\,a$, $\bar{y} = y + \bar{t}\,b$, où $\bar{t}$ est déterminé par le fait que $\overline{M} \in \mathcal{D}$. En conséquence, $\bar{t} = \dfrac{-ax - by + c}{a^2 + b^2}$, d'où $\bar{x} = x + \bar{t}\,a$, $\bar{y} = y + \bar{t}\,b$, de sorte que

$$\underset{(\text{distance de M à } \mathcal{D})}{d_{\mathcal{D}}(M)} = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (10)$$

Ceci est très facile à retenir, une fois qu'on a observé les deux points suivants :

– Si $M = (x,y) \in \mathcal{D}$, c'est que $ax + by - c = 0$; ce qui apparaît au numérateur de (10) est donc, pour M n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, le "déficit" ou "résidu" $|ax + by - c|$ dans l'équation $ax + by = c$.

– Que l'on doive normaliser en divisant par $\sqrt{a^2+b^2}$ est... normal. En effet, l'équation $ax + by = c$ est la même que

$$\frac{a}{K}\,x + \frac{b}{K}\,y = \frac{c}{K},$$

où K est un réel non nul quelconque. On peut donc normaliser les coefficients facteurs de x et y :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\alpha\,x + \beta\,y = p,$$

où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

On peut toujours trouver θ_0 tel que $\cos\theta_0 = \alpha$ et $\sin\theta_0 = \beta$; alors l'équation de $(\mathcal{D})$ mise sous la forme $(\cos\theta_0)\,x + (\sin\theta_0)\,y = p$ est appelée "équation normale" de $(\mathcal{D})$.

- Angle de vecteurs (voir "Produits scalaires" en Annexe).

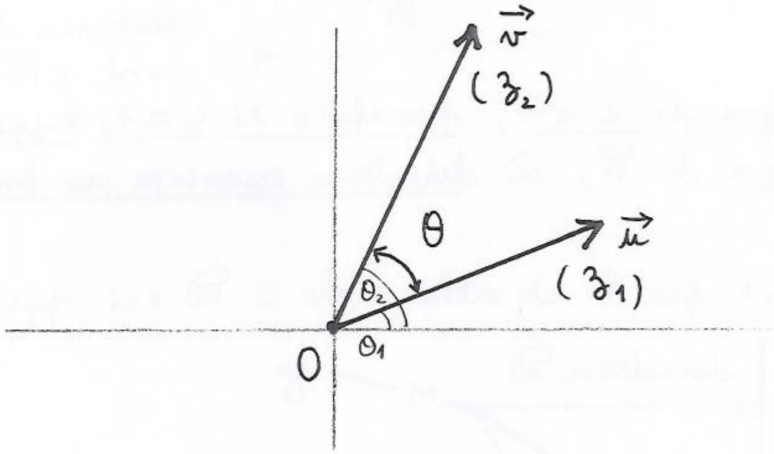
Si $\vec{u} = \binom{a}{b}$ et $\vec{v} = \binom{a'}{b'}$ sont deux vecteurs non nuls, l'angle θ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou "écart angulaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$") est déterminé par

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

En d'autres termes, $\theta = \text{Arccos} \dfrac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$. (11)

Sachant que $<\vec{u},\vec{v}> = aa' + bb'$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{a'^2+b'^2}$, la détermination de $\cos\theta$ est facile.

On peut aussi penser utiliser les nombres complexes (cas fréquent en Electronique). Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont d'affixes respectives z_1 et z_2, et si z_1 et z_2 ont pour arguments respectifs θ_1 et θ_2, alors la valeur absolue de $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ conduira à l'angle θ défini en (11).



$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = |z_1| (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = |z_2| (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$,

de sorte que $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$; on sait par ailleurs que

$<\vec{u},\vec{v}> = |z_1| \, |z_2| \cos(\theta_2 - \theta_1)$.

L'utilisation des nombres complexes raccourcit parfois ces calculs d'angle.

2ème partie : CONIQUES.

Dans toute cette partie, on travaille dans le plan euclidien (avec les notations, définitions, etc. de la première partie). On étudiera des courbes particulières du plan, appelées coniques ; la raison de cette appellation est qu'elles apparaissent comme bordant les coupes d'un cône par un plan (voir figure sur la page 14).

1. ELLIPSES, HYPERBOLES, PARABOLES : définitions à partir de foyers et directrices

1.1. Définitions générales.

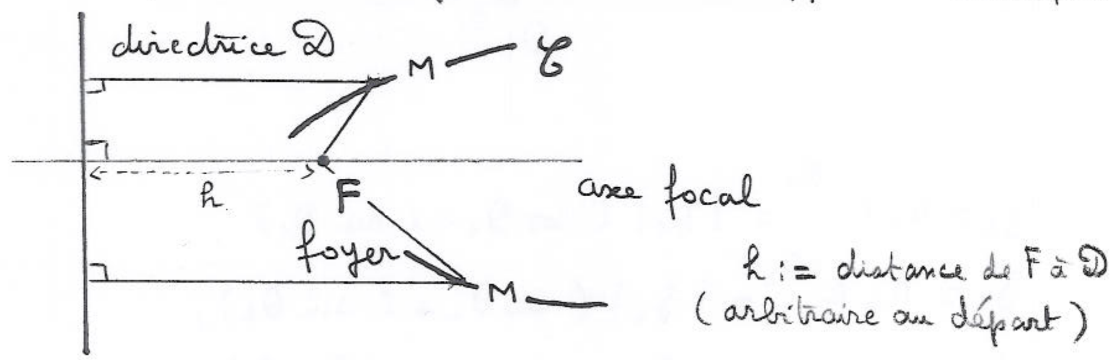
Soit $\mathcal{D}$ une droite, F un point qui n'est pas sur $\mathcal{D}$, et $e > 0$. L'ensemble

$$\mathcal{C} := \{ M \mid MF = e\, d_{\mathcal{D}}(M) \}$$

distance de F à M, soit $\|\overrightarrow{MF}\|$

est appelé ellipse si $e < 1$, parabole si $e = 1$, hyperbole si $e > 1$. F est appelé foyer de $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ directrice associée au foyer F, et e l'excentricité.

La droite passant par F et orthogonale à $\mathcal{D}$ est appelée l'axe focal



1.2 Les ellipses.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'excentricité e (<1), de foyer F et de directrice associée $\mathcal{D}$. Choisissons un repère orthonormé d'origine F dans lequel $\mathcal{D}$ a pour équation $x = -h$ (avec $h > 0$). Alors, $M = (x, y) \in \mathcal{E}$ si et seulement si

$$(MF)^2 = e^2 d^2_{\mathcal{D}}(M), \text{ soit } x^2 + y^2 = e^2 (x + h)^2 ;$$

ou encore

$$x^2(1 - e^2) + y^2 - 2h\, e^2 x - e^2 h^2 = 0.$$

En changeant les coordonnées (x, y) en $\left(X = x - \frac{h e^2}{1 - e^2}, Y = y \right)$, $\mathcal{E}$ a pour équation

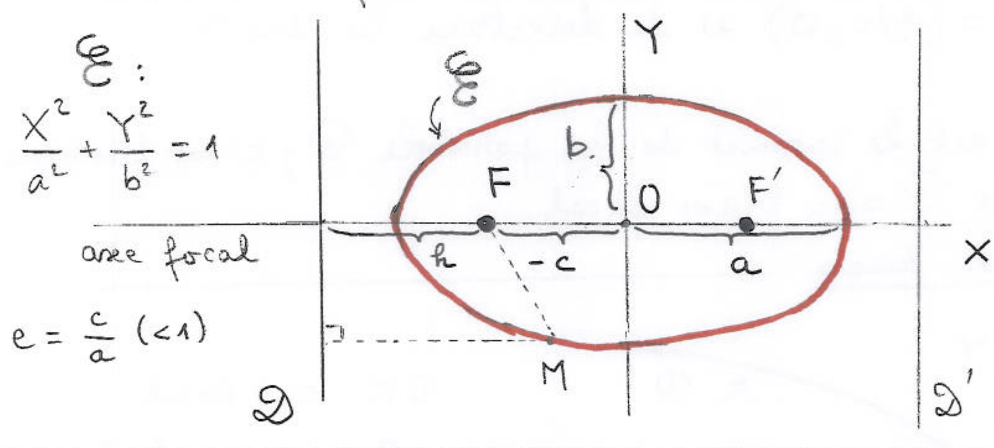
$$X^2 + \frac{Y^2}{1-e^2} = \frac{h^2e^2}{(1-e^2)^2}. \qquad (1)$$

On obtient ainsi une <u>équation réduite de l'ellipse</u> $\mathcal{E}$ dans un repère orthonormé :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 , \qquad (2)$$

avec $a = \frac{eh}{1-e^2}$, $b = a\sqrt{1-e^2}$ $(<a)$. Dans ce repère, le foyer F a pour coordonnées $(-c, 0)$ avec $c = e\,a$.
Réciproquement, si $0 < b < a$, la courbe d'équation cartésienne (2) dans un repère orthonormé (coordonnées notées X et Y) est une ellipse au sens de la définition générale : il suffit de prendre $e > 0$ tel que $1-e^2 = b^2/a^2$ puis $h = (1-e^2)a/e$ pour obtenir l'équation (1).

<u>Résumé sous forme de dessin.</u>



OX : axe focal ou grand axe
a : demi-grand axe
OY : axe non focal ou petit axe
b : demi-petit axe
c : distance focale, de O à F, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Du coup, pour des raisons de symétrie, il existe un autre couple de foyer-directrice, $(F', \mathcal{D}')$, symétrique de $(F, \mathcal{D})$ par rapport à l'origine O.

<u>Paramétrage.</u> L'ellipse d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ peut se paramétrer par :

$$\underline{X = a\cos t}, \ \underline{Y = b\sin t}, \ \underline{-\pi < t \leq \pi}. \qquad (3)$$

Elle peut être vue comme la "déformée" suivant l'un des axes (des X ou des Y) du cercle de centre O et de rayon a, ou bien du cercle de centre O et de rayon b.

Lorsque $a = b \neq 0$, la courbe d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ est le cercle de centre O et de rayon $a = b$. Par convention, et extension de la définition générale, on dira que c'est une ellipse d'excentricité nulle.

1.3 Les paraboles.

Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Choisissons un repère orthonormé d'origine F dans lequel $\mathcal{D}$ a pour équation $x = -p$ ($p = h$ ou $-h$). Alors, $M = (x, y) \in \mathcal{P}$ si et seulement si

$$(MF)^2 = d^2_{\mathcal{D}}(M), \text{ soit } x^2+y^2 = (x+p)^2,$$

ou encore

$$y^2 - 2px - p^2 = 0$$

En changeant les coordonnées (x, y) en $\left(X = x + \frac{p}{2}, Y = y\right)$, on obtient

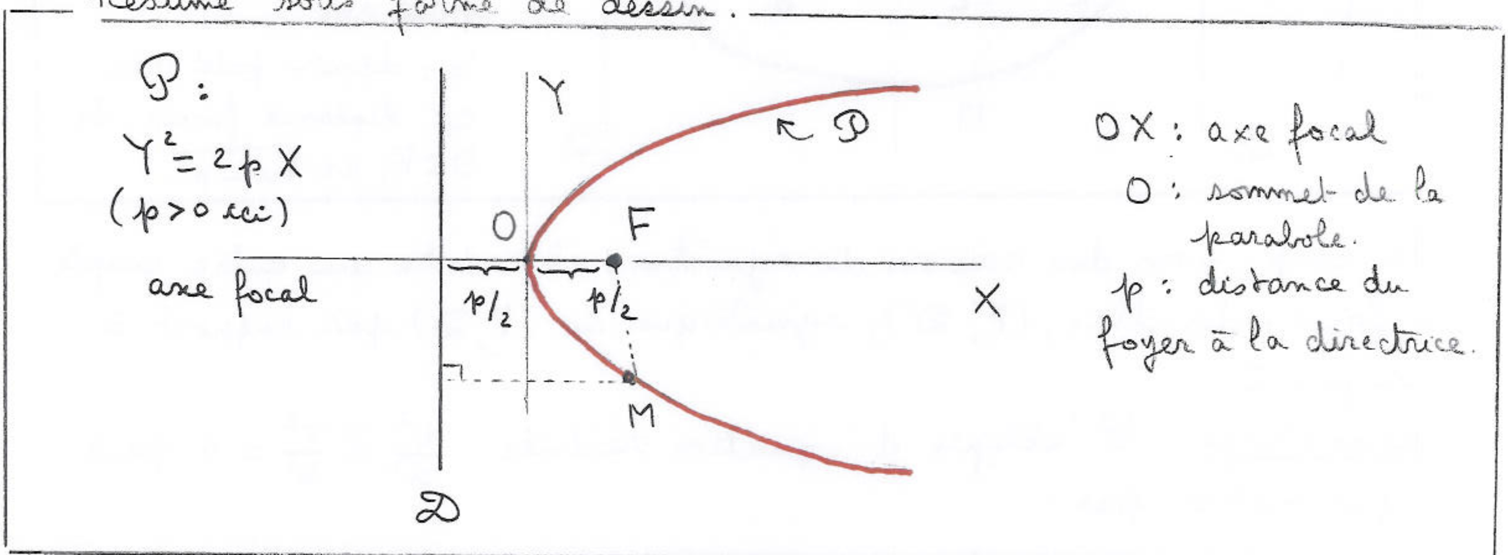
$$Y^2 = 2pX, \qquad (4)$$

appelée <u>équation réduite de</u> $\mathcal{P}$.

Réciproquement, au vu du calcul précédent, si $p \neq 0$, la courbe d'équation cartésienne (4) est une parabole (au sens de la définition générale) de foyer $F = (p/2, 0)$ et de directrice la droite d'équation $X = -p/2$.

L'origine du repère est le sommet de la parabole $\mathcal{P}$; c'est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe focal.

<u>Résumé sous forme de dessin</u>.



<u>Paramétrage</u>. La parabole d'équation réduite $Y^2 = 2pX$ peut se paramétrer par :

$$X = 2pt^2, \quad Y = 2pt, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (5).$$

Comme $\frac{Y}{X} \to 0$ quand $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$, la parabole admet deux branches paraboliques (ouaouh !) de direction asymptotique l'axe des X.

1.4 Les hyperboles.

(et non les "hyperballs" comme je l'ai vu écrit sur des copies ...).
Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'excentricité e (>1), de foyer F et de directrice associée $\mathcal{D}$. De manière semblable à ce qui a été fait pour les ellipses (§ 1.2), une équation de $\mathcal{H}$ dans un repère orthonormé d'origine O est :

$$x^2(e^2-1) - y^2 + 2he^2x + e^2h^2 = 0,$$

où, rappelons-le, h est la distance de F à $\mathcal{D}$.
En changeant les coordonnées (x,y) en $\left(X = x + \frac{he^2}{e^2-1}, Y = h\right)$, une équation de $\mathcal{H}$ s'écrit donc :

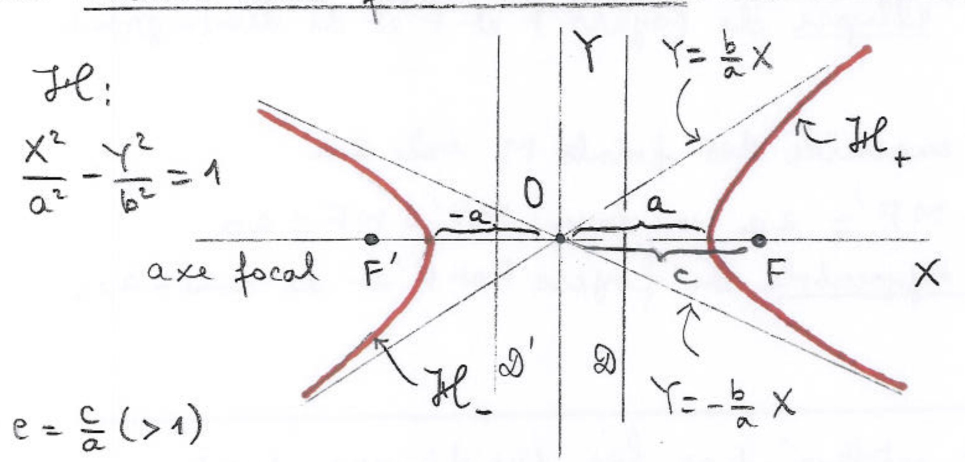
$$X^2 - \frac{Y^2}{e^2-1} = \frac{h^2e^2}{(e^2-1)^2} \qquad (6)$$

(à comparer avec (1), mais ici $e^2-1>0$, tandis que $1-e^2>0$ dans (1)).
On obtient ainsi une <u>équation réduite de l'hyperbole $\mathcal{H}$</u> dans un repère orthonormé :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \qquad (7)$$

avec $a = \dfrac{eh}{e^2-1}$ et $b = a\sqrt{e^2-1}$.
Réciproquement, si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, la courbe d'équation cartésienne (7) dans un repère orthonormé est une hyperbole au sens de la définition générale : il suffit de prendre $e>0$ tel que $e^2-1 = b^2/a^2$ puis $h = (e^2-1)a/e$ pour obtenir l'équation (6).

<u>Résumé sous forme de dessin.</u>



$e = \frac{c}{a}$ (>1)

OX : axe focal ou axe transverse
a : demi-axe focal
OY : axe non focal ou axe non transverse
b : demi-axe non focal
c : distance focale, de O à F, $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Comme pour les ellipses, pour des raisons de symétrie, il existe un autre couple de foyer-directrice, $(F', \mathcal{D}')$, symétrique de $(F, \mathcal{D})$ par rapport à l'origine O.

Paramétrage. L'hyperbole d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ est constituée de 2 branches symétriques par rapport à l'axe des Y, il s'agit de :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{H}_+ \text{, correspondant à } \underline{X>0}\text{, paramétrée en} \\ \qquad \underline{X = a\,\mathrm{ch}\,t,\ Y = b\,\mathrm{sh}\,t,\ t \in \mathbb{R}} \\ \text{et} \quad \mathcal{H}_- \text{, correspondant à } X<0\text{, paramétrée en} \\ \qquad X = -a\,\mathrm{ch}\,t,\ Y = b\,\mathrm{sh}\,t,\ t \in \mathbb{R}. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Chaque branche admet deux droites asymptotes, d'équations respectives $Y = \frac{b}{a} X$ et $Y = -\frac{b}{a} X$. Les deux droites asymptotes sont orthogonales si et seulement si $b = a$; on dit alors que l'hyperbole est équilatère, notons que cela correspond exactement au cas où l'excentricité e vaut $\sqrt{2}$ (d'accord ?).

2. ELLIPSES, HYPERBOLES : définitions à partir des 2 foyers.

Les ellipses et les hyperboles ont un centre de symétrie, 2 foyers et 2 directrices. La proposition suivante montre qu'on peut les définir à l'aide des 2 foyers seuls.

PROPOSITION. Soit F et F' deux points distincts du plan et a un réel >0. On pose $c := \frac{1}{2} FF'$. Alors :

(i) Si $a > c$, l'ensemble des points M tels que

$$MF + MF' = 2a$$

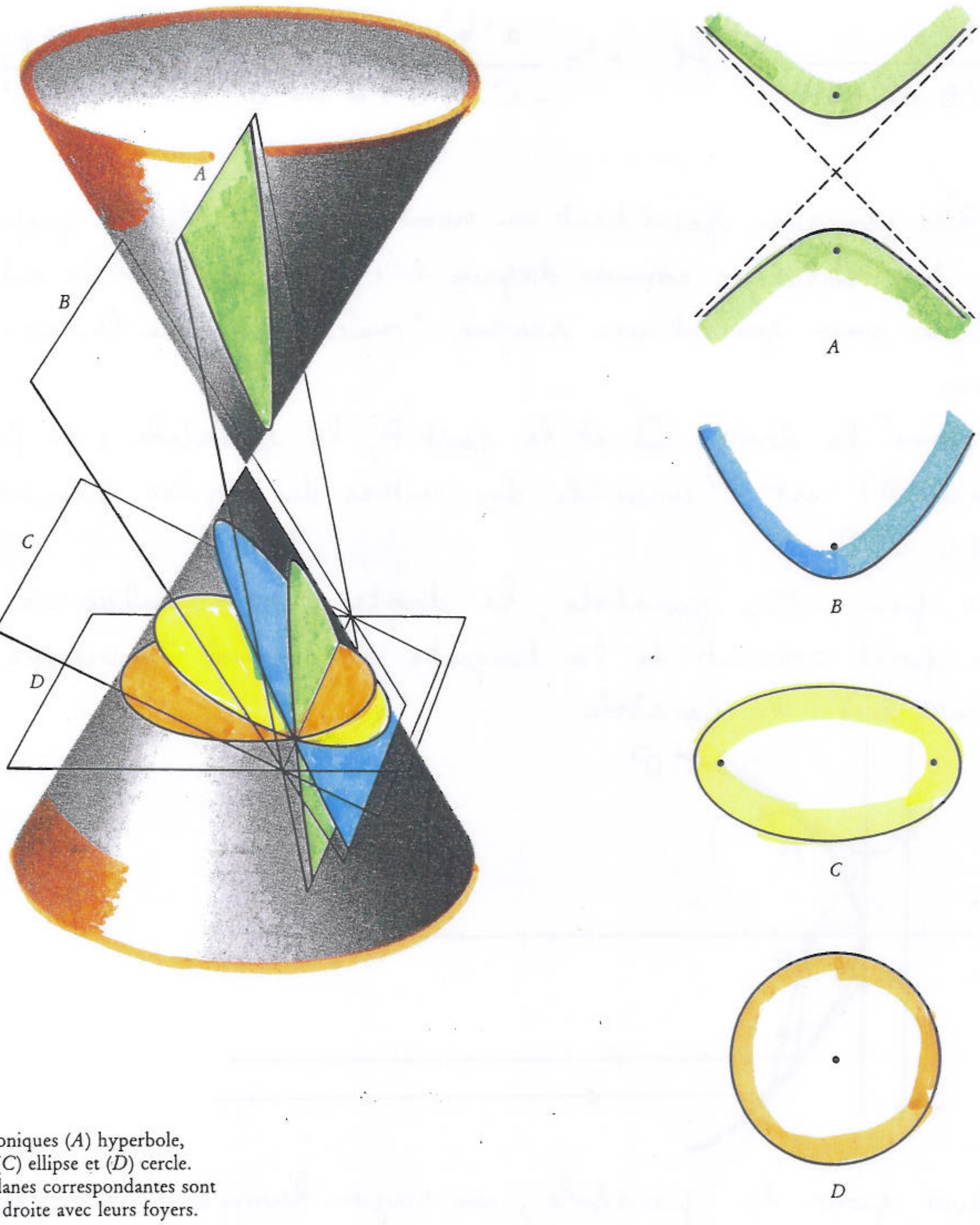
est exactement l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a.

(ii) Si $a < c$, l'ensemble des points M tels que

$$MF - MF' = 2a \quad \text{ou bien} \quad MF' - MF = 2a$$

est exactement l'hyperbole de foyers F et F' et de demi-axe focal a.

Le résultat (i) est utilisé par les jardiniers pour tracer des ellipses ; vous voyez comment ? On comprend pourquoi on doit avoir $a > c$ (i.e., $2a > 2c$)...



Les sections coniques (*A*) hyperbole, (*B*) parabole, (*C*) ellipse et (*D*) cercle. Les courbes planes correspondantes sont représentées à droite avec leurs foyers.

<u>Exercice 1.</u> – Quelle est l'équation polaire de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?

– Même question pour l'hyperbole $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ et la parabole $\mathcal{P}$: $y^2=2px$

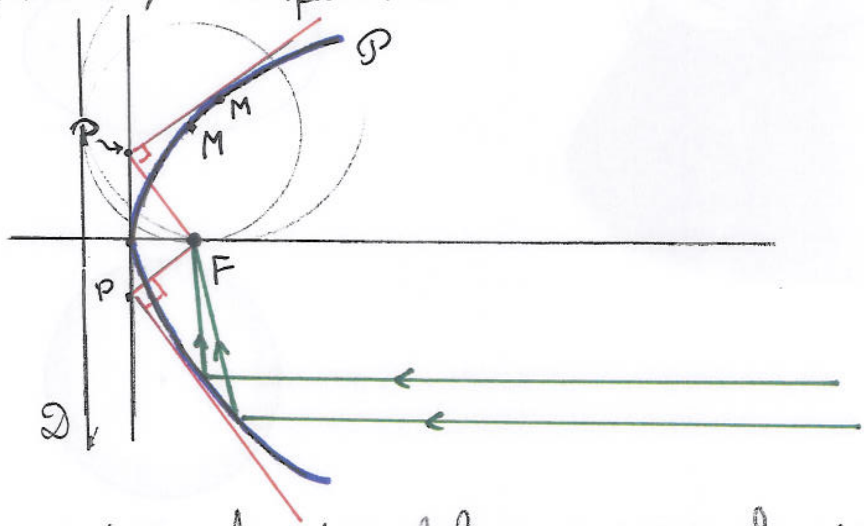
(<u>Rép.</u>

$\mathcal{E}$: $r^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$; $\mathcal{H}$: $r^2=\dfrac{a^2b^2}{-a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$; $\mathcal{P}$: $r^2=\dfrac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$, $\theta\neq($

<u>Exercice 2.</u> Les coniques possèdent un nombre incroyable de propriétés géométriques... dont certaines connues depuis l'époque de la Grèce antique. En voici quelques unes qui ont une saveur "mécanique", au lecteur-étudiant de les vérifier.

1°) • Etant donné la droite $\mathcal{D}$ et le point F, la parabole (de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$) est l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangentes à $\mathcal{D}$.

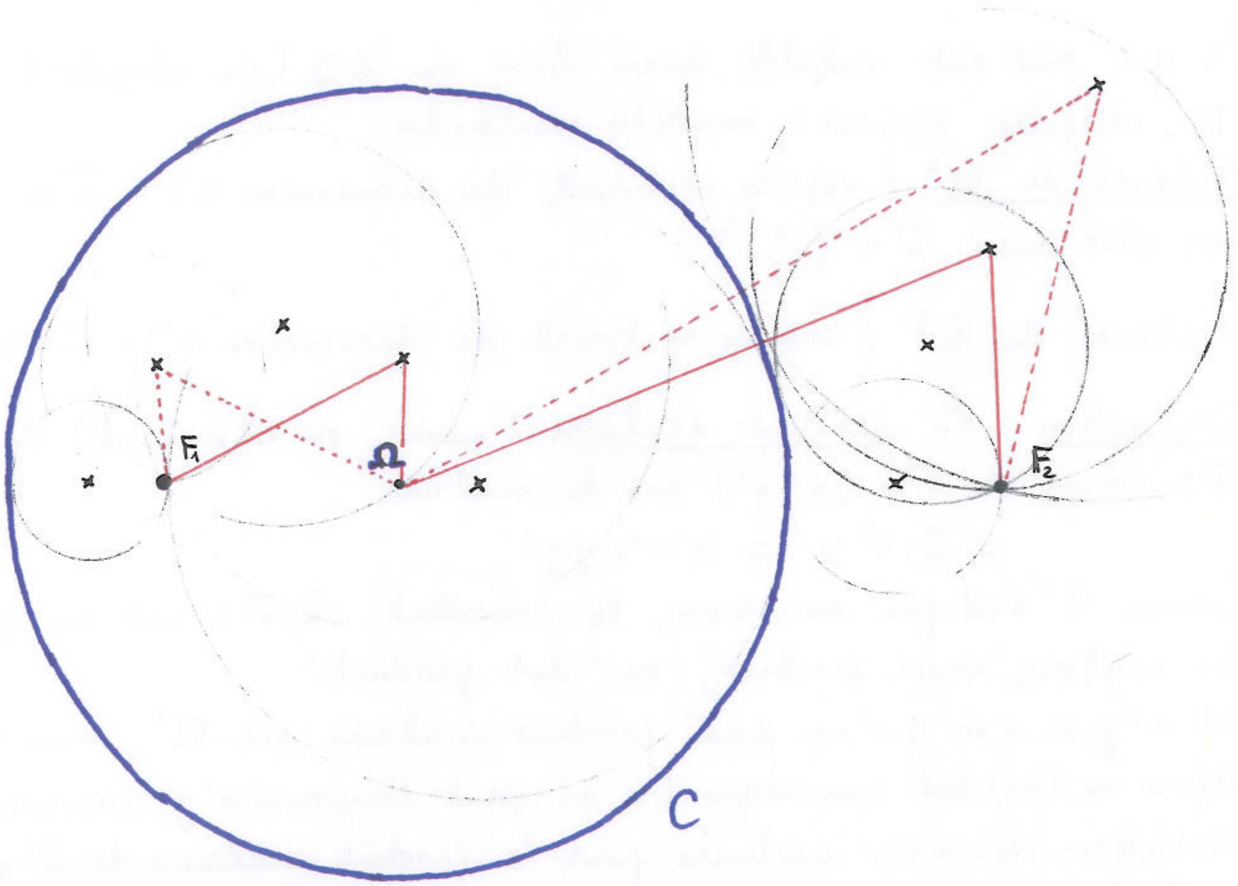
• Toujours pour cette parabole, la droite perpendiculaire à FP, où P est un point courant de la tangente au sommet "enveloppe" (i.e. est tangente à) la parabole.



• Toujours pour la parabole, un rayon lumineux "arrivant de l'infini" se reflèchit sur (l'intérieur de) la parabole pour converger vers le foyer F. Application : le four solaire d'ODEILLO (P.O.)

2°) Etant donné une ellipse de foyers F et F', un rayon lumineux issu de F se réfléchit sur (l'intérieur de) l'ellipse pour converger vers l'autre foyer F'!

Exercice 3.



Etant donné le cercle C de centre Ω et de rayon $2a$, un point F_1 tel que $\Omega F_1 = 2c$, avec $c < a$, déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par Ω et tangents à C (marqués × sur la figure au-dessus).
Même question avec F_2 tel que $\Omega F_2 = 2c$, $c > a$ cette fois.
(Ind. Penser à la définition d'une ellipse et d'une branche d'hyperbole à l'aide des 2 foyers).

ANNEXE. PRODUITS SCALAIRES.

Ce qui suit est valable aussi bien en 2D (ce chapitre) qu'en 3D (chapitre suivant), mutatis mutandis.

- Vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (espace vectoriel de dimension 2) : $\vec{u} = (x, y)$ (on écrit aussi $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$).

  Vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (espace vectoriel de dimension 3) : $\vec{u} = (x, y, z)$.

- Définition. Le produit scalaire (usuel, ou standard) des vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ est le scalaire

$$< \vec{u}, \vec{v} > := x x' + y y'. \qquad (a1)$$

Comme l'indique son nom, le résultat $<\vec{u}, \vec{v}>$ est un scalaire.
En anglais, "inner product", ou "dot product".
Il n'y a pas qu'un seul produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, mais celui défini en (a1) est canonique (= on peut toujours s'y ramener).
Notations diverses utilisées pour le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$<\vec{u}, \vec{v}>$, $<\vec{u} | \vec{v}>$, $(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$

- Base orthonormée. Une base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$ (il n'y a pas que la base canonique $\{(1,0), (0,1)\}$ dans $\mathbb{R}^2$!) est dite orthonormée lorsque

$$\begin{cases} \|\vec{e_1}\| := \sqrt{<\vec{e_1}, \vec{e_1}>} = 1 , \quad \|\vec{e_2}\| = 1, \\ <\vec{e_1}, \vec{e_2}> = 0. \end{cases}$$

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'expriment dans la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ sous la forme $\vec{u} = x_1 \vec{e_1} + y_1 \vec{e_2}$, $\vec{v} = x'_1 \vec{e_1} + y'_1 \vec{e_2}$, et que $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est orthonormée, alors $<\vec{u}, \vec{v}> = x_1 x'_1 + y_1 y'_1$ (comme en (a1)).

- Propriétés du produit scalaire.

  * $\vec{u} \longmapsto <\vec{u}, \vec{v}>$ est linéaire pour tout $\vec{v}$,
  $\vec{v} \longmapsto <\vec{u}, \vec{v}>$ est linéaire pour tout $\vec{u}$;
  on dit que la forme $<\cdot, \cdot>$ est bilinéaire.

  * $<\vec{u}, \vec{v}> = <\vec{v}, \vec{u}>$ pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
  on dit que la forme $<\cdot, \cdot>$ est symétrique.

* $<\vec{u},\vec{u}> \geq 0$ pour tout $\vec{u}$, et $<\vec{u},\vec{u}> = 0$ si et seulement si $\vec{u} = 0$; on dit que la forme $<\cdot,\cdot>$ est <u>définie positive</u>.

- A partir de $<\cdot,\cdot>$ est définie la <u>norme</u> (ou <u>longueur</u>) <u>euclidienne</u> usuelle

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{<\vec{u},\vec{u}>} \qquad \left(= \sqrt{x^2+y^2} \text{ si } \vec{u} = (x,y)\right).$$

Règle de calcul très utile :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2<\vec{u},\vec{v}> \tag{a2}$$

(pour s'en souvenir, penser au développement de $(a+b)^2$).

- <u>Inégalité fondamentale de CAUCHY-BOUNIAKOVSKI-SCHWARZ</u> (ou, simplement, inégalité de SCHWARZ) :

$$|<\vec{u},\vec{v}>| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \tag{a3}$$

(ou, si l'on préfère,

$$-\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \leq <\vec{u},\vec{v}> \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \;)$$

pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$. L'égalité n'a lieu en (a3) que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- Une première conséquence concerne la norme $\|.\|$: elle vérifie l'<u>inégalité (dite) triangulaire</u> :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \tag{a4}$$

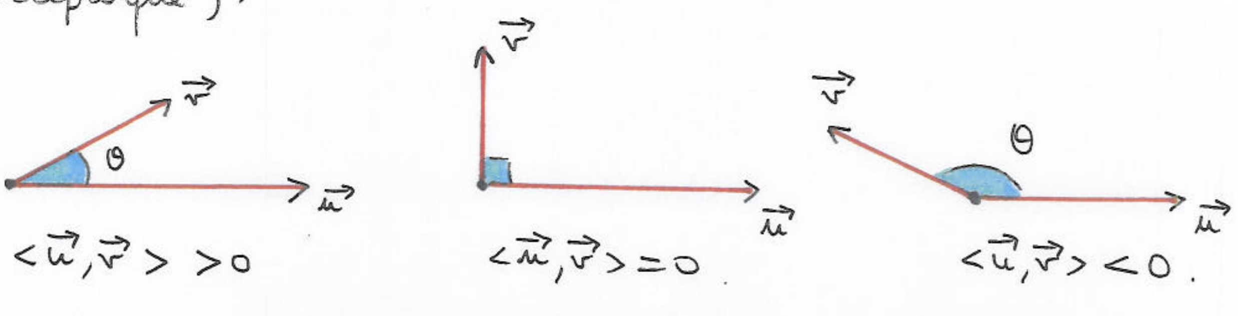
pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$.

Une autre conséquence en est la définition d'<u>angle</u> (ou d'<u>écart angulaire</u>) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, lorsque ceux-ci ne sont pas nuls.

Puisque $<\vec{u},\vec{v}> / \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ est compris entre -1 et $+1$, il existe un et un seul <u>$\theta \in [0,\pi]$</u> tel que $<\vec{u},\vec{v}> / \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| = \cos\theta$; c'est

$$\theta = \operatorname{Arccos} \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}. \tag{a5}$$

(Se rappeler que la fonction cos est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,+1]$; la fonction Arccos n'est autre que sa bijection inverse (ou réciproque).



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits <u>orthogonaux</u> lorsque $<\vec{u}, \vec{v}> = 0$, c'est-à-dire lorsque l'angle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\pi/2$.
Avec la définition de θ donnée,

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos\theta . \qquad (a6)$$

Ainsi, pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de normes (= longueurs) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ données, le produit scalaire est maximal (= le plus positif possible) lorsque $\theta = 0$, et il est minimal (= le plus négatif possible) lorsque $\theta = \pi$.

- <u>Un exemple d'illustration physique</u>.
  Imaginons une péniche sur le Canal du Midi contraint de se déplacer le long de l'axe Δ. A partir du sentier de halage on tire avec une force $\vec{f}$. On comprend que ce qui est pertinent pour faire avancer la péniche n'est pas $\vec{f}$ mais la projection de $\vec{f}$ sur l'axe Δ, soit $\vec{f} \cos\theta$: l'efficacité serait maximale si $\vec{f}$ et $\vec{v}$ (vecteur dirigeant l'axe Δ) étaient colinéaires et de même sens ($\theta = 0$) ; elle serait nulle si $\vec{f}$ et $\vec{v}$ étaient orthogonaux ($\theta = \pi/2$) ; enfin l'action de $\vec{f}$ s'opposerait à l'avancée de la péniche si $\theta > \pi/2$ (opposition maximale si $\vec{f}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire ($\theta = \pi$)).