Correction de l'interrogation

Benoît Michel

du 27 avril 2007

Le texte en italique indique le raisonnement et les idées à avoir pour trouver la solution. Il ne doit pas apparaître dans la copie. Le texte droit est un exemple de rédaction.

1 Continuité et limites

Intégrale généralisée : on commence par regarder la continuité de la fonction à intégrer.

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Leur produit $t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}$ est donc continu sur $[0, +\infty[$, et donc intégrable sur tout segment $[0, B] \subset [0, +\infty[$.

Les intégrales $\int_0^B \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ *sont des intégrales de fonction continues sur les* segments $[0, B]$*, leur existence ne pose pas de problème. En revanche,* $+\infty$ *n'est pas dans le domaine de définition : on a une intégrale généralisée en* $+\infty$*. On cherche à savoir si elle converge (ou, autre façon de dire, si elle existe dans* $\mathbb{R}$*), c'est-à-dire si* $\int_0^B \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ *admet une limite finie quand* $B \to \infty$*.*

La fonction est positive, donc on peut utiliser un théorème de comparaison. L'exponentielle négative décroît très vite vers 0 *et va "tuer" la racine carrée qui tend vers* $+\infty$*. Il faut justifier cela mathématiquement.*

Pour tout $t \geq 0$, $\sqrt{t}e^{-t} = \sqrt{t}e^{-t/2}e^{-t/2}$.
On a

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t}e^{-t/2} = 0$$

d'après les théorèmes de croissance comparée des fonctions exponentielles et puissance. Donc il existe un réel A tel que

$$\forall t \geq A,\ \sqrt{t}e^{-t/2} \leq 1$$

Alors

$$\forall t \geq A,\ \sqrt{t}e^{-t} = \sqrt{t}e^{-t/2}e^{-t/2} \leq e^{-t/2}$$

Or l'intégrale $\int_A^\infty e^{-t/2}\mathrm{d}t$ converge, d'après le théorème d'intégrabilité des fonctions exponentielles. Comme $\forall t \geq 0$, $\sqrt{t}e^{-t} \geq 0$, le théorème de comparaison assure que $\int_A^\infty \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

Donc l'intégrale $\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

2

Même principe que pour la question 1, sauf qu'ici on a un paramètre x. Il faut trouver pour quelles valeurs de x l'intégrale converge.

Soit x fixé.

La fonction $t \mapsto (x-1)\ln t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. Comme la fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$, leur composée $t \mapsto e^{(x-1)\ln t} = t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc le produit $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continu sur $]0,+\infty[$, et donc intégrable sur tout segment $[A,B] \subset]0,+\infty[$.

Un problème supplémentaire par rapport à la question 1 : on a une intégrale généralisée en $+\infty$ et *en* 0. *La borne* ∞ *se traite de la même manière : l'exponentielle "tue" la fonction puissance. Il faut trouver quelque chose pour la borne* 0. *Ici, un équivalent fonctionnera très bien.*

Intégrale au voisinage de $+\infty$

Pour tout $t \geq 0$, $t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2}$.

$\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0$ par croissance comparée des exponentielles et puissances. Donc il existe un réel A tel que $\forall t \geq A$, $t^{x-1}e^{-t/2} \leq 1$.

Alors $\forall t \geq A$, $t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2} \leq e^{-t/2}$.

Or l'intégrale $\int_A^\infty e^{-t/2}\mathrm{d}t$ converge. Comme $\forall t \geq 0$, $t^{x-1}e^{-t} \geq 0$, le théorème de comparaison assure que $\int_A^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

Intégrale au voisinage de 0

$\lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$, donc pour t au voisinage de 0, $e^{-t} \sim 1$, d'où $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$.

D'après le critère de Riemann, $\int_0^A t^{x-1}\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $x-1 > -1$, c'est-à-dire $x > 0$. Donc $\int_0^A t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $x > 0$.

Rappel : si et seulement si *signifie qu'il y a une équivalence : si $x > 0$, alors l'intégrale converge, et si $x \leq 0$ alors l'intégrale diverge.*

L'intégrale $\int_0^\infty$ converge si et seulement si les intégrales $\int_0^A$ et $\int_A^\infty$ convergent toutes les deux. D'après ce que l'on vient d'expliquer, la convergence a lieu pour et seulement pour $x > 0$:

$$\text{le domaine de définition de } \Gamma \text{ est } \mathcal{D}_\Gamma =]0, +\infty[.$$

3

Intégration par parties. On peut la faire directement sur l'intégrale $\int_0^\infty$, mais on risque moins d'erreurs en la faisant pour $\int_A^B$ puis $A \to 0$ et $B \to +\infty$.

Si $x \in \mathcal{D}_\Gamma =]0, +\infty[$, $x + 1 > 0$, donc $\Gamma(x+1)$ existe : $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \mathrm{d}t$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{array}{rl} u(t) = t^x & u'(t) = xt^{x-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_A^B t^x e^{-t} \mathrm{d}t &= \big[-t^x e^{-t} \big]_{t=A}^{t=B} - \int_A^B (-xt^{x-1}e^{-t}) \mathrm{d}t \\ &= -B^x e^{-B} + A^x e^{-A} + x \int_A^B t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\lim_{B \to +\infty} B^x e^{-B} = 0$ d'après la croissance comparée des fonctions exponentielle et puissance.
Comme $x > 0$, $\lim_{A \to 0} A^x = 0$. Or $\lim_{A \to 0} e^{-A} = 1$; donc $\lim_{A \to 0} A^x e^{-A} = 0$.
Par conséquent

$$\lim_{\substack{A \to 0 \\ B \to +\infty}} -B^x e^{-B} + A^x e^{-A} = 0$$

Si $x \in \mathcal{D}_\Gamma$,

$$\lim_{\substack{A \to 0 \\ B \to +\infty}} \int_A^B t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

Donc en faisant tendre A vers 0 et B vers $+\infty$ dans l'intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} \mathrm{d}t = \Gamma(x+1) = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

4

La continuité par rapport à la première variable signifie : on fixe la deuxième (t), et on regarde si la fonction de x que l'on obtient est continue.

On s'intéresse à la continuité de l'application partielle $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, où t est fixé.
$t^{x-1}e^{-t} = \exp((x-1)\ln t - t)$ par définition. Ceci ne peut être bien défini que si $\ln t$ existe, c'est-à-dire $t > 0$. On reconnaît la composée des fonctions

$$x \mapsto \ln t \times x + (-\ln t - t) \quad \text{et} \quad \exp : u \mapsto e^u$$

La première est une fonction affine, la deuxième exponentielle : elles sont toutes les deux définies et continues sur $\mathbb{R}$, donc leur produit aussi :

l'application $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R}$.

5

On s'intéresse à la continuité de $\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty (...)\mathrm{d}t$ sur le segment $[a,b]$. Pour appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$, il faut majorer $|t^{x-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t}$ par $\varphi(t)$, où $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ est telle que

$$\int_0^\infty \varphi(t)\mathrm{d}t \textit{ existe.}$$

φ est une fonction d'une seule variable, t et pas x : on étudie la continuité de $\Gamma(x)$ par rapport à *x, on demande que φ soit* indépendante de *x.*

Recherche d'une fonction φ majorant $t^{x-1}e^{-t}$
$\forall t > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $t^{x-1}e^{-t} = e^{((x-1)\ln t - t)}$.
Si $a \leq x \leq b$, alors $a-1 \leq x-1 \leq b-1$.
Attention au signe de $\ln t$ pour la multiplication dans les inégalités !

Lorsque $t \geq 1$, $\ln t \geq 0$, donc $(a-1)\ln t \leq (x-1)\ln t \leq (b-1)\ln t$.
Donc $(x-1)\ln t - t \leq (b-1)\ln t - t$,
d'où $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{b-1}e^{-t}$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$).

Lorque $t \leq 1$, $\ln t \leq 0$, donc $(b-1)\ln t \leq (x-1)\ln t \leq (a-1)\ln t$.
Donc $(x-1)\ln t - t \leq (a-1)\ln t - t$,
d'où $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{a-1}e^{-t}$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$).

On propose donc

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Intégrabilité de cette fonction φ

Les fonctions puissance et exponentielle étant continues sur $]0,+\infty[$, la fonction φ ainsi définie est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. On cherche si elle est continue en 1.

$\lim_{t\to 1} e^{-t} = e^{-1}$ et $\lim_{t\to 1} t^{a-1} = 1^{a-1} = 1$ par continuité des fonctions puissance. Donc par produit

$$\lim_{t\to 1} t^{a-1}e^{-t} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t\in]0,1[}} \varphi(t) = e^{-1}$$

De même

$$\lim_{t\to 1} t^{b-1}e^{-t} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t\in]1,+\infty[}} \varphi(t) = e^{-1}$$

Donc φ est continue en 1, donc sur $]0,+\infty[$ tout entier.

Par conséquent, les intégrales $\int_A^B \varphi(t)\mathrm{d}t$ existent. On cherche maintenant si $\int_0^\infty \varphi(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

On remarque que le problème est exactement celui de la question 2, en remplaçant x par a pour l'intégrale au voisinage de 0, et x par b pour l'intégrale au voisinage de $+\infty$.

De même qu'à la question 2, dans la partie "Intégrale au voisinage de 0", on voit que comme $a > 0$, $\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

De même qu'à la question 2, partie "Intégrale au voisinage de $+\infty$", on voit que $\int_1^\infty \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

Par conséquent, $\int_0^\infty \varphi(t)\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

En conclusion, la fonction φ définie pour tout $t > 0$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

vérifie l'hypothèse de domination de $t^{x-1}e^{-t}$ pour $x \in [a,b]$.

6

Pour montrer que Γ est continue sur $[a,b]$, montrons qu'elle est continue en n'importe quel point x_0 de $[a,b]$.

Soit x_0 un point quelconque de $[a,b]$.

Pour chaque réel $t > 0$, la question 4 a montré que $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en x_0.

En recherchant le domaine de définition de Γ, à la question 2, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en particulier pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc $\mathcal{C}^0_{mor,lim}$ sur tout segment de $]0,+\infty[$.

On a trouvé dans la question 5 une fonction $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *(fonction d'un seule variable : elle est indépendante de x)* telle que $\int_0^\infty \varphi(t)\mathrm{d}t$ existe et que

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \forall x \in [a,b] \quad |t^{x-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} \leq \varphi(t)$$

D'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, la fonction Γ est continue en x_0. Cela est vrai pour n'importe quel x_0 de $[a,b]$: donc

$$\Gamma \text{ est continue sur } [a,b]$$

Montrons maintenant la continuité de Γ en tout point de $\mathcal{D}_\Gamma =]0,+\infty[$: soit un réel $x_0 > 0$. On pose $a = x_0/2 > 0$ et $b = 2x_0 > a$. D'après ce que l'on vient de voir, Γ est continue sur $[a,b]$, donc en particulier au point x_0 (qui est compris entre a et b).
Cela est vrai pour n'importe quel $x_0 > 0$. Donc

$$\Gamma \text{ est continue sur } \mathcal{D}_\Gamma =]0,+\infty[$$

7

La grosse question de ce devoir. Il faut bien sûr utiliser le théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales. On va vérifier les hypothèses point par point.

Notons $\Gamma(x) = \int_0^\infty \gamma(x,t)\mathrm{d}t$, avec, pour tout réel x et tout $t > 0$

$$\gamma(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$$

i)

Pour tout $x \in \mathcal{D}_\Gamma$, $\int_0^\infty \gamma(x,t)\mathrm{d}t$ existe. (C'est $\Gamma(x)$.)

ii)

Dérivée partielle par rapport à x.

Soit $t \in]0,+\infty[$ fixé. Montrons que l'application partielle $\gamma(\cdot,t)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Pour tout réel x, $\gamma(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$.
La fonction $x \mapsto (x-1)\ln t - t$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa dérivée est $x \mapsto \ln t$.
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\exp' = \exp$.
Donc la composée $\gamma(\cdot,t)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa dérivée est :

$$\partial_1\gamma(x,t) = (\ln t) \times \exp'\big((x-1)\ln t - t\big) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$$

iii)

Continuité (par morceaux avec limites relatives finies aux extrémités) de $\partial_1\gamma(x,\cdot)$.

Soit x fixé dans $\mathcal{D}_\Gamma$.
La fonction partielle $t \mapsto \partial_1\gamma(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t} = (\ln t)\gamma(x,t)$ est le produit de la fonction ln et de la fonction $\gamma(x,\cdot)$.
La fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$.
On a vu dans la question 2 que $\gamma(x,\cdot) : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Le produit $t \mapsto \partial_1\gamma(x,t)$ est donc continu sur $]0,+\infty[$.

iv)

Hypothèse de domination : on cherche à majorer $|\partial_1\gamma(x,t)|$ par $\psi(t)$, indépendant de x, et tel que $\int_0^\infty \psi(t)\mathrm{d}t$ existe. On ne peut pas faire de majoration valable pour tout $x \in]0,+\infty[$: il faut s'inspirer du raisonnement des questions 5 et 6 et commencer en se limitant à un segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

On fixe deux réels $a > 0$ et $b > a$. On cherche à vérifier l'hypothèse de domination de $\partial_1\gamma(x,t)$ pour $x \in [a,b]$.

On se rend compte que $\partial_1\gamma(x,t) = (\ln t)\gamma(x,t)$. Or on a trouvé une fonction de domination $t \mapsto \varphi(t)$ pour γ : on va tenter d'utiliser $t \mapsto |\ln t|\varphi(t)$ pour la domination de $\partial_1\gamma$.

À la question 5, on a défini $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$, continue et telle que

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \forall x \in [a,b] \quad |\gamma(x,t)| = t^{x-1}e^{-t} \leq \varphi(t)$$

par $\varphi(t) = t^{a-1}e^{-t}$ si $t \leq 1$ et $\varphi(t) = t^{b-1}e^{-t}$ si $t \geq 1$.
Posons $\psi(t) = |\ln t|\varphi(t)$ pour tout $t > 0$.
Alors pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a,b]$,

$$|\partial_1\gamma(x,t)| = |\ln t|t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln t|\varphi(t) = \psi(t)$$

Vérifions maintenant que l'intégrale $\int_0^\infty \psi(t)\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.
La fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$, et la fonction "valeur absolue" $u \mapsto |u|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc leur composée $t \mapsto |\ln t|$ est continue sur $]0,+\infty[$.
On a déjà vu, à la question 5, que φ est continue sur $]0,+\infty[$.
Donc le produit $\psi = |\ln| \times \varphi$ est continu sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tous les segments $[A,B]$ pour $0 < A < B < +\infty$.

Intégrale d'une fonction positive, généralisée aux deux bornes, 0 et ∞ : on regarde chacune des deux bornes.

Intégrabilité de ψ au voisinage de 0

Ici, fonctions équivalentes (on est dans le cas de fonctions positives), et le théorème de Bertrand s'applique naturellement.

Pour tout t de $]0,1[$, $\psi(t) = |\ln t|t^{a-1}e^{-t} > 0$. On a vu que $e^{-t} \sim 1$ au voisinage de 0. Donc $\psi(t) \sim |\ln t|t^{a-1} = |\ln t|^\alpha t^\beta$ pour t au voisinage de 0, avec $\alpha = 1$ et $\beta = a - 1$
On utilise le critère de Bertrand, qui dit (entre autres) que si $\beta > -1$, alors $t \mapsto |\ln t|^\alpha t^\beta$ est intégrable au voisinage de 0. Ici $\beta = a - 1$ avec $a > 0$, donc $\beta > -1$.
Le théorème d'intégrabilité de fonctions équivalentes assure donc que $\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t$ converge.

Intégrabilité de ψ au voisinage de ∞

Comme aux questions 1 et 2, l'exponentielle négative "tue" le logarithme et la puissance.

Pour tout $t \geq 1$, $|\ln t|t^{b-1}e^{-t} = |\ln t|t^{b-1}e^{-t/2}e^{-t/2}$.
Le théorème de croissance comparée des logarithmes, puissances et exponentielles assure que

$$\lim_{t\to+\infty} |\ln t|t^{b-1}e^{-t/2} = 0$$

Donc il existe un réel A tel que pour tout $t \geq A$, $|\ln t| t^{b-1} e^{-t/2} \leq 1$.
Alors pour tout $t \geq A$, $|\ln t| t^{b-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}$. Comme l'intégrale $\int_A^\infty e^{-t/2} \mathrm{d}t$ converge, par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_A^\infty |\ln t| t^{b-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ converge aussi.
Donc ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Au final, on voit que l'intégrale $\int_0^\infty \psi(t) \mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

conclusion

Les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale sont vérifiées, avec une domination valable seulement pour $x \in [a, b]$. Donc Γ est dérivable sur $[a, b]$.

Cela est valable pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$: donc Γ est dérivable sur $]0, +\infty[= \mathcal{D}_\Gamma$.

En effet, soit $x_0 > 0$. Comme à la question 6, on choisit a et b tels que $x_0 \in]a, b[$, par exemple $a = x_0/2$ et $b = 2x_0$. On vient de démontrer que Γ dérivable sur $[a, b]$; donc Γ est dérivable en x_0. Cela est vrai pour n'importe quel $x_0 > 0$: donc Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

8 Question bonus

La question 3 permet d'utiliser le critère de d'Alembert. On peut calculer par récurrence $\Gamma(n)$ pour $n \geq 1$: on trouve $(n-1)!$. Mais ce n'est pas nécessaire.

Soit $u_n = \frac{1}{\Gamma(n)}$ pour $n \in \mathcal{D}_\Gamma \cap \mathbb{N}$, c'est-à-dire $n \geq 1$.

D'après la question 3, pour tout $n > 0$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. D'où

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} = u_{n+1} = \frac{1}{n} \frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{n} u_n$$

Donc $u_{n+1}/u_n = 1/n$, avec $\lim_{n \to +\infty} 1/n = 0$. Le théorème de d'Alembert s'applique : comme $(u_{n+1}/u_n)_n$ admet une limite strictement comprise entre -1 et 1 lorsque $n \to +\infty$, la série $\Sigma_n u_n$ converge.

9 Séries

9.1

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + (n-1)!}{n!} = \frac{1!}{n!} + \frac{2!}{n!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{n!}$$

avec $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

Donc u_n est la somme de $\frac{1}{n}$ et de termes positifs. D'où $u_n \geq \frac{1}{n} > 0$ (pour tout entier $n \geq 1$).
Or on sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ ($= \sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 1 \leq 1$) est une série divergente. D'après le théorème de comparaison des séries,

la série Σu_n diverge.

9.2

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots (n-2)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{1! + \cdots + (n-3)!}{n!} \geq 0$$

D'une part $\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.
D'autre part, la somme $1! + \cdots + (n-3)!$ est constituée de $n-3$ termes tous inférieurs ou égaux à $(n-3)!$. Donc

$$\frac{1! + \cdots + (n-3)!}{n!} \leq \frac{(n-3) \times (n-3)!}{n!} = \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)}$$

Par conséquent $u_n \leq \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)}$.

On connaît des équivalents pour les fractions rationnelles en $+\infty$:

$$\frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Elle est positive. Donc d'après le théorème sur les séries équivalentes, les deux séries $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)}$ convergent aussi. Donc leur somme $\sum \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)}$ converge aussi.

Or u_n est positif pour tout n. Donc, d'après le théorème de comparaison, et la majoration de u_n que l'on a faite ci-dessus,

Σu_n converge.

9.3

$$u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$$

En vue d'utiliser la règle de Cauchy, on cherche la limite de $u_n^{1/n}$ quand $n \to +\infty$.

$$u_n^{1/n} = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2+\frac{1}{n}} = \exp\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{3n}{4n-1}\right)\right]$$

On connaît les limites des fractions rationnelles en $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$.
Et $\lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{3n}{4n-1}\right) = 2\ln\frac{3}{4}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \exp\left(2\ln\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \in [0,1[$$

Par application de la règle de Cauchy, comme $u_n^{1/n}$ admet une limite strictement inférieure à 1,

Σu_n converge.

9.4

$$u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}{\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n\times n}_{n \text{ facteurs égaux à } n}} > 0$$

La règle de d'Alembert fonctionne mais il y a plus simple. Je vais donner deux solutions. En revanche, la règle de Cauchy semble moins évidente car on maîtrise mal $(n!)^{1/n}$.

Par règle de d'Alembert

Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] \\
&= \exp\left[-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = \exp\left[-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

Or lorsque $x \to 0$, $\ln(1+x) \sim x$; donc ici quand $n \to +\infty$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. Par conséquent $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim 1$; autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \exp\left[-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e^{-1}$. Comme $-1 < e^{-1} < 1$, la règle de d'Alembert s'applique :

$$\Sigma u_n \text{ converge.}$$

Par théorème de comparaison

On remarque que, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k}{n} \times \cdots \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} > 0$$

u_n est le produit de $1/n$, $2/n$, et de termes de la forme $(n-k)/n$, $0 \leq k \leq n-2$, qui sont inférieurs ou égaux à 1. Donc pour tout $n \geq 2$,

$$u_n \leq \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Comme $\sum u_n$ est une série à termes positifs, le théorème de comparaison s'applique :

$$\Sigma u_n \text{ converge.}$$

10

$a > 0$, $b > 0$, et $(u_n)_n$ est la suite définie par

$$\begin{cases} u_{2p} = a^p b^p & \text{si } n \text{ est pair, c'est-à-dire } n = 2p, \\ u_{2p+1} = a^{p+1} b^p & \text{si } n \text{ impair, c'est-à-dire } n = 2p+1. \end{cases}$$

Σu_n est une série à termes positifs.

Règle de d'Alembert

Il y a deux cas pour u_{n+1}/u_n suivant la parité de n :

$$\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{a^{p+1}b^p}{a^p b^p} = a \qquad \text{cas } n = 2p$$

et

$$\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = \frac{a^{p+1}b^{p+1}}{a^{p+1}b^p} = b \qquad \text{cas } n = 2p+1$$

La suite $(u_{n+1}/u_n)_n$ vaut alternativement a et b : donc elle n'a pas de limite, à moins que $a = b$.

Dans le cas où $a = b$, elle converge vers leur valeur commune. Alors la règle de d'Alembert permet de conclure partiellement : Σu_n converge si $a = b < 1$, et diverge si $a = b > 1$.
Si $a = b = 1$, la règle de d'Alembert ne permet pas de répondre.

Au final, la règle de d'Alembert ne permet pas de répondre si $a \neq b$, et ne donne qu'un réponse partielle si $a = b$.

Règle de Cauchy

$$u_n^{1/n} = \begin{cases} (a^p b^p)^{1/(2p)} = \sqrt{ab} & \text{si } n = 2p \\ \left(a^{p+1}b^p\right)^{1/(2p+1)} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}} = \exp\left(\frac{p+1}{2p+1}\ln a + \frac{p}{2p+1}\ln b\right) & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

$$\lim_{p\to+\infty} u_{2p}^{1/(2p)} = \lim_{p\to+\infty} \sqrt{ab} = \sqrt{ab}$$

$\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{2p+1} = \lim_{p\to+\infty} \frac{p+1}{2p+1} = \lim_{p\to+\infty} p/(2p) = 1/2$. Donc

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{p+1}{2p+1}\ln a = \frac{\ln a}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} \frac{p}{2p+1}\ln b = \frac{\ln b}{2}$$

Donc

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{p+1}{2p+1}\ln a + \frac{p}{2p+1}\ln b = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}$$

D'où

$$\lim_{p\to+\infty} u_{2p+1}^{1/(2p+1)} = \lim_{p\to+\infty} \exp\left(\frac{p+1}{2p+1}\ln a + \frac{p}{2p+1}\ln b\right) = \exp\left(\ln\sqrt{ab}\right) = \sqrt{ab}$$

Par conséquent, lorsque $n \to \infty$, $u_n^{1/n}$ converge vers $\sqrt{ab}$. La règle de Cauchy permet de déduire que :

- si $\sqrt{ab} < 1$, c'est-à-dire $ab < 1$, alors Σu_n converge ;
- si $\sqrt{ab} > 1$, c'est-à-dire $ab > 1$, alors Σu_n diverge.

On a une réponse plus précise qu'avec la règle de d'Alembert : en effet, le cas $ab < 1$ comprend le cas $a = b < 1$, et le cas $ab > 1$ comprend le cas $a = b > 1$. Mais on ne peut toujours pas répondre si $ab = 1$ (qui comprend le cas $a = b = 1$.)

Nature de la série

D'après les résultats que l'on vient d'obtenir, Σu_n diverge si $ab > 1$ et converge si $ab < 1$. Il reste à étudier le cas $ab = 1$.

On observe que si $ab = 1$, $u_{2p} = 1$, avec $\lim_{p\to+\infty} 1 \neq 0$. Donc il existe une suite extraite de la suite (u_n) (la suite (u_{2n})) qui ne converge pas vers 0. Donc la suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Or on sait que si une série converge, alors son terme général tend vers 0. Ici, par contraposée, on déduit que Σu_n diverge.

En conclusion, Σu_n converge si et seulement si $ab < 1$.

Exercice : calculer sa somme dans le cas où elle converge.