U.P.S., LICENCE DE MATHEMATIQUES FONDAMENTALES
CORRIGE DES ANNALES DE TOPOLOGIE 2007–2008

Exercice 1.

a) $x \in (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$ et $\exists j \in J, x \in B_j \Leftrightarrow \exists (i,j) \in I \times J, x \in A_i \cap B_j \Leftrightarrow$ $x \in \cup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$, d'où la première égalité.
De même, $x \notin (\cap_{i\in I} A_i) \cup (\cap_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow \exists i \in I, x \notin A_i$ et $\exists j \in J, x \notin B_j \Leftrightarrow$ $\exists (i,j) \in I \times J, x \notin A_i \cup B_j \Leftrightarrow x \notin \cup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$, d'où la seconde égalité.

b) $x \in \cup_{i\in I}(\cup_{j\in J_i} A_j) \Leftrightarrow \exists i \in I, \exists j \in J_i, x \in A_j \Leftrightarrow \exists j \in \cup_{i\in I} J_i, x \in A_j \Leftrightarrow x \in \cup_{j\in\cup_{i\in I} J_i} A_j$, d'où la première égalité.
De même, $x \in \cap_{i\in I}(\cap_{j\in J_i} A_j) \Leftrightarrow \forall i \in I, \forall j \in J_i, x \in A_j \Leftrightarrow \forall j \in \cup_{i\in I} J_i, x \in A_j \Leftrightarrow$ $x \in \cap_{j\in\cup_{i\in I} J_i} A_j$, d'où la seconde égalité.

c) Soit $x = (x_i)_{i\in I}$. $x \in (\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow \forall i \in I, x_i \in A_i$ et $\forall i \in I, x_i \in B_i \Leftrightarrow$ $\forall i \in I, x_i \in A_i \cap B_i \Leftrightarrow x \in \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$.

Exercice 2.

a) Pour tout $x \in A$ on a $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. D'où l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Soient f injective, $A \in \mathcal{P}(X)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$, i.e. $f(x) \in f(A)$. Alors il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$ donc (par injectivité de f) tel que $x = y$. Autrement dit $x \in A$. On a donc montré que $f^{-1}(f(A)) \subset A$ (donc $= A$, d'après l'inclusion précédente).
Réciproquement, supposons que $\forall A \in \mathcal{P}(X), f^{-1}(f(A)) = A$. Alors $\forall x \in X, f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(f(\{x\}) \subset \{x\}$, i.e. $f(y) = f(x) \Rightarrow y = x$, i.e. f est injective.
Exemple (générique) où l'inclusion est stricte : f non injective, $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$ A contenant x mais pas y. Par exemple $X = Y = \mathbf{R}$, $f = \sin$, $A = \{0\}$.

b) $f(f^{-1}(B)) = \{f(x) \mid x \in f^{-1}(B)\} = \{f(x) \mid f(x) \in B\} = B \cap f(X)$, donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et si f est surjective (i.e. si $f(X) = Y$) on a égalité. Réciproquement, si cette égalité est vraie pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, elle l'est en particulier pour $B = Y$, d'où $Y = f(X)$ i.e. f surjective.
Exemple (générique) où l'inclusion est stricte : f non surjective, $B \not\subset f(X)$. Par exemple $X = Y = B = \mathbf{R}$, $f = \sin$.

c) $y \in f(\cup_{i\in I} A_i) \Leftrightarrow \exists x \in \cup_{i\in I} A_i, y = f(x) \Leftrightarrow \exists i \in I, \exists x \in A_i, y = f(x) \Leftrightarrow \exists i \in I, y \in f(A_i) \Leftrightarrow$ $y \in \cup_{i\in I} f(A_i)$, d'où l'égalité.
Posons $A = \cap_{i\in I} A_i$. Alors pour tout $i \in I$, $A \subset A_i$ donc $f(A) \subset f(A_i)$, d'où $f(A) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$.
Soient f injective et $y \in \cap_{i\in I} f(A_i)$, i.e. $\forall i \in I, \exists x_i \in A_i, y = f(x_i)$. Tous les x_i sont antécédents de y donc (par injectivité de f) égaux. Soit x cette valeur commune, $\forall i \in I, x = x_i \in A_i$, donc $x \in A$, donc $y = f(x) \in f(A)$. On a donc montré que si f est injective, $\cap_{i\in I} f(A_i) \subset f(A)$ (donc $= f(A)$, d'après l'inclusion précédente).
Exemple (générique) où l'inclusion est stricte : f non injective, $y \in Y$, chaque A_i contenant un antécédent de y mais l'intersection des A_i n'en contenant aucun. Par exemple $X = Y = \mathbf{R}$, $f = \sin$, $y = 0$, $I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{\pi\}$.

d) $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \cup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \exists i \in I, f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in$ $\cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$, d'où l'égalité.
Même chose en remplaçant partout $\cup$ par $\cap$ et $\exists$ par $\forall$.

e) $x \in (f^{-1}(B))^c \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B^c))$, d'où l'égalité.
Par contre, $y \in f(A^c) \Leftrightarrow \exists x \notin A, y = f(x)$, tandis que $y \in (f(A))^c \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x)$. On a donc d'une part, si f est injective, $\forall A \in \mathcal{P}(X), f(A^c) \subset (f(A))^c$ (et c'est en fait une

caractérisation de l'injectivité puisque $f(\{x\}^c) \subset (f(\{x\}))^c \Leftrightarrow \forall y \neq x, f(y) \neq f(x)$), d'autre part, si f est surjective, $\forall A \in \mathcal{P}(X), (f(A))^c \subset f(A^c)$ (et c'est en fait une caractérisation de la surjectivité puisque $(f(\emptyset))^c \subset f(\emptyset^c) \Leftrightarrow Y \subset f(X)$). Mais si f n'est ni injective ni surjective, il existe des A pour lesquels on n'a l'inclusion ni dans un sens ni dans l'autre : si $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$ et si $z \notin f(X)$, soit $A = \{x\}$, alors $f(A^c)$ contient $f(y)$ et pas z, tandis que $(f(A))^c$ contient z et pas $f(x)$ $(= f(y))$.

Exercice 3. S'il existe une bijection $f : \mathbf{N} \to A$ et une bijection $g : \mathbf{N} \to B$ alors l'application $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to A \times B, (p, q) \mapsto (f(p), g(q))$ est une bijection. Il suffit donc de prouver que $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est dénombrable. $(p, q) \mapsto 2^p(2q + 1) - 1$ est une bijection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.

Exercice 4. Un ensemble est dénombrable ssi il est au plus dénombrable et infini. Or si l'un des A_i est infini, la réunion aussi. Il suffit donc de prouver qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
S'il existe une surjection $f : \mathbf{N} \to I$, et pour chaque $i \in I$ une surjection $g_i : \mathbf{N} \to A_i$, alors l'application $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \cup_{i \in I} A_i, (p, q) \mapsto g_{f(p)}(q)$ est surjective. On conclut en composant par une surjection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (cf exercice précédent).

Exercice 5. Pour tout P non nul $\in \mathbf{Q}[X]$, notons F_P l'ensemble (fini) de ses racines, et posons $F_0 = \emptyset$. L'ensemble des nombres algébriques est par définition $\cup_{P \in \mathbf{Q}[X]} F_P$. Il est infini car il contient $\mathbf{Q}$ (un rationnel a est racine de $X - a \in \mathbf{Q}[X]$). Il s'agit donc de prouver qu'il est au plus dénombrable. Il suffit pour cela (cf exercice précédent) de prouver que $\mathbf{Q}[X]$ l'est. Cela se déduit (cf exercice précédent) du fait que $\mathbf{Q}[X] = \cup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Q}_n[X]$ et que chaque $\mathbf{Q}_n[X]$ est dénombrable, puisque $\mathbf{Q}_n[X]$ est en bijection avec $\mathbf{Q}^{n+1}$, produit fini non vide de dénombrables, donc (cf exercice 3) dénombrable.

Exercice 6. L'application $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ qui à toute partie A de $\mathbf{N}$ associe son indicatrice $\mathbf{1}_A$ (qui vaut 1 sur A et 0 sur A^c) étant bijective, il suffit de prouver que $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ n'est pas dénombrable. Or pour tout ensemble E (en particulier pour $E = \mathbf{N}$), il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$ (théorème de Cantor).

Exercice 7. D est l'union des $D_n = \{i \in I, x(i) > 1/n\}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$. Pour toute partie finie F de D_n, $S \geq S_F \geq card(F)/n$ donc $card(D_n) \leq nS$, donc si $S \neq +\infty$, chaque D_n est fini donc D est au plus dénombrable.
Soit $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ une famille d'intervalles ouverts non vides disjoints ($-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$). Pour tout $i \in I$ posons $x(i) = \arctan b_i - \arctan a_i$ (avec par convention $\arctan(+\infty) = \pi/2$ et $\arctan(-\infty) = -\pi/2$). Ainsi, $D = I$ (tous les $x(i)$ sont non nuls) et pour toute partie finie F de I, $S_F \leq \pi$, donc $S \leq \pi < +\infty$. Donc I est au plus dénombrable.

Exercice 8. Classons les ensembles d'ouverts $\mathcal{T}$ possibles par leurs cardinaux, compris entre 2 ($\mathcal{T}_{min} = \{\emptyset, X\}$) et 8 ($\mathcal{T}_{max} = \mathcal{P}(X)$). Remarquons que dès que $\mathcal{T}$ contient les 3 singletons ou les 3 paires, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

$|\mathcal{T}| = 3 \Leftrightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, X, A\}$ avec A partie propre de X : 8-2=6 choix pour A.

$|\mathcal{T}| = 4 \Leftrightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B\}$ avec A, B parties propres distinctes. Premier cas $A \subset B$ (ou $B \subset A$ mais dans ce cas on renomme ces deux parties), par exemple $A = \{a\}, B = \{a, b\}$: 6 choix possibles pour (a, b). Second cas A, B complémentaires : 3 choix possibles pour $\{A, B\}$.

$|\mathcal{T}| = 5 \Leftrightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B, C\}$. Premier cas A, B, C sont deux singletons et une paire (leur réunion) : 3 choix possibles. Second cas A, B, C sont deux paires et un singleton (leur intersection) : 3 choix possibles.

$|\mathcal{T}| = 6 \Leftrightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B, C, D\}$ avec $A, B, C, D =$ deux singletons, leur réunion, et une autre paire : 6 choix.
Total : $1 + 6 + 9 + 6 + 6 + 0 + 1 = 29$.

Exercice 9. Cet ensemble de parties de $\mathbf{Z}$ (contient bien $\emptyset$ et $\mathbf{Z}$ et est bien stable par réunions, mais) n'est pas stable par intersections finies : par exemple $\{1, 2\}$ et $\{2, 3, -4\}$ appartient à cet ensemble, mais pas leur intersection. Ce n'est donc pas une (l'ensemble des ouverts d') une topologie sur $\mathbf{Z}$.

Exercice 10. Il faut et il suffit que $A \cap B$ et $A \cup B$ appartiennent à $\{\emptyset, A, B, E\}$.
Or $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ et de même, $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$.
Lorsque $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$, $A \cap B$ est différent de A, B, E et $A \cup B$ est différent de $\emptyset, A, B$ donc la seule possibilité restante est $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$, c'est-à-dire $B = A^c$.
En conclusion, la condition est : $A \subset B$ ou $B \subset A$ ou $B = A^c$.

Exercice 11. Notons $\mathcal{T}$ cet ensemble de parties de X. On a $X = D_0 \in \mathcal{T}$, $\emptyset = D_1 \in \mathcal{T}$, $D_\ell \cap D_m = D_n$ avec $n = pgcd(\ell, m)$, mais $\mathcal{T}$ n'est pas une topologie sur X car pas stable par réunions (même finies) : $D_2 \cup D_3 = \{2, 3\} \notin \mathcal{T}$ car si $2, 3 \in D_n$ alors $6 \in D_n$.

Exercice 12.

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $\mathbf{R} \in \mathcal{T}$ (car $\emptyset$ est au plus dénombrable). Soient $U, V \in \mathcal{T}$. Si U ou V est vide $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{T}$. Sinon, U^c et V^c sont au plus dénombrables donc leur réunion aussi, donc $U \cap V \in \mathcal{T}$. Soient $U_i \in \mathcal{T}$ et $U = \cup_{i \in I} U_i$. Si tous les U_i sont vides, $U = \emptyset \in \mathcal{T}$. Sinon, soit i tel que U_i^c soit au plus dénombrable. U^c est inclus dans U_i^c donc est lui aussi au plus dénombrable, donc $U \in \mathcal{T}$.

b) Soient $O_n \in \mathcal{T}$ et $O = \cap_{n \in \mathbf{N}} O_n$. Si l'un des O_n est vide, $O = \emptyset \in \mathcal{T}$. Sinon, $O^c = \cup_{n \in \mathbf{N}} O_n^c$ est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, donc O^c est au plus dénombrable, donc $O \in \mathcal{T}$.

c) Soient $U, V \in \mathcal{T}$, non vides. Alors $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ est au plus dénombrable, or $\mathbf{R}$ ne l'est pas, donc $U \cap V$ ne l'est pas, en particulier $U \cap V$ est non vide.

d) Pour la topologie usuelle sur $\mathbf{R}$, une intersection dénombrable d'ouverts n'est pas toujours un ouvert : $\cap_{n \in \mathbf{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ et deux ouverts non vides peuvent être disjoints : $]-1, 0[\cap]0, 1[= \emptyset$.

Exercice 13. $\mathcal{T}$ n'est pas stable par intersections : soient $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, U, V les disques ouverts de rayon 1 et de centres respectifs O, A, alors U, V appartiennent à $\mathcal{B}$ donc à $\mathcal{T}$, mais $U \cap V \notin \mathcal{T}$ puisque $U \cap V$ est non vide mais ne contient aucun élément de $\mathcal{B}$.

Exercice 14.

a) $\mathcal{B} \subset \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{T}$, puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ stable par réunions.

b) Par construction, $\emptyset \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est stable par réunions. On a $X \in \mathcal{C}$ ssi $\cup_{O \in \mathcal{B}} O = X$. Si $\mathcal{C}$ est stable par intersection finies alors en particulier $\forall O, O' \in \mathcal{B}, O \cap O' \in \mathcal{C}$. Mais réciproquement, si cette propriété est vérifiée, soient $U, V \in \mathcal{C}$, alors $U = \cup_{i \in I} O_i$, $V = \cup_{j \in J} O'_j$ avec $O_i, O'_j \in \mathcal{B}$, donc $U \cap V = \cup_{(i,j) \in I \times J} W_{i,j}$ avec $W_{i,j} = O_i \cap O_j \in \mathcal{C}$, donc $U \cap V \in \mathcal{C}$.

Exercice 15. Il est immédiat que $\mathcal{C}$ est inclus dans cet ensemble. Réciproquement, soit U appartenant à cet ensemble, choisissons pour chaque $x \in U$ un $O_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in O_x \subset U$ et posons $\Omega = \cup_{x \in U} O_x$ (variante, pour ne pas utiliser l'axiome du choix : posons $\Omega =$ la réunion, quand x parcourt U, de *l'union de tous* les $O \in \mathcal{B}$ tels que $x \in O \subset U$). Alors $\Omega \subset U$ (car les O

dont Ω est réunion sont inclus dans U) et $U \subset \Omega$ (car tout $x \in U$ appartient à au moins l'un des O dont Ω est réunion), donc $U = \Omega$, donc $U \in \mathcal{C}$ (car les O dont Ω est réunion appartiennent à $\mathcal{B}$).

Exercice 16. Par convention, $E \in \mathcal{G} \subset \mathcal{T}$. De même, $\emptyset = \cup_{i\in\emptyset} A_i$ donc $E \in \mathcal{T}$. Par construction, $\mathcal{T}$ est stable par réunions. Pour la stabilité de $\mathcal{T}$ par intersections finies, cf première question de l'exercice 1. Donc $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.
Soit $\mathcal{T}'$ une topologie contenant $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{T}'$ est stable par intersections finies donc contient $\mathcal{G}$. De plus, $\mathcal{T}'$ est stable par réunions, donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Donc $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine contenant $\mathcal{F}$ (i.e. l'intersection de toutes les topologies qui contiennent $\mathcal{F}$).

Exercice 17.

a) A n'est pas fermé car (par exemple) $(1/n, 0)$ appartient à A et tend vers $(0,0) \notin A$ quand l'entier n tend vers $+\infty$. (En fait, $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [0,1])$). Il n'est pas ouvert non plus car (par exemple) $(1 + 1/n, 0)$ n'appartient pas à A et tend vers $(1,0) \in A$ quand l'entier n tend vers $+\infty$. (En fait, A^c est dense dans $\mathbf{R}^2$).

b) B est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'appication continue $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto y - \arctan x$ (généralisation : cf exercice 58.b). Par contre B n'est pas ouvert car B^c n'est pas fermé car (par exemple) $(0, 1/n)$ appartient à B^c et tend vers $(0,0) \in B$ quand $n \to \infty$. (En fait, B^c est dense dans $\mathbf{R}^2$). (Ou encore : comme $\mathbf{R}^2$ est connexe, et que B est un fermé de $\mathbf{R}^2$ différent de $\mathbf{R}^2$ et de $\emptyset$, B n'est pas ouvert).

c) C est ouvert, comme image réciproque de l'ouvert $]1,2[\times]-\infty,3[$ par l'appication continue $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2/3 + y^2/5, y + x^4)$. Il n'est pas fermé car (par exemple) $(0, \sqrt{5} + 1/n)$ appartient à C et tend vers $(0, \sqrt{5}) \notin C$ quand $n \to +\infty$. (En fait, $\overline{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2/3 + y^2/5 \le 2 \text{ et } y \le 3 - x^4\}$). (Ou encore : comme $\mathbf{R}^2$ est connexe, et que C est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ différent de $\mathbf{R}^2$ et de $\emptyset$, C n'est pas fermé).

Exercice 18. $\mathcal{T}$ est une topologie sur X : vérification immédiate (ou encore : cas particulier de l'exercice 10).
$\mathring{B} = \emptyset$ si $B \not\supset A$, $\mathring{B} = A$ si $X \ne B \supset A$, $\mathring{X} = X$.
En appliquant cela à $D = B^C$ (donc $\overline{B} = (\mathring{D})^c$ et $D \supset A \Leftrightarrow B \subset A^c$) on obtient : $\overline{B} = X$ si $B \not\subset A^c$, $\overline{B} = A^c$ si $\emptyset \ne B \subset A^c$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
Tout ce qui précède reste correct si $A = \emptyset$ ou $A = X$, mais on peut toujours (si $X \ne \emptyset$) supposer que $A \ne \emptyset$, puisque $\mathcal{T}$ est la même dans ce cas que dans le cas $A = X$.
Comme $\mathrm{Fr}B = \overline{B} \setminus \mathring{B}$, on trouve alors (si $A \ne \emptyset$) : $\mathrm{Fr}(\emptyset) = \mathrm{Fr}(X) = \emptyset$, $\mathrm{Fr}(B) = A^c$ si $\emptyset \ne B \subset A^c$ ou si $X \ne B \supset A$, $\mathrm{Fr}(B) = X$ si $B \not\subset A^c$ et $B \not\supset A$.
(En particulier si $A = X$: $\mathrm{Fr}B = \emptyset$ si $B = \emptyset$ ou si $B = X$, et $\mathrm{Fr}B = X$ sinon).

Exercice 19.

a) La topologie usuelle sur $\mathbf{R}^2$ (donnée par la distance associée à n'importe quelle norme) coïncide avec la topologie produit, pour laquelle tout produit de deux ouverts de $\mathbf{R}$ est ouvert. Ou moins "savamment" : considérons que la topologie usuelle sur $\mathbf{R}^2$ est donnée par la distance associée à la norme $\|(x,y)\| = \max(|x|, |y|)$. Les boules ouvertes pour cette distance sont les carrés $]\alpha - r, \alpha + r[\times]\beta - r, \beta + r[$. Pour tout $(x,y) \in]a,b[\times]c,d[$, il existe un tel carré contenant (x,y) et inclus dans $]a,b[\times]c,d[$.

b) C'est la boule fermée de centre (a,b) et de rayon $|r|$ pour la distance associée à la norme euclidienne $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (dont la topologie associée est la topologie usuelle sur $\mathbf{R}^2$). Or dans un espace métrique, toute boule fermée est un fermé de la topologie associée.

c) Cette bande B est ouverte, par la même méthode que dans a) (en remplaçant $]c, d[$ par $\mathbf{R}$). De même, $]-\infty, a[\times\mathbf{R}$ et $]b, +\infty[\times\mathbf{R}$ sont ouverts, donc leur réunion aussi, donc le complémentaire $[a, b] \times \mathbf{R}$ est un fermé contenant $]a, b[\times\mathbf{R}$. Montrons que c'est le plus petit : pour toute suite $(x_n, y_n) \in]a, b[\times\mathbf{R}$ convergeant vers $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on a $a < x_n < b$ et $x_n \to x$ donc $a \leq x \leq b$, donc $(x, y) \in [a, b] \times \mathbf{R}$. Conclusion : $\overline{B} = [a, b] \times \mathbf{R}$ et $\mathrm{Fr}B = \{a, b\} \times \mathbf{R}$ (généralisation : cf exercice 57).

Exercice 20. $\emptyset =] - x, x[$ pour $x = 0$, $\mathbf{R} =] - x, x[$ pour $x = +\infty$, $] - x, x[\cap] - y, y[=] - z, z[$ pour $z = \min(x, y)$, et pour tout $I \subset [0, +\infty]$ non vide, $\cup_{x\in I}] - x, x[=] - z, z[$ pour $z = \sup I$. Donc $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbf{R}$.
L'intérieur de $\{a\}$ est $\emptyset$ et son adhérence (donc aussi sa frontière) est $] - \infty, -|a|] \cup [|a|, +\infty[$ (car l'intérieur de son complémentaire $] - \infty, a[\cup]a, +\infty[$ est $] - |a|, |a|[$).
Plus généralement, l'intérieur de $[a, b]$ est $] - x, x[$ où $c = \min(-a, b)$ si $a \leq 0 \leq b$ et $\emptyset$ sinon, l'intérieur de son complémentaire $] - \infty, a[\cup]b, +\infty[$ est $] - a, a[$ si $a \geq 0$, $]b, -b[$ si $b \leq 0$, $\emptyset$ si $a \leq 0 \leq b$, donc l'adhérence de $[a, b]$ est $] - \infty, -a] \cup [a, +\infty[$ si $a \geq 0$, $] - \infty, b] \cup [-b, +\infty[$ si $b \leq 0$, $\mathbf{R}$ si $a \leq 0 \leq b$, donc la frontière de $[a, b]$ est $] - \infty, -c] \cup [c, +\infty[$ si $a \leq 0 \leq b$ (avec $c = \min(-a, b)$), $] - \infty, -a] \cup [a, +\infty[$ si $a \geq 0$, $] - \infty, b] \cup [-b, +\infty[$ si $b \leq 0$.

Exercice 21.

a) $\mathrm{Fr}(A) \subset \left(\mathring{A}\right)^c$ donc $\overset{\circ}{\mathrm{Fr}(A)}$ est inclus dans l'intérieur de $\left(\mathring{A}\right)^c$, c'est-à-dire dans $\left(\overline{\mathring{A}}\right)^c$. Par ailleurs, $\overset{\circ}{\mathrm{Fr}(A)} \subset \mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}$. Donc $\overset{\circ}{\mathrm{Fr}(A)} \subset \left(\overline{\mathring{A}}\right)^c \cap \overline{A}$, ce qui, si A est ouvert, donne $\overset{\circ}{\mathrm{Fr}(A)} \subset \left(\overline{A}\right)^c \cap \overline{A} = \emptyset$. Si A est fermé on en déduit $\overset{\circ}{\mathrm{Fr}(A)} = \emptyset$ (puisque $\mathrm{Fr}(A)$ est toujours égal à $\mathrm{Fr}(A^c)$). Mais pour A quelconque le résultat est faux : exemple dans $\mathbf{R}$, $A = \mathbf{Q}$, $\mathrm{Fr}(A) = \mathbf{R}$.

b) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ donc $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(A) \setminus A \Leftrightarrow \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \setminus A \Leftrightarrow \mathring{A} = A \Leftrightarrow A$ est ouvert.

c) D'après b) et puisque $\mathrm{Fr}(A^c) = \mathrm{Fr}(A)$, A est fermé $\Leftrightarrow A^c \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subset A$.

d) D'près b) et c), A est ouvert et fermé $\Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subset A^c \cap A \Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.

e) $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}A$ car $\overline{A} \setminus \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A}$ car $\mathring{\overline{A}} \supset \mathring{A}$ car $\overline{A} \supset A$.
$\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ car $\overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A}$ car $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$.
Soit $A =] - \infty, 0[\cup]0, 1[\cup\{2\}$: $\mathring{A} =] - \infty, 0[\cup]0, 1[$, $\overline{A} =] - \infty, 1] \cup \{2\}$, $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) = \{0, 1\}$, $\mathrm{Fr}(A) = \{0, 1, 2\}$, $\mathrm{Fr}(\overline{A}) = \{1, 2\}$.

Exercice 22.

a) $\mathrm{Fr}(A\cup B) = \overline{A \cup B}\setminus \overset{\circ}{A \cup B} \subset (\overline{A}\cup\overline{B})\setminus \overset{\circ}{A \cup B} = (\overline{A}\setminus \overset{\circ}{A \cup B})\cup(\overline{B}\setminus \overset{\circ}{A \cup B}) \subset (\overline{A}\setminus\mathring{A})\cup(\overline{B}\setminus\mathring{B}) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

b) Soient $A =] - \infty, 0[$ et $B = [0, +\infty[$, alors $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(\mathbf{R}) = \emptyset$ tandis que $\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) = \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$.

c) On a toujours $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Supposons $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ et montrons que $\mathrm{Fr}(A)$ est aussi inclus dans $(\overset{\circ}{A \cup B})^c$, ainsi on aura $\mathrm{Fr}(A) \subset \mathrm{Fr}(A\cup B)$, et de même en échangeant A et B, d'où l'inclusion dans un sens (l'autre sens a été vu dans a)). Par passage aux complémentaires, l'inclusion à démontrer devient $(\overset{\circ}{A \cup B}) \cap \overline{A} \subset \mathring{A}$. Or par hypothèse, $(\overset{\circ}{A \cup B}) \cap \overline{A}$ est inclus dans $(\overset{\circ}{A \cup B}) \cap (\overline{B})^c$, qui est un ouvert inclus dans $(A \cup B) \cap B^c$ donc dans A, ce qui conclut.

Exercice 23.

a) Les deux applications $X \mapsto \overset{\circ}{X}$ et $X \mapsto \overline{X}$ sont croissantes, donc leurs deux composées α, β aussi.

b) $A \subset \overline{A}$ et $X \mapsto \overset{\circ}{X}$ est croissante, d'où $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A)$. $\overset{\circ}{X} \subset X$, d'où $\alpha(A) \subset \overline{A}$. La seconde suite d'inclusions se démontre de même, ou se déduit de la première par passage aux complémentaires.

c) De a) et b) on tire $\alpha(\overset{\circ}{F}) \subset \alpha(F)$ et $\overset{\circ}{G} \subset \alpha(G)$. Appliqué à $F = \overline{A}$ et $G = \overset{\circ}{F}$, ceci donne $\alpha \circ \alpha = \alpha$. On en déduit $\beta \circ \beta = \beta$ par passage aux complémentaires (ou on le démontre de même).

d) Plus généralement soient A, B disjoints avec B ouvert (et A quelconque). Alors B^c est un fermé contenant A donc contenant $\overline{A}$, donc son intérieur contient $\alpha(A)$, donc $\alpha(A)$ est disjoint de $\overline{B}$, donc (d'après la deuxième inclusion de b)) disjoint de $\alpha(B)$. (Par ailleurs, $\alpha(A)$ et $\alpha(B)$ sont toujours ouverts par définition).

e) cf f)

f) $\overset{\circ}{A} =]0,1[\cup]1,2[$, $\overline{A} = [0,2] \cup \{3\} \cup [4,5]$, $\alpha(A) =]0,1[\cup]4,5[$, $\beta(A) = [0,2]$, $\alpha\left(\overset{\circ}{A}\right) = \beta(\overset{\circ}{A}) =]0,2[$, $\beta\left(\overline{A}\right) = \overline{\alpha(A)} = [0,1] \cup [4,5]$.

Exercice 24. Notons B le complémentaire de A. Toute partie dense rencontre $A \Leftrightarrow$ toute partie de B est non dense $\Leftrightarrow$ B est non dense $\Leftrightarrow$ A est d'intérieur vide.

Exercice 25.

a) Soit $A = \cup_{i\in I} A_i$. Pour tout $i \in I$, $A_i \subset A$ donc $\overline{A_i} \subset \overline{A}$, d'où $\cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{A}$. Pour prouver l'inclusion réciproque dans le cas I fini, il suffit de remarquer que pour toutes parties A, B de E, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant contenant $A \cup B$, donc contenant le plus petit d'entre eux, $\overline{A \cup B}$.

b) Soient $B = \{1/k, k \in \mathbf{N}^*\}$ et $C = \overline{B} = B \cup \{0\}$, alors $\overline{A_i} = \overline{\{1/i\} \times B} = \overline{\{1/i\}} \times \overline{B} = \{1/i\} \times C$, donc $\cup_{i\in\mathbf{N}^*}\overline{A_i} = B \times C$, tandis que $\cup_{i\in\mathbf{N}^*} A_i = B \times B$ a pour adhérence $\overline{B} \times \overline{B} = C \times C$. Ceci fournit donc un contre-exemple à l'égalité dans (a).

c) $\cap_{i\in I}\overline{A_i}$ est un fermé contenant $\cap_{i\in I} A_i$ donc contenant son adhérence. L'inclusion peut être stricte même si I est fini : exemple dans $\mathbf{R}$, $A_1 =]-\infty, 0[$, $A_2 =]0, +\infty[$.

d) Par passage aux complémentaires on en déduit : $\cap_{i\in I}\left(\overset{\circ}{B_i}\right) \supset (\overset{\circ}{\cap_{i\in I} B_i})$, et il y a égalité lorsque I est fini ; $(\overset{\circ}{\cap_{i\in I} B_i}) \supset \cup_{i\in I}\left(\overset{\circ}{B_i}\right)$ mais l'inclusion peut être stricte même si I est fini.

Exercice 26. Remarque préliminaire (qui servira à la fois pour a et pour b) :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall g \in G \cap \mathbf{R}_+^*, \exists n \in \mathbf{Z}, 0 \leq x - ng < g$$

(il suffit de prendre $n = E(x/g)$).

a) Montrons d'abord que $\alpha \in G$ (autrement dit : $\alpha\mathbf{Z} \subset G$). Sinon, il existerait une suite $g_n \in G$ décroissant strictement vers α. On aurait alors $g_n - g_{n+1} \in G \cap \mathbf{R}_+^*$ tendant vers 0, ce qui contredirait $\alpha > 0$. Montrons que réciproquement, $G \subset \alpha\mathbf{Z}$. Appliquons la remarque à un $x \in G$ et à $g = \alpha$. Alors $r := x - n\alpha \in G \cap [0, \alpha[$ donc $r = 0$ donc $x = n\alpha$.

b) Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$, appliquons la remarque à $x = a$ et à $g \in G \cap]0, b-a[$. Alors $a < (n+1)g < ng + b - a \leq b$ donc $G \cap]a, b[$ est non vide (il contient $(n+1)g$).

c) (Si $G = \{0\}$, $\alpha = -\infty$). Les sous-groupes fermés de $\mathbf{R}$ sont $\{0\}$, les $\alpha\mathbf{Z}$ avec $\alpha > 0$ (isomorphes à $\mathbf{Z}$), et $\mathbf{R}$.

d) Si $G = \alpha\mathbf{Z}$ alors $1, \lambda \in \alpha\mathbf{Z}$ donc $\lambda = \lambda/1 \in \mathbf{Q}$. Réciproquement si $\lambda = p/q$ avec $p, q \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux, $\mathbf{Z} + \lambda\mathbf{Z} = (q\mathbf{Z} + p\mathbf{Z})/q = \alpha\mathbf{Z}$ pour $\alpha = 1/q$.

Exercice 27.

a) Soient H un tel sous-groupe et G son image dans $\mathbf{R}$ par l'homéomorphisme log. Si G est dense dans $\mathbf{R}$, H est dense dans $\mathbf{R}_+^*$. Si $G = \alpha\mathbf{Z}$ alors $H = \exp(G) = \{\beta^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ pour $\beta = \exp\alpha$ ($= \inf(H \cap]1, +\infty[)$ si $\alpha > 0$). Soient K un sous-groupe de $\mathbf{R}^*$ non inclus dans $\mathbf{R}_+^*$ et $H = K \cap \mathbf{R}_+^*$, $\gamma \in K \setminus H$ (donc $K = H \cup \gamma H$). Si H est dense dans $\mathbf{R}_+^*$, K est dense dans $\mathbf{R}^*$. Si $H = \{1\}$, $K = \{-1, 1\}$. Si $H = \{\beta^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ avec $\beta > 1$, comme $\gamma^2 \in H$, il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $\gamma = -\beta^{n_0/2}$, et on peut se ramener à $n_0 = 0$ ou 1 (selon la parité de n_0), donc $K = H \cup -H \simeq \mathbf{Z} \times \{-1, 1\}$ ou $K = \{\delta^n \mid n \in \mathbf{Z}\} \simeq \mathbf{Z}$ avec $\delta = -\sqrt{\beta}$.

b) Soient H un tel sous-groupe et G son image réciproque par $x \mapsto \exp(ix)$ (donc $2\pi \in G$). Si G est dense dans $\mathbf{R}$, H est dense dans U. Si $G = \alpha\mathbf{Z}$ alors $\exists n \in \mathbf{Z}, \alpha = 2\pi/n$ donc $H =$ le sous-groupe des n racines n-ièmes de l'unité.

c) Soit $H = \{\exp(in) \mid n \in \mathbf{Z}\}$. D'après (b) (comme $\pi \notin \mathbf{Q}$) H est dense dans U, d'où le résultat par projection.

Exercice 28. (Remarque : Réciproquement, pour toute topologie sur X, l'application "adhérence" vérifie ces 4 propriétés). Posons $\mathcal{G} = \{\varphi(A), A \subset X\}$ et $\mathcal{H} = \{A \subset X, \varphi(A) = A\}$. On a évidemment $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ mais réciproquement, par (4), $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. La stabilité par intersection sera plus facile à prouver en utilisant la formulation $\mathcal{H}$. Unicité : soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés d'une telle topologie, alors $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{H}$. Existence : Montrons que $\mathcal{H}$ vérifie les axiomes de l'ensemble des fermés d'une topologie et que pour cette topologie, $\overline{A} = \varphi(A)$. Par (1), $\emptyset \in \mathcal{H}$. Par (3), $X \in \mathcal{H}$. Par (2), $\mathcal{H}$ est stable par unions finies. De plus, par (2), φ est croissante (i.e. $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$), donc $\forall A_i \in \mathcal{H}$, soit $A = \cap A_i$, on a $\forall i, \varphi(A) \subset \varphi(A_i) = A_i$, d'où $\varphi(A) \subset \cap A_i = A$, d'où par (3) $A \in \mathcal{H}$. Enfin, pour tout $A \subset X$, $\varphi(A) \in \mathcal{G}$ et $\forall B \in \mathcal{H}$ tel que $A \subset B$, $\varphi(A) \subset \varphi(B) = B$.

Exercice 29.

a) D'abord, chaque $V(f; A, \varepsilon)$ est bien un voisinage de f pour $\mathcal{T}$ puisqu'il contient f et que c'est un ouvert de $\mathcal{T}$, et même un ouvert élémentaire : $V(f; A, \varepsilon) = \prod_{x \in I} O_i$ avec $O_x =]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ (ouvert de $\mathbf{R}$) si $x \in A$ (fini) et $O_x = \mathbf{R}$ si $x \in I \setminus A$. Montrons ensuite que tout voisinage V de f pour $\mathcal{T}$ contient un tel $V(f; A, \varepsilon)$: V contient un ouvert Ω contenant f, et (par définition de $\mathcal{T}$) Ω est une réunion d'ouverts élémentaires. Il existe donc un ouvert élémentaire O tel que $f \in O \subset V$. Par définition des ouverts élémentaires, O est de la forme $\prod_{i \in I} O_i$ avec O_i ouverts de $\mathbf{R}$, presque tous égaux à $\mathbf{R}$ c'est-à-dire qu'il existe une partie finie A de I telle que $\forall i \in I \setminus A, O_i = \mathbf{R}$. Puisque $f \in O$, on a $\forall i \in I, f(i) \in O_i$. En particulier $\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0,]f(x) - \varepsilon_x, f(x) + \varepsilon_x[\subset O_x$. Posons $\varepsilon = min_{x \in A} \varepsilon_x$. Alors $V(f; A, \varepsilon) \subset O$.

b) Pour tout $x \in I$, la projection $p_x : E \to \mathbf{R}, f \mapsto f(x)$ est continue, donc si $f_n \to f$ alors $p_x(f_n) \to p_x(f)$ i.e. $f_n(x) \to f(x)$. Réciproquement, supposons que $\forall x \in I, f_n(x) \to f(x)$. Soient A fini $\subset I$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in A$ il existe N_x tel que $\forall n \geq N_x, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Posons $N = max_{x \in A} N_x$. Alors $\forall n \geq N, f_n \in V(f; A, \varepsilon)$. On a donc $f_n \to f$. Autre méthode, permettant de prouver directement l'équivalence : soit $\mathbf{N}$ muni de la topologie discrète et $\tilde{N}$ son compactifié d'Alexandrov (cf exercice 78). Une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (à valeurs dans un espace topologique X qui pour nous sera E ou $\mathbf{R}$) tend vers $x \in X$ (quand $n \to +\infty$) si et seulement si l'application $\tilde{x} : \tilde{N} \to X$ (définie par $\tilde{x}(\infty) = x$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \tilde{x}(n) = x(n)$) est continue. Donc $f_n \to f \Leftrightarrow \tilde{f} : \tilde{N} \to E$ continue $\Leftrightarrow$ (par définition de la topologie produit) $\forall x \in I, p_x \circ \tilde{f} : \tilde{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ continue $\Leftrightarrow \forall x \in I, f_n(x) \to f(x)$.

c) Soient $f \in E$, A fini $\subset I$ et $\varepsilon > 0$, montrons que $V(f; A, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$: définissons $g \in E$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = 0$ si $x \notin A$, alors $g \in V(f; A, \varepsilon) \cap S$.

d) Notons pour tout $f \in E$, $S(f) = \{x \in I | f(x) \neq 0\}$. (Par exemple pour $f =$ une fonction constante non nulle, $S(f) = I$, non dénombrable par hypothèse). Raisonnons par contraposée : Supposons $f_n \in S$ et $f_n \to f$ et montrons qu'alors $S(f)$ est au plus dénombrable. Pour tout $x \in S(f)$ on a d'après b) $\exists N, \forall n \geq N, x \in S(f_n)$, en particulier $\exists n, x \in S(f_n)$. Donc $S(f) \subset \cup_{n \in \mathbf{N}} S(f_n)$, union dénombrable d'ensembles finis, donc au plus dénombrable.

e) Soit $f \in E$ telle que $S(f)$ soit non dénombrable, alors d'après c) $f \in \overline{S}$, pourtant d'après d) f n'est pas limite d'éléments de S. Donc l'ensemble des voisinages de f n'est pas à base dénombrable.

Exercice 30. $\mathcal{T}$ est une topologie sur X : cf exercice 18.

a) (Rappel : V est voisinage de x ssi V contient un ouvert contenant x). Si $x = a$, les voisinages de x sont toutes les parties de X contenant a. Si $x \neq a$, le seul voisinage de x est X.

b) (cf exercice 18) $\mathring{A} = \emptyset$ si $a \notin A$, $\mathring{A} = \{a\}$ si $a \in A \neq X$, $\mathring{X} = X$. $\overline{A} = X$ si $a \in A$, $\overline{A} = X \setminus \{a\}$ si $a \notin A \neq \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$. $\mathrm{Fr}(\emptyset) = \mathrm{Fr}(X) = \emptyset$, $\mathrm{Fr}(A) = X \setminus \{a\}$ si $A \neq \emptyset, X$.
Dans tout espace topologique, $\emptyset'$ et $\mathrm{Is}(\emptyset)$ sont inclus dans $\overline{\emptyset} = \emptyset$ donc sont vides, et pour toute partie A, $A' = \overline{A} \setminus \mathrm{Is}(A)$. Reste à déterminer $\mathrm{Is}(A)$ pour A non vide. Soit $x \neq a$, x est un point isolé de A ssi il existe un voisinage de x qui ne rencontre A qu'en x, donc (d'après a)) ssi $A = \{x\}$. Par contre, a est un point isolé de A ssi $a \in A$. On a donc : si $a \in A$, $\mathrm{Is}(A) = \{a\}$ et $A' = X \setminus \{a\}$; si $a \notin A$ et A a au moins deux éléments, $\mathrm{Is}(A) = \emptyset$ et $A' = X \setminus \{a\}$; si $A = \{x\}$ avec $x \neq a$, $\mathrm{Is}(A) = \{x\}$ et $A' = X \setminus \{a, x\}$.

Exercice 31.

A_1 a pour intérieur $]-\infty, 1[\cup]1, 2[$ et pour adhérence $]-\infty, 2] \cup \{3, 14\}$ donc pour frontière $\{1, 2, 3, 14\}$. $A_1' =]-\infty, 2]$, $\mathrm{Is}(A_1) = \{3, 14\}$.

$\mathbf{Z}$ est fermé d'intérieur vide. Dans $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$, tout point est isolé. $\mathrm{Fr}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

A_3 est (dénombrable donc) d'intérieur vide. Dans $\overline{A_3} = A_3 \cup \{-1, 1\}$, tout point de A_3 est isolé et ± 1 sont points d'accumulation de A_3. $\mathrm{Fr}(A_3) = \overline{A_3}$.

$\mathbf{Q}$ est d'intérieur vide et dense dans $\mathbf{R}$. Dans $\overline{Q} = \mathbf{R}$, tout point est point d'accumulation de $\mathbf{Q}$. $\mathrm{Fr}(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$.

Exercice 32. $A = B \cup C \cup D$ avec $B =]-\infty, -1] \times \{0\}$, $C = [-1, 0[\times[-1, 1[$, $D =]0, 1[\times[-1, 1[$ donc (cf exercice 25.a) $\overline{A} = \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D} = (]-\infty, -1] \times \{0\}) \cup ([-1, 0] \times [-1, 1]) \cup ([0, 1] \times [-1, 1]) = (]-\infty, -1] \times \{0\}) \cup ([-1, 1] \times [-1, 1])$.
$\mathring{A} \subset A$ donc $\mathring{A} = (B \cap \mathring{A}) \cup (C \cap \mathring{A}) \cup (D \cap \mathring{A}) = \emptyset \cup (]-1, 0[\times]-1, 1[) \cup (]0, 1[\times]-1, 1[) = (]-1, 1[\times]-1, 1[) \cap (\mathbf{R}^* \times \mathbf{R})$.
$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = B \cup (\{-1, 0, 1\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{-1, 1\})$.
$\mathrm{Is}(A) = \emptyset$ donc $A' = \overline{A}$.

Exercice 33. Posons $B = A \setminus \{x\}$ et raisonnons par contraposée. Soit x tel qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x pour lequel $I \cap A$ est fini (donc $I \cap B$ aussi). Alors $I \cap B$ est fermé (comme union finie de singletons, qui dans $\mathbf{R}$ sont fermés) donc $O := I \setminus B$ est un ouvert, qui contient x, et disjoint de B, donc $x \notin \overline{B}$, i.e. $x \notin A'$.

Exercice 34. Soit $A = \cup_{i\in I} A_i$. Montrons plus généralement que si $(A_i)_{i\in I}$ est localement finie alors $\overline{A} = \cup_{i\in I}\overline{A_i}$. On a déjà une inclusion (cf exercice 25.a). Réciproquement soit $x \in \overline{A}$, montrons que x appartient à l'un des $\overline{A_i}$. Soit V un voisinage de x ne rencontrant A_i que pour $i \in J$ (fini), et soit $B = \cup_{i\in J} A_i$. Pour tout voisinage W de x, $U := W \cap V$ est voisinage de x donc $\emptyset \neq U \cap A = W \cap (V \cap A) = W \cap (V \cap B) \subset W \cap B$, donc $x \in \overline{B}$, i.e. (cf exercice 25.a) $\exists i \in J, x \in \overline{A_i}$.

Exercice 35.

a) $\overline{A} = A' \cup \mathrm{Is}(A) \subset A' \cup A$ et $A' \cup A \subset \mathrm{Is}(A) \cup A' \cup A = \overline{A} \cup A = \overline{A}$, d'où l'égalité.
Supposons $A \subset B$ et $x \in A'$ i.e., en posant $C = A \setminus \{x\}$, $x \in \overline{C}$. Alors, en posant $D = B \setminus \{x\}$, on a $C \subset D$ donc $x \in \overline{D}$ i.e. $x \in B'$.

b) Soit $A = \cup_{i\in I} A_i$. D'après l'implication précédente, $\forall i \in I, A'_i \subset A'$, i.e. $\cup_{i\in I}(A'_i) \subset A'$.

Exercice 36.

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X = \emptyset^c \in \mathcal{T}$. Soient $U, V \in \mathcal{T}$. Si U ou V est vide, $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{T}$. Sinon, $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ est fini donc à nouveau, $U \cap V \in \mathcal{T}$. Soient $U_i \in \mathcal{T}$ et $U = \cup_{i\in I} U_i$. Si tous les U_i sont vides alors $U = \emptyset \in \mathcal{T}$. Sinon, il existe $j \in I$ tel que U_j^c soit fini, or $U^c \subset U_j^c$, donc U^c est fini donc à nouveau, $U \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ est donc bien une topologie sur X.
Soient $x, y \in X$ distincts (quelconques !). Pour tous ouverts $U \ni x, V \ni y$, $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ est fini donc différent de X, i.e. $U \cap V \neq \emptyset$. Donc $\mathcal{T}$ n'est pas séparée (du tout !).

b) Soient $x, y \in X$ distincts et $U = \{y\}^c$. Alors U est ouvert, $x \in U$, $y \notin U$.

Exercice 37.

a) Simplifions i) par équivalences (en posant $O = F^c$ et $G = \Omega^c$) : i) $\Leftrightarrow$ pour tout ouvert O de X contenant x, il existe un voisinage V de x et un fermé G inclus dans O tels que $V \subset G \Leftrightarrow$ pour tout ouvert O de X contenant x, O contient un voisinage fermé G de x.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Soit W un voisinage de x, il contient un ouvert O contenant x et un tel O contient, par i), un voisinage fermé G de x, donc $G \subset W$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Soit W un voisinage de x, il contient, par ii), un voisinage fermé G de x et un tel G contient un ouvert U contenant x, donc $\overline{U} \subset G \subset W$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Soit O un ouvert contenant X, il existe, par iii), un ouvert U contenant x tel que $\overline{U} \subset O$. $G := \overline{U}$ est un voisinage fermé de x.

b) Soient X régulier et $Y \subset X$. Alors Y est séparé, et x admet dans X un système fondamental $(G_i)_{i\in I}$ de voisinages fermés. Les $G_i \cap Y$ forment alors un système fondamental de voisinages de x dans Y, et sont fermés dans Y.

c) Soit X vérifiant i). Raisonnons par contraposée : soient F un fermé différent de X et $x \in F^c$, il existe (d'après i)) un ouvert Ω contenant F tel que $x \notin \Omega$, donc tel que $\Omega \neq X$.

Exercice 38.

a) Soit X complètement régulier, montrons que X vérifie la propriété i) de l'exercice 37. Soit F fermé ne contenant pas a. Il existe $f : X \to [0,1]$ continue telle que $f(F) \subset \{0\}$ et $f(a) = 1$. On peut alors prendre $V = f^{-1}(]1/2, 1])$ et $\Omega = f^{-1}([0, 1/2[)$.

b) Soient X complètement régulier, $Y \subset X$, G un fermé de Y, et $a \in Y \setminus G$. Alors G est de la forme $F \cap Y$ avec F fermé de X ne contenant pas a. Il existe $f : X \to [0,1]$ continue t.q. $f(F) \subset \{0\}$ et $f(a) = 1$. En posant $g =$ la restriction de f à Y on a donc $g : Y \to [0,1]$ continue t.q. $g(G) \subset \{0\}$ et $g(a) = 1$.

c) Soient X, Y complètement réguliers (donc séparés, donc $X \times Y$ est séparé), F un fermé de $X \times Y$ et $(a, b) \in F^c$. Alors F^c est un ouvert contenant (a, b) donc il existe U ouvert de X et V ouvert de Y t.q. $(a, b) \in U \times V \subset F^c$, i.e. t.q. $a \notin U^c$, $b \notin V^c$ et $F \subset (U \times V)^c = (U^c \times Y) \cup (X \times V^c)$. Il existe $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f(U^c) \subset \{0\}$ et $f(a) = 1$, et $g : Y \to [0, 1]$ continue telle que $g(V^c) \subset \{0\}$ et $g(b) = 1$. Définissons $f : X \times Y \to [0, 1]$ par $h(x, y) = f(x)g(y)$. Alors $h(F) \subset \{0\}$ et $h(a, b) = 1$.

Exercice 39. Soit X normal.

a) X est séparé donc tout singleton est fermé.

b) Soient F, G fermés disjoints. Soit $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f(F) \subset \{0\}$ et $f(G) \subset \{1\}$. Alors $[0, 1/2[$ et $]1/2, 1]$ sont deux ouverts de $[0, 1]$, disjoints, contenant respectivement 0 et 1, donc leurs images réciproques par f sont deux ouverts de X, disjoints, contenant respectivement F et G.

Remarque : contrairement à la régularité (exercice 37) et à la complète régularité (exercice 38), la normalité n'est pas stable par sous-espace. Cela tient à ce que deux fermés disjoints du sous-espace peuvent être les intersection de ce sous-espace avec deux fermés non disjoints.

Exercice 40. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des $]a, b[$ pour $a, b \in \mathbf{R}$.

a) Pour prouver que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbf{R}$ il suffit (cf exercices 14 et 15) de montrer que $\mathbf{R}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ et que l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$ est aussi une réunion d'élements de $\mathcal{B}$, ce qui se vérifie aisément. $\mathcal{T}$ est séparée car pour tous réels $x \neq y$, par exemple $x < y$, il existe $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $a < x < b < y < c$, et alors $]a, b[$ et $]b, c[$ sont deux éléments de $\mathcal{B}$ (donc de $\mathcal{T}$), disjoints et contenant respectivement x et y.

b) Soit $\mathcal{C}$ l'image de $\mathbf{Q}^2$ par l'application $(a, b) \mapsto]a, b[$. $\mathbf{Q}^2$ est dénombrable (car $\mathbf{Q}$ l'est) donc $\mathcal{C}$ aussi. Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$, pour montrer que $\mathcal{C}$ aussi il suffit de vérifier que tout élément de $\mathcal{B}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{C}$: $]a, b[= \cup_{c,d \in \mathbf{Q}, a<c<d<b}]c, d[$ car $\supset$ est immédiat et $\subset$ vient de ce qu'entre deux réels distincts il y a des rationnels (si $x < y$, soit q un entier $> \frac{1}{y-x}$ (il en existe car l'ordre sur $\mathbf{R}$ est archimédien), alors l'intervalle $]qx, qy[$ est de longueur > 1 donc contient au moins un entier p, d'où $x < p/q < y$).

c) Soit $O \in \mathcal{T}$. Pour tout $x \in O$, soient $a_x = \inf(\{a \in O \mid a < x\})$ et $b_x = \sup(\{b \in 0 \mid x < b\})$. Soit I l'image de O par l'application (non injective !) $x \mapsto]a_x, b_x[$. Alors les éléments de I sont non vides, deux à deux disjoints, et leur réunion est O. De plus, I est au plus dénombrable (cf exercice 7). Réciproquement, soit J une famille d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints dont la réunion est O. Montrons (sans même supposer a priori J au plus dénombrable) que $J = I$. Pour cela notons, pour tout $x \in O$, ω_x l'unique élément de J auquel x appartient. Alors $J = \{\omega_x \mid x \in O\}$ donc il suffit de prouver que $\forall x \in O, \omega_x =]a_x, b_x[$. Par construction on a déjà $\omega_x \subset]a_x, b_x[$, i.e. $\omega_x =]c_x, d_x[$ avec $a_x \leq c_x < x < d_x \leq b_x$. De plus, $c_x, d_x \notin O$, donc $c_x = a_x$ et $d_x = b_x$.

Exercice 41.

a) Soient $(O_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base dénombrable d'ouverts et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Soient $J \subset \mathbf{N}$ l'ensemble des n tels que O_n soit inclus dans au moins l'un des U_i, disons U_{i_n}, et $K \subset I$ l'ensemble des i_n quand n parcourt J. Par construction, K est au plus dénombrable. Pour tout $x \in E$, montrons que $x \in \cup_{k \in K} U_k$: soit $i \in I$ tel que $x \in U_i$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x \in O_n \subset U_i$, d'où $n \in J$, d'où, pour $k = i_n$, $k \in K$ et $x \in O_n \subset U_k$.

b) On peut supposer tous les O_n non vides (en éliminant ceux qui sont vides, ceux qui restent forment encore une base). Pour tout n soit $a_n \in O_n$, et soit $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Alors tout ouvert non vide contient au moins l'un des O_n, donc rencontre A. Donc A est dense.

Exercice 42. (Dans cet exercice, "dénombrable" est à prendre partout au sens de "au plus dénombrable"). Remarquons d'abord que tout ouvert dénombrable est inclus dans P^c.

a) Soient $x \notin P$, V un voisinage dénombrable de x, et O un ouvert tel que $x \in O \subset V$. Alors (d'après la remarque) $O \subset P^c$. Ceci prouve que P^c est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert.
Soient $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts et $\mathcal{C}$ le sous-ensemble des ouverts dénombrables de cette base. D'après la remarque, $\cup_{O\in\mathcal{C}} O \subset P^c$. Réciproquement, pour tout $x \in P^c$, soit V un voisinage dénombrable de x, il existe $O \in \mathcal{B}$ tel que $x \in O$ et $O \subset V$, donc $O \in \mathcal{C}$, d'où $x \in \cup_{O\in\mathcal{C}} O$. Donc $P^c = \cup_{O\in\mathcal{C}} O$, union dénombrable de dénombrables, est dénombrable.

b) (P^c est ouvert donc P est fermé). Soit $x \in P$, montrons que x est non isolé dans P. Pour tout voisinage V de x, V est non dénombrable donc $V \setminus \{x\}$ aussi donc (puisque P^c est dénombrable) $V \setminus \{x\} \not\subset P^c$, i.e. $(V \setminus \{x\}) \cap P \neq \emptyset$.

Exercice 43. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ est du cours (c'est l'une des cararctérisations équivalentes de la continuité d'une application). Redémontrons-le á partir de la caractérisation "pour tout fermé B de F, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E", appliquée á $B = \overline{f(A)}$: $f^{-1}(B)$ est un fermé de E et contient A (puisque B contient $f(A)$, cf exercice 2.a), donc $\overline{A} \subset f^{-1}(B)$, i.e. $f(A) \subset B$.
Remarque : l'inclusion réciproque est fausse en général. Par exemple si $E = \mathbf{R}^*$, $F = \mathbf{R}$, $f(x) = 1/x$ et $A = [1, +\infty[$, alors $f(\overline{A}) = f(A) =]0, 1]$ tandis que $\overline{f(A)} = \overline{]0, 1]} = [0, 1]$.
L'adhérence de $f(A)$ dans $f(E)$ (pour la topologie induite) est toujours $\overline{f(A)} \cap f(E)$, qui d'aprés ce qui précéde contient $f(\overline{A})$. En particulier si $\overline{A} = E$, $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

Exercice 44. Soit $h = (g\circ f)^{-1}$ (continue). Pour prouver que f est un homéomorphisme, montrons que f est bijective, de bijection réciproque $h \circ g$ (continue) : on a d'une part $(h \circ g) \circ f = id_E$ et d'autre part $f \circ (h \circ g) = id_F$, puisque $f \circ (h \circ g) \circ f = f \circ id_E = f = id_F \circ f$ et que f est surjective.
On en déduit que $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est aussi un homéomoprphisme.

Exercice 45.

a) Si $x \in A$, χ_A est continue en x ssi $\chi_A^{-1}(1) \in \mathcal{V}(x)$ i.e. ssi $x \in \mathring{A}$. Si $x \in A^c$, χ_A est continue en x ssi $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ l'est, donc ssi $x \in \mathring{A^c}$, i.e. $x \notin \overline{A}$. Donc χ_A est discontinue en x ssi $x \in \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathrm{Fr}A$.

b) D'arpès a, χ_A est continue sur X ssi $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, i.e. $\overline{A} = \mathring{A}$, i.e. A est à la fois ouvert et fermé.

c) D'après b, toutes les χ_A sont continues sur X ssi tous les A sont à la fois ouverts et fermés, i.e. ssi $\mathcal{T}$ est la topologie discrète.

Exercice 46.

a) $\emptyset \in \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{T}$, $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{T}$.
Soient $U_i \in \mathcal{T}$ et $U = \cup_{i\in I} U_i$. Si tous les U_i sont inclus dans E alors $U \in \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{T}$. Sinon, soit $j \in I$ tel que $X \setminus U_j$ soit une partie au plus dénombrable de E. Alors $X \setminus U \subset X \setminus U_j$ est aussi une partie au plus dénombrable de E donc $U \in \mathcal{T}$.
Soient $U_i \in \mathcal{T}$ et $U = \cap_{i\in I} U_i$, avec I fini ou dénombrable. Si a appartient à tous les U_i alors tous les $X \setminus U_i$ sont des parties au plus dénombrables de E donc $X \setminus U = \cup_{i\in I}(X \setminus U_i)$ aussi (puisque I est au plus dénombrable), donc $U \in \mathcal{T}$. Sinon, $a \notin U$ donc $U \in \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{T}$.
Donc $\mathcal{T}$ est une topologie pour laquelle toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert.

b) Soient $x, y \in X$ distincts, cherchons U, V ouverts disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. Si $x, y \neq a$, $U = \{x\}$ et $V = \{y\}$ conviennent. Sinon, par exemple $x = a$ (donc $y \neq a$), $U = X \setminus \{y\}$ et $V = \{y\}$ conviennent.

c) Pour toute topologie $\mathcal{T}'$ sur X, si $\{x\}$ est un voisinage de x, les suites à valeurs dans X qui convergent vers x sont les suites stationnaires, égales à x à partir d'un certain rang. Ceci s'applique à tout $x \in X$ si $\mathcal{T}'$ est la topologie discrète, et à tout $x \in E$ si $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Montrons que le résultat reste vrai si $x = a$ et $T' = \mathcal{T}$ (bien que $\{a\}$ ne soit pas un voisinage de a pour $\mathcal{T}$, ce qui prouve au passage que $\mathcal{T}$ n'est pas la topologie discrète).
Supposons $x_n \to a$ dans $(X, \mathcal{T})$ et posons $D = \{x_n \mid x_n \neq a\}$, alors $X \setminus D$ est un ouvert contenant a, donc il contient tous les x_n à partir d'un certain rang N, i.e. $\forall n \geq N, x_n = a$ (la réciproque est immédiate).

d) Soient $b = f(a)$ et $O_n = f^{-1}(]b-1/n, b+1/n[)$ (ouverts), alors f est constante sur $f^{-1}(\{b\}) = \cap_{n \in \mathbf{N}^*} O_n$ (cf exercice 2.d) qui est un ouvert (d'après a)) et contient a, donc qui est de la forme $X \setminus D$ avec D au plus dénombrable. Donc $f(X) = \{b\} \cup f(D)$ est au plus dénombrable.

Exercice 47.

a) Supposons f continue et $x_n \to a$. Pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a donc il existe N tel que $\forall n \geq N, x_n \in f^{-1}(V)$ i.e. tel que $\forall n \geq N, f(x_n) \in V$.

b) Supposons que a admet une base dénombrable de voisinages $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (que l'on peut supposer décroissante, quitte à remplacer V_n par $\cap_{k=0}^n V_k$) et que f n'est pas continue en a, et montrons que f n'est pas séquentiellement continue en a. Par hypothèse, il existe un voisinage V de $f(a)$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, f(V_n) \not\subset V$, i.e. $\exists x_n \in V_n, f(x_n) \notin V$. Une telle suite (x_n) converge vers a car $\forall N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, x_n \in V_n \subset V_N$, et pourtant $f(x_n) \not\to f(a)$ puisque $\forall n \in \mathbf{N}, f(x_n) \notin V$.

c) (On vérifie sans peine que $\mathcal{T}_E$ est bien une topologie sur $\mathbf{R}$). Soit $x_n \to a$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_E)$, et $D = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}, x_n \neq a\}$. Alors $\mathbf{R} \setminus D$ est un ouvert de $\mathcal{T}_E$ contenant a, donc il contient tous les x_n à partir d'un certain rang N, i.e. $\forall n \geq N, x_n = a$. Les suites convergentes de $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_E)$ sont donc les suites stationnaires. Elles sont convergentes pour toute autre topologie, en particulier pour $\mathcal{T}_F$. Donc $id : (\mathbf{R}, \mathcal{T}_E) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T}_F)$ est séquentiellement continue en tout point. Pourtant elle n'est continue en aucun point, car tout $a \in \mathbf{R}$ a des voisinages pour la topologie usuelle $\mathcal{T}_F$ qui ne sont pas voisinages de a pour $\mathcal{T}_E$: par exemple $]a-1, a+1[$. Ceci prouve que sans l'hypothèse faite dans b), la réciproque de a) est fausse.

Exercice 48. Soit $x \in A$, montrons que $f(x) \in A$. Soient V un voisinage de $f(x)$ et $N \in \mathbf{N}$. Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Comme $x \in A$, il existe donc $n \geq N$ tel que $y_n \in f^{-1}(V)$, i.e. $y_{n+1} = f(y_n) \in V$. Donc $f(x) \in A$. Ceci prouve que $f(A) \subset A$.
Si f est un homéomorphisme alors $f(A)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $f(y_n) = y_{n+1}$ donc $f(A) = A$.

Exercice 49.

a) Montrons que chacun des deux est homéomorphe à $\mathbf{R}$. Soit D une droite de $\mathbf{R}^2$. Soient $A, B \in D$ distincts et $f : \mathbf{R} \to D, t \mapsto tB + (1-t)A$. f est bijective, continue (car $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto tB + (1-t)A$ est continue, par continuité de ses deux composantes). f^{-1} est continue car si par exemple $x_A \neq x_B$, $f^{-1}(x, y) = (x - x_A)/(x_B - x_A)$ (si $x_A = x_B$, on a $y_A \neq y_B$ et une formule analogue avec les y). Soit $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, montrons que I est homéomorphe à $\mathbf{R}$. Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, $I = \mathbf{R}$. Si $a \in \mathbf{R}$ et $b = +\infty$, par translation on se ramène au cas $a = 0$, or $\ln :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est un homéomorphisme. Si $a = -\infty$ et $b \in \mathbf{R}$, par $x \mapsto -x$ on se ramène au cas précédent. Si $a, b \in \mathbf{R}$, par translation on se ramène au cas $a = -b$, puis par homothétie au cas $b = \pi/2$, or $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ est un homéomorphisme.

b) L'application $\mathbf{R}^* \to H, x \mapsto (x, 1/x)$ est une bijection, continue (car $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^2, x \mapsto (x, 1/x)$ est continue, par continuité de ses deux composantes), et la bijection réciproque est continue (car c'est la restriction à H de la projection $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x$, qui est continue). P est homéomorphe à $Q := \{-1, 1\} \times]0, +\infty[$ (car $\mathbf{R}$ est homéomorphe à $]0, +\infty[$ par exp, et $\{-1, 1\}$ est homéomorphe à $\{-1, 1\}$). L'application $Q \to \mathbf{R}^*, (s, x) \mapsto sx$ est une bijection continue, et la bijection réciproque est continue (comme restriction d'une application à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ dont chacune des deux composantes est continue).

Exercice 50. Expliquons d'abord pourquoi (avec cette définition de la connexité) une partie I de $\mathbf{R}$ (munie de la topologie induite) est connexe ssi I est un intervalle. Si I est un intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il n'existe pas de fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ qui prenne les valeurs 0 et 1 sans prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1, donc I est connexe. Si I n'est pas un intervalle, il existe $x < a < y$ tels que $x, y \in I$ et $a \notin I$. En définissant f sur I par $f(t) = 0$ si $t < a$ et $f(t) = 1$ si $t > a$ on prouve que I est non-connexe.

a) Si $-1 < a < 1$, $]-1, a[\cup]a, 1[$ n'est pas un intervalle (ou directement, n'est pas connexe : en reprenant l'argument ci-dessus).

b) De même si $-1 < b < 1$, $[-1, b[\cup]b, 1]$ n'est pas connexe. Par contre pour $b = -1$, $B \setminus \{b\} =]-1, 1]$ est un intervalle donc est connexe, et de même pour $b = 1$.

c) Par rotation, $C \setminus \{c\}$ est homéomorphe à $C \setminus \{(1, 0)\}$. L'application $f :]0, 2\pi[\to C \setminus \{(1, 0)\}$ définie par $f(x) = (\cos x, \sin x)$ est une bijection continue et $f^{-1}(a, b) = \arccos a$ si $b \geq 0$ et $\pi + \arccos(-a)$ (ou, ce qui revient au même, $2\pi - \arccos a$) si $b \leq 0$ donc (cf exercice 52.a) f^{-1} est continue. Donc $C \setminus \{(1, 0)\}$ est homéomorphe à $]0, 2\pi[$, donc $C \setminus \{c\}$ aussi. Vue sa définition, la connexité est une propriété topologique (i.e. préservée par homéomorphisme). Comme $]0, 2\pi[$ est connexe, $C \setminus \{c\}$ aussi.

d) S'il existait un homéomorphisme f de B dans A, il donnerait par restriction un homéomorphisme de $B \setminus \{1\}$ dans $A \setminus \{f(1)\}$, donc d'un connexe dans un non-connexe, absurde (on peut ici choisir -1 au lieu de 1). S'il existait un homéomorphisme g de B dans C, il donnerait par restriction un homéomorphisme de $B \setminus \{0\}$ dans $C \setminus \{g(0)\}$, donc d'un non-connexe dans un connexe, absurde (on peut ici choisir, au lieu de 0, n'importe quel $b \in]-1, 1[$). S'il existait un homéomorphisme h de A dans C, il donnerait par restriction un homéomorphisme de $A \setminus \{0\}$ dans $C \setminus \{h(0)\}$, donc d'un non-connexe dans un connexe, absurde (on peut ici choisir, au lieu de 0, n'importe quel $a \in A$).

e) Première variante : Si C était homéomorphe à une partie X de $\mathbf{R}$ on aurait d'après c) : $\forall x \in X, X \setminus \{x\}$ est un intervalle, i.e. tous les points de X sont du même côté de x, i.e. $x = \min(X)$ ou $\max(X)$, donc X aurait au plus deux points, donc C aussi, absurde.
Deuxième variante : Si C était homéomorphe à une partie X de $\mathbf{R}$, comme C est connexe (par arcs, ou comme adhérence du connexe $C \setminus \{(1, 0)\}$), X serait un intervalle de $\mathbf{R}$, qui (comme C) contiendrait au moins deux points $a < b$ (et même, une infinité). Pour $a < x < b$ on aurait $x \in X$ et $X \setminus \{x\}$ non connexe, donc X non homéomorphe à C.
Troisième variante : Si C était homéomorphe à une partie X de $\mathbf{R}$, comme C est connexe et compact, X serait de la forme $[a, b]$, avec $a < b$ puisque C n'est pas un singleton, donc X serait homéomorphe à B. Comme B n'est pas homéomorphe à C, c'est impossible.

Exercice 51.

a) L'adhérence de B pour $\mathcal{T}_A$ est l'intersection des fermés de A qui contiennent B, i.e. l'intersection des $F \cap A$ avec F fermé de X contentant B. L'intersection de ces F est $\overline{B}$ donc l'intersection de ces $F \cap A$ est $\overline{B} \cap A$.

b) Posons $A = B \cup C$. D'après a), B fermé dans $A \Leftrightarrow B = \overline{B} \cap A \Leftrightarrow B = B \cup (\overline{B} \cap C) \Leftrightarrow \overline{B} \cap C \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \cap C \subset B \cap C$. Donc B fermé dans A et disjoint de $C \Leftrightarrow \overline{B} \cap C = B \cap C = \emptyset \Leftrightarrow \overline{B} \cap C = \emptyset$.

c) Si $B \subset A$, $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B} \cap A$ est un ouvert de $\mathcal{T}_A$ inclus dans B, donc inclus dans l'intérieur de B pour $\mathcal{T}_A$. Exemple où ces deux ensembles sont distincts : $X = \mathbf{R}$, $\mathcal{T} =$ la topologie usuelle, $A = B = \mathbf{R}_+$. Pour $\mathcal{T}_A$, B est ouvert donc son intérieur est $B = \mathbf{R}_+$. Pour $\mathcal{T}$, $\overset{\circ}{B} = \mathbf{R}_+^*$.

Exercice 52.

a) Pour tout k, par définition de la topologie induite sur F_k, l'inclusion $i_k : F_k \to X, x \mapsto x$ est continue. Or $f_{|F_k} = f \circ i_k$. Donc si f est continue, $f_{|F_k}$ aussi. Réciproquement, supposons que toutes les $f_{|F_k}$ sont continue et montrons que f l'est. Soit F un fermé de Y, chaque $F \cap F_k = f_{|F_k}^{-1}(F)$ est un fermé de F_k, donc de X (puisque F_k est fermé dans X), donc $F = \cup_{1 \leq k \leq n}(F \cap F_k)$ est un fermé de X. Remarque : on aurait la même propriété en remplaant le recouvrement fermé fini par un recouvrement ouvert quelconque, en remplaçant partout dans la preuve “fermé” par “ouvert”.

b) Contre-exemple justifiant l'hypothèse de finitude : soient $f : \mathbf{R} \to Y$ non continue et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_x = \{x\}$ (fermé), alors $\mathbf{R} = \cup_{x \in \mathbf{R}} F_x$ et chaque $f_{|F_x}$ est continue. Contre-exemple justifiant l'hypothèse “fermés” : soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'indicatrice de $\mathbf{R}_+$, $F_1 = \mathbf{R}_+$, $F_2 = \mathbf{R}_-^*$, alors f n'est pas continue, bien que ses restrictions à F_1 et F_2 soient constantes donc continues.

c) Soient $F_1 = [0, 1/2]$ et $F_2 = [1/2, 1]$ (fermés recouvrant $[0, 1]$). $f_{|F_2}$ est continue, comme composée de ψ par l'application continue $[F_2 \to [0, 1], t \mapsto 2t - 1$. Même raisonnement $f_{|F_1}$, car la formule $f(t) = \varphi(2t)$ est vraie non seulement pour $0 \leq t < 1/2$ mais aussi pour $t = 1/2$, puisque $f(1/2) = \psi(0) = \varphi(1)$. D'après a), f est donc continue.

Exercice 53. f est continue ssi pour tout ouvert U de A, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X, i.e. ssi pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O \cap A)$ est un ouvert de X. Or $f^{-1}(O \cap A) = f^{-1}(i^{-1}(O)) = (i \circ f)^{-1}(O)$. Donc f est continue ssi $i \circ f$ l'est.

Exercice 54. Il suffit de prouver que si A est dense dans X et O ouvert de X alors $A \cap O$ est dense dans O, c'est-à-dire rencontre tout ouvert non vide de O. Soit U un ouvert non vide de O, alors (comme O est ouvert) U est un ouvert non vide de X donc A rencontre U, donc $(A \cap O) \cap U = A \cap U \neq \emptyset$.

Exercice 55.

a) L'intérieur d'un produit est le produit de intérieurs et idem pour les adhérences (cf exercice 57) donc $\overset{\circ}{C} = C$ et $\overline{C} = [-1, 1]^2$.

b) De même, $\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{C} \times \emptyset = \emptyset$ et $\overline{D} = \overline{C} \times \{0\} = [-1, 1]^2 \times \{0\}$. Remarque : C est ouvert dans $\mathbf{R}^2$ mais $C \times \{0\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 56. Soient $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et $\mathcal{B}'$ une base d'ouverts de Y. Alors une base d'ouverts de $X \times Y$ est donnée par $\mathcal{B}'' = \{U \times V \mid (U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}'\}$. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont (au plus) dénombrables, $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$ aussi donc $\mathcal{B}''$ aussi.

Exercice 57. Puisque $Fr(A) \times \overline{B} = (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus (\overset{\circ}{A} \times \overline{B})$ (et analogue en échangeant les rôles de A et B), on a $(Fr(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times Fr(B)) = (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus [(\overset{\circ}{A} \times \overline{B}) \cap (\overline{A} \times \overset{\circ}{B})] = (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus (\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B})$. Soit $C = A \times B$, il suffit donc de prouver que $\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B}$ et $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$. La topologie produit sur $X \times Y$

est définie par une base d'ouverts, les ouverts élémentaires i.e. les $U \times V$ avec U ouvert de X et V ouvert de Y. $\overset{\circ}{C}$ est donc l'union des ouverts élémentaires inclus dans C, or $U \times V \subset A \times B \Leftrightarrow U \subset A$ et $V \subset B$. D'où $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$. De même, $\overline{C}^c$ est l'union des ouverts élémentaires inclus dans C^c, or $U \times V \subset (A^c \times Y) \cup (X \times B^c) \Leftrightarrow U \subset A^c$ ou $V \subset B^c$, d'où $\overline{C}^c = ((\overset{\circ}{A^c}) \times Y) \cup (X \times (\overset{\circ}{B^c}))$, d'où $\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exercice 58.

a) La bijection $X \to \Gamma(f), x \mapsto (x, f(x))$ est continue, comme restriction de l'application $X \to X \times Y, x \mapsto (x, f(x))$ qui est continue car ses deux composantes id_X et f le sont. La bijection réciproque $\Gamma(f) \to X, (x, y) \mapsto x$ est continue, comme restriction de la projection (continue) de $X \times Y$ dans X.

b) Supposons Y séparé, et montrons que $\Gamma(f)^c$ est ouvert. Soit $(x, y) \in \Gamma(f)^c$, i.e. $y \neq f(x)$. Il existe V, W ouverts disjoints de Y tels que $y \in V$ et $f(x) \in W$. Posons $U = f^{-1}(W)$. Alors $U \times V$ est un ouvert (élémentaire) de $X \times Y$ contenant (x, y) inclus dans $\Gamma(f)^c$ (puisque $(u, v) \in U \times V \Leftrightarrow f(u) \in W, v \in V \Rightarrow v \neq f(u)$.

c) D'après b) pour $f = id_X$, si X est séparé alors Δ est fermée. Réciproquement supposons Δ fermée et vérifions que X est séparé. Soient x, y deux points distincts de X. On a $(x, y) \in \Delta^c$ donc il existe un ouvert élémentaire $U \times V$ de $X \times X$ contenant (x, y) et inclus dans Δ^c, i.e. il existe U, V ouverts disjoints t.q. $x \in U$ et $y \in V$.

Exercice 59.

a) Les $U \times V$ tels que U soit un ouvert de X contenant a et V un ouvert de Y contenant b forment une base de voisinages de (a, b) dans le produit $X \times Y$. Il suffit donc de montrer que (sous les hypothèses) chacun de ces $U \times V$ contient (x_k, y_k) pour une infinité de valeurs de k. Pour un tel $U \times V$, par hypothèse, il existe N tel que $\forall n \geq N, x_n \in U$, et il existe une infinité de k tels que $y_k \in V$. En enlevant ceux de ces k qui sont $< N$, il reste une infinité de k tels que $(x_k, y_k) \in U \times V$.

b) Contre-exemple $X = Y = \mathbf{R}$, $x_n = y_n = (-1)^n$, $a = 1$, $b = -1$.

Exercice 60.

a) $\mathcal{H}$ est réflexive : poser $h_t = f$, ainsi $f\mathcal{H}f$ via h. $\mathcal{H}$ est symétrique : si $f\mathcal{H}g$ via h, poser $k_t = h_{1-t}$, ainsi $g\mathcal{H}f$ via k. $\mathcal{H}$ est transitive : si $e\mathcal{H}f$ via h et $f\mathcal{H}g$ via k, poser $\ell_t = h_{2t}$ si $t \leq 1/2$ et $\ell_t = k_{2t-1}$ si $t \geq 1/2$, ainsi $e\mathcal{H}g$ via ℓ.

b) $0\mathcal{H}id_{\mathbf{R}}$ via $h_t(x) = tx$ donc $\mathbf{R}$ est contractile. Pour toute application continue $h : [0,1] \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ telle que $h_0(x) = x$, $h_1(x)$ est du même signe que x donc h_1 est non constante, donc $\mathbf{R}^*$ n'est pas contractile.

c) S'il existe $c \in Y$ et $h : [0,1] \times Y \to Y$ continue t.q. $h_0(y) = y$ et $h_1(y) = c$ alors en posant $k_t = h_t \circ f$ on trouve $f\mathcal{H}c$, donc toutes les f sont homotopes à l'applicaiton constante c (donc homotopes entre elles).

Exercice 61. Soit $m = (x, y, z) \in P'$, i.e. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \neq 1$, alors $(pm) = \{(0, 0, 1) + \lambda(x, y, z - 1) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ donc $(pm) \cap P$ est réduit au point $\pi(m) := (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$. π est continue car l'application correspondante de P' dans $\mathbf{R}^3$ l'est car ses trois composantes le sont. $\pi : P' \to P$ est bijective et $\pi^{-1}(u, v, 0) =$ l'unique $(x, y, z) \in P'$ t.q. $x = (1 - z)u$ et $y = (1 - z)v$, qui correspond à $z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$, si bien que π^{-1} est continue.

Exercice 62. Soient (E,d) un espace métrique (donc séparé) et F,G deux fermés de E, disjoints. Posons $f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,G)}$ (f est bien définie car $d(x,F)+d(x,G) = 0 \Rightarrow x \in F \cap G \Rightarrow$ absurde). Alors $f : E \to [0,1]$ est continue et vaut 0 sur F et 1 sur G.

Exercice 63. Les seules parties de diamètre nul sont $\emptyset$ et les singletons.
On a $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$ puisque $A \subset \overline{A}$. Montrons que réciproquement, $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$ c'est-à-dire $\forall x,y \in \overline{A}, d(x,y) \leq \delta(A)$. Soient donc $x,y \in \overline{A}$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x', y' \in A$ tels que $d(x,x') \leq \epsilon$ et $d(y,y') \leq \epsilon$, d'où (par inégalité triangulaire) $d(x,y) \leq d(x',y') + 2\epsilon \leq \delta(A) + 2\epsilon$. Donc $d(x,y) \leq \inf_{\epsilon>0}(\delta(A)+2\epsilon) = \delta(A)$.

Exercice 64. La symétrie et l'inégalité triangulaire pour δ viennent des mêmes propriétés pour d. Quant au fait que $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, il vient de la même propriété pour d et de l'injectivité de f. Donc δ est une distance sur X, et par construction $f : (X,\delta) \to (f(X),d)$ est une isométrie. Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique et $f : (X,\mathcal{T}) \to (E,\mathcal{T}_d)$ un homéomorphisme, d'après ce qui précède $f : (X,\delta) \to (E,d)$ est une isométrie, donc un homéomorphisme pour les topologies associées $\mathcal{T}_\delta, \mathcal{T}_d$. Donc $id_X = f^{-1} \circ f : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T}_\delta)$ est un homéomorphisme, i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\delta$, donc $(X,\mathcal{T})$ est métrisable.

Exercice 65.

a) Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules $B(a,\frac{1}{n})$ avec $a \in A$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Il s'agit (cf exercices 14.a et 15) de montrer que pour tout ouvert O de E et tout $x \in O$, il existe $B \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B \subset O$. Il suffit pour cela de le prouver dans le cas où O est de la forme $B(x,\varepsilon)$ (puisque tout ouvert contenant x contient une telle boule). On cherche donc, étant donnés $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, un $a \in A$ et un $n \in \mathbf{N}^*$ tels que $d(x,a) < 1/n$ et $B(a,1/n) \subset B(x,\varepsilon)$. Pour assurer cette inclusion de boules il suffit (par inégalité triangulaire) que $d(x,a) + 1/n \leq \varepsilon$. Il suffit donc de choisir n entier $> 1/\varepsilon$ puis (par densité) $a \in A$ t.q. $d(x,a) < min(1/n, \varepsilon - 1/n)$ (par exemple on choisit $n \geq 2/\varepsilon$ puis $a \in A$ t.q. $d(x,a) < \frac{1}{n}$).

b) Si A est dénombrable alors $A \times \mathbf{N}^*$ aussi donc $\mathcal{B}$ aussi.

Exercice 66. Si : $[0,1]$ est métrisable de type dénombrable et ces deux propriétés sont stables par homémorphismes, sous-espaces, et produits dénombrables (variante pour de “type dénombrable” : pour un espace métrique, être de type dénombrable équivaut à être séparable – cf exercices 41 et 65.b – et on peut montrer que tout sous-espace d'un métrique séparable est séparable et qu'un produit dénombrable de séparables est séparable, mais avec précaution, car A_n dénombrables $\not\Rightarrow \prod_{n\in\mathbf{N}} A_n$ dénombrable). Seulement si : soit X de type dénombrable (donc contenant une suite dense $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$), et métrisable (ce qui permet de définir φ comme dans l'énoncé). φ est évidemment continue. Reste à montrer qu'elle est injective et que la bijection réciproque, de $Im(\varphi)$ dans X, est continue. Autrement dit (ce qui prouvera les deux simultanément) : $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(\varphi(x))$ t.q. $\varphi(y) \in V \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$. Soit n t.q. $d(x,a_n) \leq \varepsilon/2$, alors $V := \{r, |r_n - d(x,a_n)| < \varepsilon/2\}$ convient. (Autre méthode possible : continuité séquentielle).

Exercice 67.

a) Si les E_n sont de type dénombrable alors $E := \prod_{n\in\mathbf{N}} E_n$ aussi. Pour métriques complets, cf cours. Tout fermé d'un métrique complet est complet (et la propriété d'être de type dénombrable passe aux sous-espaces).

b) Soit U ouvert dans X polonais. Alors $f : U \to \mathbf{R}, x \mapsto 1/d(x, X \setminus U)$ est continue à valeurs dans $\mathbf{R}$ séparé, donc $V := \Gamma(f)$ est homéomorphe à U. D'autre part $V = g^{-1}(\{1\})$ pour $g : X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (x,t) \mapsto t.d(x, X \setminus U)$ (continue) donc (d'après a) V est polonais.

Exercice 68.

a) f est continue (car chacune de ses composantes est id_X, continue). Notons Δ son image (la diagonale de $X^{\mathbf{N}}$, i.e. le sous espace des suites constantes à valeurs dans X) et $g : X \to \Delta, x \mapsto f(x)$. Alors g est continue bijective, et sa bijection réciproque n'est autre que la restriction à Δ de n'importe laquelle des projections $p_n : X^{\mathbf{N}} \to X$, qui sont continues. Donc g est un homéomorphisme. Sa restriction $h : A \to g(A) = f(A), a \mapsto g(a) = f(a)$ est donc un homéomorphisme. De plus $f(A) = \prod_{n\in\mathbf{N}} A_n \cap \Delta$ est un fermé de $\prod_{n\in\mathbf{N}} A_n$ puisque la topologie sur ce produit coïncide avec la topologie induite de $X^{\mathbf{N}}$ et que Δ est un fermé de $X^{\mathbf{N}}$ car X est séparé (propriété analogue à l'exercice 58.c) : pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \Delta^c$, soient $p, q \in \mathbf{N}$ t.q. $x_p \neq x_q$, il existe U_p, U_q ouverts disjoints de X contenant respectivement x_p, x_q ; posons $U_r = X$ pour $r \neq p, q$, et $U = \prod_{n\in\mathbf{N}} U_n$, alors U est un ouvert de X^N, contenant x et inclus dans Δ^c.

b) Dans X séparé, soient A_n polonais et $A = \cap_{n\in\mathbf{N}} A_n$. D'après a), A est homéomorphe à un fermé de $\prod_{n\in\mathbf{N}} A_n$, donc à un polonais d'après l'exercice 67.a. Donc A est polonais.

c) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \cap_{x\in\mathbf{Q}} A_x$ avec $A_x = \mathbf{R} \setminus \{x\}$. D'après l'exercice 67.b, chaque A_x est polonais. Donc d'après b) (et en untilisant la dénombrabilité de $\mathbf{Q}$) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ aussi.

Exercice 69.

exp n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$ puisque $y_n - x_n \to 0$ n'implique pas $\exp y_n - \exp x_n \to 0$, puisqu'il existe des suites $x_n, y_n = x_n + h_n$ telles que $y_n - x_n = h_n \to 0$ et $\exp y_n - \exp x_n = (\exp x_n)(\exp h_n - 1) \sim (\exp x_n) h_n \not\to 0$: par exemple $h_n = 1/n$ et $x_n = \ln n$.

ln n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$ puisqu'il existe des suites $x_n, h_n > 0$ telles que $h_n \to 0$ et $\ln(x_n + h_n) - \ln(x_n) = \ln\left(\frac{x_n+h_n}{x_n}\right) \not\to 0$, i.e. $\frac{x_n+h_n}{x_n} \not\to 1$, i.e. $h_n/x_n \not\to 0$: par exemple $h_n = x_n = 1/n$.

$\sqrt{\ }$, ou plus généralement $x \mapsto x^\alpha$ pour $0 < \alpha \leq 1$, est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ car pour $0 < x \leq y$, $0 \leq y^\alpha - x^\alpha \leq (y - x)^\alpha$.

$x \mapsto 1/x$, ou plus généralement $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha < 0$, n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$ puisqu'il existe des suites $x_n, h_n > 0$ telles que $h_n \to 0$, $h_n/x_n \to 0$ et $(x_n + h_n)^\alpha - x_n^\alpha = x_n^\alpha((1 + h_n/x_n)^\alpha - 1) \sim \alpha h_n x_n^{\alpha-1} \not\to 0$: par exemple $x_n = 1/n$ et $h_n = n^{\alpha-1}$.

$x \mapsto x^2$, ou plus généralement $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha > 1$, n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$ par le même argument, avec cette fois $x_n = n$ et $h_n = n^{1-\alpha}$.

- Toute fonction continue d'un métrique compact (comme $[a, b]$) dans un métrique (comme $\mathbf{R}$) est uniformément continue.

Exercice 70. Il suffit de le prouver par exemple pour $f = \arctan$, car ensuite, pour une autre f continue de limites $\ell_\pm$ en $\pm\infty$ on aura, en définissant $g : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbf{R}$ par $g(x) = f(\tan x)$ si $x \neq \pm\pi/2$ et $g(\pm\pi/2) = \ell_\pm$: g continue d'un métrique compact dans un métrique donc uniformément continue, arctan uniformément continue sur $\mathbf{R}$, donc $f = g \circ \arctan$ aussi.
Or arctan est uniformément continue car 1-lipschitzienne (par le théorème des accroissements finis).
Méthode plus directe (mais plus laborieuse) : soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue admettant en $\pm\infty$ des limites finies $\ell_\pm$, et soit $\varepsilon > 0$. Soit M tel que $\forall x \geq M, |f(x) - \ell_+| < \varepsilon/4$ et $\forall x \leq -M, |f(x) - \ell_-| < \varepsilon/4$. Soit (par uniforme continuité de f sur $[-M, M]$) $\eta \in]0, 2M[$ tel que $\forall x, y \in [-M, M], |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $|x - y| < \eta$, montrons que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Premier cas : si x, y sont non seulement η-proches, mais tous deux dans un même intervalle $] - \infty, -M]$ ou $[-M, M]$ ou $[M, +\infty[$ c'est immédiat (on a même $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$). Second cas : M ou $-M$ est compris entre les deux (donc η-proche des deux), disons par exemple M

(donc $x, y > M - \eta > -M$). Alors, en appliquant le premier cas à (x, M) et à (y, M) on obtient $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Exercice 71.

a) Sur $U = F^c$, $x \mapsto d(x, F)$ est continue et ne s'annule pas (car F fermé).

b) Sur U_α, f_F est uniformément continue car $1/\alpha^2$-lipschitzienne (comme composée de $U_\alpha \to [\alpha, +\infty[, x \mapsto d(x, F)$, 1-lipschitzienne, et de $[\alpha, +\infty[\to \mathbf{R}, t \mapsto 1/t$, $1/\alpha^2$-lipschitzienne par le théorème des accroissements finis).

c) $x \in U \Leftrightarrow d(x, F) > 0 \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, d(x, F) \geq \alpha$.

d) $E = \mathbf{R}^+$, $F = \{0\}$: pour $x \in U =]0, +\infty[$, $f_F(x) = 1/x$ (non uniformément continue, cf exercice 69).

Exercice 72.

a) Vérifions d'abord que ce sont bien des distances. La seule propriété non évidente est l'inégalité triangulaire. Elle résulte du fait que toutes deux sont de la forme $f \circ d$ avec f croissante et telle que $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$. δ_1 est uniformément équivalente à d car $\delta_1 \leq d$ et pour $\delta_1(x, y) < 1$, $d(x, y) = \delta_1(x, y)$. δ_2 aussi puisqu'elle est uniformément équivalente à δ_1 d'après b).

b) $\forall t \geq 1$, $\min(1, t) = 1$ est bien compris entre $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{2t}{1+t}$ car $t < 1 + t \leq 2t$. $\forall t \in [0, 1]$, $\min(1, t) = t$ est bien compris entre $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{2t}{1+t}$ car $1 \leq 1 + t \leq 2$. Donc $\delta_2 \leq \delta_1 \leq 2\delta_2$. Soit $D = Im(d) \setminus \{0\}$. On a $d \leq \alpha\delta_2$ ssi $\forall t \in D, t \leq \frac{\alpha t}{1+t}$ i.e. ssi $\forall t \in D, 1 + t \leq \alpha$. Un tel α existe ssi D est borné, i.e. ssi (E, d) est borné.

Exercice 73. Pour $k = 0$, (x_n) n'a aucune valeur d'adhérence dans $\mathbf{R}$ ssi, dans le compact $[-\infty, +\infty]$, sa (ou ses) valeur(s) d'adhérence appartien(nen)t à $\{\pm\infty\}$, donc ssi $|x_n| \to \infty$. Exemple : $x_n = n$.
Pour $k > 0$, le plus simple est d'" entremêler" k suites $y(0), \dots, y(k-1)$ convergeant vers k limites distinctes $\ell_0, \dots, \ell_r$, c'est-à dire de poser $x_{kq+r} = y(r)_q$ pour $q \in \mathbf{N}$ et $r \in \{0, \dots, k-1\}$. On peut même choisir chaque suite $y(r)$ constante i.e. $y(r)_q = \ell_r$ (en particulier pour $\ell_r = r$, ce procédé donne $x_n =$ le reste euclidien de n par k). Mais on peut aussi "entremêler" une suite supplémentaire $y(k)$ telle que $|y(k)_q| \to \infty$.
Si on fait ce rajout, pour $k = 1$, on obtient une suite divergente ayant une seule valeur d'adhérence. Exemple : $x_{2q} = 0, x_{2q+1} = q$.

Exercice 74. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K, on cherche J fini inclus dans I tel que $(U_i)_{i \in J}$ soit encore un recouvrement de K. Autrement dit (en notant $U_i = O_i \cap K$) : soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E dont la réunion contient K, on veut prouver que K est inclus dans $\cup_{i \in J} O_i$ pour une partie finie J de I bien choisie. Il existe $k \in I$ tel que $a \in O_k$. Il existe alors $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n > N, a_n \in O_k$. Pour n de 0 à N, soit i_n tel que $a_n \in O_{i_n}$. Alors $J := \{k, i_0, \dots, i_N\}$ convient.

Exercice 75.

a) $A + B$ est l'image dans $\mathbf{R}$ (séparé), par l'application $+$ (continue) de $A \times B$ (compact). Variante : soient $c_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in A, b_n \in B$. Par compacité de A et B, $\exists \varphi, a_{\varphi(n)} \to a \in A$ puis $\exists \psi, b_{\varphi \circ \psi(n)} \to b \in B$, d'où en posant $\sigma = \varphi \circ \psi$: $c_{\sigma(n)} \to c := a + b$. Variante intermédiaire : soient $(a_n, b_n) \in A \times B$. Par compacité de $A \times B$, $\exists \sigma, (a_{\sigma(n)}, b_{\sigma(n)}) \to (a, b) \in A \times B$, d'où $c_{\sigma(n)} \to c := a + b$.

b) Soient $c_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in A, b_n \in B$ et $c_n \to c$, montrons que $c \in A+B$. $\exists \varphi, a_{\varphi(n)} \to a \in A$, d'où $b_{\varphi(n)} \to c - a$ donc $c - a \in B$. Variante : (supposons A, B non vides, sinon c'est immédiat). Soit c adhérent à $A+B$. $\forall n \in \mathbf{N}, \exists a \in A$ et $b \in B$ t.q. $|c-(a+b)| < 1/n$ donc les $F_n := \{a \in A, d(c-a, B) \leq 1/n\}$ forment dans le compact A une suite décroissante de fermés non vides. Soit $a \in \cap_{n \in \mathbf{N}^*} F_n$, alors $d(c-a, B) = 0$ donc $c - a \in B$. Autre variante : soit c adhérent à $A + B$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ et $b \in B$ t.q. $|c - (a+b)| < \varepsilon$, donc $d(c - A, B) = 0$, donc (cf exercice 87b) le compact $c - A$ et le fermé B sont non disjoints.

c) Pour que la première méthode de (b) ne s'applique pas il faut que A, B contiennent des suites $(a_n), (b_n)$ sans valeur d'adhérence telles que $a_n + b_n \to c \notin A + B$. Par exemple $A = \{a_n, n \in \mathbf{N}\}$, et $B = \{b_n, n \in \mathbf{N}\}$ avec $a_n \to +\infty, b_n \to -\infty$ (ce qui implique A, B fermés) mais $a_n + b_n \to 0$ et $\forall p, q \in \mathbf{N}, a_p + b_q \neq 0$. Cherchons donc $a_n \to +\infty$ et $h_n \to 0$ (on posera $b_n = h_n - a_n$) t.q. $\forall p, q \in \mathbf{N}, h_q \neq a_q - a_p$. On peut prendre $a_n = n$, et $h_n \notin \mathbf{Z}$ t.q. $h_n \to 0$, par exemple $h_n = 1/(n+2)$.

Exercice 76.

a) Le cas où B est réduit à un point a été traité en cours. On sait donc déjà que (pour A compact fixé) $\forall x \notin A, \exists U_x, V_x$ ouverts disjoints tels que $A \subset U_x$ et $x \in V_x$. Puisque B est disjoint de A on peut appliquer ceci aux $x \in B$. On a alors $B \subset \cup_{x \in B} V_x$ donc (par compacité de B) il existe C fini inclus dans B tel que $B \subset \cup_{x \in C} V_x$. Posons $V = \cup_{x \in C} V_x$ (ouvert contenant B) et $U = \cap_{x \in C} U_x$. Ainsi, U est ouvert (puisque C est fini), contient A (puisque chaque U_x contient A), et est disjoint de chaque V_x pour $x \in C$ (puisque $U \subset U_x \subset V_x^c$), donc disjoint de leur réunion V.

b) Dans E compact (donc séparé), soient A, B deux fermés disjoints. Alors A, B sont compacts donc on peut leur appliquer a).

c) Soient X localement compact et (cf exercice 78) E son compactifié d'Alexandrov (dont X est un sous-espace). Alors d'après b) E est normal, donc (cf exercice 39.a) complètement régulier, donc (cf exercice 38.a) X est complètement régulier.

Exercice 77.

a) Soit F un fermé de $X \times Y$, montrons que $p_Y(F)^c$ est voisinage de tous ses points. Soit donc $y \notin p_Y(F)$. $\forall x \in X, (x, y) \notin F$ donc $\exists U_x \ni x, V_x \ni y$ ouverts tels que $U_x \times V_x$ soit disjoint de F. Par compacité de X, il existe alors Z fini $\subset X$ t.q. $X = \cup_{x \in Z} U_x$. Posons $V = \cap_{x \in Z} V_x$ (ouvert contenant y. Alors V est disjoint de $p_Y(F)$ car $X \times V$ est inclus dans $\cup_{x \in Z} U_x \times V_x$, donc est disjoint de F.

b) (Remarque : la réciproque est vraie en supposant seulement X séparé, cf exercice 58.b). Soit $\Gamma \subset Y \times X$ le graphe (fermé) de f. La projection $q_Y : Y \times X \to Y$ est fermée d'après (a) (en composant par l'homéomorphisme évident $X \times Y \simeq Y \times X$). Soit K un fermé de X, $f^{-1}(K) = p_Y((Y \times K) \cap \Gamma)$ est donc un fermé de Y.

c) L'application $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ a un graphe fermé. Autre exemple : $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \tan x$ si $x \neq \pm\pi/2$, $f(\pm\pi/2) = 0$.

d) Suivons les indications (il faut au passage vérifier que la base d'ouverts proposée en est bien une) puis montrons que $p_Y(\overline{\Delta})$ est égal à X.
Il contient évidemment $p_Y(\Delta) = X$. Il s'agit donc de montrer qu'il ne contient pas ∞, c'est-à-dire que $\forall x \in X, (x, \infty) \notin \overline{\Delta}$. Soit donc $x \in X$, et soit $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Alors (x, ∞) appartient à l'ouvert $U_i \times (Y \setminus U_i)$, qui est disjoint de Δ.

Donc $X = p_Y(\overline{\Delta})$ est fermé dans Y, donc $\{\infty\}$ est ouvert, donc $\exists U \in E$ tel que $Y \setminus U \subset \{\infty\}$, c'est-à-dire tel que $U = X$. Donc $X \in E$.

Exercice 78.

a) Posons $\mathcal{A} = \{\tilde{X} \setminus K, K \text{ compact de } X\}$ et vérifions que $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \mathcal{A}$ est une topologie sur $\tilde{X}$.

- $\tilde{X} \in \mathcal{A}$ car $\emptyset$ est un compact de X.
- $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- Si $O, O' \in \mathcal{T}$ alors $O \cap O' \in \mathcal{T}$. Si $O \in \mathcal{T}$ et $O' = \tilde{X} \setminus K \in \mathcal{A}$ alors $O \cap O' = O \cap (X \setminus K) \in \mathcal{T}$. Si $O, O' \in \mathcal{A}$ alors $O \cap O' \in \mathcal{A}$ car une réunion de deux compacts de X est un compact de X.
- Montrons que $\mathcal{T}'$ est stable par réunions quelconques. $\mathcal{T}$ l'est, $\mathcal{A}$ aussi (car une intersection quelconque - non indexée par $\emptyset$ - de compacts de X est un compact de X), donc il suffit de prouver que si $O \in \mathcal{T}$ et $O' = \tilde{X} \setminus K \in \mathcal{A}$ alors $O \cup O' \in \mathcal{T}'$. Or $O \cup O' = O \cup \tilde{X} \setminus K = \tilde{X} \setminus K'$ avec $K' = K \setminus O$, fermé de K donc compact, donc $O \cup O' \in \mathcal{A}$.

b) Supposons X non compact et montrons que ∞ est adhérent à X, c'est-à-dire : que tout ouvert O de $\tilde{X}$ contenant ∞ rencontre X. Soit donc $O = \tilde{X} \setminus K \in \mathcal{A}$, alors $O \cap X = X \setminus K \neq \emptyset$ car $X \neq K$ puisque X est non compact.

c) Soient $O_i \in \mathcal{T}$ $(i \in I)$ et $O'_j = \tilde{X} \setminus K_j \in \mathcal{A}$ $(j \in J)$ tels que la réunion soit égale à $\tilde{X}$ (ce qui implique $J \neq \emptyset$). Posons $O = \cup_{i \in I} O_i$ et $K = \cap_{j \in J} K_j$. On a donc $\tilde{X} \subset O \cup (\tilde{X} \setminus K)$, c'est-à-dire $K \subset O$. Et on cherche à extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire on cherche I' fini inclus dans I et J' fini inclus dans J tels que, si l'on pose $O' = \cup_{i \in I'} O_i$ et $K' = \cap_{j \in J} K'_j$, on obtienne $\tilde{X} \subset O' \cup (\tilde{X} \setminus K')$, c'est-à-dire $K' \subset O'$. Comme K est compact inclus dans $O = \cup_{i \in I} O_i$, il existe déjà I' fini inclus dans I tel que $K \subset O' := \cup_{i \in I'} O_i$. Reste à montrer que tout ouvert O' contenant $K = \cap_{j \in J} K_j$ (en particulier celui-là) contient une intersection finie de K_j, c'est-à-dire : $\exists J'$ fini inclus dans J t.q. $\cap_{j \in J} K_j \subset O'$. Choisissons $j_0 \in J$, alors le compact K_{j_0} est inclus dans $O' \cup \cup_{j \neq j_0} K_j^c$ donc il existe J'' fini inclus dans $J \setminus \{j_0\}$ tel que $K_{j_0} \subset O' \cup \cup_{j \in J''} K_j^c$, d'où le résultat voulu (en posant $J' = J'' \cup \{j_0\}$).

d) Montrons même que $\tilde{X}$ est séparé si et seulement si X est localement compact. Soient x, y distincts dans $\tilde{X}$. Si $x, y \in X$ il existe toujours O, O' disjoints appartenant à $\mathcal{T}'$ (et même à $\mathcal{T}'$ tels que $x \in O$ et $y \in O'$ (puisque X est séparé). Donc $\tilde{X}$ sera séparé ssi $\forall x \in X$, pour $y = \infty$, il existe $O \in \mathcal{T}'$ et $O' = \tilde{X} \setminus K \in \mathcal{A}$, disjoints (ce qui implique $O \notin \mathcal{A}$ donc $O \in \mathcal{T}$), tels que $x \in O$. Autrement dit, $\tilde{X}$ est séparé ssi $\forall x \in X$ il existe dans X un compact K et un ouvert O tels que $x \in O$ et $O \subset K$, donc ssi tout point de X admet un voisinage compact, donc ssi X est localement compact.

Exercice 79. (a) : cf cours)

b) Dans $\mathbf{R}$, les $F_n := [n, +\infty[$ forment une suite décroissante de fermés non vides, d'intersection vide.

c) cf exercice 78 question c : de toute famille K_i (pas nécessairement une suite décroissante) de compacts (il suffit en fait que l'un d'entre eux soit compact et les autre fermés) dont l'intersection est incluse dans un ouvert, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est déjà incluse dans cet ouvert. Ici, si la famille finie en question est $(K_j)_{j \in J}$, son intersection est K_n pour $n = \max(J)$.

d) Par construction, H est un compact non vide d'après (a), et $f(H) \subset H$. Pour prouver l'inclusion réciproque il suffit (cf exercices 37.c, 38.a, 39.a, 76.b) de prouver que tout ouvert O

contenant $f(H)$ contient H. Or pour un tel O, l'ouvert $\Omega := f^{-1}(O)$ contient H donc d'après (c), contient l'un des H_n, d'où $H \subset H_{n+1} = f(H_n) \subset O$.

Exercice 80. Il suffit de prouver que $F : X \mapsto C([0,1], \mathbf{R}), x \mapsto F(x) = f(x, \ )$ est continue (puis de composer par la forme linéaire continue $\int_0^1$). Soient $a \in X$ et $\epsilon > 0$. Pour tout $b \in [0,1]$, par continuité de f au point (a,b), il existe U_b voisinage de x et V_b ouvert de $[0,1]$ contenant b t.q. $\forall x \in U_b, \forall y \in V_b, |f(x,y) - f(a,b)| \leq \epsilon/2$, en particulier $|f(a,y) - f(a,b)| \leq \epsilon/2$, donc $|f(x,y) - f(a,y)| \leq \epsilon$. Par compacité, il existe B fini inclus dans $[0,1]$ tel que les V_b pour $b \in B$ recouvrent $[0,1]$. Soit $U = \cap_{b\in B} U_b$ (voisinage de a). Pour tout $x \in U$ on a $\forall y \in [0,1], |f(x,y) - f(a,y)| \leq \epsilon$ i.e. $\|F(x) - F(a)\|_\infty \leq \epsilon$.

Exercice 81.

a) Soit i t.q. $\alpha \in]\alpha_i, \beta_i[$: en prenant $J = \{i\}$ on montre que $\alpha \in A$, donc $A \neq \emptyset$.

b) Soient j t.q. $m \in]\alpha_j, \beta_j[$, et $x \in A \cap]\alpha_i, m]$. Il existe J fini inclus dans I tel que $[\alpha, x] \subset \cup_{i\in J}]\alpha_i, \beta_i[$. Soit $J' = J \cup \{j\}$, alors $\forall y \in [\alpha, \beta] \cap [\alpha, \beta_j[$, $[\alpha, y] \subset \cup_{i\in J'}]\alpha_i, \beta_i[$, donc $[\alpha, \beta] \cap [\alpha, \beta_j[\subset A$. On en déduit à la fois que $m \in A$ et $m = \beta$.

c) $\mathbf{R}$ est séparé, et tout réel admet un voisinage de la forme $[\alpha, \beta]$. Il suffit donc de montrer que $[\alpha, \beta]$ est compact. Soit $(U_k)_{k\in K}$ un recouvrement ouvert de $[\alpha, \beta]$. En appliquant ce qui précède à la famille de tous les intervalles $]\alpha_i, \beta_i[$ inclus dans au moins un U_k, on trouve qu'un nombre fini d'entre eux suffit à recouvrir $[\alpha, \beta]$: $[\alpha, \beta] \subset \cup_{i\in J}]\alpha_i, \beta_i[$ avec J fini et $]\alpha_i, \beta_i[\subset U_{k_i}$. Soit $L = \{k_i \mid i \in J\}$ (fini), alors $[\alpha, \beta] \subset \cup_{k\in L} U_k$.

Exercice 82. Un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact (car un produit de séparés est séparé, un produit fini de voisinages est un voisinage et un produit de compact est compact).

Exercice 83. (Pour a à i, on utilise simplement que les compacts de $\mathbf{R}^n$ sont les fermés bornés)

a) Oui (quelle que soit la norme). S^{n-1} est évidement bornée, et fermée car c'est $\| \ \|^{-1}(\{1\})$.

b) Non (sauf si $(r,s) = (n,0)$ ou $(0,n)$) car cet ensemble est fermé mais non borné.

c) Non car (quelle que soit la norme) non borné (contient les kI_n, dont la norme euclidienne est $k\sqrt{n}$ et la norme opératorielle est k). Cet ensemble est également non fermé dans $M_n(\mathbf{R})$ (parce que c'est un ouvert propre et que $M_n(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{n^2}$ est connexe, ou simplement parce qu'il contient les I_n/k mais pas leur limite quand $k \to \infty$).

d) Non (sauf si $n = 1$) car cet ensemble est (quelle que soit la norme) fermé mais non borné : il contient les matrices diagonales $diag(k, 1/k, 1, \ldots, 1)$, dont la norme euclidienne est $\sqrt{k^2 + 1/k^2 + n - 2}$ et la norme opératorielle est k (si $k \geq 1$).

e) Oui. $O_n(\mathbf{R})$ est fermé (c'est l'image réciproque de $\{I\}$ par l'application $P \mapsto P.P^t$, qui est continue car ses composantes sont polynômiales, ou simplement continue comme composée d'applications continues. $O_n(\mathbf{R})$ est également borné : la norme euclidienne d'une matrice orthogonale est $\sqrt{n}$ et sa norme opératorielle est 1. Autre méthode pour $n = 2$: $O_2(\mathbf{R})$ est compact car (homéomorphe au) produit des deux compacts (cf a) S^1 et $\{-1, 1\} = S^0$. L'homéo est donné dans un sens par $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto ((a,b), ad - bc)$ et dans l'autre par : $((a,b), \varepsilon) \mapsto \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ (on pourrait se contenter de la continuité de la bijection dans ce sens, en utilisant que son espace de départ est compact et son espace d'arrivée séparé).

f) Non (sauf si $n = 1$) car cet ensemble (est fermé mais) non borné, puisqu'il contient (par plongement diagonal) $O_2(\mathbf{C}) = \{\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C}, a^2 + b^2 = 1\}$, qui est déjà non borné car l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ est non borné puisqu'il contient les (x, iy) avec $x, y \in \mathbf{R}, x^2 - y^2 = 1$ (cf b).

g) Oui (même raisonnement que pour $O_n(\mathbf{R})$).

h) Non car (fermé mais) non borné car c'est l'ensemble des matrices réelles $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telles que $a^2 - b^2 = d^2 - c^2 = 1$ et $ac = bd$, donc $a = \varepsilon \cosh x, b = \sinh x, d = \varepsilon' \cosh x, c = \varepsilon\varepsilon' \sinh x$ avec $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$ et $x \in \mathbf{R}$. Ou simplement : contient en particulier les matrices telles que $b = c = k$, $a = d = \sqrt{1 + k^2}$.

i) Oui comme quotients séparés de sphères (compactes, cf a). $\mathbf{R}P^n = S(\mathbf{R}^{n+1})/(x \sim -x) = S^n/(x \sim -x)$, $\mathbf{C}P^n = S(\mathbf{C}^{n+1})/(x \sim ux, |u| = 1) = S^{2n+1}/(x \sim ux, |u| = 1)$. Ces deux quotients sont séparés car dans chcun des deux cas, la projection est ouverte (puisque résultant d'une action de groupe) et la relation d'équivalence a un graphe fermé (en utilisant la compacité du groupe et de l'espace sur lequel il agit).

j) Non, un e.v.n. non nul est toujours non borné donc non compact. Celui-ci n'est même pas complet.

k) H est homéomorphe au compact $K := \prod_{n\in\mathbf{N}}[0, \frac{1}{n+1}]$ car la bijection naturelle de K dans H est continue (et même uniformément, directement ou par compacité) : $\forall x, y \in H$, pour que $\sum(x_n - y_n)^2 < \varepsilon$ il suffit (en choisissant N tel que $\sum_{n=N}^{\infty} 1/(n + 1)^2 < \varepsilon/2$) que pour $n = 0, \ldots, N-1$, $|x_n - y_n| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2N}}$. Autre preuve de continuité : puisque K est métrisable il suffit de prouver la continuité séquentielle, qui est un cas particulier du théorème de convergence dominée.

Exercice 84. Pour $n \geq 1$, S^n (sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$) et $\mathbf{R}^n$ sont non homéomorphes car l'une est compacte et l'autre seulement localement compact. Cependant, (pour n'importe quel point p de la sphère) $S^n \setminus \{p\}$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ (par la projection stéréographique, cf exercice 61). Il va en résulter que S^n est homéomorphe à $\tilde{\mathbf{R}^n}$. Plus généralement, montrons que pour X localement compact et K compact, la condition "il existe $p \in K$ tel que $K\setminus\{p\}$ soit homémomorphe à X" est (évidemment nécessaire mais) suffisante pour que K soit homéomorphe à $\tilde{X}$. Soit donc $\varphi : K \setminus \{p\} \to X$ un homéomorphisme, et $\psi : K \to \tilde{X}$ la bijection prolongeant φ ($\psi(p) = \infty$). Pour montrer que ψ est un homéomorphisme on peut se contenter de prouver que ψ est continue, c'est-à-dire que $\forall O \in \mathcal{T}', \psi^{-1}(O)$ est un ouvert de K. Si $O \in \mathcal{T}$ c'est clair car $\psi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(O)$. Si $O = \tilde{X} \setminus K' \in \mathcal{A}$, c'est parce que $\psi^{-1}(\tilde{X} \setminus O) = \varphi^{-1}(K')$ est un compact donc est fermé dans K.

Exercice 85.

a) L'injectivité vient du fait qu'un réel x a parfois deux développements ternaires dont un "impropre" i.e. de la forme $x = \sum \alpha_n 3^{-n}$ avec $\alpha_n = 2$ à partir d'un certain rang $N + 1$, mais que dans ce cas son autre développement (le "propre") est $x = \sum \beta_n 3^{-n}$ avec $\beta_n = \alpha_n$ pour $n < N$, $\beta_N = 1 + \alpha_N$, et $\beta_n = 0$ pour $n > N$: comme $\beta_N = 1 + \alpha_N$, on ne peut pas avoir à la fois $\alpha_N, \beta_N \in \{0, 2\}$.
C est en bijection avec $\{0, 2\}^{\mathbf{N}^*}$ donc (cf Soutien 1, exercice IV.2) avec $\mathbf{R}$.

b) C est compact car fermé dans le compact $[0, 1]$, car égal au complémentaire d'une réunion d'intervalles ouverts ($]1/3, 2/3[$, $]1/9, 2/9[$, $]7/9, 8/9[$, ...).

c) $1-\lambda(C) = \lambda(]1/3,2/3[\cup]1/9,2/9[\cup]7/9,8/9[\cup\dots) = 1/3+2/9+4/27+\dots =$ $(1/3)\sum_{k=0}^{\infty}(2/3)^k = \frac{1/3}{1-(2/3)} = 1$, donc $\lambda(C)=0$, donc le seul intervalle ouvert inclus dans C est $\emptyset$, donc le seul ouvert inclus dans C aussi.

d) Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n 3^{-n} \in C$ (avec $\alpha_n \in \{0,2\}$). Pour montrer que x est non isolé il suffit de trouver une suite $x_n \in C$, $x_n \neq x$, $x_n \to x$. Si $\alpha_n = 0$ à partir d'un certain rang N, on peut prendre (pour $n \geq N$) $x_n = x + 2.3^{-n}$; sinon, on peut prendre $x_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k 3^{-k}$.

Exercice 86. $\mathbf{R}$ n'est pas compact car pas borné pour la distance usuelle, qui induit la même topologie que d (cf exercice 72.a). $\mathbf{R}$ est évidemment borné pour d puisque $d \leq 1$.

Exercice 87.

a) Exemple dans $\mathbf{R}^2$: $A = \{(x,1/x) \mid x \in \mathbf{R}^*\}$ (fermé comme immage réciproque de $\{1\}$ par l'application continue $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto xy$) et $B = \mathbf{R}\times\{0\}$ (fermé comme produit de deux fermés, cf exercice 57). Exemple dans $\mathbf{R}$: $A = \{n+1/(2n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ et $B = \mathbf{N}$ (chacun fermé comme ensemble des termes d'une suite sans valeur d'adhérence).

b) $d(A,B)$ est l'inf de l'application $B \to \mathbf{R}, b \mapsto d(A,b)$. Cette application est continue (car 1-lischitzienne) donc si B est compact cet inf est atteint, autrement dit il existe $b \in B$ t.q. $d(A,B) = d(A,b)$. Comme b n'appartient pas au fermé A, $d(A,b) > 0$.

c) B est évidemment compact (car fini et séparé).
Pour montrer que A est fermé, montrons que la suite $P_n = (n+2)X^n$ n'a aucune valeur d'adhérence (dans $\mathbf{R}[X]$, et même dans $L^1([0,1])$). Si (P_n) admettait une sous-suite $P_{\varphi(n)}$ convergeant vers f dans $L^1([0,1])$, d'une part on aurait $N_1(f) \geq 1$ (puisque $\forall n, N_1(P_n) > 1$), d'autre part (par le lemme de Riesz-Fischer) $P_{\varphi(n)}$ admettrait une sous-suite convergeant presque partout vers f. Or $\forall t \in [0,1[, P_n(t) \to 0$. On aurait donc f presque-partout nulle, d'où $N_1(f) = 0$: contradiction.
Variante (permettant d'éviter Riesz-Fischer pour montrer que f serait presque-partout nulle) : P_n tend vers 0 non seulement simplement sur $[0,1[$, mais uniformément sur tout intervalle $[0,1-1/k]$ avec $k \in \mathbf{N}^*$, donc aussi pour la norme L_1 sur $[0,1-1/k]$. Donc $P_{\varphi(n)}$ aussi. Donc f serait (presque partout) nulle sur chaque $[0,1-1/k]$ donc sur $[0,1[$.
Variante encore plus "pédestre" : un calcul élémentaire donne, pour $n > m$,
$N_1(P_m - P_n) = \frac{m+2}{m+1}(2t_{m,n}^{m+1} - 1) - \frac{n+2}{n+1}(2t_{m,n}^{n+1} - 1)$ avec $t_{m,n} = (\frac{m+2}{n+2})^{\frac{1}{n-m}}$, puis $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} N_1(P_m - P_n)) = \lim_{m\to\infty}\frac{m+2}{m+1} + 1 = 2$ donc pour toute sous-suite $P_{\varphi(n)}$, on aura $\lim_{p\to\infty}(\lim_{q\to\infty} N_1(P_{\varphi(p)} - P_{\varphi(q)})) = 2 \neq 0$ donc la sous-suite ne sera pas de Cauchy, donc pas convergente.
$d(A,B) = \inf_{n\in\mathbf{N}}\frac{n+2}{n+1} = 1$, mais cet inf n'est pas atteint.

Exercice 88. Remarquons d'abord que pour tout $y \in E$, la distance $d(A,y) = \inf_{x\in A} d(x,y)$ est atteinte (par compacité de A et continuité de $x \mapsto d(x,y)$). Donc $d(A,y) \leq r \Leftrightarrow \exists x \in A, d(x,y) \leq r$. On en déduit que $\cup_{x\in A}B'(x,r) = \{y \in E, d(A,y) \leq r\} =$ l'image réciproque du fermé $]-\infty, r]$ par l'application continue $E \to \mathbf{R}, y \mapsto d(A,y)$: c'est donc un fermé de E.

Exercice 89. Les K_ε sont bien des ouverts contenant K. Montrons que tout ouvert U contenant K contient un K_ε. Pour cela, posons $F = U^c$ (fermé disjoint de K). F est disjoint de K_ε ssi $d(F,K) \geq \varepsilon$. Il s'agit donc de prouver que $d(F,K) > 0$: cf exercice 87.b.

Exercice 90. Faux. La fonction $F(x,y) := \frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)}$ peut avoir un sup égal à 1 (donc non atteint), car elle n'est (définie et) continue que sur $E\times E\setminus\Delta$, et non pas sur le compact $E\times E$. Exemple $E = [0,1]$ et f telle que $|f'| < 1$ sur $]0,1[$ mais $|f'(0)|$ ou $|f'(1)| = 1$. Par exemple $f(x) = \sin x$ ou $x^2/2$.

Exercice 91. Posons $g(x) = d(x, f(x))$: $g : E \to \mathbf{R}$ est continue donc atteint son inf, que nous noterons k. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $k = g(x_0)$.

a) Si x_0 n'est pas fixe par f, k est > 0.

b) On a $f(x_0) = x_0$ car sinon (en appliquant l'hypothèse sur f à $x = x_0, y = f(x_0)$) on trouverait un x $(= f(x_0))$ tel que $g(x) < g(x_0)$.

Exercice 92.

a) Si on avait $d(x, F_x) = \varepsilon > 0$, on aurait $\forall n > 0, d(x, f^n(x)) \geq \varepsilon$ donc $\forall q > p, d(f^p(x), f^q(x)) \geq \varepsilon$ donc la suite $f^n(x)$ n'admettrait pas de sous-suite convergente, ce qui contredirait la compacité de E. Donc $d(x, F_x) = 0$ c'est-à-dire x est adhérent à F_x. Donc x appartient à tout fermé contenant F_x, en particulier à $f(E)$ (qui est fermé car compact comme image continue d'un compact dans un séparé). Ceci prouve la surjectivité de f (l'injectivité est évidente).
Autre méthode pour le début de la question (plus naturelle a priori) : soit φ strictement croissante t.q. la suite des $f^{\varphi(n)}(x)$ converge, donc soit de Cauchy. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p \geq q \geq N, d(f^{\varphi(p)}(x), f^{\varphi(q)}(x)) \leq \varepsilon$. On en déduit $d(F_x, x) \leq d(f^{\varphi(p)-\varphi(q)}(x), x) \leq \varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d(F_x, x) = 0$.
Remarque 1 : on a en fait prouvé que pour toute suite strictement croissante $s(n)$ (en particulier pour $s(n) = n$) si on pose $\psi(n) = \varphi(s(n+1)) - \varphi(s(n))$, on a $f^{\psi(n)} \to x$.
Remarque 2 : on a utilisé que $f(E)$ est fermé. Plus généralement, pour toute application continue $f : X \to Y$ et toute partie A de X, l'inclusion habituelle $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ devient une égalité lorsque X est compact et Y séparé (exercice).

b) L'idée est de construire une suite $\psi(n) > 0$ (inutile qu'elle soit strictement croissante, mais on peut toujours si on veut faire en sorte qu'elle le soit) telle qu'on ait à la fois $f^{\psi(n)}(x) \to x$ et $f^{\psi(n)}(y) \to y$. On aura alors $d(x, y)$ adhérent à l'ensemble des $d(f^n(x), f^n(y))$ pour $n > 0$, donc (puisque cette suite est croissante) $d(x, y) \geq d(f(x), f(y))$. Reste à contruire un ψ *qui soit le même pour x et y*. Pour cela, deux méthodes :

- ou bien (en utilisant la remarque 1 de a) partir d'un φ qui soit le même pour x et y, ce qui est toujours possible par double extraction (en choisissant d'abord ρ t.q. $f^{\rho(n)}(x)$ converge, puis σ t.q. $f^{\rho\circ\sigma(n)}(y)$ converge, et en posant $\varphi = \rho \circ \sigma$).

- ou bien remarquer que l'application $f \times f : E \times E \to E \times E$ est encore une dilatation (pour une distance adéquate sur $E \times E$) et lui appliquer le début du (a) : (x, y) est adhérent à $F_{(x,y)}$.

c) Prouvons que f est une isométrie (il en sera de même pour g). D'après (a), $f \circ g$ est surjective donc f aussi. D'après (b), $d(x, y) = d(g \circ f(x), g \circ f(y)) \geq \delta(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$, d'où $\delta(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

d) Une telle bijection f est continue (car 1-lipschitzienne) donc f^{-1} aussi (car E compact) donc f^{-1} est une dilatation donc est une isométrie, donc f aussi.

Exercice 93. Il suffit (cf exercice 47.b) de montrer que si $x_n \to a$ alors $f(x_n) \to f(a)$. Posons $K = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{a\}$ et $K' := f(K)$, il suffit donc de montrer que la restriction $g : K \to K'$ de f est continue. Or K est compact (cf exercice 74) donc (par hypothèse sur f) K' est compact. Comme toute bijection continue d'un compact dans un séparé est un homéomorphisme, il suffit donc de montrer que $g^{-1} : K' \to K$ est continue : pour tout fermé F de K, F est compact donc $(g^{-1})^{-1}(F) = g(F) = f(F)$ est compact, donc fermé dans K'.

Exercice 94. Parmi les 29 topologies $\mathcal{T}$ trouvées dans l'exercice 8,

a) il y en a 19 pour lesquelles X est connexe, i.e. telles que $\mathcal{T}$ ne contienne pas deux parties propres complémentaires (un singleton et la paire complémentaire) :

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, A\}$ avec A partie propre de X : 8-2=6 choix pour A.

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B\}$ avec par exemple $A = \{a\}, B = \{a, b\}$: 6 choix possibles pour (a, b).

$|\mathcal{T}| = 5 \Leftrightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B, C\}$. Premier cas A, B, C sont deux singletons et une paire (leur réunion) : 3 choix possibles. Second cas A, B, C sont deux paires et un singleton (leur intersection) : 3 choix possibles.

b) à part $\mathcal{P}(X)$ pour laquelle X a trois composantes connexes, pour les 9 topologies restantes X a deux composantes connexes :

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B\}$ avec par exemple $A = \{a\}$ et $B = \{b, c\}$: 3 choix possibles

$|\mathcal{T}| = 6 \Leftrightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B, C, D\}$ avec $A, B, C, D =$ deux singletons, leur réunion, et une autre paire : 6 choix.

Exercice 95.

a) Démontrons la contraposée. Si $Fr(C) = \emptyset$, l'intérieur de C est égal à son adhérence, donc C, compris entre les deux, est égal aux deux donc est à la fois ouvert est fermé, donc son complémentaire aussi, donc si C est une partie propre de A, A est non connexe.

b) Il suffit d'appliquer (a) à $C = B \cap A$, car la frontière de C dans A (muni de la topologie induite) est égale à $Fr(B) \cap A$. Remarque : ceci est un analogue, dans le cadre de la connexité, de la propriété de "passage de la frontière" dans le cadre de la connexité par arcs.

Exercice 96. Soient f continue non constante de $A \cup B$ dans $\{0, 1\}$. Par connexité de A et B, f est constante sur A et constante sur B : par exemple $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B. Par continuité, $f = 0$ sur $\overline{A} \cap (A \cup B) = A \cup (\overline{A} \cap B)$, d'où contradiction si $x \in \overline{A} \cap B$ $(0 = f(x) = 1)$.

Exercice 97. Notons $\sim$ la relation d'équivalence dont les classes sont les composantes connexes ($x \sim y \Leftrightarrow$ il existe une partie connexe de X contenant à la fois x et y). Soient $x \in X$, i tel que $x \in O_i$, et O l'ouvert (complémentaire) $\cup_{j \neq i} O_j$. Si $y \in O_i$ alors (par connexité de O_i) $x \sim y$. Si au contraire $y \in O$ alors $x \not\sim y$ puisque pour tout $Y \in X$ contenant à la fois x et y, Y est non connexe car il est l'union disjointe de ses deux ouverts non vides $O_i \cap Y$ et $O \cap Y$. En résumé, pour $x \in O_i$, $x \sim y \Leftrightarrow y \in O_i$, donc la composante connexe de x est O_i.

Exercice 98. Il suffit d'appliquer le cours : " Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties connexes d'un espace X telle que pour tous $i, j \in I$, il existe une suite finie d'indices $i_0, \ldots, i_n \in I$ t.q. $i_0 = i, i_n = j$ et $\forall k = 0, ..., n-1$: $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$; alors $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe."

Exercice 99.

a) Soient C cet ensemble, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$, et $(x, y) = t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2)$ avec $t \in]0, 1[$. Alors $x \in]x_1, x_2[\subset I, y \in]y_1, y_2[\subset I, et x = tx_1 + (1-t)x_2 < ty_1 + (1-t)y_2 = y$, donc $(x, y) \in C$.

b) Soit $F(x, y) = f(y) - f(x)$. $F(C)$ est un connexe de $\mathbf{R}^*$ donc est inclus dans $\mathbf{R}^*_+$ (et f strictement croissante) ou dans $\mathbf{R}^*_-$ (et f strictement décroissante).

c) Un élément x de I est une extrémité de I ssi $I \setminus \{x\}$ est connexe.

d) f est un homéo donc f et f^{-1} conservent la propriété c.

e) Si E est un singleton $\{a\}$ (i.e. $I = [a, b[$ ou $]b, a]$), $f(a) = a$ donc f est strictement croissante.

Exercice 100. Soit $g(x) = f(x) - x$, $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ est continue, $g(0) = f(0) \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, donc (théorème des valeurs intermédiaires) $\exists x \in [0,1], 0 = g(x) = f(x) - x$.
Les applications $]0,1] \to]0,1], x \mapsto x/2$, $[0,+\infty[\to [0,+\infty[, x \mapsto x+1$ sont continues sans point fixe. Idem pour l'application $f : [0,1] \cup [2,3] \to [0,1] \cup [2,3]$ qui vaut 2 sur $[0,1]$ et 0 sur $[2,3]$.

Exercice 101. Soit $g : A \to B$ définie par $g(x) = x$ si $x \in [-1,1]$, $g(-2) = 2$, $g(2) = 3$: g est un homéomorphisme. Soit f un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ tel que $f(A) = B$. Alors f envoie chaque composante connexe de A sur une composante connexe de B, et envoie les singletons sur les singletons, donc envoie $[-1,1]$ sur lui-même (en particulier $f(1) \leq 1$ et $\{-2,2\}$ sur $\{2,3\}$. Mais ceci est impossible car f est strictement croissante (d'où $f(-2) < f(1) \leq 1$) ou strictement décroissante (d'où $f(2) < f(1) \leq 1$) or 2 et $3 > 1$.

Exercice 102. Il suffit de construire une bijection continue f d'un non connexe X dans un connexe Y (f^{-1} sera donc non continue). Exemple $X =]-1,0] \cup]1,2[$, $Y =]-1,1[$, $f(x) = x$ si $x \leq 0$, $f(x) = x - 1$ si $x > 0$. Autre exemple : $f = id_E$, $X = E$ muni de la topologie discrète, $Y = E$ muni de la topologie grossière, pour E un ensemble ayant au moins deux éléments.

Exercice 103.

a) Soient U, V ouverts complémentaires t.q. $p \in U$ et $q \in V$. Si $p, q \in A \subset X$ alors A est non connexe (car dans A, $A \cap U$ et $A \cap V$ sont deux ouverts non vides complémentaires). Donc p, q ne sont pas connectés.

b) Soient $p, q \in \mathbf{Q}$ avec $p < q$. Soit $r \in]p,q[\setminus \mathbf{Q}$. D'après a) appliqué à $U =]-\infty, r[\cap \mathbf{Q}$ et $V =]r, +\infty[\cap \mathbf{Q}$, p, q ne sont pas connectés dans $\mathbf{Q}$.

c) $\mathcal{T}$ contient aussi les demi-droites de la forme $]-\infty, b] = \cup_{a<b}]a,b]$ et $]a,+\infty[= \cup_{b>a}]a,b]$. Soient $p, q \in \mathbf{R}$ avec $p < q$. D'après a) appliqué à $U =]-\infty, p]$ et $V =]p, +\infty[$, p, q ne sont pas connectés dans $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$.

d) Soit U ouvert fermé de X contenant q, montrons que $p \in U$. Soit D la droite d'équation $y = -1$, $U \cap D$ ouvert fermé non vide de D qui est connexe, donc $U \cap D = D$, i.e. $D \subset U$, en particulier $(0,-1) \in U$, donc (puisque U ouvert dans X) il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n > N, (0, -\frac{n}{n+1}) \in U$, donc $U \cap A_n$ est un ouvert fermé non vide de A_n connexe, donc $A_n \subset U$, en particulier $(0, \frac{n}{n+1}) \in U$. Et ce pour tout $n \geq N$, donc (puisque U fermé dans X) $p \in U$. Ceci prouve que dans X il n'existe pas U, V ouverts complémentaires t.q. $p \in U$ et $q \in V$. Pourtant, p, q ne sont pas connectés puisque la composante connexe de q est D (qui ne contient pas p). En effet, D est une partie connexe de X contenant q et c'est la plus grosse, car pour toute partie A de X contenant strictement D, ou bien A contient un point d'un A_n pour un certain $n \in \mathbf{N}^*$ et alors $A \cap A_n$ est un ouvert fermé de A différent de $\emptyset, A$, ou bien $A \subset A_0$ et alors D est un ouvert fermé de A différent de $\emptyset, A$, donc dans les deux cas A est non connexe.

Exercice 104. Soient $p \in X$ et C l'ensemble des points de X reliés à p par une chaîne simple finie d'éléments du recouvrement ouvert $\mathcal{A} = (U_i)_{i \in I}$. Il existe U_i contenant p, qui vérifie donc $U_i \subset C$ (par une chaîne de longueur 0), en particulier $p \in C$ donc $C \neq \emptyset$. Pour tout $q \in C$, il existe un U_j contenant q, qui vérifie donc $U_j \subset C$, donc C est ouvert. Pour tout $q \in C^c$, il existe un U_j contenant q, qui vérifie donc $U_j \cap C = \emptyset$, donc C^c est ouvert. Donc si X est connexe, $C = X$.

Exercice 105.

a) Soient $x, y \in E^*$. Si x, y sont non colinéaires, $[x,y] \subset E^*$. Si x, y sont colinéaires, soit z non colinéaire à x, y (un tel z existe, par hypothèse sur la dimension), alors $[x,z] \cup [z,y] \subset E^*$. Remarque : en dimension 1 c'est faux, $\mathbf{R}^*$ n'est pas connexe.

b) $S(E)$ donc connexe (par arcs) car c'est l'image de E^* par l'application continue $x \mapsto x/\|x\|$. La couronne $C = B(0,b) \setminus B'(0,a)$ aussi pour $0 \leq a < b \leq +\infty$, car C est l'image de E^* par l'application continue $f : x \mapsto (x/\|x\|)\varphi(\|x\|)$, où φ est n'importe quelle application continue surjective de $]0,+\infty[$ dans $]a,b[$, par exemple $\varphi(t) = a + \frac{b-a}{\pi/2} \arctan t$ si $b < +\infty$, $\varphi(t) = a + t$ si $b = +\infty$. (En fait ce φ est un homéomorphisme, donc $f : E^* \to C$ aussi). Autre méthode : soient $x, y \in C$, posons $z = x(\|y\|/\|x\|)$, alors $[x, z] \subset C$ et z, y sont reliés par un arc dans la sphère de centre 0 et de rayon $\|y\|$, donc par un arc dans C.

c) A est bornée donc il existe $R > 0$ tel que $A \subset B(0, R)$. Alors $S(0, R)$ est une partie de A^c connexe par arcs, et tout point de A^c est relié à un point de $S(0, R)$ par un segment (radial) inclus dans A^c. Donc A^c est connexe par arcs. Remarque : même conclusion (par translation) dans le cas où A est (bornée et) étoilée par rapport à un autre point que 0.

d) $E \setminus S(E)$ est réunion de deux ouverts disjoints, $B(0, 1)$ et $B'(0, 1)^c$. Le premier est convexe donc connexe. Le second est connexe d'après c (ou directement d'après b appliqué à $a = 1$ et $b = +\infty$). Ce sont donc les composantes connexes de $E \setminus S(E)$ (cf exercice 97).

Exercice 106.

a) Soit G un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^n$: $dim(G) > 1$ donc G^* est connexe par arcs. F aussi (F est même convexe) donc $F^c = F \oplus G^*$ est connexe par arcs.

b) Soit f une forme linéaire de noyau F : $F^c = C^+ \cup C^-$ avec $C^+ = f^{-1}(]0, +\infty[)$, $C^- = f^{-1}(] - \infty, 0[)$ ouverts, et (convexes donc) connexes par arcs, donc (par le même raisonnement que dans l'exercice 7 question d) ce sont les deux composantes connexes de F^c. $\forall a \in F$, soit $E_a = C^+ \cup \{a\} \cup C^-$. Alors $C^+ \cup \{a\}$ est convexe donc connexe par arcs, $C^- \cup \{a\}$ de même, or ils sont non disjoints, donc leur réunion E_a est connexe par arcs (ou plus directement : E_a est étoilé par rapport à a). Pour tout A strictement inclus dans F, $A^c = \cup_{a \in F \setminus A} E_a$ l'est donc aussi (car les E_a sont non disjoints). (Ou simplement, en choisissant un point $a \in F \setminus A$: E_a est connexe et dense dans A^c).

c) Si $n \geq 2$, $(\mathbf{R}^n)^*$ est connexe (par arcs), tandis que $\forall x \in \mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes, donc $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}$ ne sont pas homéomorphes. Soit $c \in]a, b[$, alors $[a, b] \setminus \{c\}$ a deux composantes connexes (les deux ouverts de $[a, b]$, connexes et disjoints, $[a, c[$ et $]c, b]$). Soit $\overline{D}$ un disque fermé de $\mathbf{R}^2$. Pour tout $x \in \overline{D}$, ou bien $x \in Fr(D)$ et alors $\overline{D} \setminus \{x\}$ est convexe donc connexe (par arcs), ou bien $x \in D$ et alors $\overline{D} \setminus \{x\}$ est également connexe (par arcs, même démonstration que pour E^* dans l'exercice 105, ou s'en déduit en disant que E^* est homéomorphe à une partie dense de $\overline{D} \setminus \{x\}$). Donc $[a, b]$ et D ne sont pas homéomorphes.

Exercice 107. Posons $g(u) = f(u) - f(-u)$. Alors $g(S^{n-1})$ est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$, symétrique (car $g(-x) = -g(x)$) donc contenant à la fois des réels ≥ 0 et des réels ≤ 0, donc contenant 0. (Inutile d'utiliser que - par compacité - cet intervalle est fermé borné).

Exercice 108.

a) $C \cup S$ est connexe car c'est l'adhérence de C qui est connexe (comme image continue du connexe $\mathbf{R}^+$). Mais il n'est pas connexe par arcs car aucun chemin dans $C \cup S$ partant de C n'atteint S, car en notant $M_t = \frac{t}{1+t}(\cos t, \sin t)$, si $d(M_t, S) = \frac{1}{t+1} \to 0$ alors $t \to +\infty$ (à détailler).

b) C, S, I sont connexes par arcs (comme images continues de connexes par arcs) et I rencontre C et S, donc $C \cup I \cup S$ est connexe par arcs. Mais il n'est pas localement connexe, car par exemple $(-1, 0) \in S$ n'admet pas (dans cet espace) de base de voisinages connexes.

Exercice 109.

a) $a \in C(a)$ donc $C(a) \neq \emptyset$. Pour tout $x \in C(a)$, soit B une boule ouverte de centre x et incluse dans O, alors $B \subset C(a)$. Donc $C(a)$ est ouvert.

b) Soit $x \in O$ adhérent à $C(a)$. Soit B une boule ouverte de centre x et incluse dans O, alors B rencontre $C(a)$ donc $B \subset C(a)$ donc $x \in C(a)$. Donc $C(a)$ est fermé.

c) Si O est connexe on a donc $C(a) = O$, donc O connexe par arcs.

Exercice 110.

a) On se ramène facilement au cas d'une boule B de centre O et au cas $x = 0$. Soit alors $y = (t_1, \ldots, t_n) \in B$, la suite $(x_0, \ldots, x_{n+1})$ convient, avec $x_k = (t_0, \ldots, t_{k-1}, 0, \ldots, 0)$.

b) Soient O un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$, $a \in O$, et $C(a)$ l'ensemble des $x \in O$ reliés à x par un c.p.a. . D'après a), toute boule ouverte qui rencontre $C(a)$ est incluse dans $C(a)$, donc on peut raisonner exactement comme dans l'exercice précédent et montrer que $C(a)$ est un ouvert fermé non-vide de O donc $C(a) = O$, donc O est connexe par c.p.a. .

Exercice 111.

a) $f(U)$ est la réunion des $f(U_x)$ quand x parcourt $f^{-1}(O)$. Or pour un tel x, $f(U_x)$ est un connexe contenant $f(x)$ et inclus dans Y', donc est inclus dans la composante connexe de $f(x)$ dans Y', qui est O. D'où $f(U) \subset O$.
On a $O \subset Y'$ par définition. Montrons que O est par ailleurs disjoint de $f(X \setminus U)$, i.e. que $\forall x \notin U, f(x) \notin O$, i.e. que $\forall x \in f^{-1}(O), x \in U$: il suffit de constater que si $x \in f^{-1}(O)$ alors $x \in U_x \subset U$.
Pour tout $y \in Y' \setminus f(X \setminus U)$, soit (puisque $Y' \subset f(X)$) $x \in X$ t.q. $y = f(x)$. Alors $x \notin X \setminus U$ i.e. $x \in U$, donc $y \in f(U)$, d'où la troisième inclusion.
On a donc $f(U) = O = Y' \setminus f(X \setminus U)$.

b) Si X est compact alors $f(X)$ aussi (image continue dans un séparé). Si de plus X est localement connexe, soient Y' un ouvert de $f(X)$ et O une composante connexe de Y', montrons que O est un ouvert de $f(X)$ (ce qui prouvera que $f(X)$ est localement connexe). On applique a) : $X' = f^{-1}(Y')$ est un ouvert de X' donc (par connexité locale de X) les U_x sont ouverts, donc U aussi, donc $X \setminus U$ est un fermé du compact X, donc est compact, donc $f(X \setminus U)$ compact, donc fermé dans $f(X)$, donc $O = Y' \setminus f(X \setminus U)$ est un ouvert de $f(X)$.

c) Si X_1, X_2 sont deux parties de Y compactes et localement connexes alors l'espace topologique X constitué de leur union disjointe l'est aussi. Or l'application canonique de X dans Y est continue et son image est $X_1 \cup X_2$. Donc c) se déduit de b).

d) X_2 est évidemment (compact et) localement connexe. X_1 est homéomorphe à $]0, 1]$ donc (non compact et) localement connexe. $X_1 \cup X_2$ n'est pas localement connexe car dans cet espace, tout voisinage de $(0, 0)$ inclus dans l'ouvert $]-1, 1[\times]-1, 1[$ est non connexe.

e) Définissons f sur $X := [-3, -1]\cup]0, 1]$ (localement connexe mais non compact) par $f(x) = (0, x + 2)$ si $x \in [-3, -1]$ et $f(x) = (x, \sin(1/x))$ si $x \in]0, 1]$. Alors f est continue et (cf c)) $f(X)$ n'est pas localement connexe.

Exercice 112. $GL_n(\mathbf{R})$ est non connexe car union disjointe de deux ouverts non vides, $GL_n^+(\mathbf{R}) := det^{-1}(]0, +\infty[)$ et $GL_n^-(\mathbf{R}) := det^{-1}(]-\infty, 0[)$.
Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{C})$, posons $\varphi(z) = zA + (1 - z)B$. Comme $det \circ \varphi$ est un polynôme, l'ensemble Z de ses racines est fini, donc (cf ci-dessous) $\mathbf{C} \setminus Z$ est connexe (par arcs), donc son image $H(A, B)$ par φ aussi. De plus (par construction) $H(A, B)$ est une partie de $GL_n(\mathbf{C})$ contenant A et B. Ceci prouve que $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe (par arcs).

Preuve que pour toute partie finie (ou plus généralement, au plus dénombrable) Z du plan complexe, Z^c est connexe par arcs.
Pour tous $x, y \in Z^c$, soient D une droite passant par x et ne rencontrant pas Z (il en existe une infinité non dénombrable) puis D' une droite passant par y et ne rencontrant pas Z et non parallèle à D (à nouveau, il en existe une infinité non dénombrable), et soit z le point d'intersection de D et D'. Alors $[x, z] \cup [z, y]$ forme un chemin dans Z^c de x à y.
Preuve que pour toute partie finie (ou plus généralement, bornée et au plus dénombrable) Z du plan complexe, Z^c est connexe par arcs.
Soit $Z' = \cup_{z\in Z}[0, z]$, alors Z' est étoilé et borné donc (cf exercice 105.c) Z'^c est connexe. Par ailleurs, Z'^c est dense et inclus dans Z^c. Donc Z^c est connexe.
Preuve que pour toute partie finie (ou plus généralement, constituée de points isolés) Z du plan complexe, Z^c est connexe par arcs.
Soient $x, y \in Z^c$. Pour tout $a \in Z \cap [x, y]$, soit $\varepsilon_a > 0$ tel que $B(a, 2\varepsilon_a) \cap Z = \{a\}$ et $d(a, x) > \varepsilon_a$ et $d(a, y) > \varepsilon_a$. Dans le segment $[x, y]$ remplaçons, pour chaque $a \in Z \cap [x, y]$, la portion $[a - \varepsilon_a u, a + \varepsilon_a u]$ (où $u = \frac{y-x}{|y-x|}$) par l'un des deux demi-cercles de mêmes extrémités. On forme ainsi un chemin continu de x à y dans Z^c.
Remarque 1 : Toute partie de $\mathbf{R}^n$ constituée de points isolés est au plus dénombrable, donc les cas traités dans la première preuve englobent ceux non seulement de la deuxième, mais aussi de la troisième.
Remarque 2 : Soit D une partie au dénombrable d'un e.v.n. E de dimension ≥ 2, alors $E \setminus D$ est connexe par arcs : $\forall x, y \in E \setminus D$, soit P un plan de E contenant x, y, alors (en appliquant ce qui précède à $Z = D \cap P$, au plus dénombrable) il existe un arc joignant x à y dans $P \setminus Z$ donc dans $E \setminus D$.

Exercice 113. Si une boule fermée $B'(a, R)$ est non connexe, il existe une partition en deux ouverts-fermés non vides de $B'(a, R)$ (qui sont donc des fermés de X donc des compacts). Soient K celui des deux qui ne contient pas a, et $r = d(a, K) = \inf_{x\in K} d(a, x)$ (donc $r \leq R$). Par compacité de K, il existe $b \in K$ tel que $r = d(a, b)$. Alors $b \in B'(a, r) = \overline{B(a, r)}$ donc pour tout ouvert O de X contenant b, $O \cap B(a, r) \neq \emptyset$. En particulier (puisque $b \in K$) pour O ouvert de X tel que $K = O \cap B'(a, R)$ (un tel O existe puisque K est ouvert dans $B'(a, R)$). Il existe donc $c \in O \cap B(a, r)$, d'où $d(a, c) < r$ et $c \in O \cap B'(a, R) = K$, ce qui contredit la définition de r. Donc toutes les boules fermées $B'(a, R)$ sont connexes. Donc toute boule ouverte aussi, car $B(a, R) = \cup_{r<R} B'(a, r)$ (et tous ces $B'(a, r)$ ont a en commun). De même, $X = \cup_{r\in\mathbf{R}^+} B'(a, r)$ est connexe.

Exercice 114.

a) Par construction, (d_1 est bien une distance puisque arctan est injective et que $d(u, v) = |u-v|$ définit la distance usuelle, et) $(\mathbf{R}, d_1)$ est isométrique (donc homéomorphe) à $(]-\pi/2, \pi/2[, d)$, donc les ouverts de $\mathbf{R}$ pour d_1 sont les $\arctan^{-1}(O)$ pour O ouvert usuel de $]-\pi/2, \pi/2[$, donc (comme arctan est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$ pour les topologies usuelles) ce sont exactement les ouverts usuels de $\mathbf{R}$.
Variante : $id : (\mathbf{R}, d) \to (\mathbf{R}, d_1)$ est continue par continuité de arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ (pour les topologies usuelles), et $id : (\mathbf{R}, d_1) \to (\mathbf{R}, d)$ est continue par continuité de tan.

b) $(\mathbf{R}, d_1)$ n'est pas complet puisqu'il est isométrique à $(]-\pi/2, \pi/2[, d)$ qui n'est pas complet car pas fermé dans $(\mathbf{R}, d)$.
Variante : la suite $x_n = n$ est de Cauchy pour d_1 (puisque pour d, $\arctan n$ est convergente donc de Cauchy), mais pas convergente dans $(\mathbf{R}, d_1)$ (sinon la limite $\ell \in \mathbf{R}$ vérifierait $d_1(n, \ell) \to 0$ i.e. $\arctan \ell = \pi/2$, or $\pi/2 \notin \arctan(\mathbf{R})$). Remarque : ceci prouve que la complétude n'est

pas une notion topologique, i.e. préservée par homéomorphisme, puisque d et d_1 définissent la même topologie sur $\mathbf{R}$ mais que $\mathbf{R}$ est complet pour l'une et pas pour l'autre.

c) Non puisque $\mathbf{R}$ est complet pour d mais pas pour d_1. En fait, $id : (\mathbf{R}, d) \to (\mathbf{R}, d_1)$ est uniformément continue par uniforme continuité de arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ pour la distance usuelle (cf exercice 70), mais pas $id : (\mathbf{R}, d_1) \to (\mathbf{R}, d)$ car tan n'est pas uniformément continue pour la distance usuelle, puisqu'une suite qui (comme $\arctan n$) converge vers $\pi/2$ (donc est de Cauchy) a une image par tan qui tend vers $+\infty$ donc est non bornée (donc n'est pas de Cauchy).

Exercice 115.

a) Ce sont les distances associées aux (restrictions des) normes usuelles $\| \|_1$ (sur $L^1([0,1], \mathbf{R})$) et $\| \|_\infty$ (sur l'espace des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$).

b) (E, δ) est complet (cf cours, ou exercice 122) mais pas (E, d) car E n'est pas fermé dans $(L^1([0,1], \mathbf{R}), \| \|_1)$: une suite de fonctions continues peut converger pour $\| \|_1$ vers une fonction f non continue. En fait E est dense dans $L^1([0,1], \mathbf{R})$ donc n'importe quel $f \in L^1 \setminus E$ fournit un contre-exemple. Par exemple $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in]-1, 0[$ et $f_n(x) = f(x)$ si $x \geq 1/n$, $f_n(x) = f(1/n)$ si $x \leq 1/n$.

c) Remarquons d'abord que pour $\| \|_\infty$, B est la boule unité ouverte donc est ouvert mais non fermé. Il n'est donc pas non plus fermé pour $\| \|_1$, puisque $\| \|_1 \leq \| \|_\infty$.
Montrons que pour $\| \|_1$, B n'est pas ouvert car pas voisinage de tous ses points, par exemple pas voisinage de la fonction 0. Il suffit de trouver une suite de fonctions continues f_n telles que $\|f_n\|_\infty \geq 1$ et $\|f_n\|_1 \to 0$. Par exemple, $f_n(x) = 0$ si $x \geq 1/n$ et $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \leq 1/n$.

Exercice 116.

a) Même méthode que 114.a en remplaçant arctan par ln.

b) Pour d, une suite (x_n) de X est de Cauchy ssi elle converge dans $\mathbf{R}$ (donc en fait, dans $[0, +\infty[$). Elle est de Cauchy pour δ ssi $\ln(x_n)$ est de Cauchy pour d, i.e. converge dans $\mathbf{R}$ donc ssi (x_n) converge (au sens usuel) dans $exp(\mathbf{R}) =]0, +\infty[$. Les suites de X qui sont de Cauchy pour d mais pas pour δ sont donc celles qui convergent (au sens usuel) vers 0. Remarque : ceci prouve que la continuité de ln n'est pas uniforme pour la distance usuelle. (Par ailleurs, exp non plus n'est pas uniformément continue, d'après l' exercice 69).

c) (X, δ) est isométrique à $(\mathbf{R}, d)$ donc complet. (X, d) est non complet car non fermé dans $(\mathbf{R}, d)$.

Exercice 117. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est base d'une topologie sur $\overline{\mathbf{R}}$ il suffit (cf exercices 14 et 15) de vérifier que $\overline{\mathbf{R}} = \cup_{O \in \mathcal{B}} I$ (ce qui est immédiat) et que $\forall O, O' \in \mathcal{B}, \forall x \in O \cap O', \exists O'' \in \mathcal{B}, x \in O'' \subset O \cap O'$: si $x \in \mathbf{R}$ il suffit de prendre $O'' =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbf{R}, a < x < b$ et $]a, b[\subset O \cap O'$; si $x = -\infty$ alors $-\infty \in O \cap O'$ donc O, O' sont tous deux de la forme $[-\infty, a[$, donc l'un est inclus dans l'autre, donc il suffit de prendre O'' = le plus petit des deux ; si $x = +\infty$, idem. La topologie sur $\mathbf{R}$ induite par $\mathcal{T}$ admet pour base $\{O \cap \mathbf{R} \mid O \in \mathcal{B}\}$ donc est la topologie usuelle.

b) Dans $(\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{T})$, $-\infty$ est adhérent à $\mathbf{R}$ car tout voisinage de $-\infty$ contient un $[-\infty, a[$ donc rencontre $\mathbf{R}$. Idem pour $+\infty$. Donc $\mathbf{R}$ est dense.
$(\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{T})$ est homéomorphe à $[-1, 1]$ (muni de la topologie usuelle) d'après c), donc connexe.

c) f est prolongeable en $\overline{f} : \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ continue (nécesairement unique d'après b)) ssi f admet en $\pm\infty$ des limites (éventuellement infinies). C'est le cas pour $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. L'image de $\overline{f}$ est $[-1, 1]$ et la restriction $g : \overline{\mathbf{R}} \to [-1, 1]$ de $\overline{f}$ est un homéomorphisme (car $g^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$

pour $y \in]-1,1[$ donc g^{-1} est continue sur $]-1,1[$, et $\lim_{-1} g^{-1} = -\infty = g^{-1}(-1)$ et $\lim_1 g^{-1} = +\infty = g^{-1}(1)$).

d) D'après c) $(\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{T})$ est métrisable (cf exercice 64). L'espace métrique obtenu est isométrique à $[-1,1]$ muni de la distance usuelle, donc est complet (car pour cette distance, $[-1,1]$ est fermé dans $\mathbf{R}$ qui est complet).

Exercice 118.

a) $d(z,z')$ est la longueur (dans $\mathbf{C}$ muni de la distance usuelle) du plus court chemin de z à z' inclus dans une réunion finie de demi-droites d'origine O. Cette interprétation permet de vérifier facilement les trois propriétés qui font de d une distance (appelée “distance S.N.C.F.”). Notons δ la distance usuelle. On a $\delta \le d$ (donc $id : (\mathbf{C}, d) \to (\mathbf{C}, \delta)$ est continue) mais $id : (\mathbf{C}, \delta) \to (\mathbf{C}, d)$ n'est pas continue, car $|z_n - z| \to 0 \not\Rightarrow d(z_n, z) \to 0$ (exemple $z = 1$, $z_n = e^{i/n}$). Donc ces deux distances ne sont pas topologiquement équivalentes.

b) Soit (z_n) une suite de Cauchy pour d. Alors pour δ elle est aussi de Cauchy, donc admet une limite z. Si $z = 0$ on a $d(z_n, 0) = \delta(z_n, z) \to 0$. Si $z \ne 0$, soient $0 < \epsilon < |z|$ et N t.q. $\forall n \ge N, |z_n| \ge \epsilon$ et $\forall p, q \ge N, d(z_p, z_q) < 2\epsilon$. On a alors $\forall n \ge N$, $z_n \in \mathbf{R}^+ z_N$, donc $z \in \mathbf{R}^+ z_N$ et $d(z_n, z) = |z_n - z| \to 0$.

Exercice 119.

a) Soit N t.q. $\forall p, q \ge N, d(x_p, x_q) \le 1$ et soient $a = x_N$ et $R = \max(d(a, x_0), \dots, d(a, x_{N-1}), 1)$. Alors $\forall n \in \mathbf{N}, d(a, x_n) \le R$.

b) Soit (x_n) de Cauchy et (d'après a)) K une boule fermée contenant tous les x_n. Si K est compacte, (x_n) admet une sous-suite qui converge (dans K). Donc (puisque (x_n) est de Cauchy) (x_n) elle-même converge.

c) Les compacts de X sont toujours fermés et bornés. Si les fermés bornés de X sont compacts alors en particulier les boules fermées de X sont compactes. Réciproquement si les boules fermées de X sont compactes alors pour tout fermé borné K de X, K est un fermé d'une telle boule donc fermé d'un compact donc compact.

Exercice 120.

a) x est isolé ssi $\{x\}$ est ouvert i.e. ssi $\{x\}$ est d'intérieur vide.

b) Si X est dénombrable et sans points isolés, il est réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (les singletons) donc (exercice 125.c) n'est pas associé à une métrique complète.

c) $\mathbf{Q}$ est dénombrable et sa topologie usuelle est sans point isolé donc (d'après b)) non associée à une métrique complète.

Exercice 121. La seule question “difficile” est la complétude.
Soit $(x^{(n)})$ une suite de Cauchy dans E, on a $\lim_{p,q\to\infty} d(x^{(p)}, x^{(q)}) = 0$ i.e. $\lim_{p,q\to\infty} k(x^{(p)}, x^{(q)}) = +\infty$ i.e. $\forall M, \exists N_M, \forall p, q \ge N_M, k(x^{(p)}, x^{(q)}) > M$ i.e. les deux suites $x^{(p)}, x^{(q)}$ coïncident pour tous les indices $\le M$ i.e. $\forall k \le M, x_k^{(p)} = x_k^{(q)}$. Posons $x_k =$ cette valeur commune des $x_k^{(p)}$ pour tous les $p \ge N_M$ avec $M \ge k$. Alors, $\forall M, \forall p \ge N_M, k(x^{(p)}, x) > M$ donc $\lim_{p\to\infty} k(x^{(p)}, x) = +\infty$ donc $\lim_{p\to\infty} d(x^{(p)}, x) = 0$.

Exercice 122.

a) $\forall f, g \in \mathcal{B}(X, E)$, $\delta(f, g) \in \mathbf{R}^+$ (car si $a \in X$, $\delta(f, g) \le d(f(a), g(a)) + \sup_{x\in X} d(f(a), f(x)) + \sup_{x\in X} d(g(a), g(x))$). Les trois axiomes d'une distance sont évidemment vérifiés par δ.

b) Si $(\mathcal{B}(X,E),\delta)$ est complet alors (E,d) aussi, car il est isométrique au sous-espace (fermé) des applications constantes. Réciproquement si (E,d) est complet, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X,E),\delta)$. Pour tout $x\in X$, l'application $(\mathcal{B}(X,E),\delta)\to(E,d), f\mapsto f(x)$ est 1-lipschitzienne donc $(f_n(x))$ est de Cauchy dans (E,d) donc converge. Notons $f(x)$ sa limite. Pour tout $\epsilon>0$, soit N tel que $\forall p,q\geq N, \delta(f_p,f_q)\leq\epsilon$. Alors $\forall x\in X, \forall p,q\geq N, d(f_p(x),f_q(x))\leq\epsilon$ donc $\forall x\in X, \forall p\geq N, d(f_p(x),f(x))\leq\epsilon$ donc $\forall p\geq N, \sup_{x\in X} d(f_p(x),f(x))\leq\epsilon$. On en déduit (que $f\in\mathcal{B}(X,E)$ et) que $\delta(f_p,f)\to 0$ quand $p\to\infty$.

c) Soient $f_n\in C_b(X,E)$ et $f\in\mathcal{B}(X,E)$ t.q. $\delta(f_n,f)\to 0$, et $a\in X$. Montrons que f est continue en a. Soit $\epsilon>0$. Soit n t.q. $\delta(f_n,f)\leq\epsilon/3$. Soit V voisinage de a tel que $\forall x\in V, d(f_n(x),f_n(a))\leq\epsilon/3$. Alors $\forall x\in V, d(f(x),f(a))\leq\epsilon$. Ceci prouve que $C_b(X,E)$ est fermé dans $\mathcal{B}(X,E)$, donc complet d'après b) si E l'est.

Exercice 123.

a) Les d_n et les $d'_n := \min(1,d_n)$ sont symétriques et vérifient l'inégalité triangulaire, donc d aussi. De plus si $d(f,g)=0$ alors f,g coïncident sur chaque K_n, donc sur leur réunion X, i.e. $f=g$.

b) Soit (f_n) une suite de Cauchy dans (E,d). D'après l'exercice précédent, chaque $C(K_m,\mathbf{C})$ est complet pour d_m (ou ce qui est équivalent – cf exercice 72.a – pour d'_m), donc les restrictions $f_n^{(m)}$ des f_n à K_m convergent uniformément vers une fonction $f^{(m)}$ continue sur K_m. Comme la suite des K_m est croissante, la restriction de $f^{(m+1)}$ à K_m est $f^{(m)}$. Il existe donc une fonction f sur $\cup_{m\in\mathbf{N}}K_m=X$ dont la restriction à chaque K_m est $f^{(m)}$. f est continue sur chaque K_m donc sur chaque $\overset{\circ}{K}_m$ donc sur l'union de ces ouverts $\cup_{m\in\mathbf{N}}\overset{\circ}{K}_{m+1}\supset\cup_{m\in\mathbf{N}}K_m=X$. Montrons que $d(f_n,f)\to 0$. Soit $\epsilon>0$. Soit M tel que $\sum_{m>M}2^{-m}\leq\epsilon/2$. Comme $f_n\to f$ uniformément sur K_M, il existe N tel que $\forall n\geq N, \sum_{m\leq M}2^{-m}d'_m(f_n,f)\leq\epsilon/2$. Alors, $\forall n\geq N, d(f_n,f)\leq\epsilon$.

c) (E n'est pas réduit à $\{0\}$ et) d est bornée (par 2) donc ne provient jamais d'une norme sur E.

Exercice 124.

a) $\mathcal{R}$ est évidemment réflexive et symétrique, et la transitivité vient de l'inégalité triangulaire.

b) $\forall x,y\in\mathcal{E}$, la suite réelle $d(x_n,y_n)$ est de Cauchy donc admet une limite ℓ. Si $d(x'_n,x_n)\to 0$ et $d(y_n,y'_n)\to 0$ alors (par l'inégalité triangulaire) $d(x'_n,y'_n)\to\ell$.
$\delta(\overline{(x_n)},\overline{(y_n)})=0\Leftrightarrow\overline{(x_n)}=\overline{(y_n)}$ résulte de la définition de $\mathcal{R}$. La symétrie et l'inégalité triangulaire pour δ résultent des mêmes propriétés pour d.

c) Si $x_n=x$ et $y_n=y$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\delta(f(x),f(y))=\lim d(x_n,y_n)=d(x,y)$, donc f est bien une isométrie de (E,d) sur $(f(E),\delta)$. $f(E)$ est dense dans $\hat{E}$ car pour tout $\overline{(x_n)}\in\hat{E}$, $f(x_p)\to\overline{(x_n)}$ puisque $\lim_{p\to\infty}\delta(f(x_p),\overline{(x_n)})=\lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty}d(x_p,x_n)=0$, puisque $\lim_{p,n\to\infty}d(x_p,x_n)=0$ (cf Soutien 2-3 exercice 17). Pour toute suite de Cauchy (X_n) dans $\hat{E}$, soit (par densité de $f(E)$) (x_n) une suite de E telle que $\delta(f(x_n),X_n)\to 0$. Alors $(f(x_n))$ est aussi de Cauchy (pour δ), donc (x_n) aussi (pour d), et $X_p\to\overline{(x_n)}$ puisque $f(x_p)\to\overline{(x_n)}$.

d) Soit g une isométrie de E sur une partie dense d'un espace complet (F,d'). (E,d) est donc isométrique à la fois à $(f(E),\delta)$ et à $(g(E),d')$. Notons $k: f(E)\to g(E)$ l'isométrie composée. Puisque k est uniformément continue, que $f(E)$ est dense et que F est complet, k admet un (unique) prolongement (uniformément) continu $h:\hat{E}\to F$. De plus on a par construction $d'(h(x),h(y))=\delta(x,y)$ pour tous $x,y\in f(E)$ donc (par continuité et densité) pour tous $x,y\in\hat{E}$. Enfin h est surjective car $\mathrm{Im}(h)$ est d'une part isométrique à $\hat{E}$ donc complet donc fermé dans F, et d'autre part dense dans F (puisqu'il contient $\mathrm{Im}(k) = g(E)$ qui est dense). (Une autre façon de prouver la surjectivité serait de construire (de façon analogue) la bijection réciproque). Ceci s'applique à $E = \mathbf{Q}$ et $F = \mathbf{R}$ (Dedekind a donné une autre construction de $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$, par les "coupures").

Remarque 1. Une alternative à a)b)c) (beaucoup plus rapide mais moins intuitive) pour construire "le" complété $\hat{E}$ de (E, d) est de définir une application D de E dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(E, \mathbf{R})$ en posant $D(x) = d(x, \ ) : E \to \mathbf{R}, y \mapsto d(x, y)$, de vérifier que $\|D(x) - D(y)\|_\infty = d(x, y)$, et de poser $\hat{E} = \overline{D(E)}$.

Remarque 2. (Pour répondre à la question d'un étudiant : a-t-on oui ou non besoin de l'axiome du choix ?) Dans la réponse à c) on l'a implicitement utilisé (deux fois : pour la densité et pour la complétude). Pour la densité on peut l'éviter comme suit. Soit $X \in \hat{E}$ et $\epsilon > 0$. Pour *chaque* $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X$ puisqu'on a pour n assez grand $\delta(f(x_n), X) < \epsilon$, on a $\delta(a_x, X) < \epsilon$ où a_x désigne la valeur de $f(x_n)$ pour le plus petit de ces n. Soit $A = \{a_x \mid x \in X\}$, alors A est une partie non-vide de $f(E)$ incluse dans la boule $B(X, \epsilon)$. Par contre sans l'axiome du choix dénombrable, on a seulement une application naturelle isométrique du $\hat{E}$ de l'énoncé dans le $\hat{E}$ de la remarque 1, mais je ne crois pas qu'on puisse prouver qu'elle est surjective (ou ce qui revient au même, que le $\hat{E}$ de l'énoncé est complet). Mais ces finasseries me semblent vaines car cet axiome du choix dénombrable est de toutes façons indispensable (je crois) dans le théorème de prolongement, qu'on utilise dans d) pour prouver l'unicité du complété.

Exercice 125.

a) Procédons par récurrence. Ω_0 est dense donc rencontre l'ouvert non vide U. Soit $x_1 \in U \cap \Omega_0$. $U \cap \Omega_0$ est un ouvert contenant x_1, donc il existe $r_1 \in]0, 1]$ t.q. $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U \cap \Omega_0$. Soit $n \geq 2$ et supposons construits $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et $r_1, \ldots, r_{n-1}$. Ω_n est dense donc rencontre l'ouvert non vide $B(x_{n-1}, r_{n-1})$. Soit $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$. $B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$ est un ouvert contenant x_n donc il existe $r_n \in]0, 1/n]$ t.q. $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$.

b) Les $\overline{B(x_n, r_n)}$ forment une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0, dans un espace complet, donc leur intersection est un singleton $\{x\}$. On a $d(x_n, x) \leq r_n \leq 1/n$ donc $x_n \to x$. Mais surtout, $x \in U \cap \Omega$ donc Ω rencontre U, et ce pour tout ouvert non vide U, donc Ω est dense.

c) Soit $R = \cup_{n\in\mathbf{N}} R_n$ avec $\overset{\circ}{\overline{R_n}} = \emptyset$. Alors les $\Omega_n := (\overline{R_n})^c$ sont des ouverts denses donc $\Omega := \cap_{n\in\mathbf{N}} \Omega_n$ est dense, donc son complémentaire $\cup_{n\in\mathbf{N}} \overline{R_n}$ est d'intérieur vide, donc R aussi, donc $R \neq X$.

Exercice 126. cf cours.

Exercice 127.

a) Par construction, les deux premiers axiomes d'une distance sont vérifiés. Reste à prouver l'inégalité triangulaire $d_\alpha(m, p) \leq d_\alpha(m, n) + d_\alpha(n, p)$. Si deux des trois points sont égaux c'est immédiat. Sinon, cela vient de $\alpha + 1/m + 1/p \leq 2\alpha + 1/m + 2/n + 1/p$.

b) Puisque $d_\alpha(m, n) \leq \alpha \Rightarrow m = n$, toute suite de Cauchy pour d_α est stationnaire, donc convergente.

c) f n'a pas de point fixe, pourtant si $m \neq n$, $d_\alpha(f(m), f(n)) = \alpha + 1/(m+1) + 1/(n+1) < d_\alpha(m, n)$. (Ceci montre que le théorème de Picard devient faux si on remplace l'hypothèse "f est k-lipschitzienne pour un certain $k \in [0, 1[$" par l'hypothèse plus faible "$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ quand $x \neq y$", qui assure seulement l'unicité d'un point fixe mais pas son existence.

Un exemple du même type mais plus naturel est fourni par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, sur $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle).

Exercice 128. Φ est linéaire continue, de norme $\leq \int_0^1 (\int_0^x u du) dx = 1/6$, donc k-lipschitzienne pour $k = 1/6 < 1$. Or E est complet. Donc Φ admet un unique point fixe. Or les points fixes de Φ sont exactement les applications f deux fois dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $f''(t) = tf(t)$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Par ailleurs, la fonction nulle est solution évidente de ce problème.

Exercice 129.

a) $f(x) - 2/3 = \frac{6-4/3}{3x+2} \geq 0 \forall x > -2/3$ donc $f(E) \subset E$. $f'(x) = -14/(3x+2)^2$ donc $\forall x \in E, |f'(x)| \leq 7/8 < 1$ donc f est contractante donc dans E (complet car fermé dans $\mathbf{R}$ complet), f admet un point fixe.

b) g a deux points fixes $\pm\sqrt{2}$ (celui de f était donc $\sqrt{2}$), donc g n'est pas contractante (et même pas lipschitzienne puisque quand $x \to -2/3$, $|g'(x)| \to +\infty$).

Exercice 130.

a) E est isométrique à $\mathbf{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme sup (via l'application qui à f associe $x \mapsto f(x)e^{-Mx}$), donc est un espace vectoriel normé complet (cf exercice 122).

b) On veut que $\forall f, g \in E, d(Tf, Tg) \leq \frac{1}{2} d(f,g)$. Notons S l'application linéaire associée à l'application affine T, i.e. $S(h)(x) = \int_0^x ah(t^b)dt$. On veut donc que $\forall h \in E, \|S(h)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$ (autrement dit, que l'application linéaire S soit continue, de norme $\leq 1/2$). Essayons a priori de majorer $\|S(h)\|$ en fonction de $\|h\|$. Par définition de $\|h\|$ on a $\forall x \in [0,1], |h(x)| \leq e^{Mx}\|h\|$, d'où $|S(h)(x)| \leq \int_0^x ae^{Mt^b}dt\|h\|$, d'où $\|S(h)\| \leq C\|h\|$ avec $C = \sup_{0\leq x\leq 1} e^{-Mx}\int_0^x ae^{Mt^b}dt$ (et ce C est la plus petite constante possible, car pour $h(x) = e^{Mx}$ l'inégalité devient une égalité). Il s'agit donc d'ajuster M de telle façon que C soit $\leq 1/2$. Comme $b > 1$, $C < \sup_{0\leq x\leq 1} e^{-Mx}\int_0^x ae^{Mt}dt = a/M$. Il suffit donc de prendre $M \geq 2a$.

c) f est solution de (E) ssi f est un point fixe de T. D'où (d'après a et b) l'existence et l'unicité d'un tel f.

Exercice 131. $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ est complet (pour la norme sup) et T est affine (contractante mais pas strictement), de partie linéaire S (de norme 1). $S^2(f)(x) = \int_{0<t<x, 0<s<\varphi(t)} f(\varphi(s))dsdt$ donc $k := |||S|||^2 = \int_{0<t<1, 0<s<\varphi(t)} dsdt = \int_0^1 \varphi(t)dt < 1$ (par hypothèse sur φ).

Exercice 132.

a) d n'est autre que la distance associée à la norme $\|\sum a_i X^i\| = \sup_i |a_i|$.

b) Soit $J : \mathbf{R}[X] \to \ell^\infty$ l'injection linéaire $\sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto (a_0, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. On a $\|J(P)\|_\infty = \|P\|$ (ce qui prouve que $\| \ \|$ était bien une norme). $J(P_n)$ tend vers $a := (0, 1, 1/2, 1/3, \ldots)$ puisque la norme de la différence vaut $1/(n+1)$. Or a n'est pas “nulle à partir d'un certain rang”, autrement dit n'appartient pas à $\mathrm{Im}(J)$. Donc $\mathrm{Im}(J)$ est non fermé dans ℓ^∞ donc non complet, donc (par isométrie) $(\mathbf{R}[X], d)$ n'est pas complet. (Variante sans parler ouvertement de ℓ^∞ : montrer “directement” que la suite (P_n) est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbf{R}[X]$).

c) Pour $d(P,Q) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - Q(t)|$, idem en regardant tout polynôme comme une fonction bornée non plus sur $\mathbf{N}$ (comme suite de coefficients) mais sur $[0,1]$ (comme fonction polynômiale), et en considérant une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction (nécessairement continue mais) non polynômiale (de tels exemples abondent, d'après le théorème de Weierstrass ; en regardant de plus près la preuve de ce théorème, en expliciter un). Pour $d(P,Q) = \int_0^1 |P(t) - Q(t)|dt$, idem en regardant cette fois tout polynôme comme un élément de $L^1([0,1])$, et en utilisant le même exemple, puisque sur $[0,1]$ la convergence uniforme implique la convergence L^1.

Exercice 133.

a),b) cf exercice 115 (en remlaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$)

c) $(C, \| \|_\infty) = (C, \| \|_1)$ est isométrique à $(\mathbf{C}, | |)$ donc complet, donc C est fermé dans (E, d_∞) et dans (E, d_1).

d) Dans (E, d_∞), B est la boule unité fermée de centre 0 donc est fermé. Comme (E, d_∞) est complet on en déduit que (B, d_∞) aussi.
Montrons que dans (E, d_1), B est encore fermé. Supposons donc $f_n \in B$ et $f_n \to f \in E$ pour d_1 et montrons que $f \in B$. Montrons plus généralement que si $\|h_n - h\|_1 \to 0$ et $\forall n, h_n \leq g$ presque partout alors $h \leq g$ λ-presque-partout (ceci, appliqué à $h_n = |f_n|$, $h = |f|$ et $g = 1$, montrera que $|f| \leq 1$ presque partout donc, par continuité, partout).
Première méthode : par le lemme de Riesz-Fischer (celui qui sert à prouver la complétude des L^p), (h_n) admet une sous-suite qui converge presque partout vers h, d'où (puisque $\forall n, h_n \leq g$ p.p.) $g - h \geq 0$ p.p. (donc partout si g, h sont continues).
Deuxième méthode : $\forall x, y \in [0,1], \int_{[x,y]} h_n d\lambda \to \int_{[x,y]} h d\lambda$ d'où (puisque $\forall n, \int_{[x,y]} h_n d\lambda \leq \int_{[x,y]} g d\lambda$) $\int_{[x,y]} (g-h) d\lambda \geq 0$ donc pour tout borélien A, $\int_A (g-h) d\lambda \geq 0$, donc $g - h \geq 0$ λ-p.p. (donc partout si g, h sont continues).
Troisième méthode (plus élémentaire, en utilisant plus tôt la continuité de h et g) : on montre comme précédemment que $\forall x, y \in [0,1], \int_{[x,y]} (g-h) d\lambda \geq 0$, d'où, si g, h continues et en notant F une primitive de $g - h$: $\forall x \in [0,1], \forall y \neq x, \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \geq 0$ d'où $\forall x \in [0,1], F'(x) \geq 0$ c'est-à-dire $g - h \geq 0$.
Par contre (et ceci re-démontre que (E, d_1) n'est pas complet puiqu'il possède un fermé non complet) (B, d_1) n'est pas complet, car B n'est pas fermé dans $L^1([0,1], \mathbf{C})$: une suite de fonctions continues majorées en module par 1 peut très bien converger dans $L^1([0,1], \mathbf{C})$ vers une fonction non continue (plus précisément, vers une classe d'égalité presque partout de fonctions dont aucune n'est continue). Exemple : $f_n(t) = 1$ pour $t \leq 1/2 - 1/n$, 0 pour $t \geq 1/2 + 1/n$, f_n affine entre les deux.

Exercice 134. Le noyau de toute application linéaire continue est fermé (comme image réciproque du fermé $\{0\}$). Réciproquement soit $f : E \to k$ une *forme* linéaire dont le noyau H est fermé, montrons que f est continue. Si $f = 0$ c'est clair. Sinon, f est surjective (c'est là qu'on utilise que c'est une forme) donc il existe $a \in E$ tel que $f(a) = 1$. Comme $-a$ n'appartient pas au fermé H, il existe alors $\delta > 0$ tel que $-a + B(0,\delta) \cap H = \emptyset$, ce qui équivaut à $B(0,\delta) \cap (a + H) = \emptyset$ c'est-à-dire à $B(0,\delta) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. Pour tout $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ on a donc $x/f(x) \notin B(0,\delta)$, i.e. $||x||/|f(x)| \geq \delta$, i.e. $|f(x)| \leq ||x||/\delta$. Donc f est continue (de norme $\leq 1/\delta$).

Exercice 135.

a) Par continuité en 0 de $s \mapsto sx$, pour s assez petit $sx \in V$, donc pour t assez grand $x/t \in V$.

b) Supposons V convexe.
Pour montrer que $\mu_V(x+y) \leq \mu_V(x) + \mu_V(y)$, il s'agit de vérifier que tous $s, t > 0$ tels que $x \in sV$ et $y \in tV$ on a $\mu_V(x+y) \leq s + t$. C'est dû au fait que pour de tels s, t, $x + y \in (s+t)V$ (car $(x+y)/(s+t) = \lambda(x/s) + (1-\lambda)(y/t) \in V$ pour $\lambda = s/(s+t)$).
Quant à l'égalité $\mu_V(tx) = t\mu_V(x)$ pour $t \geq 0$, elle est immédiate pour $t = 0$ et pour $t > 0$ elle se déduit de l'égalité des deux ensembles dont ces deux termes sont les infs :
$\{s > 0 \mid tx \in sV\} = t\{r > 0 \mid x \in rV\}$.

c) Vue l'égalité ci-dessus, il suffit de prouver que $\forall \lambda \in U, \mu_V(\lambda x) = \mu_V(x)$. A nouveau, cela se déduit de l'égalité des deux ensembles dont ces deux termes sont les infs :
$\{t > 0 \mid \lambda x \in tV\} = \{t > 0 \mid x \in tV\}$ (puisque $V/\lambda = V$).

d) Il reste à prouver que si V est borné et $x \neq 0$ alors $\mu_V(x) \neq 0$. Soient $M > 0$ tel que $V \subset B(0, M)$ et $x \neq 0$. Alors pour $t \leq \|x\|/M$, $x \notin tV$, donc $\mu_V(x) \geq M\|x\|$.

e) On vient de prouver que $\mu_V \geq M\| \ \|$ en utilisant que V était borné. Utilisons de même que V est un voisinage de 0 : il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset V$. Alors pour $t \geq \|x\|/\varepsilon$, $x \in tV$, donc $\mu_V(x) \leq \|x\|/\varepsilon$.

Exercice 136.

a) $N(0X) = N(F) = 0$ (car $0 \in F$) et pour $\lambda \neq 0$, $x \in X \Leftrightarrow \lambda x \in \lambda X$, d'où $N(\lambda X) = \inf_{x \in X} \|\lambda x\| = |\lambda| N(X)$. L'inégalité triangulaire pour N se déduit de celle pour $\| \ \|$ par passage aux inf. Donc N est toujours une semi-norme. C'est une norme ssi $N(X) = 0 \Rightarrow X = F$. Or $N(x + F) = 0 \Leftrightarrow d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F}$, tandis que $x + F = F \Leftrightarrow x \in F$. Donc N est une norme ssi $\overline{F} \subset F$ i.e. ssi F est fermé.

b) φ est linéaire, et continue de norme ≤ 1 puisque $\forall x \in E, \forall X \in E/F, X = \varphi(x) \Leftrightarrow x \in X \Rightarrow N(X) \leq \|x\|$.

c) Supposons E complet et soit X_n une suite de Cauchy dans $(E/F, N)$. Soit $Y_n = X_{\varphi(n)}$ une sous-suite telle que $N(Y_{n+1} - Y_n) < 2^{-n}$. On montre par récurrence l'existence d'une suite (y_n) telle que $y_n \in Y_n$ et $\|y_{n+1} - y_n\| < 2^{-n}$. Cette suite est de Cauchy dans E. Soient y sa limite et $Y = \varphi(y)$. D'aprés b), $Y_n \to Y$. Donc $X_n \to Y$.

Exercice 137.

a)b) Cf (par exemple) poly d'intégration de D.Bakry p.42 à 45, puisque les espaces ℓ^p sont des cas particuliers d'espaces L^p (pour la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$).

c) Cf poly d'intégration p.46 : la proposition 29 prouve que si $p \leq q$, l'injection de ℓ^p dans ℓ^q est continue de norme ≤ 1. Pour montrer que la norme est exactement 1, il suffit de remarquer qu'il existe des $x \in \ell^p$ tels que $\|x\|_q = \|x\|_p$: les suites x dont tous les termes sont nuls sauf un.

d) D'après l'inégalité de Hölder, $\forall x \in \ell^p, \forall y \in \ell^q, \sum_k |x_k y_k| = \|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q < \infty$, donc $(\ | \ )$ est bien définie. Elle est visiblement bilinéaire. De plus, puisque $|(x|y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, elle est continue de norme ≤ 1. (En fait la norme est exactement 1, par le même genre d'argument que dans c).

Exercice 138. Remarque : il existe sur ℓ^1 des formes linéaires f non continues : il suffit de choisir dans ℓ^1 un supplémentaire F du s.e.v. engendré par les $e^{(k)}$ et de prendre f nulle sur F et $f(e^{(k)}) = k$. Par la même méthode, pour tout k-e.v.n. E de dimension infinie, le dual topologique $E' = \mathcal{L}(E, k)$ est *strictement* inclus dans le dual algébrique $E^* = L(E, k)$

a.i) $\forall k \in \mathbf{N}, |\eta_k| \leq |||u|||.\|e_k\| = |||u|||$.

a.ii) Par continuité de u, $u(a) = \sum a_k \eta_k$, d'où $|u(a)| \leq \sum |a_k \eta_k| \leq \|a\|_1 \|\eta\|_\infty$.
On a donc $\forall a \in \ell^1, |u(a)| \leq \|a\|_1 \|\eta\|_\infty$, i.e. $|||u||| \leq \|\eta\|_\infty$.

b.i) D'après a.i on a bien $\forall u \in (\ell^1)', \Phi(u) \in \ell^\infty$. Quant à la linéarité de Φ, elle se prouve composante par composante puisque ℓ^∞ est un sous-e.v. de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Or la linéarité sur $(\ell^1)'$ (et même sur le dual algébrique $(\ell^1)^*$) de $u \mapsto u(e^{(k)})$ est immédiate.

b.ii) découle de a.i et a.ii.

b.iii) $\forall a \in \ell^1, \sum |a_n y_n| \leq \|a\|_1 \|y\|_\infty < \infty$ donc u_y est bien définie sur ℓ^1. Elle est évidemment linéaire. De plus (toujours d'après l'inégalité ci-dessus) elle est continue (de norme $\leq \|y\|_\infty$). Donc $u_y \in (\ell^1)'$. Par construction, $u_y(e^{(k)}) = y_k$ donc $\Phi(u_y) = y$, et ce pour tout $y \in \ell^\infty$, donc Φ est surjective.

Exercice 139.

a) N_g est toujours une semi-norme sur E_g (i.e. $N_g(\lambda f) = |\lambda| N_g(f)$ et $N_g(f+h) \leq N_g(f) + N_g(h)$). Remarquons que N_g soit une norme il suffit que $Z_g^c = X$, mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire. A priori, N_g est une norme ssi $\forall f \in E, fg = 0 \Rightarrow f = 0$, i.e. ssi $\forall f \in E, Z_g^c \subset Z_f \Rightarrow Z_f = X$, i.e. ssi pour tout fermé F de X, $Z_g^c \subset F \Rightarrow F = X$. En effet, $\forall f \in E, Z_f = f^{-1}(\{0\})$ est fermé, mais réciproquement, puisque X est un espace métrique, tout fermé F de X est de la forme Z_f pour un certain $f \in E$: il suffit de poser $f(x) = d(x, F)$. Donc N_g est une norme ssi Z_g^c (l'ensemble des points où g ne s'annule pas) est dense dans X, ou encore ssi Z_g est d'intérieur vide. (Dans b) et c), cette condition est vérifiée).

b),c) Soit E' l'espace de Banach des fonctions continues bornées de X dans $\mathbf{C}$ (muni de la norme $\| \|_\infty$). L'application $T : E_g \to E', f \mapsto fg$ fournit un isomorphisme isométrique entre (E_g, N_g) et $(\mathrm{Im}(T), \| \|_\infty)$. Donc (E_g, N_g) est un espace de Banach ssi $(\mathrm{Im}(T), \| \|_\infty)$ en est un, i.e. ssi $\mathrm{Im}(T)$ est fermé dans E'.

b) Si $\inf_{x \in X} |g(x)| > 0$, $\mathrm{Im}(T) = E'$ donc (E_g, N_g) est un espace de Banach.

c) Si $X = [-1, 1]$ et $g(x) = x$, $\mathrm{Im}(T) =$ le sous-espace des applications h pour lesquelles il existe une fonction f continue sur X telle que $h(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = h(x)/x$, ou encore : le sous-espace des applications h continues sur $[-1, 1]$ telles que $h(x)/x$ admette une limite finie en 0, ou encore : le sous-espace des applications continues sur $[-1, 1]$, nulles en 0, et dérivables en 0. Cette condition de dérivabilité n'est pas stable par limites uniformes, ce qui va permettre de montrer que $\mathrm{Im}(T)$ n'est pas fermé dans E' (donc que (E_g, N_g) n'est pas de Banach) : il suffit d'exhiber une suite d'applications $h_n \in \mathrm{Im}(T)$ convergeant uniformément sur $[-1, 1]$ vers une application h non dérivable en 0 (donc n'appartenant pas à $\mathrm{Im}(T)$), par exemple $h(x) = |x|$. La suite $h_n(x) = |x|^{1+1/n}$ convient (pour montrer la convergence uniforme on peut calculer explicitement $\|h_n - h\|_\infty$, ou alors appliquer le second théorème de Dini : sur $[-1, 1]$ les h_n sont croissantes et h est continue, donc la convergence simple est en fait uniforme). Ou moins explicitement, soit (par Stone Weierstrass) P_n une suite de polynômes convergeant uniformément vers h sur $[-1, 1]$, la suite $h_n := P_n - P_n(0)$ convient.

Exercice 140.

a) (cf cours) $\mathcal{L}(E)$ est naturellement une algèbre unitaire (dont la multiplication est la composition). La norme $||| \; |||$ vérifie l'inégalité requise (autrement dit la multiplication – bilinéaire – est continue de norme ≤ 1), et pour cette norme $\mathcal{L}(E)$ est complet puisque les applications linéaires continues à valeurs dans un Banach forment, pour la norme subordonnée, un Banach.

b) (Par hypothèse, $e \neq 0$ donc $\|e\| \neq 0$). Posons $N(x) = \|x\|/\|e\|$, ainsi $N(e) = 1$. N est encore une norme pour laquelle A est encore complète. De plus, $N(ab) \leq N(a)N(b)$ puisque $\|e\| \geq 1$ puisque $\|e\| = \|e.e\| \leq \|e\|^2$. Donc (A, N) est encore une algèbre de Banach unitaire.

c) Si $\|a\| < 1$, posons $b = \sum_{n=0}^\infty a^n$ (série normalement convergente) avec par convention $a^0 = e$. Alors $(e - a)b = b(e - a) = e$ donc $e - a \in G(A)$.

d) $e \in G(A)$ donc $G(A)$ est non vide. Montrons qu'il est ouvert : soit $c \in G(A)$, il s'agit de trouver une boule de centre c incluse dans $G(A)$. D'après c) on a $\|a\| < 1 \Rightarrow c - ac \in G(A)$

i.e. $\|dc^{-1}\| < 1 \Rightarrow c-d \in G(A)$. Or $\|dc^{-1}\| \leq \|d\|\|c^{-1}\|$. On a donc $\|d\| < 1/\|c^{-1}\| \Rightarrow c-d \in G(A)$, donc la boule de centre c et de rayon $1/\|c^{-1}\|$ est incluse dans $G(A)$.

e) $\sigma(a)$ est fermé, comme image réciproque du fermé $G(A)^c$ par l'application continue $\lambda \mapsto \lambda e - a$. $\sigma(a)$ est borné car d'après c, $|\lambda| > \|a\| \Rightarrow e-(a/\lambda) \in G(A) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(a)$. C'est donc un compact de $\mathbf{C}$.

f) L'application $I : G(A) \to G(A), x \mapsto x^{-1}$ est involutive. Il suffit donc de montrer qu'elle est continue, en tout point $x \in G(A)$. Or (pour h tel que $x+h$ soit inversible) $I(x+h) = I(e+x^{-1}h)I(x)$, et $\lim_{h\to 0} x^{-1}h = 0$. Il suffit donc de prouver que $\lim_{k\to 0} I(e+k) = e$. D'après c, $\|k\| < 1 \Rightarrow I(e+k) = \sum_{n=0}^{\infty}(-k)^n \Rightarrow \|I(e+k)-e\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|k\|^n = \frac{\|k\|}{1-\|k\|} \to 0$ quand $k \to 0$.

g) La série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ est normalement convergente puisque $\sum_{n=0}^{\infty}\|a\|^n/n! = e^{\|a\|} < \infty$.

h) Posons $S_N = \sum_{n=0}^{N}(a+b)^n/n! - \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} a^p b^q/(p!q!)$ (dont la limite quand $N \to \infty$ est $e^{a+b} - e^a e^b$) et montrons (sous l'hypothèse $ab = ba$) que $\lim_{N\to\infty} S_N = 0$. Si a et b commutent, en développant $(a+b)^n$ il reste $S_N = -\sum_{p,q\leq N, p+q>N} a^p b^q/(p!q!)$, d'où
$\|S_N\| \leq T_N := \sum_{p,q\leq N,p+q>N}\|a\|^p\|b\|^q/(p!q!) =$
$\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\|a\|^p\|b\|^q/(p!q!) - \sum_{n=0}^{N}(\|a\|+\|b\|)^n/n!$.
Quand $N \to \infty$, $T_N \to e^{\|a\|}e^{\|b\|} - e^{\|a\|+\|b\|} = 0$ donc $e^{a+b} - e^a e^b = \lim_{N\to\infty} S_N = 0$.
En particulier e^a est inversible (d'inverse e^{-a}).

Exercice 141.

a.i) $(F, \| \|_\infty)$ est isométriquement isomorphe à l'espace de Banach $(C(\overline{\mathbf{R}^+}, \mathbf{R}), \| \|_\infty)$ (où $\overline{\mathbf{R}^+} = [0, +\infty]$ est muni de la topologie induite par celle de $\overline{\mathbf{R}}$).

a.ii) (Les f_n appartiennent évidemment à F). Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathbf{R}$ tels que $\sum_{n=0}^{N}\lambda_n f_n = 0$. Alors pour $N \leq t < N+1$, $f_0, \ldots, f_{N-1}$ s'annulent en t mais pas f_N, donc $\lambda_N = 0$. Il reste $\sum_{n=0}^{N-1}\lambda_n f_n = 0$. On recommence, et on montre ainsi de proche en proche que tous les λ_n sont nuls. Ceci prouve que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre. L'e.v.n. F est donc de dimension infinie donc (théorème de Riesz) non localement compact.

b) La bilinéarité de φ est immédiate. De plus $\forall f, g \in F, \|\varphi(f,g)\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty$, donc φ est continue, de norme ≤ 1. Pour $f = g = f_0$ (par exemple), on a $\|\varphi(f,g)\|_\infty = 1 = \|f\|_\infty\|g\|_\infty$. Donc la norme de φ est exactement 1.

Exercice 142. Remarquons d'abord que si T est un opérateur compact alors il est borné sur la boule unité, donc continu, donc ses sous-espaces propres $E_\lambda := \mathrm{Ker}(T - \lambda id)$ sont fermés.

a) Notons K le compact $\overline{T(B(0,1))}$ et B la boule unité ouverte du sous-espace vectoriel E_λ. Alors $\lambda B = T(B) \subset T(B(0,1)) \subset K$ donc B est incluse dans le compact K/λ et dans le fermé E_λ, donc dans l'intersection des deux, qui est un compact inclus dans E_λ. Donc B est relativement compacte dans E_λ. D'après le théorème de Riesz, ce s.e.v. est donc de dimension finie.

b) Soit $A = T(B(0,1)) =$ l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$ et $\|f'\|_\infty < 1$. Pour prouver que $\overline{A}$ est compact, utilisons le théorème d'Ascoli (désormais hors programme) : $[0,1]$ est compact, A est équicontinue (car les $f \in A$ sont 1-lischitziennes), et pour tout $x \in [0,1]$, $A(x)$ est inclus dans le disque de $\mathbf{C}$ de centre 0 et de rayon x, donc est relativement compact. Donc $\overline{A}$ est compact, i.e. T est un opérateur compact.
$u \in \mathrm{Ker}(T - \lambda id) \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], \int_0^x u(t)dt = \lambda u(x) \Leftrightarrow \lambda u(0) = 0$ et $u = \lambda u'$, donc si $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda id)$ est la droite vectorielle engendrée par l'application $[0,1] \to \mathbf{C}, x \mapsto e^{x/\lambda}$, tandis

que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. (Les sous-espaces propres de T sont donc bien de dimension finie, comme prévu par a)).