

Chap. VI . INTÉGRALES DE SURFACE
 . THÉORÈME DE LA DIVERGENCE.

1. Les surfaces en 3D.
 - 1.1 Les différentes formes de représentation.
 - 1.2 Plan tangent, vecteur unitaire normal

2. Intégrales de surface.
 - 2.1 Intégrale d'une fonction numérique sur une surface.
 - 2.2 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface.

3. Théorème de la divergence
 - 3.1 Intégrales triples: techniques de calcul.
 - 3.2 La formule de transformation (théorème de la divergence).

"Il faut que les mathématiques domptent les écarts de notre raison; c'est le bâton des aveugles, on ne marche point sans elles..."

VOLTAIRE

1. LES SURFACES EN 3D.

1.1 Les différentes formes de représentation.

De même que pour les courbes en 2D il y a plusieurs représentations possibles,

$$x \in I \mapsto y = f(x) \quad [\text{forme explicite}], \quad (1)$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} \quad [\text{forme implicite}], \quad (2)$$

$$t \in I \mapsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad [\text{forme paramétrée}], \quad (3)$$

il y a pour les surfaces en 3D plusieurs types de représentations; nous les décrivons brièvement:

- $(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y)$ [forme explicite, de la 3^e variable (par exemple) en fonction des deux premières]; (1)'

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$ [forme implicite]; (2)'

- $(u, v) \in D \mapsto \vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ [forme paramétrée], avec (3)'

(comme on l'imagine) des hypothèses sur l'ensemble D et la fonction vectorielle $\vec{\sigma}$.

Exemple 1.

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $(x, y) \mapsto z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$; il s'agit de l'équation d'une hémisphère (z est ici une fonction explicite de x et y) de centre O et de rayon r.

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$; c'est une représentation (sous forme implicite) de la sphère de centre O et de rayon r.

- $D = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; pour $(u, v) \in D$,

$$\vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \cos u \\ r \cos v \sin u \\ r \sin v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x(u, v) \\ \leftarrow y(u, v) \\ \leftarrow z(u, v) \end{matrix}$$

C'est une représentation paramétrique de la sphère de centre O et de rayon r.

Les courbes (paramétrées)

$$v \mapsto \vec{\sigma}(u_0, v) \quad (u_0 = c^{te}) \text{ et}$$

$$u \mapsto \vec{\sigma}(u, v_0) \quad (v_0 = c^{te}) \text{ sont les}$$

méridiennes et les parallèles (respectivement)

sur la sphère.

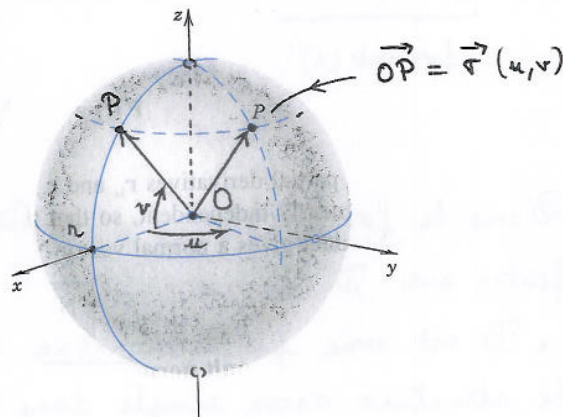


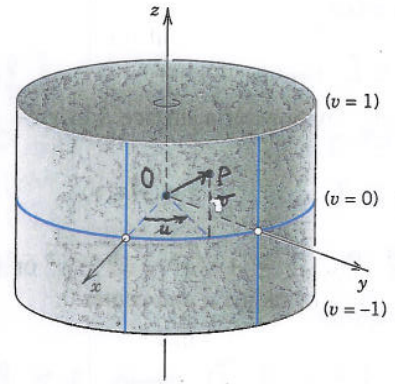
Fig. 1

Exemple 2. Représentations paramétriques d'un cylindre, d'un cône.

Le cylindre de base le cercle (du plan Oxy) d'équation $x^2 + y^2 = r^2$, d'axe Oz , délimité par les plans horizontaux d'équations $z = -1$ et $z = 1$, a pour représentation paramétrique

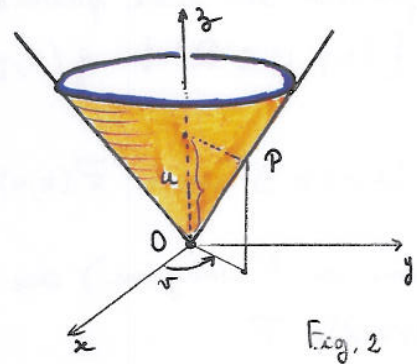
$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1] \mapsto \vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ v \end{pmatrix}.$$

Sur la figure ci-contre, $\vec{OP} = \vec{\sigma}(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{10})$.



Le cône circulaire d'équation explicite $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, peut être paramétré sous la forme

$$(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \mapsto \vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix}.$$



On peut, sous certaines conditions, passer d'une représentation à une autre. Examinons les cas les plus simples:

$$\underbrace{z = f(x, y)}_{\text{format (1)'}} \longrightarrow \underbrace{z - f(x, y) = 0}_{\substack{\text{format (2)'}}} \quad ; \quad (4)$$

$$\underbrace{z = f(x, y)}_{\text{format (1)'}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{pmatrix}}_{\text{format (3)'}}. \quad (5)$$

Dans le format (3)' [paramétrisation de la surface], les hypothèses minimales faites sur D et $\vec{\sigma}$ sont :

- D est une partie connexe (= "d'un seul tenant", cf. Ch. IV, p. 14) du plan, de structure assez simple dans les exemples que vous aurez à traiter : D est un rectangle, un disque, ...
- La fonction $\vec{\sigma}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective ($\vec{\sigma}(u, v) \neq \vec{\sigma}(u', v')$ si $(u, v) \neq (u', v')$) et de classe C^1 sur un ouvert contenant D .

(Les "effets de bord", $\vec{\sigma}(0, v) = \vec{\sigma}(2\pi, v)$ dans les exemples précédemment

décrite, ne posent pas de problème dans les calculs d'intégrales de surface).

• Pour tout $(u_0, v_0) \in D$, les deux "vecteurs dérivés partiels"

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

(6)

Ceci est l'hypothèse essentielle dans la paramétrisation. Autres manières de dire la même chose:

• la matrice jacobienne $J_{\vec{r}}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ est de rang 2 pour tout $(u_0, v_0) \in D$;

(6)'

• $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ pour tout $(u_0, v_0) \in D$.

(6)''

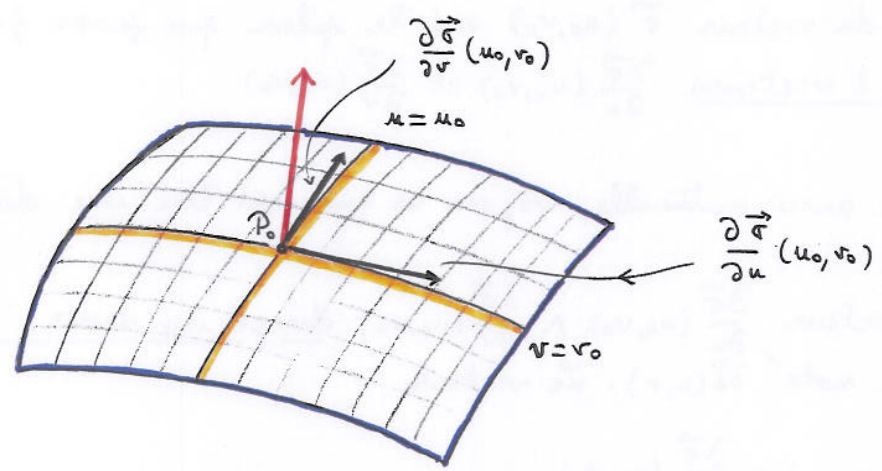
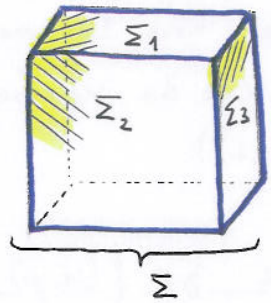
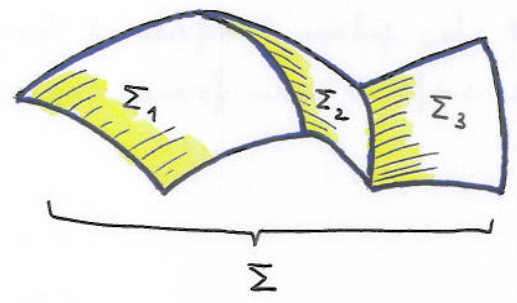


Fig. 3

Pour éviter des confusions, on adoptera toujours le même type de notations:

- σ, Σ pour des surfaces;
- γ, Γ pour des courbes;
- D, R, K, \dots pour d'autres ensembles.

Ce qui va être présenté (définitions, propriétés, calculs) à propos des surfaces $\Sigma = \{ \vec{r}(u, v) \mid (u, v) \in D \}$ va pouvoir être adapté à des "surfaces par morceaux"



du moins dans le contexte des applications qui vous seront proposées.

1.2 Plan tangent, vecteur unitaire normal

• Soit $t \in I \mapsto \vec{\gamma}(t) := \vec{\sigma}(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix}$ la paramétrisation d'une

courbe Γ tracée sur la surface Σ (paramétrisée par $\vec{\sigma}$) et passant par le point de coordonnées $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ pour $t = t_0$ (i.e., $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$).

Par dérivation de fonctions composées, on obtient

$$\vec{\gamma}'(t_0) = u'(t_0) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(t_0) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (7)$$

(= une combinaison linéaire des 2 vecteurs $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$).

La définition suivante apparaît ainsi logique.

Définition 3. Le plan tangent à la surface Σ au point P_0 de coordonnées celles du vecteur $\vec{\sigma}(u_0, v_0)$ est le plan qui passe par P_0 et engendré par les 2 vecteurs $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$.

De manière toute aussi naturelle, voyons ce que doit être une direction normale à Σ en P_0

Définition 4. Le vecteur $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$ dirige une droite "normale à Σ en P_0 "; il sera noté $\vec{N}(u, v)$. Le vecteur

$$\begin{aligned} \vec{N}(u, v) &= \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \|\vec{N}(u, v)\| &= \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| =: \vec{v}(u_0, v_0) \end{aligned} \quad (8)$$

est appelé vecteur unitaire normal à Σ en P_0 .

On comprend mieux à présent pourquoi l'hypothèse (6) (ou (6)', (6)'') a été posée... Regarder à nouveau et attentivement la Fig. 3 de la p. 4.

Pour être complet, nous donnons également les plans tangents et les directions normales dans les cas de représentations de surfaces sous forme explicite (cf. (1)') et implicite (cf. (2)').

• Forme explicite $z = f(x, y)$ (de Σ).

Puis-que ceci est un cas particulier de paramétrisation $\vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$, cf. (5), on en déduit (avec $x_0 = u_0, y_0 = v_0$):

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

de sorte que (après quelques calculs!) le plan tangent à Σ au point P_0 de coordonnées $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ a pour équation (en X, Y, Z)

$$Z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (Y - y_0), \quad (9)$$

alors que la droite normale à Σ en P_0 est dirigée par le vecteur

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

• Forme implicite $g(x, y, z) = 0$ (de Σ).

En un point P_0 de Σ , de coordonnées (x_0, y_0, z_0) - pourvu que $\vec{\nabla}g(x_0, y_0, z_0)$ ne soit pas le vecteur nul - le plan tangent à Σ en P_0 a pour équation

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) (Z - z_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) (Y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) (X - x_0) = 0, \quad (11)$$

tandis que la droite normale à Σ en P_0 est dirigée par le vecteur

$$\vec{\nabla}g(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

(9) et (10) sont des cas particuliers de (11) et (12) respectivement, avec $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

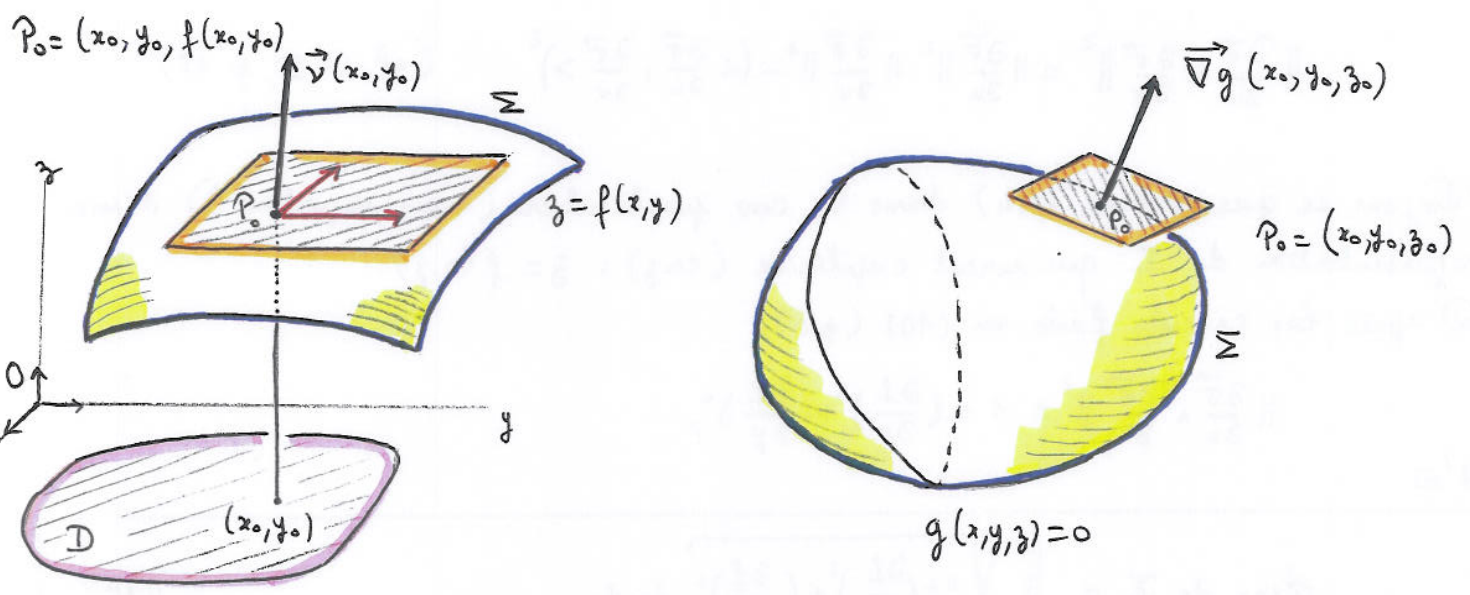


Fig. 4

2. INTÉGRALES DE SURFACES.

2.1. Intégrale d'une fonction numérique sur une surface.

De même qu'on a défini l'intégrale d'une fonction numérique le long d'une courbe (Ch. IV, § 2.1), on définit ici l'intégrale d'une fonction numérique sur une surface.

Définition 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, continue sur Σ (au moins). L'intégrale de f sur Σ est définie par

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma := \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv. \quad (13)$$

La notation $f \, d\sigma$ sans flèches rappelle, si nécessaire, qu'il s'agit de scalaires: $f(\vec{r}(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ est un réel, $\|\dots\|$ (= longueur d'un vecteur) est également un réel. De par la définition (13), on a une intégrale double à calculer (en (u,v) , sur D).

Si, par exemple, f représente une densité de masse, $\iint_{\Sigma} f \, d\sigma$ sera la masse totale de Σ .

Un exemple important est celui où $f \equiv 1$, auquel cas $\iint_{\Sigma} d\sigma$ est l'aire de la surface Σ

$$\text{Aire de } \Sigma = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv. \quad (14)$$

On peut, si nécessaire, être plus explicite sur la formule, sachant que

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|^2 - \left(\left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\rangle \right)^2. \quad (\text{cf. Ch. II, p. 15})$$

Voyons ce que donne (14) dans le cas particulier (mais important!) d'une représentation de Σ qui serait explicite (en z): $z = f(x,y)$.

D'après les calculs faits en (10) (p. 6),

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2,$$

d'où

$$\text{Aire de } \Sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \, dx \, dy. \quad (15)$$

Cette formule est importante, facile à retenir, ... et du même tonneau que la formule (14) du chapitre IV. Voyons quelques exemples de calculs d'intégrales de surfaces, notamment d'aires.

Exemple 5. Aire d'une sphère.

Rappelons qu'une paramétrisation de la sphère de centre O et de rayon r est donnée par

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \cos u \\ r \cos v \sin u \\ r \sin v \end{pmatrix}. \quad (\text{cf. Fig. 1})$$

Après quelques calculs (à faire !)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v \cos u \\ r^2 \cos^2 v \sin u \\ r^2 \cos v \sin v \end{pmatrix}, \text{ de sorte que } \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = r^2 |\cos v|.$$

Ainsi,

$$\text{Aire de la sphère} = \iint_{[0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} 1 \cdot r^2 |\cos v| \, du \, dv = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \cos v \, du \right] dv = 4\pi r^2.$$

Dans ce même exemple, calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz , en supposant que la densité de masse μ est constante et que la masse totale (de la sphère) est M

$$\text{Ainsi, } \mu = \frac{M}{4\pi r^2}.$$

Si $d(P)$ désigne la distance du point $P = (x, y, z)$ à l'axe Oz , le moment d'inertie cherché I vaut

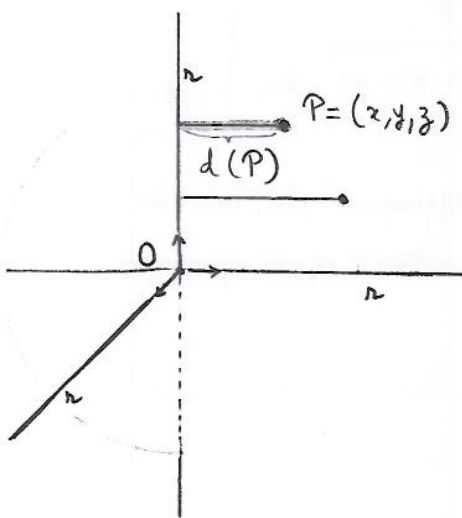
$$I = \iint_{\Sigma} \mu d(P)^2 \, d\sigma.$$

En utilisant la même paramétrisation que plus haut, on a alors

$$d(P)^2 = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 v,$$

d'où

$$I = \frac{M}{4\pi r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \cos^3 v \, du \right] dv = \frac{2Mr^2}{3}.$$



Exemple 6. On considère le solide (en 3D) compris entre la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ ($r > 0$) et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - 2ry = 0$. On voudrait déterminer le volume de ce solide ainsi que l'aire de la surface qui lui fait office de calotte supérieure et inférieure.

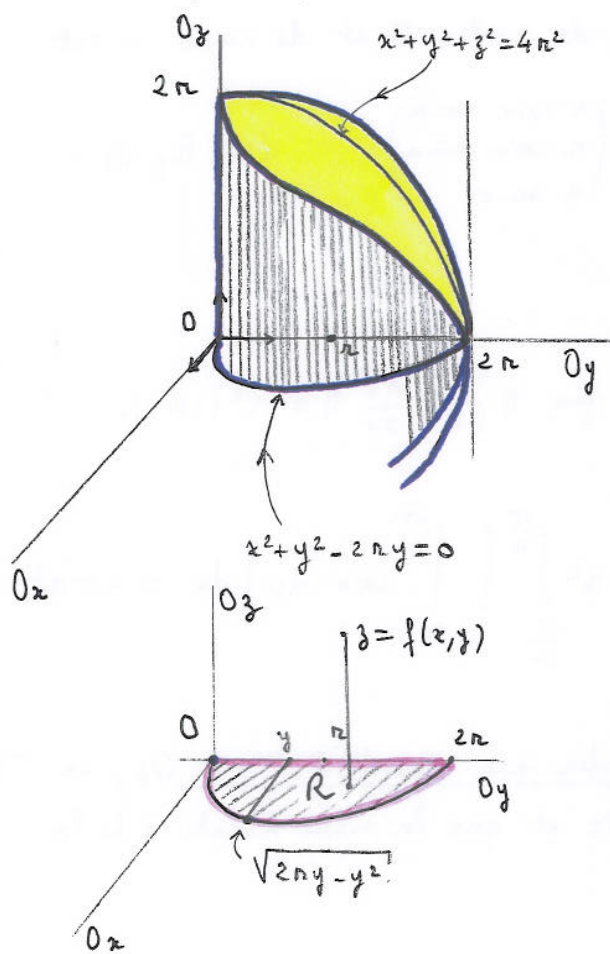


Fig. 5

• Volume du solide

Pour des raisons de symétrie, ce volume est 4 fois le volume de la partie du solide dans le quadrant ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

La calotte (supérieure) du solide a pour équation

$$z = f(x, y) = \sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}$$

Le domaine R du plan Oxy sur lequel va s'opérer l'intégration est

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2ry \leq 0 \text{ et } x \geq 0\},$$

balayé en $0 \leq y \leq 2r$
et $0 \leq x \leq \sqrt{2ry - y^2}$ (d'accord?)

Par conséquent,

$$V = 4 \iint_R \sqrt{4r^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

$$= 4 \int_0^{2r} \left[\int_0^{\sqrt{2ry - y^2}} \sqrt{4r^2 - x^2 - y^2} \, dx \right] dy.$$

Après un passage en coordonnées polaires (ce qui paraît approprié ici, vu la structure de R et la forme de la fonction à intégrer), on obtient après quelques calculs (à faire !)

$$V = \frac{32r^3}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^3 \theta) \, d\theta = \frac{16}{9} r^3 (3\pi - 4).$$

• Aire des calottes

Pour les mêmes raisons de symétrie que précédemment, l'aire de la surface délimitée par le solide est

$$A = 4 \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy = 4 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2ry - y^2}} \sqrt{\dots} \, dx \right] dy.$$

On vous laisse le soin de terminer le calcul.

Ces calottes constituent ce qu'on appelle "la fenêtre de V. VIVIANI (1622-1703)".

Exemple 7. On se propose de déterminer l'aire de la partie du cylindre d'équation $x^2 + z^2 = r^2$ découpée par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = r^2$.

Pour des raisons (claires) de symétrie, cette aire A est 8 fois l'aire de sa portion dans l'orthant positif : $x \geq 0, y \geq 0, z = f(x, y)$ avec $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (voir cette portion de surface dans la Fig. 6, p. 11).

Ainsi,

$$A_1 = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

où R (= le domaine d'intégration en x, y) est balayé en $0 \leq x \leq r$ et $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$.

Comme $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, on a

$$A_1 = \int_0^r \left[\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dy \right] dx = r^2 \text{ (après calculs très simples ici).}$$

En définitive, $A = 8 A_1 = 8 r^2$. Curieux non ?

Exercice 8. Déterminer l'aire de la partie du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ découpée par le cylindre $x^2 + y^2 = 2ax$. (On tâchera de représenter à peu près correctement cette portion de surface en 3D).

Réponse. $A = 2\pi r^2 \sqrt{2}$.

Exercice 9. Déterminer l'aire de la partie de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ qui est découpée par le cylindre à base elliptique d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Réponse. $A = 4\pi a^2 - 8a^2 - \text{Arcsin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Exercice 10. On considère un solide en forme de tore (= chambre à air) construit de la manière suivante : un disque de rayon b tourne autour de l'axe Oz , de sorte que le centre du disque suive un cercle du plan Oxy de centre O et de rayon a ($a > b$).

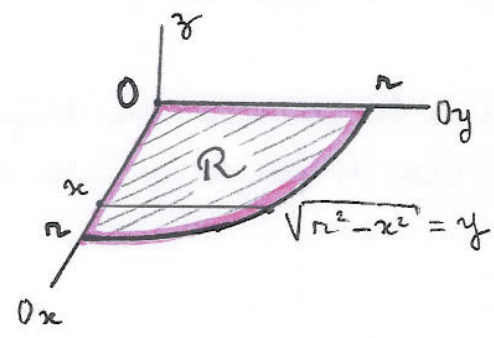
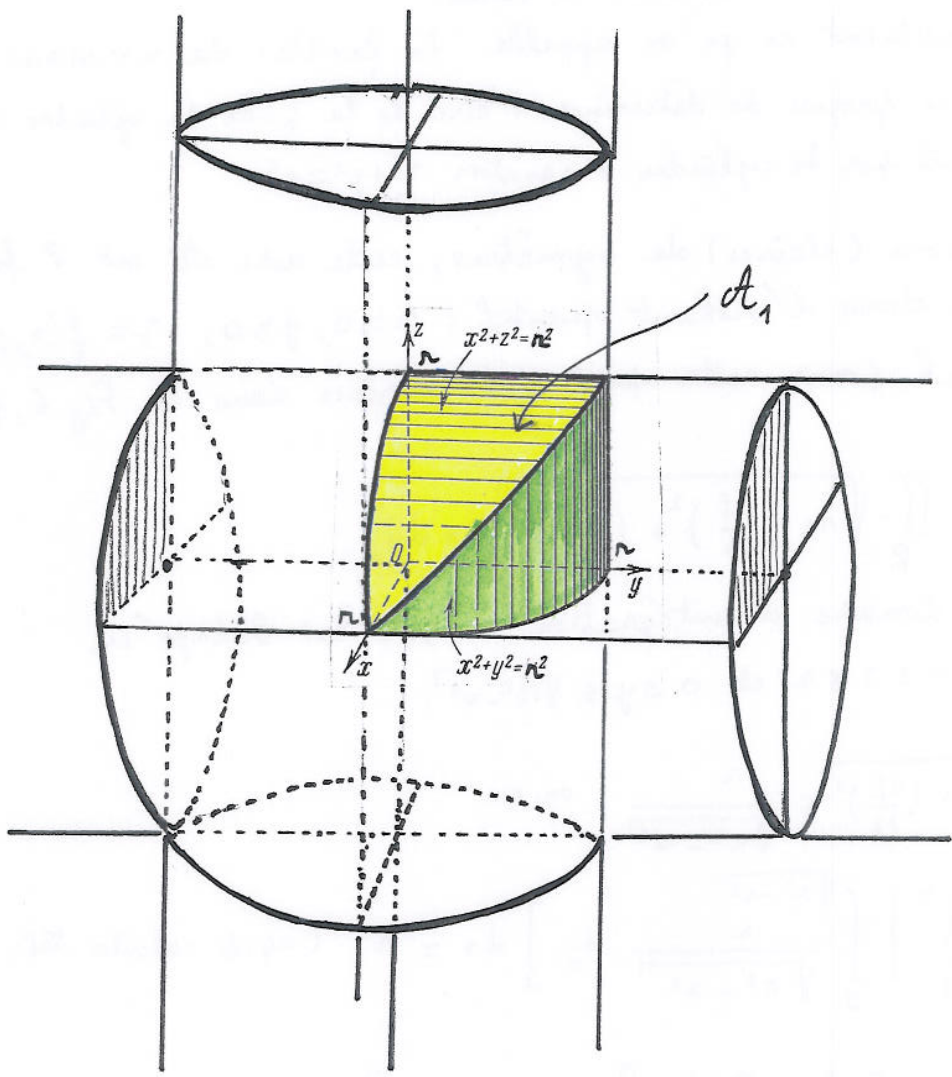


Fig. 6

La question est : quelle est l'aire de la surface délimitée par cette "chambre à air" ?

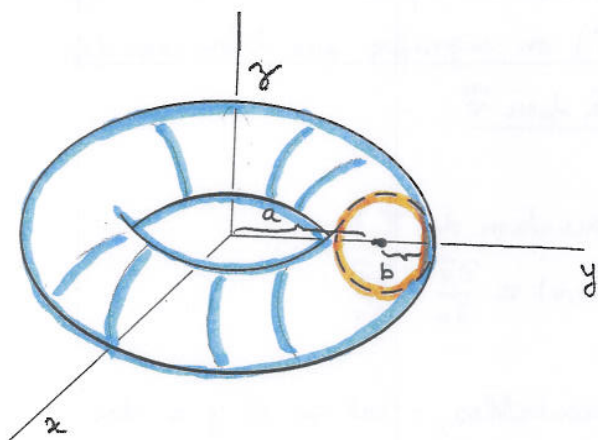
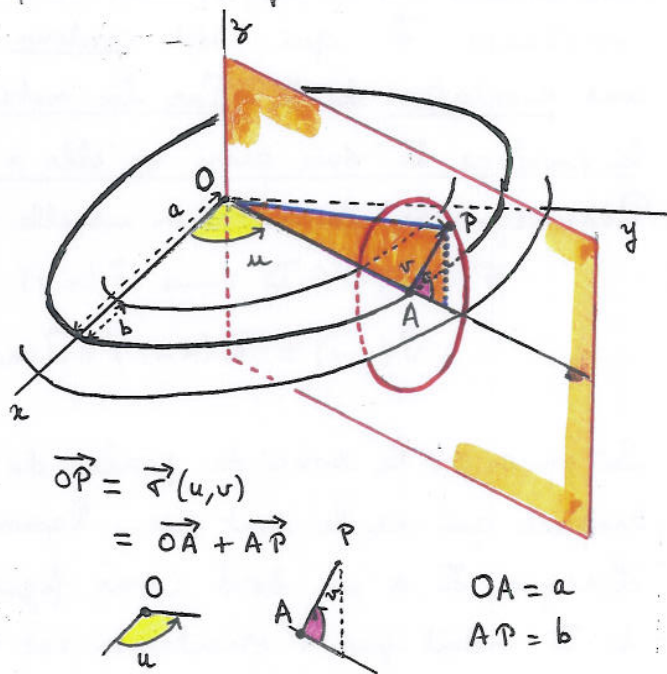
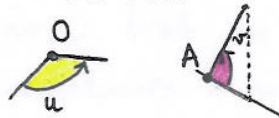


Fig. 7



$$\vec{OP} = \vec{r}(u, v)$$

$$= \vec{OA} + \vec{AP}$$



$$OA = a$$

$$AP = b$$

Une paramétrisation de cette surface torique se trouve être

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b \cos v) \cos u \\ (a + b \cos v) \sin u \\ b \sin v \end{pmatrix}. \quad (\text{cf. figure au-dessus})$$

Après calculs, $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = b(a + b \cos v)$, de sorte que l'aire \mathcal{A} cherchée vaut

$$\mathcal{A} = \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} b(a + b \cos v) \, du \, dv = 4\pi^2 ab.$$

Ce résultat vous surprend-il ? (Indication : $4\pi^2 ab = (2\pi a) \times (2\pi b) \dots$).

2. Flux d'un champ \vec{F} à travers une surface Σ

Soit $\vec{r} : (u, v) \in D \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ paramétrisant la surface Σ . On a

observé que le vecteur $\vec{N}(u, v) := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ (en notations simplifiées), ou sa version normalisée $\vec{v}(u, v) = \vec{N}(u, v) / \|\vec{N}(u, v)\|$ ($\vec{v}(u, v)$ est ainsi un vecteur unitaire), est "normal" à la surface Σ au point P de coordonnées celles du vecteur $\vec{r}(u, v)$ (cf. p. 5). Mais on aurait pu très bien choisir le vecteur opposé $-\vec{v}(u, v)$ qui est tout aussi "normal" à Σ en P et reste unitaire. Il ne faut donc pas être ambigu sur le champ de "normales unitaires" sur Σ que l'on choisit. Ceci motive quelque peu la définition qui suit.

Définition 11 La surface Σ est dite orientable s'il existe un champ de normales unitaires $\vec{\nu}$ qui soit continu sur Σ . Un tel champ de normales est appelé une orientation de Σ . Par la notation $(\Sigma, \vec{\nu})$ on signifie que l'on considère la surface Σ mais aussi qu'elle a été orientée par $\vec{\nu}$.

Rassurez-vous, la situation usuelle est :

$$\vec{\sigma} : (u, v) \in D \mapsto \vec{\sigma}(u, v) \quad (\text{paramétrisation de } \Sigma);$$

$$\vec{\nu}(u, v) = \vec{N}(u, v) / \|\vec{N}(u, v)\|, \quad \text{ou } \vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}.$$

Si on a eu le souci de parler de surfaces orientables, c'est qu'il y a des surfaces qui ne le sont pas... Passons.

Lorsque Σ a un bord (voir figure ci-dessous), le sens de parcours du bord de Σ induit par l'orientation est celui obtenu en parcourant positivement la courbe fermée constituant la frontière de D . Règle simple pour s'en souvenir : un observateur se déplaçant sur le bord de Σ et ayant sa tête dirigée dans le sens de $\vec{\nu}$ laisse la surface Σ à sa gauche.

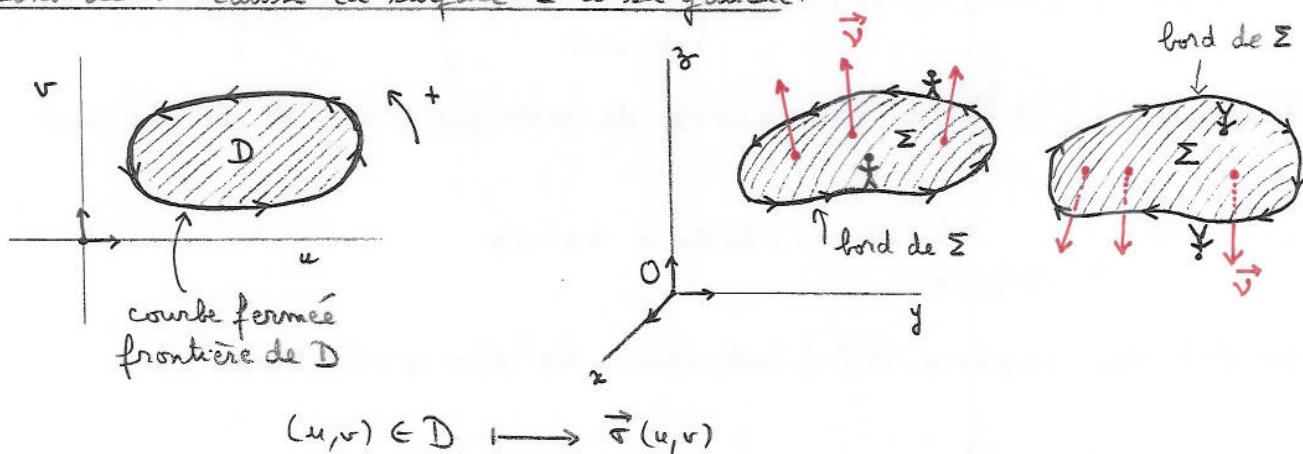


Fig. 8

Lorsqu'on a affaire à des "surfaces par morceaux" (cf. p. 4 en bas), comme c'est souvent le cas en pratique, on oriente $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de la manière suivante : chaque pièce Σ_1, Σ_2 est orientée de sorte que le long de la courbe frontière Γ commune à Σ_1 et Σ_2 , le sens de parcours positif de Γ relativement à Σ_1 soit opposé au sens de parcours positif de Γ relativement à Σ_2 .

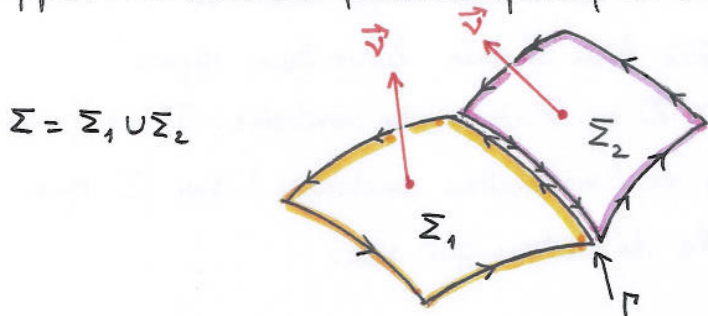


Fig. 9

D'ailleurs, dans la considération du bord de $\Sigma (= \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, on pourra enlever ce morceau de courbe Γ qui est parcouru deux fois (une fois dans un sens, une fois dans l'autre).

Nous sommes à présent prêts pour définir l'intégrale d'un champ \vec{F} à travers une surface orientée $(\Sigma, \vec{\nu})$; cette notion est, en quelque sorte, aux surfaces ce que l'intégrale curviligne (ou circulation) est aux courbes (voir Ch. IV, p. 7).

Définition 12. On appelle intégrale du champ de vecteurs \vec{F} sur la surface orientée $(\Sigma, \vec{\nu})$ (on dit aussi flux du champ de vecteurs \vec{F} à travers la surface orientée $(\Sigma, \vec{\nu})$) la quantité

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle := \iint_D \langle \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)), \vec{N}(u,v) \rangle du dv. \tag{16}$$

Pour une surface fermée Σ , on peut marquer le coup avec le graphisme \oint_{Σ} . Si l'on détaille quelque peu:

• $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ est une fonction vectorielle de \mathbb{R}^3 , de composantes F_1, F_2, F_3 , de sorte que $\vec{F}(\vec{\sigma}(u,v))$ est le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} F_1(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ F_2(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ F_3(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{pmatrix}$.

• $\vec{N}(u,v)$ est, rappelons-le, le vecteur $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}$.

Si on tient à faire apparaître le vecteur unitaire normal $\vec{\nu}(u,v)$, on a dans l'intégrale de (16):

$$\langle \dots, \vec{N}(u,v) \rangle du dv = \langle \dots, \vec{n}(u,v) \rangle \cdot \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\| du dv;$$

on voit ainsi "l'élément (différentiel) d'aire" $da = \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\| du dv$ qu'on a eu à intégrer pour avoir l'aire de Σ (cf. formule (14) de la p. 7).

L'expression (16) "in its full glory" peut vous sembler compliquée... alors, avant d'aller plus loin, voyons ce qu'elle donne lorsque la surface Σ est d'équation $z = f(x,y)$ (forme explicite en z). On sait que cela correspond à la paramétrisation

$$(x,y) \in D \mapsto \vec{\sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

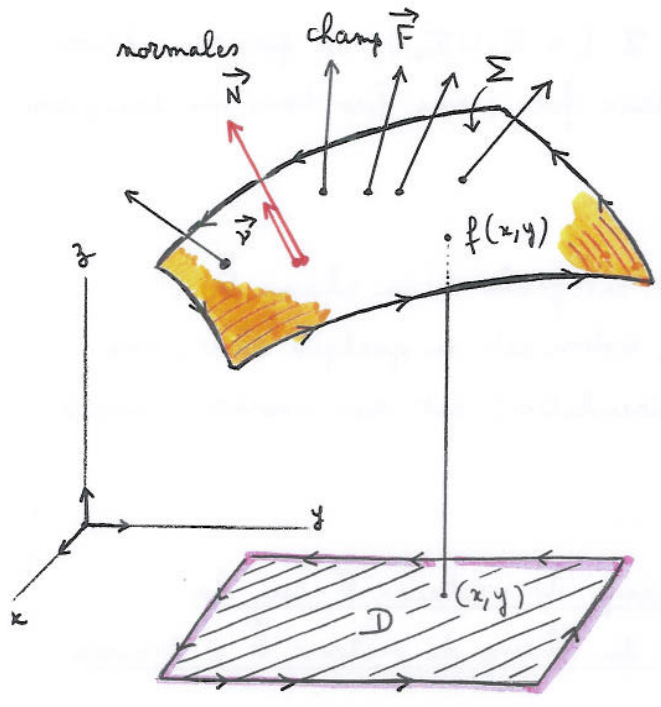


Fig. 10

Dans ce cas, $\vec{N}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$; d'où

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle = \iint_D \left[-F_1(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} - F_2(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} + F_3(x, y, f(x, y)) \right] dx dy$$

Particularisons encore en prenant $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$ (pourquoi pas); alors

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (17)$$

tiens, tiens, quelque chose de connu...

Exemple 13. Si on prend comme champ \vec{F} le champ \vec{v} de normales unitaires, le flux à travers Σ de \vec{F} devient, puisque $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2 = 1$,

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (= \text{aire de } \Sigma).$$

Vite des exemples numériques!

Exemple 14. $D = [0, 2] \times [0, 3]$, $\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$, $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3z^2 \\ 6xz \\ 6xy \end{pmatrix}$. On a alors:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Ensuite, } \vec{F}(\vec{r}(u, v)) = \begin{pmatrix} 3v^2 \\ 6uv \\ 6uv \end{pmatrix},$$

et $\langle \vec{F}(\vec{r}(u, v)), \vec{n}(u, v) \rangle = 6uv^2 - 6$. Enfin,

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle = \iint_{[0, 2] \times [0, 3]} (6uv^2 - 6) du dv = \int_0^3 \left[\int_0^2 (6uv^2 - 6) du \right] dv = 72.$$

Dans ce même exemple, permuteons u et v... et voyons.

$$(v, u) \in [0, 2] \times [0, 3] \mapsto \vec{z}(u, v) = \begin{pmatrix} v \\ u \\ v^2 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat, objet géométrique surface $\Sigma = \vec{z}(D)$, est le même (d'accord ou pas?) mais son orientation a changé (en son opposé); en effet,

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{z}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (= \text{nouveau } \vec{N}(u,v)),$$

d'où

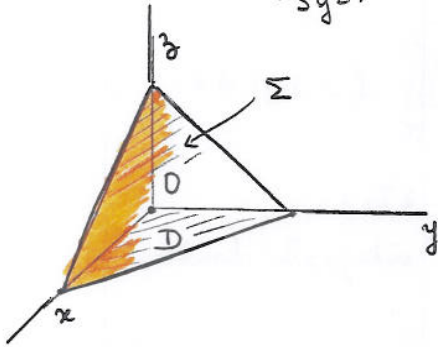
$$\langle \vec{F}(\vec{z}(u,v)), \vec{N}(u,v) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3u^2 \\ 6 \\ 6uv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2v \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -6u^2v + 6$$

et

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{z} \rangle = \iint_{[0,2] \times [0,3]} (-6u^2v + 6) dv du = -72.$$

Exemple 15. Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 3yz \end{pmatrix}.$$

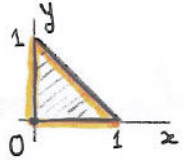


Σ est le graphe de la fonction

$$(x,y) \in D \longmapsto z = f(x,y) := 1-x-y,$$

où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} =$$



Ainsi, d'après ce qui a été explicité en haut de la p. 15,

$$\iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{z} \rangle = \iint_D (z^2 + 3yz) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-y} (x^2 + 3yz) dx \right] dy = \frac{1}{3}.$$

3. THÉORÈME DE LA DIVERGENCE.

Ce que nous proposons ici est encore une formule de transformation, c'est l'analogue du théorème de GREEN en 2D (cf. § 2 du Chap. V); le théorème dit de la divergence permettra de relier une intégrale de surface (sur le bord ou frontière Σ de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) à une intégrale triple sur Ω tout entier.

3.1 Intégrales triples: techniques de calcul

Nous ne passerons pas de temps sur la manière de définir convenablement une intégrale triple, ni sur les techniques de calcul de ces intégrales; il suffira d'étendre en 3D, mutatis mutandis, ce qui a été présenté pour les intégrales doubles (en 2D donc) au § 1 du Chap. V.

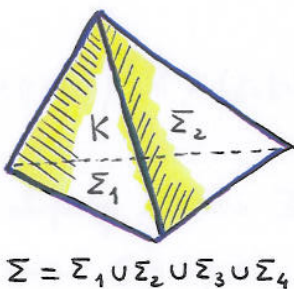
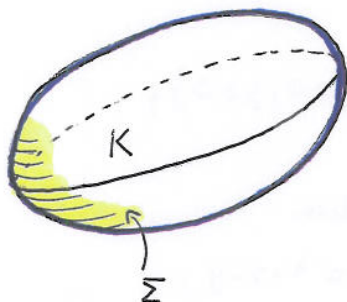
Dans les exemples d'application que vous aurez à traiter : K (domaine d'intégration) sera une partie fermée bornée de \mathbb{R}^3 , dont le bord (ou frontière) sera constitué d'un nombre fini de surfaces $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$ orientables (du type de celles vues dans le chapitre présent); f (la fonction à intégrer) sera une fonction continue (au moins) sur K

Intégrale triple de f sur K , notée

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

ou

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dV.$$



Les techniques de calcul sont similaires à celles vues en 2D :

- intégration par couches successives : un calcul d'intégrale double suivi d'un calcul d'intégrale simple (ou l'inverse).
- intégration par changement de variables : "x, y et z sont changées en u, v et w", c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases} ; (x, y, z) \in K \text{ devient } (u, v, w) \in U \text{ (ensemble à déterminer)}$$

$$dx \, dy \, dz = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial w} \end{vmatrix} \right| du \, dv \, dw$$

← valeur absolue du déterminant jacobien de la transformation $(u, v, w) \mapsto \begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$

Par exemple, en passant d'un système de coordonnées cartésiennes à un système de coordonnées cylindriques, $(x, y, z) \rightsquigarrow (r, \theta, z)$ (voir Ch. II, p. 2)

$$dx \, dy \, dz \rightsquigarrow r \, dr \, d\theta \, dz ;$$

dans un passage à un système de coordonnées sphériques (Ch II, p. 3),

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (r, \theta, \varphi),$$

$$dx \, dy \, dz \rightsquigarrow r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

(calcul de déterminants de matrices (3,3) à refaire si nécessaire).

Exemple 16. Si $\rho(x, y, z)$ est la (fonction) densité de masse de K , la masse totale de K est

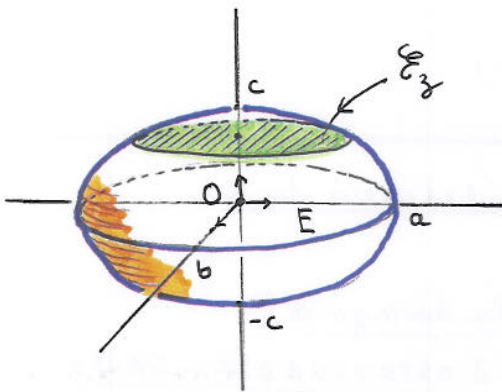
$$M = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est

$$I_z = \iiint_K (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

etc.

Exemple 17. Calculons le volume du solide E délimité par l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Ainsi, $E = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ et

$$\text{vol}(E) = \iiint_E 1 dx dy dz.$$

• Calcul par intégration par couches successives.

$$\iiint_E 1 dx dy dz = \int_{-c}^{+c} \left[\iint_{E_z} 1 dx dy \right] dz, \quad (18)$$

où E_z est l'intersection de E avec le plan "d'altitude z ":

$$E_z = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}\}.$$

E_z est délimité par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{(a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}})^2} + \frac{y^2}{(b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}})^2} = 1$; son

aire est donc $\pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2})$. L'intégrale à calculer en (18) devient alors:

$$\int_{-c}^{+c} \pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \pi ab (z - \frac{z^3}{3c^2}) \Big|_{-c}^c = \frac{4}{3} \pi abc.$$

• Calcul par changement de variables.

$$(x, y, z) \rightarrow (u, v, w) \text{ avec } \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

Le nouveau domaine d'intégration (en u, v, w) est $U = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$, tandis que $dx dy dz = abc du dv dw$. Par suite,

$$\iiint_E 1 dx dy dz = \iiint_U 1 abc du dv dw = abc \text{ vol}(U) = abc \cdot \frac{4\pi}{3}.$$

3.2 La formule de transformation.

THÉORÈME 18 (de la divergence). Sous les hypothèses (concernant \vec{F} et K énoncées plus haut (essentiellement: K est une partie fermée bornée de \mathbb{R}^3 , dont le bord Σ est constitué d'un nombre fini de surfaces orientables; \vec{F} est continue sur K), on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle &:= \iint_D \langle \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)), \vec{N}(u,v) \rangle du dv \\ &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) dx dy dz, \end{aligned} \tag{19}$$

où $\vec{N}(u,v)$ est le vecteur normal ($\bar{\alpha} \Sigma$) dirigé à l'extérieur de K .

La formule (19) porte des appellations variées: "de la divergence", "de GREEN-OSTROGRADSKY", "d'OSTROGRADSKY", "d'OSTROGRADSKY-GAUSS".

Comme dans le cas du théorème de GREEN (Chap. V, p. 8), on peut démontrer (19) sans trop de difficultés dans le cas particulier où K est délimité par une surface inférieure d'équation $z = \varphi_1(x,y)$ et une surface supérieure d'équation $z = \varphi_2(x,y)$. Nous ne la faisons pas ici.

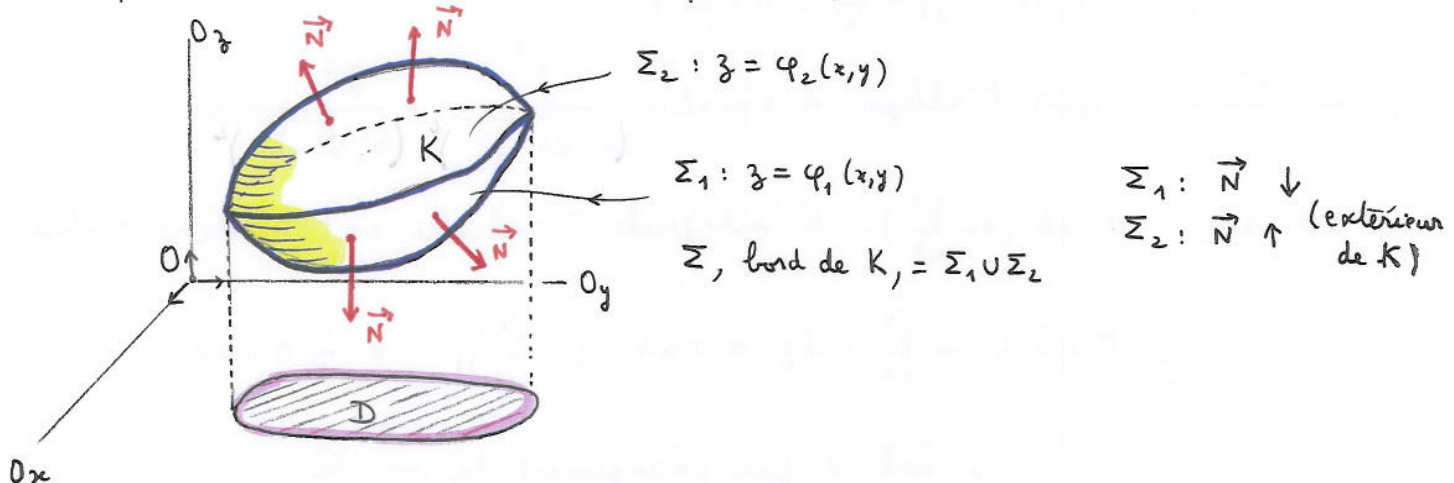


Fig. 11

Voyons ce que donne la formule (19) lorsque K est délimité par $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ comme dans la figure ci-dessus et que $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi(x,y,z) \end{pmatrix}$. Alors,

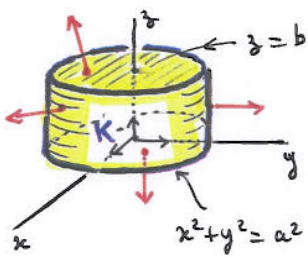
$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,y,z)$, et $\iint_{\Sigma_1} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle, \iint_{\Sigma_2} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle$ se calculent comme

en haut de la p. 15. En définitive,

$$\iiint_K \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \Phi(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \iint_D \Phi(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy, \quad (20)$$

appelée parfois "formule de GAUSS".

Exemple 19. Evaluons le flux du champ de vecteurs $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}$ sortant de la surface Σ ci-dessous. D'après le Théorème 18, il est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur K (solide dont le bord est Σ).



Comme $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_K 5x^2 dx dy dz = (\text{en passant en coordonnées cylindriques, ... of course}) \\ &= 5 \int_{z=0}^b \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta dz \\ &= (\text{après quelques calculs}) \frac{5}{4} \pi b a^4. \end{aligned}$$

Exemple 20. Supposons que \vec{F} dérive d'un potentiel φ , i.e. $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$; que devient alors la formule de transformation (19)? On a $\text{div } \vec{F} = \Delta \varphi$ (laplacien de φ), de sorte que (19) induit

$$\iiint_K \Delta \varphi dx dy dz = \iint_{\Sigma} \langle \vec{\nabla} \varphi, d\vec{\sigma} \rangle = \iint_D \langle \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}(u, v)), \vec{N}(u, v) \rangle du dv. \quad (21)$$

(identité de GREEN).

A comparer immédiatement avec ce qui a été vu en haut de la p. 11 du Chap. V.

Exemple 21. (parallèle à l'Exemple 5, p. 9, du Chap. V). Expression du volume de K comme une intégrale de surface.

Les choix $\vec{F}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{F}_4(x, y, z) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ conduisent toutes à $\text{div } \vec{F} \equiv 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \iint_{\Sigma} \langle \vec{F}_i, d\vec{\sigma} \rangle \text{ pour } i=1, 2, 3, 4 \\ (\text{par exemple}) &= \frac{1}{3} \iint_D \langle \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \vec{N}(u, v) \rangle du dv. \end{aligned} \quad (22)$$

Preons encore l'exemple de la sphere de centre O et de rayon r. Avec la parametrisation de l'Exemple 1, on a deja determine

$$\vec{N}(u, v) = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v \cos u \\ r^2 \cos^2 v \sin u \\ r^2 \cos v \sin v \end{pmatrix} (= r \cos v \vec{OP}),$$

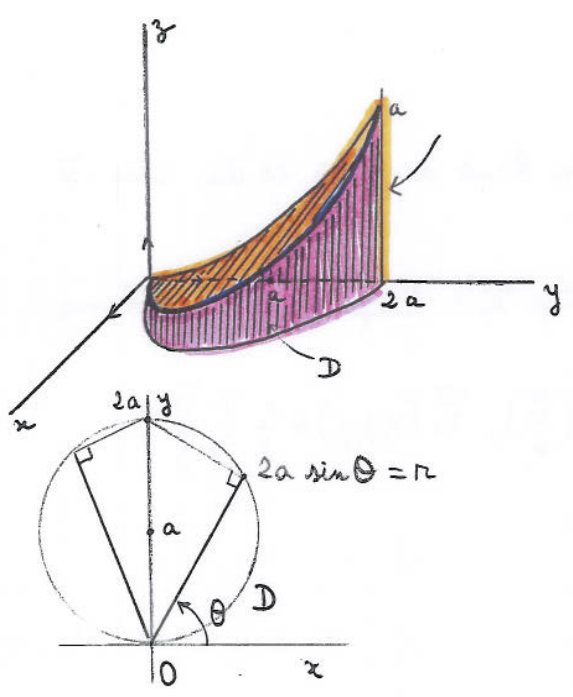
de sorte que

$$\begin{aligned} \text{Volume de la sphere} &= \frac{1}{3} \iint_{[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left\langle \begin{pmatrix} r \cos v \cos u \\ r \cos v \sin u \\ r \sin v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v \cos u \\ r^2 \cos^2 v \sin u \\ r^2 \cos v \sin v \end{pmatrix} \right\rangle du dv \\ &= \frac{1}{3} \iint_{[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} r^3 \cos v \, du dv = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

(calcul integral similaire a celui de l'Exemple 5).

Exemple 22 Determinons le volume du solide K delimité par le cylindre d'equation $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, le plan d'equation $z=0$, et la parabolöide d'equation $4az = x^2 + y^2$. Ici a est suppose > 0.

On commence par un bon petit exercice de visualisation en 3D : comment est fichu K. Contentons-nous de la partie dans l'orthant positif $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.



K est delimité par le graphe de la fonction

$$(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) := \frac{1}{4a} (x^2 + y^2),$$

ou D est le disque du plan Ox y d'equation $x^2 + (y-a)^2 \leq a^2$.

Ainsi,

$$\text{vol}(K) = \iint_D f(x, y) \, dz \, dy.$$

Une parametrisation (ou balayage) de D en coordonnees polaires (theta, r) est :

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 2a \sin \theta.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \iint_{(r,\theta)} \frac{r^2}{4a} r dr d\theta = \frac{1}{4a} \int_0^\pi \left[\int_0^{2a \sin \theta} r^3 dr \right] d\theta \\ &= a^3 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \\ &= \underline{\underline{\frac{3\pi}{8} a^3}}. \end{aligned}$$

