

Chap. V.

- INTÉGRALES DOUBLES : TECHNIQUES DE CALCUL
- RELATIONS ENTRE INTÉGRALES DOUBLES ET INTÉGRALES CURVILIGNES : THÉORÈME DE G. GREEN

1. Intégrales doubles : techniques de calcul.

1.0 Introduction.

1.1 Définition succincte de l'intégrale de f sur R .

1.2 Quelques propriétés élémentaires (et attendues) de l'intégrale.

1.3 Procédés de calcul d'intégrales doubles.

1.3.1 Intégration par couches (successives).

1.3.2 Intégration par changement de variables.

2. Relations entre intégrales doubles et intégrales curvilignes : le théorème de G. GREEN.

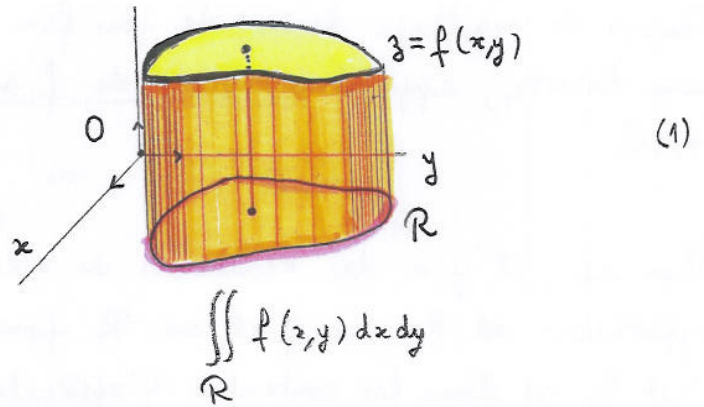
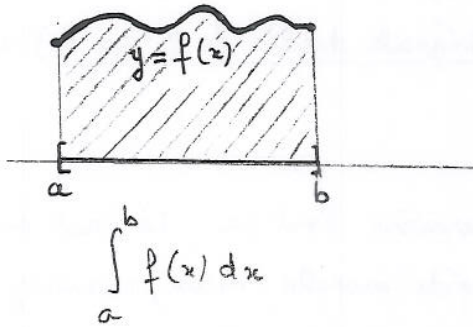
"L'incroyable utilité des mathématiques dans les sciences de la nature touche au mystère ; on n'en connaît aucune explication rationnelle."

E.P. WIGNER (en 1968)

1. INTÉGRALES DOUBLES : TECHNIQUES DE CALCUL.

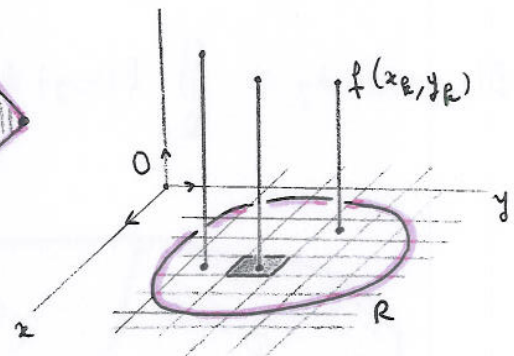
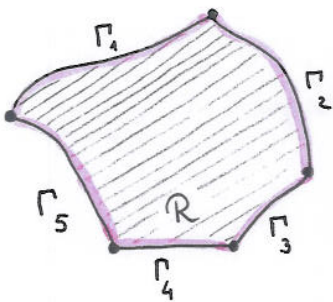
1.0 Introduction.

Comme dans le cas des fonctions d'une seule variable $x \in [a, b] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ où a été définie l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ et où ont été étudiées les règles de calcul correspondantes, il nous incombe le travail de définir l'intégrale d'une fonction de deux variables $(x, y) \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ et de lister les différentes manières de la calculer.



Nous ne passerons pas de temps sur la (ou les) manières de définir convenablement "l'intégrale de f sur R ", mais plus sur les techniques de calcul de ces intégrales.

Dans les exemples d'application qui seront les vôtres : R sera une partie fermée bornée (*) de \mathbb{R}^2 , dont la frontière (= le bord) sera constituée d'un nombre fini de courbes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ du type de celles vues au chapitre précédent ; f sera une fonction continue (au moins) sur R .



(*) R est dite fermée si elle contient toutes les limites de suites convergentes de R , i.e. : $((P_n) \subset R, \text{ et } P_n \rightarrow P) \Rightarrow (P \in R)$. Bref, le bord de R fait partie de R .
 R est dite bornée s'il existe M tel que : $\forall P \in R, \|\vec{OP}\| \leq M$. Bref, R est contenue dans une boule $B(0, M)$.

1. Définition succincte de l'intégrale de f sur R .

On procède à un "maillage" de R en petits rectangles A_k en tirant des parallèles aux axes Ox et Oy ; on donne des numéros $1 \text{ à } N$ à ces rectangles; dans chacun de ces rectangles A_k on choisit un point (x_k, y_k) ; on forme la somme

$$I_N := \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k) \Delta A_k, \quad (2)$$

où ΔA_k est l'aire du rectangle A_k . Ainsi, I_N représente le volume d'une succession de petits buildings de base A_k et de hauteur $f(x_k, y_k)$.

Quand le maillage devient de plus fin (donc $N \rightarrow +\infty$), la somme I_N de (2) a une limite, appelée intégrale de f sur R (ou intégrale double de f sur R) et notée

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x, y) dA. \quad (3)$$

Bien sûr, il y a des résultats de mathématiques derrière tout ça; il faut des hypothèses ad hoc sur f et sur R pour que ce procédé marche, mais, rassurez-vous, c'est le cas dans les contextes d'applications qui vous seront proposées.

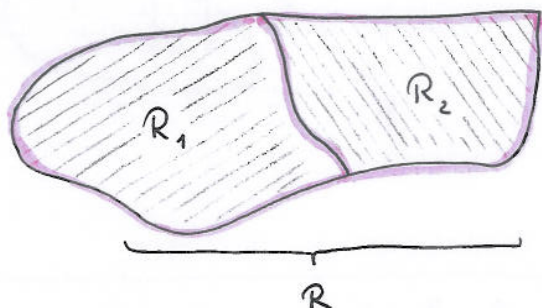
$I = \iint_R f(x, y) dx dy$ est, comme on s'y attendait, le volume du solide de base R et de toiture le graphe de f ; revoir les figures de (1).

2. Quelques propriétés élémentaires (et attendues) de l'intégrale.

$$\iint_R (kf)(x, y) dx dy = k \iint_R f(x, y) dx dy \quad (k \in \mathbb{R});$$

$$\iint_R (f+g)(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy;$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy \quad \text{lorsque}$$



Mais l'essentiel reste à faire, ce sont les procédés de calcul des intégrales doubles.

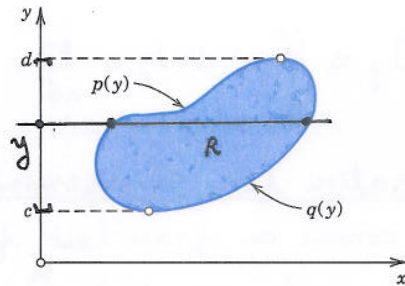
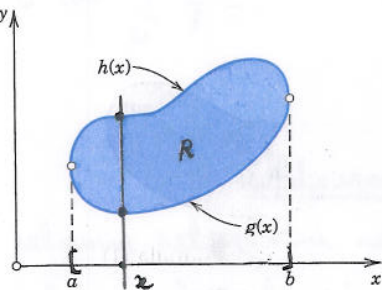
1.3 Procédés de calcul d'intégrales doubles.

1.3.1 Intégration par couches (successives).

Des dessins sont plus explicites que de longs discours... Voyons le premier cas ci-dessous. Pour balayer $R \subset \mathbb{R}^2$ délimitée par a et b (en x) et par $g(x)$ et $h(x)$ (en y), et intégrer f sur R , on procède en deux étapes : on intègre f comme fonction de y (seule) entre $g(x)$ et $h(x)$ [c'est la 1^{ère} couche], puis on intègre le résultat (qui est une fonction de x) entre a et b [c'est la 2^{ème} couche].

Un théorème de mathématiques (de FUBINI) nous assure que le résultat ainsi obtenu est $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy$.

On peut aussi inverser les étapes : intégrer d'abord f comme fonction de x (seule) entre $p(y)$ et $q(y)$.



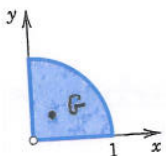
$$\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy;$$

(4)

Exemple 1. Centre de gravité; moments d'inertie.

Soit R une plaque définie par $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ (= un quart de disque). On suppose que la densité de masse sur R est $f(x, y) = 1$ partout. Déterminons le centre de gravité et les moments d'inertie par rapport aux axes Ox et Oy .



$$G = (\bar{x}, \bar{y})$$

• Masse totale de la plaque: $M = \iint_{\mathbb{R}} 1 \cdot dx dy$.

D'où
$$M = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \cdot dy \right] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \text{ (bien sûr...)}$$

• Coordonnées du centre de gravité (avec f comme densité de distribution de masse sur R):

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_{\mathbb{R}} x f(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_{\mathbb{R}} y f(x, y) dx dy.$$

Dans le cas présent,

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi} \iint_{\mathcal{R}} x \, dx \, dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right] dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{4}{\pi} \int_1^0 u^2 \, du = \frac{4}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{4}{\pi} \iint_{\mathcal{R}} y \, dx \, dy = \dots = \frac{4}{3\pi} \quad (\text{que l'on pourrait subodorer pour des raisons de symétrie}).$$

o Moments d'inertie.

$$I_x = \iint_{\mathcal{R}} y^2 f(x,y) \, dx \, dy \quad (\text{par rapport à l'axe } Ox),$$

$$I_y = \iint_{\mathcal{R}} x^2 f(x,y) \, dx \, dy \quad (\text{par rapport à l'axe } Oy).$$

$$\begin{aligned} \text{Ici, } I_x &= \iint_{\mathcal{R}} y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \, dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3 \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

$$\text{De même, } I_y = \iint_{\mathcal{R}} x^2 \, dx \, dy = \frac{\pi}{16}.$$

1.3.2 Intégration par changement de variables.

Rappelons comme on procédait pour les intégrales simples (= intégrales de fonctions d'une seule variable). En gros, "x changée en u" induit :

$x = \varphi(u)$; $x \in [a,b]$ devient $u \in [\alpha, \beta]$, $dx = \varphi'(u) du$, et

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(u)] \varphi'(u) \, du \tag{5}$$

(intégration en x) (intégration en u).

Voici un procédé similaire pour les intégrales doubles: "x et y sont changées en u et v", c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}; (x,y) \in \mathcal{R} \text{ devient } (u,v) \in \Delta;$$

$$dx \, dy = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du \, dv \tag{6}$$

← valeur absolue du déterminant jacobien de la transformation $(u,v) \mapsto \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$;

d'où

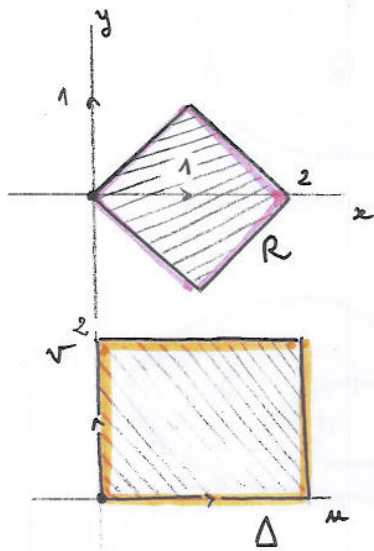
$$\boxed{\iint_{\mathcal{R}} f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f[\varphi(u,v), \psi(u,v)] \cdot \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du \, dv.} \tag{7}$$

Ce qui peut être délicat dans cette technique :

- déterminer Δ : la transformation $(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{pmatrix}$ est bijective (un point pour un point), sauf peut-être sur des morceaux du bord de Δ (et de \mathbb{R}) qu'on pourra négliger car ça n'affecte pas le résultat de l'intégration. Connaissant \mathbb{R} (qui est le domaine d'intégration proposé), il peut y avoir du travail à déterminer Δ ...

- ne pas oublier de changer $dx dy$ en $\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du dv$ (changement des "éléments différentiels").

Exemple 2. Calculer $\iint_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2) dx dy$, où \mathbb{R} est décrit au-dessous.



Changement de variables suggéré : $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

De ce fait, Δ devient $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2 \text{ et } 0 \leq v \leq 2\}$ (à vérifier s.v.p.!)
et

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad d'où \left\| \dots \right\| = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\iint_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{\Delta} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \cdot \frac{1}{2} du dv \quad \left(\begin{array}{l} \text{qui est beaucoup plus simple} \\ \text{à calculer} \end{array} \right)$$

$$= \frac{8}{3} \quad (\text{après quelques calculs}).$$

Exemple 3. Intégrales doubles en coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (r > 0) \quad \text{Nouvelles variables : } r \text{ et } \theta, \quad \begin{cases} x = \varphi(r, \theta) \\ y = \psi(r, \theta) \end{cases}$$

Ici

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad d'où \left\| \dots \right\| = r \quad (r_i, r_i!)$$

Ainsi

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (8)$$

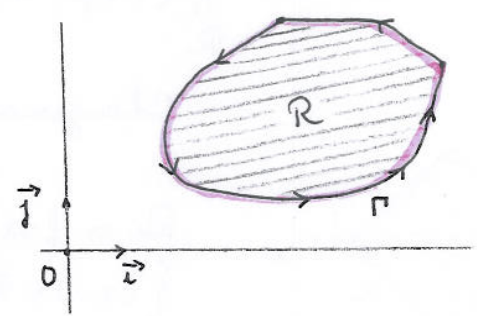
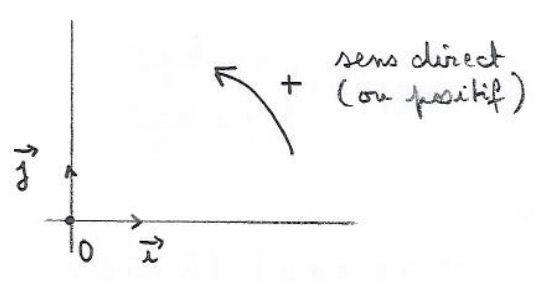
domaine d'intégration en (r, θ) à déterminer

↑ attention à ne pas l'oublier.

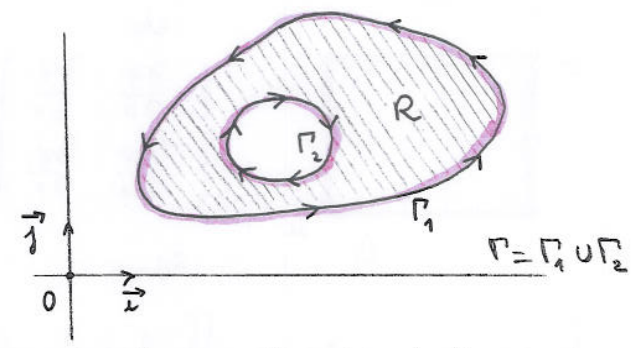
2. RELATIONS ENTRE INTÉGRALES DOUBLES ET INTÉGRALES CURVILIGNES : LE THÉORÈME DE G. GREEN.

Des intégrales doubles sur \mathbb{R} peuvent être transformées en intégrales curvilignes sur la courbe Γ bord de \mathbb{R} , et réciproquement. On comprend l'intérêt de ce genre de résultat : remplacer le calcul de l'un par celui de l'autre (espéré plus simple).

→ \mathbb{R} est comme cela a été précisé en p. 2 en bas. Sens de parcours de la frontière (= bord) Γ de \mathbb{R} : sens direct (ou positif), celui qui laisse \mathbb{R} à gauche (en parcourant Γ).



Dans le cas où Γ est constituée de deux parties Γ_1 et Γ_2 comme ci-contre, Γ_1 est parcourue dans le sens positif et Γ_2 dans le sens négatif



→ $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est une fonction vectorielle (champ de vecteurs) de classe C^1 sur un ouvert Ω contenant le domaine d'intégration \mathbb{R} .

THÉORÈME 4 (G. GREEN) Sous les hypothèses (concernant f et Γ) énoncées au-dessus, on a :

$$\oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, \vec{d\gamma} \rangle = \iint_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \tag{9}$$

||

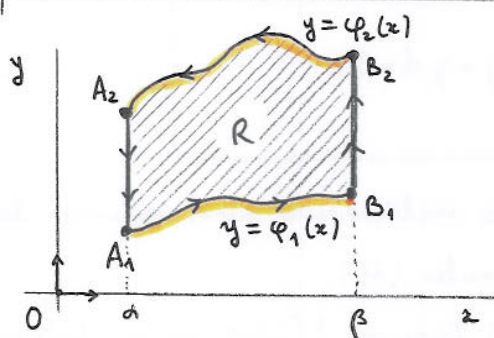
$$\left(\oint_{\Gamma} P dx + Q dy \right)$$

Ce résultat est aussi appelé, parfois : théorème de GREEN-RIEMANN, ou théorème de GREEN-OSTROGRADSKY.

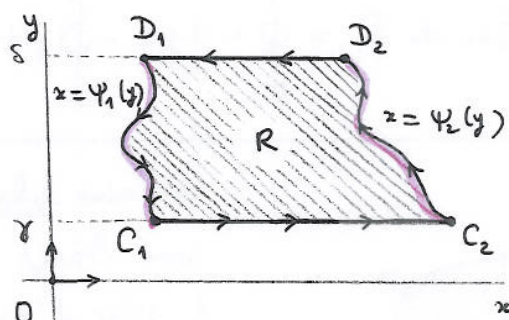
On reconnaît en $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ le rotationnel de $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, même si c'est un peu tiré par les cheveux car \vec{F} est un champ de \mathbb{R}^2 (et non de \mathbb{R}^3).

Si $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel, c'est que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (cf. Chap. IV, p. 12), auquel cas on retrouve que $\oint_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = 0$ (cf. Chap. IV, p. 10).

Esquisse de la démonstration de (9) dans les deux cas particuliers suivants :



(Cas 1)



(Cas 2)

On a dans le cas 1 : $\int_{\Gamma} P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$, (10)

et dans le cas 2 : $\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy$ (qui n'est autre que la

version symétrique de (9)). Démontrons la formule (10).

On a en effet :

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^\beta \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right] dx \quad (\text{cf. (4) de p. 4}) \\ &= \int_a^\beta \left[P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \right] dx \quad (\text{on est d'accord ?}) \\ &= - \int_{B_2 A_2} P(x, y) dx - \int_{A_1 B_1} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\int_{B_1 B_2} P(x, y) dx = 0, \quad \int_{A_2 A_1} P(x, y) dx = 0 \quad (\text{on est d'accord ?})$$

D'où finalement,

$$\int_{A_1 B_1 B_2 A_2 A_1} P(x, y) dx = \int_{B_2 A_2} P(x, y) dx + \int_{A_1 B_1} P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy. \quad \blacksquare$$

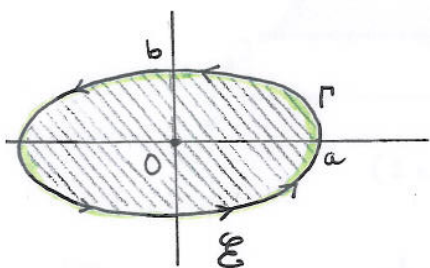
Exemple 5. Aire de R délimitée par Γ .

Pour calculer l'aire de R , qui vaut $\iint_R 1 \, dx \, dy$, à l'aide de la formule de GREEN, il suffit de trouver $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ vérifiant $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. On peut prendre par exemple

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y/2 \\ x/2 \end{pmatrix}.$$

Cela conduit à :

$$\text{Aire de } R = \oint_{\Gamma} x \, dy = - \oint_{\Gamma} y \, dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x \, dy - y \, dx). \quad (11)$$



Certains planimètres (= instruments pour mesurer des aires) sont basés sur les formules (11).

À titre d'exemple, (re-) trouvons l'aire de R délimitée par l'ellipse Γ , laquelle est paramétrée en $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. On a :

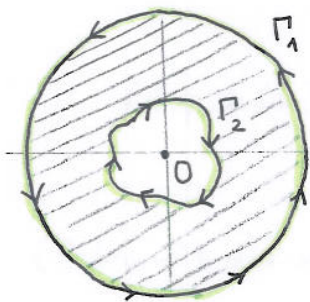
$$\text{Aire de } R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a b (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \pi a b.$$

Exemple 6 (Exemple 11 du Chap. précédent).

Soit

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Déterminons $\oint \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle$ lorsque Γ_2 est orienté comme indiqué sur la figure.



$$\text{On a : } \oint_{\Gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle + \int_{\Gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (\text{formule de GREEN})$$

$$= 0 \text{ ici.}$$

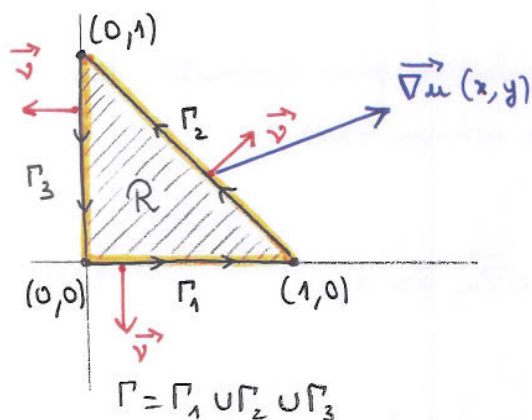
$$\text{Or } \oint_{\Gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = 2\pi \quad (\text{p. 11 du Chap. précédent}). \text{ Donc } \oint_{\Gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle = -2\pi.$$

Exemple 7 Soit R le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Soit

$$u : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(x,y) := e^{x+y}$$

• Calculons $\iint_R \Delta u(x,y) \, dx \, dy$, où Δu désigne comme d'habitude le

$$\text{laplacien de } u \quad (\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}).$$



On a $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1-x\}$, et donc

$$\begin{aligned} \iint_R \Delta u(x,y) dx dy &= \iint_R e^x dx dy \quad (\text{car } \Delta u(x,y) = e^x) \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} e^x dy \right] dx = \int_0^1 (1-x) e^x dx = e-2. \end{aligned}$$

• Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ le vecteur unitaire normal à Γ dirigé vers l'extérieur de R (et défini partout sauf aux trois points anguleux de Γ). On parcourt Γ dans le sens positif, celui qui laisse R à gauche (donc Γ_1, Γ_2 et Γ_3 successivement). Calculons l'intégrale de la fonction numérique $f(x,y) := \langle \vec{\nabla} u(x,y), \vec{v}(x,y) \rangle$ le long de la courbe Γ (cf. définition au § 2.1 du chap. précédent).

→ Paramétrisation de Γ_1 : $\vec{\gamma}(t) = (t, 0)$ avec $t \in [0, 1]$, d'où $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$.

" de Γ_2 : $\vec{\gamma}(t) = (1-t, t)$ avec $t \in [0, 1]$, d'où $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{2}$

" de Γ_3 : $\vec{\gamma}(t) = (0, 1-t)$ avec $t \in [0, 1]$, d'où $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$

→ Vecteurs unitaires normaux (extérieurs) en des points de Γ :

En des points de Γ_1 , $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

" Γ_2 , $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

" Γ_3 , $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{\nabla} u(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ 1 \end{pmatrix}$, les intégrales de $f = \langle \vec{\nabla} u, \vec{v} \rangle$ le long des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ devient

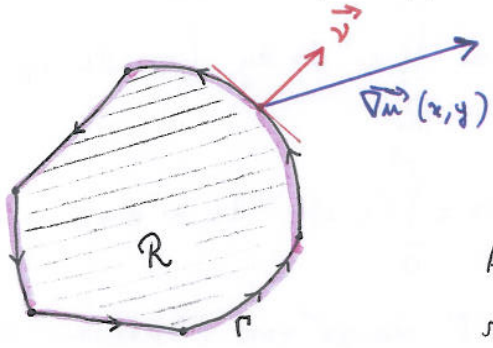
$$\int_{\Gamma_1} f d\gamma = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot 1 dt = -1,$$

$$\int_{\Gamma_2} f d\gamma = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} e^{1-t} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \sqrt{2} dt = \int_0^1 (e^{1-t} + 1) dt = e,$$

$$\int_{\Gamma_3} f d\gamma = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot 1 dt = -1.$$

En définitive, $\int_{\Gamma} f d\gamma = \int_{\Gamma} \langle \vec{\nabla} u, \vec{v} \rangle d\gamma = e-2$.

Ceci est une illustration (sur un exemple) d'une relation plus générale, dite identité de GREEN, qui affirme (avec des R , Γ et u convenables) :



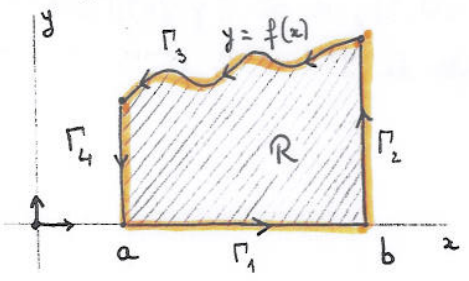
$$\iint_R \Delta u \, dx \, dy = \int_{\Gamma} \langle \vec{\nabla} u, \vec{\nu} \rangle \, dy. \tag{12}$$

A peine un peu plus général serait la relation

$$\iint_R \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy = \int_{\Gamma} \langle \vec{F}, \vec{\nu} \rangle \, dy \tag{13}$$

(toujours une identité de GREEN) qui, dans le cas particulier où \vec{F} est un champ de gradients ($\vec{F} = \vec{\nabla} u$ pour une certaine fonction u), redonne (12) (tout simplement parce que, souvenons-nous, $\operatorname{div}(\vec{\nabla} u) = \Delta u$).

Exemple 8.



Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ positive et continue sur $[a, b]$. Voyons ce que donne la formule de GREEN dans le cas où R est comme ci-contre, Γ son bord orienté (constitué de quatre morceaux différents $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$) et $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$ (comme pour la deuxième formule de (11)).

Alors,

$$\text{aire de } R = - \oint_{\Gamma} y \, dx = \int_{\Gamma_1} \cdot + \int_{\Gamma_2} \cdot + \int_{\Gamma_3} \cdot + \int_{\Gamma_4} \cdot$$

Sur Γ_1 , $y = 0$, d'où $\int_{\Gamma_1} y \, dx = 0$. Sur Γ_2 et Γ_4 (segments verticaux), $x = c \pm \frac{0}{2}$

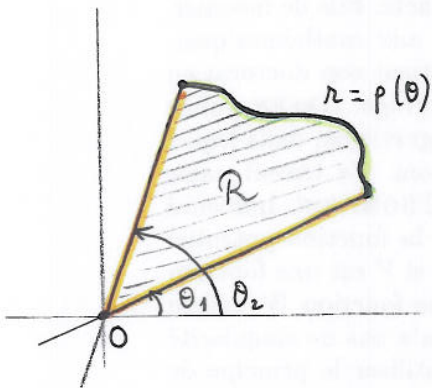
d'où $dx = 0$; par suite $\int_{\Gamma_2} \cdot = 0$ et $\int_{\Gamma_4} \cdot = 0$.

Il reste $-\int_{\Gamma_3} y \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$. En définitive,

$$\text{aire de } R = \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{résultat bien connu}). \tag{14}$$

• Exercices supplémentaires.

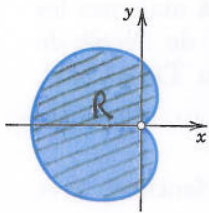
Exercice 9 Aire en coordonnées polaires.



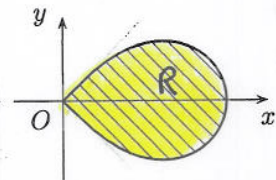
1^o) Vérifier que l'aire de R délimitée par la courbe d'équation polaire $r = p(\theta)$ et les deux droites d'équations polaires $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$ (zone hachurée ci-contre) est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p^2(\theta) d\theta. \quad (15)$$

2^o) Illustrations de (15).



• Aire de la cardioïde (= en forme de cœur) d'équation $r = a(1 - \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.



• Aire d'une boucle de la lemniscate de BERNOULLI d'équation polaire $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Réponses.

$$1^{\circ}) \quad A = \iint_R 1 \, dx \, dy = \iint_{\Delta} 1 \, r \, dr \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_0^{p(\theta)} r \, dr \right] d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p^2(\theta)}{2} d\theta.$$

car Δ (correspondant à R) est $[\theta_1, \theta_2] \times [0, p(\theta)]$

$$2^{\circ}) \quad \bullet \quad A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2$$

$$\bullet \quad A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}.$$

• "Vignettes" historiques.

GREEN George

Nottingham 1793 – Nottingham 1841

Le mathématicien anglais George GREEN est un autodidacte. Fils de meunier, il apprend le métier de boulanger et s'initie tout seul aux mathématiques. En 1833, il est admis à l'université de Cambridge. Il obtient son doctorat en 1837 et devient alors membre du Caius College à Cambridge. GREEN publie en 1828 un ouvrage peu diffusé sur l'électricité et le magnétisme, dans lequel est démontré le théorème qui porte maintenant son nom. Ce travail passe inaperçu avant d'être redécouvert en 1846 par William THOMPSON. Influencé par POISSON, George GREEN développe l'utilisation de la fonction potentiel en électricité et en magnétisme. Il démontre en 1833 que si V est une fonction définie sur la frontière d'un volume, il existe une unique fonction W définie sur ce volume, qui vérifie $\Delta W = 0$ sur tout le volume, n'a pas de singularité et prolonge V . Pour le démontrer, il est le premier à utiliser le principe de Dirichlet. George GREEN est le premier mathématicien anglais à maîtriser les outils d'analyse élaborés sur le continent et il est le pionnier de l'école de physique mathématique de Cambridge qui comprendra William THOMPSON, Gabriel STOKES, John RAYLEIGH et Clerk MAXWELL.

Théorème de Green-Riemann

Etant donné un compact K du plan, de frontière orientée Γ , si les fonctions P et Q sont de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant K , alors :

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

OSTROGRADSKY Mikhaïl Vassilievitch

Paschennaïa (région de Poltava) 1801 – Poltava 1861

Issu d'un milieu aristocratique, riche et conservateur, le mathématicien russe (ou plutôt ukrainien) Mikhaïl OSTROGRADSKY suit des études de mathématiques à l'université de Kharkov de 1816 à 1822. Intéressé par les progrès de l'analyse effectués en France au début du siècle, il vient se perfectionner à Paris de 1822 à 1828, et y rencontre CAUCHY, LAPLACE et FOURIER. De retour en Russie, il enseigne à Moscou et à Saint-Pétersbourg. Ses travaux portent sur l'analyse vectorielle, la mécanique théorique et la physique mathématique. Outre le théorème qui porte son nom, il démontre, indépendamment de GREEN, la formule de Green-Riemann.

Source : B. HAUCHECORNE et D. SUREAU, Des mathématiciens de A à Z, Editions Ellipses (1996).