

Introduction aux grandes matrices aléatoires
cours M2R

M. Capitaine¹

2012

1. CNRS, Institut de Mathématiques de Toulouse, Equipe de Statistique et Probabilités, F-31062 Toulouse Cedex 09. E-mail: mireille.capitaine@math.univ-toulouse.fr

La théorie des matrices aléatoires est née de ses applications. Elle est apparue dans les années 30 à l'initiative de statisticiens comme Wishart et a connu un nouvel essor dans les années 50 par les travaux de Wigner en physique nucléaire. Depuis, la théorie s'est considérablement développée tant pour ses applications (en physique théorique, statistique, finance, télécommunications...) que pour ses multiples liens avec de nombreux problèmes mathématiques (en algèbres d'opérateurs, combinatoire, théorie des nombres...)

L'objet de ce cours est de présenter certains résultats désormais classiques sur des modèles de matrices aléatoires spécifiques mais aussi d'introduire différentes techniques usuellement développées dans ce domaine.

Le Chapitre 1 concerne les matrices de Wigner. Nous y présentons deux preuves du théorème de Wigner (concernant la convergence de la mesure spectrale empirique) : une approche combinatoire par les moments et une approche utilisant la transformée de Cauchy. Nous décrivons également les techniques usuelles de troncature et de centrage des entrées de la matrice ainsi que la pertinence des inégalités de concentration dans l'obtention de résultats de convergence presque sûre. Enfin nous proposons une preuve de la convergence de la plus grande valeur propre par la "méthode des grandes traces" (sous des conditions non optimales). Le Chapitre 2 présente sans démonstration des résultats similaires (convergence de la mesure spectrale, convergence des valeurs propres extrêmes) concernant les matrices de covariance empirique.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude des modèles GUE, GOE et GSE ; nous déterminons la loi des valeurs propres et vecteurs propres.

Dans le Chapitre 4, nous développons la "méthode des polynômes orthogonaux" pour des modèles de matrices aléatoires hermitiennes de loi invariante par conjugaison unitaire et expliquons dans le cas du GUE, comment la forme déterminantale de la loi jointe des valeurs propres permet une analyse fine des propriétés locales asymptotiques du spectre (fluctuations de la plus grande valeur propre, fluctuations à l'intérieur du bulk...).

Dans le Chapitre 5, nous démontrons comment la mesure spectrale empirique limite d'un modèle de matrices aléatoires associé à un potentiel V peut être obtenue comme minimiseur d'un problème variationnel.

Enfin, le dernier chapitre constitue une brève introduction à la théorie des probabilités libres et à ses liens profonds avec celle des matrices aléatoires.

Chapitre 1

Matrices de Wigner

La théorie des matrices aléatoires a connu un nouvel essor dans les années 50 par les travaux de Wigner en physique nucléaire. Dans la théorie quantique, les niveaux d'énergie d'un système atomique sont les valeurs propres d'un opérateur hermitien sur un espace de Hilbert : l'Hamiltonien du système. Lorsque le système atomique est complexe, ces niveaux d'énergie ne peuvent pas être étudiés explicitement. Wigner a alors eu l'idée de modéliser l'Hamiltonien d'un tel système par une matrice Hermitienne aléatoire de grande taille.

Definition 1.0.1. Soit W_N une matrice $N \times N$ symétrique telle que $((W_N)_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq N)$ sont des variables aléatoires indépendantes. W_N est appelée matrice de Wigner.

Notation : Pour une matrice A_N , symétrique, $N \times N$, de valeurs propres λ_i , $1 \leq i \leq N$, on définit la mesure spectrale de A_N par

$$\mu_{A_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i},$$

ou

$$\mu_{A_N}(\Delta) = \frac{1}{N} \text{Card} \{1 \leq i \leq N, \lambda_i \in \Delta\}, \quad \Delta \subset \mathbb{R}.$$

1.1 Théorème de Wigner (Cas général)

Théorème 1.1.1. Soit $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $\mathbb{E}(|W_{ij}|^2) = 1$ pour tout $1 \leq i < j$. On suppose de plus que

$$\forall k, \quad \sup_{i,j} \mathbb{E}(|W_{ij}|^k) = C(k) < +\infty. \quad (1.1.1)$$

Soit W_N une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq N$. Alors presque sûrement, la mesure spectrale $\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}$ converge

étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} définie par

$$d\mu_{sc}(t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[-2;2]}(t) \sqrt{4-t^2} dt,$$

c'est-à-dire presque sûrement, pour toute fonction f continue bornée,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) = \int f(x) d\mu_{sc}$$

La loi du demi-cercle est aussi appelée loi semi-circulaire ou encore loi de Wigner.

Remarque 1.1.1. Les valeurs propres d'une matrice étant des fonctions continues des entrées de la matrice (cf Section II.6.4 [10]), pour toute fonction f continue, $\int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i(\frac{W_N}{\sqrt{N}}))$ est bien mesurable.

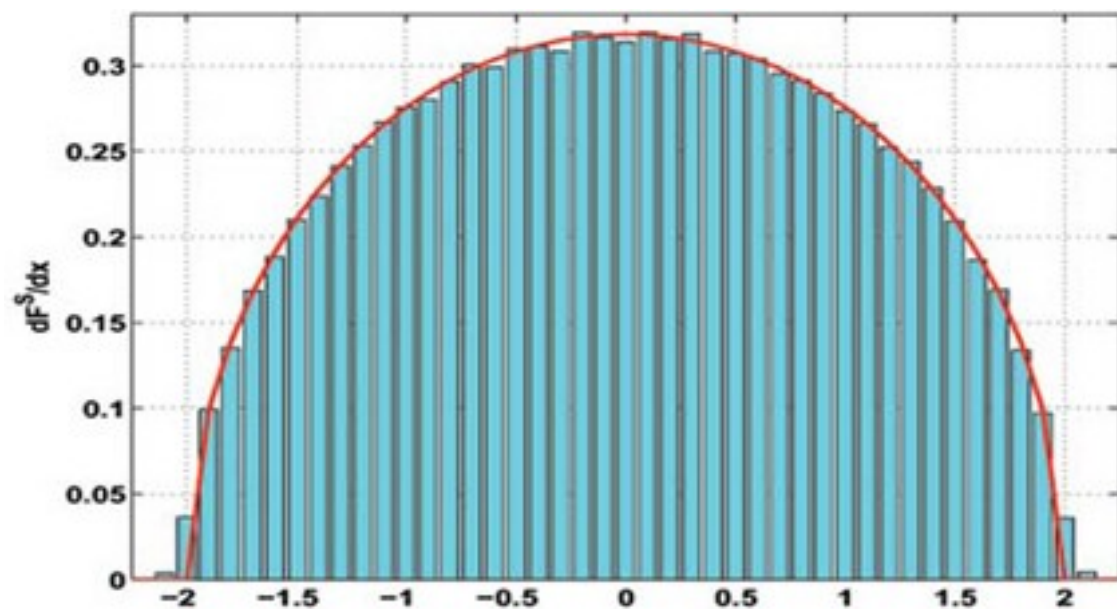
Remarque 1.1.2. Si plus généralement $\mathbb{E}(|W_{ij}|^2) = \sigma^2$ (au lieu de 1), avec probabilité 1, pour toute fonction continue bornée,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i(\frac{W_N}{\sqrt{N}})) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\sigma \lambda_i(\frac{W_N}{\sigma \sqrt{N}})) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int f(\sigma x) d\mu_{sc}(x) \\ &= \int f(x) d\mu_{sc}^{(\sigma)}(x) \end{aligned}$$

où $\mu_{sc}^{(\sigma)}$ est la loi du demicercle de moyenne nulle et de variance σ^2 et admet pour densité :

$$\frac{d\mu_{sc}^{(\sigma)}(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathbf{1}_{[-2\sigma;2\sigma]}(x) \sqrt{4\sigma^2 - x^2} dt.$$

Distribution des valeurs propres d'une matrice 100 x 100 de Wigner à entrées gaussiennes



Il existe plusieurs preuves du Théorème 1.1.1. Nous allons présenter deux méthodes très utilisées en théorie des grandes matrices aléatoires.

1.1.1 Méthode des moments (approche combinatoire)

Remarquons que pour tout $k \geq 1$, $\int x^k d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right)$.

Schéma de cette première preuve :

- Convergence de $\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right)$ vers $\int x^k d\mu_{sc}(x)$ pour tout $k \geq 1$.
- Convergence presque sûre de $\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right)$ vers zéro.
- Passage à la convergence pour toute fonction continue bornée par approximation polynomiale de Stone Weierstrass sur un compact.

Théorème 1.1.2. *Soit $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $\mathbb{E}(|W_{ij}|^2) = 1$ pour tout $1 \leq i < j$. On suppose de plus que*

$$\forall k, \sup_{i,j} \mathbb{E}(|W_{ij}|^k) = C(k) < +\infty. \quad (1.1.2)$$

Soit W_N une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq N$. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ C_{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

où $C_0 = 1$ et $C_k = \frac{1}{k} C_{2k}^{k-1}$ pour $k \geq 1$. Les $(C_k)_{k \geq 0}$ sont appelés nombres de Catalan.

D'après Proposition 1.5.2, Théorème 1.1.2 équivaut à,

$$\forall k, \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) = \int x^k d\mu_{sc}(x). \quad (1.1.3)$$

Preuve :

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right] = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N N^{-\frac{k}{2}-1} \mathbb{E}[(W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1}].$$

Pour chaque k uplet $I = (i_1, \dots, i_k)$ notons

$$P(I) = \mathbb{E}[(W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1}],$$

et désignons par l_I le nombre de valeurs distinctes dans $\{i_1, \dots, i_k\}$. Définissons pour tout $l = 1, \dots, k$,

$$\mathcal{E}_l^{(k)} = \{I, l_I = l\}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) = \sum_{l=1}^k \sum_{I \in \mathcal{E}_l^{(k)}} N^{-\frac{k}{2}-1} P(I).$$

1. Si $1 \leq l < \frac{k}{2} + 1$.

Par l'inégalité de Holder généralisée, pour tout k -uplet $I = (i_1, \dots, i_k)$,

$$\begin{aligned} |P(I)| &= |\mathbb{E} [(W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1}]| \\ &\leq \mathbb{E} [|(W_N)_{i_1 i_2}|^k]^{\frac{1}{k}} \cdots \mathbb{E} [|(W_N)_{i_k i_1}|^k]^{\frac{1}{k}} \\ &\leq C(k). \end{aligned}$$

A tout k -uplet $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{E}_l^{(k)}$, correspond bijectivement un couple $(\nu, (v_1, \dots, v_l))$ où ν est une partition de $\{1, \dots, k\}$ en l blocs et (v_1, \dots, v_l) est un l -uplet de nombres distincts dans $\{1, \dots, N\}$, de la façon suivante : $s \neq t$ dans $\{1, \dots, k\}$ sont dans le même bloc de ν si et seulement si $i_s = i_t$. Ecrivons $\nu = \bigcup_{i=1}^l V_i$ où V_1 est le bloc contenant 1, et pour tout $i = 2, \dots, l$, V_i est le bloc contenant le plus petit élément de $\{1, \dots, k\}$ n'appartenant pas à $\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$.

Pour tout $i = 1, \dots, l$, v_i est la valeur commune prise par les i_s , $s \in V_i$.

Ainsi

$$\text{card} \mathcal{E}_l^{(k)} = N \times (N-1) \times \dots \times (N-l+1) K(l, k)$$

où $K(l, k)$ est le nombre de partitions de $\{1, \dots, k\}$ en l ensembles qui (seulement pour information!) vaut $\frac{1}{l!} \sum_{i=1}^l C_l^i (-1)^{l-i} i^k$ (nombres de Stirling de seconde espèce).

Finalement

$$\left| \sum_{1 \leq l < \frac{k}{2} + 1} \sum_{I \in \mathcal{E}_l^{(k)}} N^{-\frac{k}{2}-1} P(I) \right| \leq \sum_{1 \leq l < \frac{k}{2} + 1} N^{l-\frac{k}{2}-1} K(l, k) C(k) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Si $l > \frac{k}{2} + 1$.

Lemma 1.1.1. $\forall k \geq 3$, si $k \geq l > \frac{k}{2} + 1$ alors, $\forall I \in \mathcal{E}_l^{(k)}$, $P(I) = 0$.

Remarque 1.1.3. Pour $k = 1$ ou 2 de tels l n'existent pas.

Preuve par récurrence sur k :

- $k = 3$ $P(I) = \mathbb{E} [(W_N)_{i_1 i_2} (W_N)_{i_2 i_3} (W_N)_{i_3 i_1}]$. $3 \geq l > \frac{3}{2} + 1 \implies i_1, i_2$ et i_3 sont distincts $\implies (W_N)_{i_1 i_2}, (W_N)_{i_2 i_3}$ et $(W_N)_{i_3 i_1}$ sont indépendantes $\implies P(I) = 0$ car les variables sont centrées.

- Supposons le résultat vrai $\forall 3 \leq k' \leq k-1$, pour un certain $k \geq 4$. $l > \frac{k}{2} + 1$ implique qu'il existe un $p \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\forall j \neq p, i_p \neq i_j$. En effet, sinon on aurait $l \leq \frac{k}{2}$. Dans ce qui suit, on adopte la convention $i_{p+1} = i_1$ si $p = k$.

- Si $i_{p-1} \neq i_{p+1}$ alors $W_{i_{p-1} i_p}$ est indépendante de toutes les autres $W_{i_s i_{s+1}}$, $s \neq p-1$, donc $P(I) = 0$ car $W_{i_{p-1} i_p}$ est centrée.

Remarque 1.1.4. : si $k = 4$, $4 \geq l > \frac{k}{2} + 1 \iff 4 \geq l > 3 \iff l = 4$
donc on est forcément dans ce cas.

- Si $i_{p-1} = i_{p+1}$ (ce qui implique d'après la remarque précédente $k \geq 5$) alors $|W_{i_{p-1}i_p}|^2$ est indépendante de toutes les autres $W_{i_s i_{s+1}}$, $s \notin \{p-1, p\}$, et

$$\begin{aligned} P(I) &= \mathbb{E} [|W_{i_{p-1}i_p}|^2] \mathbb{E} [(W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_{p-2} i_{p-1}} (W_N)_{i_{p+1} i_{p+2}} \cdots (W_N)_{i_k i_1}] \\ &= P(I') \end{aligned}$$

où $I' = (i_1, \dots, i_{p-2}, i_{p+1}, \dots, i_k) \in \mathcal{E}_{l-1}^{(k-2)}$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $k' = k - 2 \geq 3$ puisque $l - 1 > \frac{k}{2} + 1 - 1 = \frac{k-2}{2} + 1$ et on obtient $P(I') = 0$ donc $P(I) = 0$, ce qui termine la démonstration par récurrence.

Première conclusion : Si k est impair,

$$\sum_{l=1}^k = \sum_{1 \leq l < \frac{k}{2} + 1} + \sum_{\frac{k}{2} + 1 < l \leq k},$$

et l'on a donc obtenu

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} Tr \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) = 0.$$

Seconde conclusion : Si k est pair, $k = 2q$,

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} Tr \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^{2q} \right) - \sum_{I \in \mathcal{E}_{q+1}^{(2q)}} N^{-q-1} P(I) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (1.1.4)$$

Lemma 1.1.2.

$$\sum_{I \in \mathcal{E}_{q+1}^{(2q)}} N^{-q-1} P(I) = N^{-q-1} \text{card } \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\})$$

où, pour tout ensemble M de \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_q(M) &= \{I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in M^{2q}, \\ &\quad \text{le nombre de valeurs distinctes dans } I \text{ est égal à } q+1, \\ &\quad \text{et } \forall s \in \{1, \dots, 2q\}, i_s \neq i_{s+1}, \exists ! t \neq s, t \in \{1, \dots, 2q\}, \{i_s, i_{s+1}\} = \\ &\quad \{i_t, i_{t+1}\}\}. \text{ (avec la convention } i_{2q+1} = i_1.) \end{aligned}$$

Attention : l'égalité $\{i_s, i_{s+1}\} = \{i_t, i_{t+1}\}$ est une égalité d'ensembles c'est à dire que l'on peut avoir soit $i_s = i_t$ et $i_{s+1} = i_{t+1}$, soit $i_s = i_{t+1}$ et $i_{s+1} = i_t$.

Preuve du lemme 1.1.2 : Comme les variables $W_{i_s i_{s+1}}$ sont centrées, si I appartenant à $\mathcal{E}_{q+1}^{(2q)}$ est tel que $P(I) \neq 0$, alors nécessairement chaque $\{i_s, i_{s+1}\}$ apparaît au moins deux fois dans $\{i_1, i_2\} \cdots \{i_{2q}, i_1\}$. Appelons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{q+1}^{\geq 2} &= \{I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in \{1, \dots, N\}^{2q}, \\ &\quad \text{le nombre de valeurs distinctes dans } I \text{ est égal à } q+1, \\ &\quad \text{et } \forall s \in \{1, \dots, 2q\}, \{i_s, i_{s+1}\} \text{ apparaît au moins deux fois}; \end{aligned}$$

on a donc

$$\sum_{I \in \mathcal{E}_{q+1}^{(2q)}} N^{-q-1} P(I) = \sum_{I \in \mathcal{E}_{q+1}^{\geq 2}} N^{-q-1} P(I). \quad (1.1.5)$$

Lemma 1.1.3. $\forall I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in \mathcal{E}_{q+1}^{\geq 2}$, $\forall s \in \{1, \dots, 2q\}$, $i_s \neq i_{s+1}$ et $\{i_s, i_{s+1}\}$ apparaît **exactement** deux fois dans $\{i_1, i_2\} \cdots \{i_{2q}, i_1\}$.

Lemma 1.1.4. $\forall I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in \mathcal{E}_{q+1}^{\geq 2}$, $\exists p \in \{1, \dots, 2q\}$ tel que $i_p \neq i_j, \forall j \neq p$ et $i_{p-1} = i_{p+1}$.

Preuve du lemme 1.1.4 : $\exists p \in \{1, \dots, 2q\}$ tel que $i_p \neq i_j, \forall j \neq p$ sinon le nombre de valeurs distinctes dans I serait inférieur ou égal à q . De plus on doit avoir $i_{p-1} = i_{p+1}$ car sinon $\{i_{p-1}, i_p\}$ n'apparaîtrait qu'une seule fois. \square

Preuve du lemme 1.1.3 : Nous allons procéder par récurrence sur q . Pour $q = 1$, le résultat est trivial.

Supposons le résultat vrai pour $q - 1 \geq 1$. Soit $I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in \mathcal{E}_{q+1}^{\geq 2}$. D'après le lemme 1.1.4, $\exists p \in \{1, \dots, 2q\}$ tel que $i_p \neq i_j, \forall j \neq p$ et $i_{p-1} = i_{p+1}$. On a en particulier $i_{p-1} \neq i_p$ et $i_p \neq i_{p+1}$. Remarquons que $I' = (i_1, \dots, i_{p-1}, i_{p+2}, \dots, i_{2q})$ appartient à $\mathcal{E}_q^{\geq 2}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $i_s \neq i_{s+1}$ pour $s \leq p - 2$ ou $s \geq p + 2$, et $i_{p-1} \neq i_{p+2}$. Comme $i_{p-1} = i_{p+1}$, on a également $i_{p+1} \neq i_{p+2}$. Ainsi $\forall s \in \{1, \dots, 2q\}$, $i_s \neq i_{s+1}$. De plus, toujours par hypothèse de récurrence, $\forall s \in \{1, \dots, 2q\} \setminus \{p - 1, p\}$, $\{i_s, i_{s+1}\}$ apparaît **exactement** deux fois dans $\{i_1, i_2\} \cdots \{i_{p-2}, i_{p-1}\} \{i_{p+1}, i_{p+2}\} \cdots \{i_{2q}, i_1\}$ et est différent de $\{i_{p-1}, i_p\} = \{i_p, i_{p+1}\}$. Le résultat est donc vrai pour q . Ceci termine donc la preuve du lemme 1.1.3.

Lemme 1.1.3 implique donc que

$$\mathcal{E}_{q+1}^{\geq 2} = \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\}). \quad (1.1.6)$$

Lemme 1.1.2 découle de (1.1.5) et (1.1.6) et du fait que $P(I) = 1, \forall I \in \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\})$.

Il s'agit donc maintenant de déterminer $\text{card } \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\})$. La notion de *partitions non-croisées* est introduite en Appendice.

Lemma 1.1.5. Soit $I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\})$. La relation

$$\forall s \neq t \in \{1, \dots, 2q\}, s \overset{\nu}{\sim} t \iff \{i_s, i_{s+1}\} = \{i_t, i_{t+1}\}, \quad (1.1.7)$$

définit (de manière unique) une partition non croisée par paires de $\{1, \dots, 2q\}$.

Preuve : Comme $\forall I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\})$, $\forall s \in \{1, \dots, 2q\}$, $\exists t \in \{1, \dots, 2q\}$, $t \neq s$, tel que $\{i_s, i_{s+1}\} = \{i_t, i_{t+1}\}$, il est clair que la relation (1.1.7) définit de manière unique une partition par paires de $\{1, \dots, 2q\}$. Nous allons démontré par récurrence sur q qu'elle est non croisée.

Pour $q = 1$, ceci est trivial.

Supposons le résultat vrai pour $q - 1 \geq 1$. D'après le Lemme 1.1.4, $\exists p \in \{1, \dots, 2q\}$ tel que $i_p \neq i_j, \forall j \neq p$ et $\{i_{p-1}, i_p\} = \{i_p, i_{p+1}\}$. Donc $\{p-1, p\} \in \nu$. Soit ν' la partition en paires de $\{1, \dots, p-2, p+1, \dots, 2q\}$ définie par $\nu \setminus \{p-1, p\}$. Nous pouvons la considérer comme une partition de $\{1, \dots, 2q-2\}$ en remplaçant les $p+1 \leq m \leq 2q$ par $m-2$. Posons $j_m = i_m$ si $1 \leq m \leq p-2$ et $j_m = i_{m+2}$ si $p-1 \leq m \leq 2q-2$. ν' est caractérisée par $\forall s \neq t$ dans $\{1, \dots, 2q-2\}$, $s \overset{\nu'}{\sim} t \iff \{j_s, j_{s+1}\} = \{j_t, j_{t+1}\}$. Comme $(j_1, \dots, j_{2q-2}) = (i_1, \dots, i_{p-2}, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{2q}) \in \mathcal{I}_{q-1}(\{1, \dots, N\})$, par hypothèse de récurrence ν' est non croisée donc ν aussi.

Lemma 1.1.6. *Soit M un sous-ensemble de \mathbb{R} . Soit ν une partition par paires non croisée de $\{1, \dots, 2q\}$. Si $I = (i_1, \dots, i_{2q}) \in M^{2q}$ satisfait $\forall s \neq t$ dans $\{1, \dots, 2q\}$, $s \overset{\nu}{\sim} t \iff \{i_s, i_{s+1}\} = \{i_t, i_{t+1}\}$ alors il y a au plus $q+1$ valeurs distinctes dans I .*

Preuve : Par récurrence sur q .

Si $q=1$, le résultat est trivial.

Supposons le résultat vrai pour $q - 1 \geq 1$. D'après le Lemme 1.5.1, ν admet un bloc de la forme $\{p-1, p\}$ pour un certain $p \in \{2, \dots, 2q\}$. On a donc $\{i_{p-1}, i_p\} = \{i_p, i_{p+1}\}$ ce qui équivaut à $i_{p-1} = i_{p+1}$. Soit ν' la partition non croisée en paires de $\{1, \dots, p-2, p+1, \dots, 2q\}$ définie par $\nu' = \nu \setminus \{p-1, p\}$. Comme précédemment, nous pouvons la considérer comme une partition de $\{1, \dots, 2q-2\}$ en remplaçant les $p+1 \leq m \leq 2q$ par $m-2$. $I' = (j_1, \dots, j_{2q-2}) = (i_1, \dots, i_{p-2}, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{2q}) \in M^{2(q-1)}$ satisfait $\forall s \neq t$ dans $\{1, \dots, 2q-2\}$, $s \overset{\nu'}{\sim} t \iff \{j_s, j_{s+1}\} = \{j_t, j_{t+1}\}$. Par hypothèse de récurrence, il y a au plus $(q-1) + 1 = q$ valeurs distinctes dans I' . Il y a donc au plus $q+1$ valeurs distinctes dans I (puisque $i_{p-1} = i_{p+1}$).

Lemma 1.1.7. *Soit ν une partition par paires non croisée de $\{1, \dots, 2q\}$. Soit M un sous-ensemble fini de \mathbb{R} de cardinal N . Il y a exactement $N \times (N-1) \times \dots \times (N-q)$ uplets I dans $\mathcal{I}_q(M)$ associés à ν par la relation (1.1.7).*

Preuve : Par récurrence sur q .

Si $q = 1$, le résultat est trivial.

Supposons le résultat vrai pour $q - 1 \geq 1$. D'après le Lemme 1.5.1, ν admet au moins un bloc de la forme $\{p-1, p\}$ pour un certain $p \in \{2, \dots, 2q\}$. Choisissons le plus petit des $p \in \{2, \dots, 2q\}$ tels que $\{p-1, p\}$ soit un bloc de ν .

Commençons par regarder ce que doit vérifier $I = (i_1, \dots, i_{2q})$ dans $\mathcal{I}_q(M)$ pour être associé à ν par la relation (1.1.7). Un tel I devra vérifier $\{i_{p-1}, i_p\} = \{i_p, i_{p+1}\}$ ce qui équivaut à $i_{p-1} = i_{p+1}$. D'autre part remarquons que i_p n'intervient plus dans les relations induites par $\forall s \neq t$ dans $\{1, \dots, p-2, p+1, \dots, 2q\}$, $s \overset{\nu}{\sim} t \iff \{i_s, i_{s+1}\} = \{i_t, i_{t+1}\}$. Soit $\nu' = \nu \setminus \{p-1, p\}$. Une

fois de plus, considérons la comme une partition de $\{1, \dots, 2q - 2\}$ en remplaçant les $p + 1 \leq m \leq 2q$ par $m - 2$. Si I est associé à ν par la relation (1.1.7) alors $I' = (j_1, \dots, j_{2q-2}) = (i_1, \dots, i_{p-2}, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{2q})$ satisfait $\forall s \neq t$ dans $\{1, \dots, 2q - 2\}$, $s \overset{\nu'}{\sim} t \iff \{j_s, j_{s+1}\} = \{j_t, j_{t+1}\}$. D'après le Lemme 1.1.6 il y a au plus q valeurs distinctes dans I' . Comme on veut que I contienne exactement $q+1$ valeurs distinctes, il est donc nécessaire d'avoir i_p différent de tous les autres i_j , $j \neq p$ et pour un i_p fixé, on doit avoir $(j_1, \dots, j_{2q-2}) = (i_1, \dots, i_{p-2}, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{2q}) \in \mathcal{I}_{q-1}(\{M \setminus \{i_p\}\})$. Réciproquement, fixons un i_p dans M . Par hypothèse de récurrence, il existe exactement $(N - 1) \times (N - 2) \times \dots \times (N - 1 - (q - 1))$ uplets $I' = (j_1, \dots, j_{2q-2})$ dans $\mathcal{I}_{q-1}(M \setminus \{i_p\})$ associés à ν' . Posons $(i_1, \dots, i_{p-2}, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{2q}) = (j_1, \dots, j_{2q-2})$ et $i_{p-1} = i_{p+1}$. Il est clair que $I = (i_1, \dots, i_{2q})$ est dans $\mathcal{I}_q(M)$ et est associé à ν par la relation (1.1.7). Il y a donc exactement $N \times (N - 1) \times \dots \times (N - q)$ uplets I dans $\mathcal{I}_q(M)$ associés à ν .

Lemme 1.1.5 et Lemme 1.1.7 impliquent la proposition suivante.

Proposition 1.1.1.

$$\text{Card } \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\}) = N \times (N - 1) \times \dots \times (N - q) \text{ Card } \text{NC}_2(2q)$$

où $\text{NC}_2(2q)$ est l'ensemble des partitions non croisées de $\{1, \dots, 2q\}$ formées de paires.

Donc

$$\begin{aligned} N^{-q-1} \text{card } \mathcal{I}_q(\{1, \dots, N\}) &= N^{-q-1} N \times (N - 1) \times \dots \times (N - q) \text{ Card } \text{NC}_2(2q) \\ &\rightarrow_{N \rightarrow +\infty} \text{Card } \text{NC}_2(2q). \end{aligned}$$

D'après Lemme 1.1.2, (1.1.4) et Lemme 1.5.2, on a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^{2q} \right) = \text{Card } \text{NC}_2(2q) = C_q.$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.1.2. \square

Pour démontrer la convergence presque sûre de $\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right)$ vers zéro, nous allons démontrer le lemme suivant.

Lemma 1.1.8.

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) \right|^2 \right] = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) \right|^2 \right] \\
&= \frac{1}{N^{2+k}} \left[\mathbb{E} \left\{ \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N (W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1} \right)^2 \right\} - \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \mathbb{E} \left((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1} \right) \right\}^2 \right] \\
&= \frac{1}{N^{2+k}} \sum_{i_1, \dots, i_{2k}=1}^N \left[\mathbb{E} \left((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1} (W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1} \right) \mathbb{E} \left((W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}} \right) \right]. \quad (1.1.8)
\end{aligned}$$

Lemma 1.1.9. *Un $2k$ uplet $I = (i_1, \dots, i_{2k})$ ayant une contribution non nulle dans (1.1.8) doit appartenir à $\bigcup_{l=1}^k \mathcal{E}_l^{(2k)}$ i.e que le nombre de valeurs distinctes dans $\{i_1, \dots, i_{2k}\}$ doit être inférieur ou égal à k .*

Preuve :

Un $2k$ uplet $I = (i_1, \dots, i_{2k})$ ayant une contribution non nulle dans (1.1.8) doit vérifier :

$$\exists p \in \{1, \dots, k\}, \exists q \in \{k+1, \dots, 2k\}, \text{ tel que } \{i_p, i_{p+1}\} = \{i_q, i_{q+1}\}.$$

On peut toujours se ramener au cas $i_p = i_{q+1}$ et $i_{p+1} = i_q$ de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
(W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}} &= (W_N)_{i_{k+1} i_{2k}} (W_N)_{i_{2k} i_{2k-1}} \cdots (W_N)_{i_{k+2} i_{k+1}} \\
&= (W_N)_{j_{k+1} j_{k+2}} \cdots (W_N)_{j_{2k} j_{k+1}}
\end{aligned}$$

où (avec la convention $i_{2k+1} = i_{k+1}$) $\forall l = 1, \dots, k$, $j_{k+l} = i_{2k-l+2}$. Donc si $i_{p+1} = i_{q+1}$ et $i_p = i_q$ on aura $i_p = j_{3k-q+2} = j_{\bar{q}+1}$ et $i_{p+1} = j_{3k-q+1} = j_{\bar{q}}$. Supposons donc $i_p = i_{q+1}$ et $i_{p+1} = i_q$. Réécrivons

$$\begin{aligned}
& (W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1} (W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}} \\
&= (W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_{p-1} i_p} (W_N)_{i_p i_{p+1}} (W_N)_{i_q i_{q+1}} (W_N)_{i_{q+1} i_{q+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}} \\
&\quad \times (W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} (W_N)_{i_{k+2} i_{k+3}} \cdots (W_N)_{i_{q-1} i_q} (W_N)_{i_{p+1} i_{p+2}} (W_N)_{i_{p+2} i_{p+3}} \cdots (W_N)_{i_k i_1} \\
&= (W_N)_{\tilde{i}_1 \tilde{i}_2} (W_N)_{\tilde{i}_2 \tilde{i}_3} \cdots (W_N)_{\tilde{i}_{2k} \tilde{i}_1}
\end{aligned}$$

Soit l le nombre de valeurs distinctes dans $\tilde{I} = \{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{2k}\}$ (et donc dans $I = \{i_1, \dots, i_{2k}\}$). D'après le lemme 1.1.1, si $l > k+1$ alors $P(\tilde{I}) = 0$. De plus si $l > k+1$, soit il y a $l_1 > \frac{k}{2} + 1$ éléments distincts parmi $\{i_1, \dots, i_k\}$ soit il y a $l_2 > \frac{k}{2} + 1$ éléments distincts parmi $\{i_{k+1}, \dots, i_{2k}\}$ et dans tous les cas d'après le lemme 1.1.1,

$$\mathbb{E} \left((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1} \right) \mathbb{E} \left((W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}} \right) = 0.$$

On peut donc conclure que si I a une contribution non nulle dans (1.1.8) alors $l \leq k+1$.

Supposons $l = k + 1$. Alors d'après le lemme 1.1.3, $\forall s \in \{1, \dots, 2k\}$, $\{\tilde{i}_s, \tilde{i}_{s+1}\}$ apparaît **exactement** deux fois dans $\{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2\} \cdots \{\tilde{i}_{2k}, \tilde{i}_1\}$ et donc $\{i_p, i_{p+1}\} = \{i_q, i_{q+1}\}$ n'est égal à aucun $\{i_s, i_{s+1}\}$ pour $s \notin \{p, q\}$. Donc

$$\mathbb{E}((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1}) \mathbb{E}((W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}}) = 0$$

et

$$\begin{aligned} P(\tilde{I}) &= \mathbb{E}((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_{p-1} i_p} (W_N)_{i_{p+1} i_{p+2}} \cdots \\ &\quad \times (W_N)_{i_k i_1} (W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{q-1} i_q} (W_N)_{i_{q+1} i_{q+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}}) \\ &= \mathbb{E}((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_{p-1} i_p} (W_N)_{i_p i_{q+2}} (W_N)_{i_{q+2} i_{q+3}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}} (W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots \\ &\quad \times (W_N)_{i_{q-1} i_{p+1}} (W_N)_{i_{p+1} i_{p+2}} \cdots (W_N)_{i_k i_1}) \\ &= P(\bar{I}) \end{aligned}$$

où $\bar{I} = (\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{2k-2})$ contient $k+1 (> \frac{2(k-1)}{2} + 1 = k)$ valeurs distinctes. Donc d'après le lemme 1.1.1, $P(\bar{I}) = 0$. On peut donc conclure que si I a une contribution non nulle dans (1.1.8) alors $l \leq k$ ce qui termine la preuve du Lemme 1.1.9. \square

Ainsi

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) \right|^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{N^{2+k}} \sum_{l=1}^k \sum_{I=(i_1, \dots, i_{2k}) \in \xi_l^{(2k)}} \left[\mathbb{E}((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1} (W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}}) \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E}((W_N)_{i_1 i_2} \cdots (W_N)_{i_k i_1}) \mathbb{E}((W_N)_{i_{k+1} i_{k+2}} \cdots (W_N)_{i_{2k} i_{k+1}}) \right] \\ &\leq \frac{C_k}{N^2}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right) \right|^2 \right] < +\infty,$$

et donc, par le lemme de Borel-Cantelli, que $\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \right)$ tend presque sûrement vers zéro.

On en déduit donc que

$$\frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^k \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ C_{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases} \quad \text{presque sûrement}$$

puis trivialement que, presque sûrement, pour tout polynôme P ,

$$\int P(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \rightarrow \int P(x) d\mu_{sc}(x). \quad (1.1.9)$$

Soit maintenant une fonction f continue bornée sur \mathbb{R} . Soit $B > 2$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, pour tout $\delta > 0$, il existe un polynôme P_δ tel que

$$\sup_{x \in [-B; B]} |f(x) - P_\delta(x)| \leq \delta.$$

Plaçons nous sur l'évènement $\Omega = \{\forall P \in \mathbb{R}[X], \int P(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \rightarrow \int P(x) d\mu_{sc}(x)\}$.

D'après (1.1.9), $P(\Omega) = 1$.

Pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \int f(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int f(x) d\mu_{sc}(x) \right| \\ & \leq \left| \int_{|x|>B} f(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int_{|x|>B} P_\delta(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \right| \\ & \quad + \left| \int_{|x|\leq B} f(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int_{|x|\leq B} P_\delta(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \right| \\ & \quad + \left| \int P_\delta(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int P_\delta(x) d\mu_{sc}(x) \right| \\ & \quad + \left| \int P_\delta(x) d\mu_{sc}(x) - \int f(x) d\mu_{sc}(x) \right| \\ & \leq 2\delta + \left| \int P_\delta(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int P_\delta(x) d\mu_{sc}(x) \right| \\ & \quad + \left| \int_{|x|>B} f(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int_{|x|>B} P_\delta(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \right|. \end{aligned}$$

Pour tout $\delta > 0$, $\left| \int P_\delta(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int P_\delta(x) d\mu_{sc}(x) \right| \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$. Soit p le degré de P_δ . Il existe une constante $C(P_\delta, f)$ telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|x|>B} f(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int_{|x|>B} P_\delta(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \right| \\ & \leq C(P_\delta, f) \int_{|x|>B} |x|^p d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \\ & \leq B^{-(p+2q)} C(P_\delta, f) \int |x|^{2(p+q)} d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x). \end{aligned}$$

Fixons q tel que $B^{-(p+2q)}C(P_\delta, f)2^{2(p+q)} \leq \delta$. Puisque $\int |x|^{2(p+q)}d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x)$ converge vers $\int |x|^{2(p+q)}d\mu_{sc}(x)$, on obtient,

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_{|x|>B} f(x)d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int_{|x|>B} P_\delta(x)d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \right| &\leq B^{-(p+2q)}C(P_\delta, f) \int |x|^{2(p+q)}d\mu_{sc}(x) \\ &\leq B^{-(p+2q)}C(P_\delta, f)2^{2(p+q)} \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

On obtient donc sur Ω , $\forall \delta > 0$,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \left| \int f(x)d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int f(x)d\mu_{sc}(x) \right| \leq 3\delta$$

puis

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int f(x)d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int f(x)d\mu_{sc}(x) \right| = 0.$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.1.1. \square

1.1.2 Approche transformée de Cauchy

Definition 1.1.1. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . La transformée de Cauchy de μ est définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$g_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z-x}.$$

1. Transformée de Cauchy de la loi du demi-cercle μ_{sc} .

$$d\mu_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} 1_{[-2;2]}(x) dx.$$

Proposition 1.1.2. $g_{\mu_{sc}}$ satisfait l'équation :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus [-2; 2], \quad g_{\mu_{sc}}^2(z) - zg_{\mu_{sc}}(z) + 1 = 0. \quad (1.1.10)$$

Idée de preuve : $\forall k \geq 0, \int x^{2k}d\mu_{sc}(x) = C_k$. Donc pour $|z| > 2$, $g_{\mu_{sc}}(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_k}{z^{2k}}$. Il est facile de déduire (1.1.10) du fait que les nombres de Catalan $(C_k)_{k \geq 0}$ vérifient $C_0 = 1, C_k = \sum_{l=1}^k C_{l-1}C_{k-l}$.

2. **Idée de base d'une approche du théorème de Wigner par la transformée de Cauchy**

Remarquons que si M est une matrice symétrique $N \times N$ et si $\mu_M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i(M)}$ désigne sa mesure spectrale, alors $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$g_M(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_M(x)}{z-x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z-\lambda_i(M)} = \frac{1}{N} \text{Tr}((zI_N - M)^{-1}).$$

$G_M(z) = (zI_N - M)^{-1}$ est appelée résolvante de la matrice M . Elle vérifie,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \|G_N(z)\| \leq \frac{1}{|\Im z|}.$$

Notons G_N la résolvante de $\frac{W_N}{\sqrt{N}}$.

-Nous allons tout d'abord démontrer que, pour z fixé dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right)$ converge vers 0 presque sûrement.

-Puis nous montrerons que $\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right)$ converge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vers $g_{\mu_{sc}}(z)$.

-Nous utiliserons alors Proposition 1.5.5 pour en déduire le théorème de Wigner.

a) Démontrons donc que $\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right)$ converge vers 0 presque sûrement.

Lemma 1.1.10. *Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \right|^4 \right) \leq \frac{C}{N^2 |\Im z|^4}.$$

Preuve : Soit \mathcal{F}_k la tribu engendrée par $\{(W_N)_{ij}, i, j \leq k\}$. Notons \mathbb{E}_k l'espérance conditionnelle sachant \mathcal{F}_k et $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ \mathbb{E}_k \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) - \mathbb{E}_{k-1} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \right\} \\ &:= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \gamma_k, \\ \gamma_k &= \mathbb{E}_k \left(\text{Tr} \left(zI_N - \frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^{-1} - \text{Tr} \left(zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}} \right)^{-1} \right) \\ &\quad - \mathbb{E}_{k-1} \left(\text{Tr} \left(zI_N - \frac{W_N}{\sqrt{N}} \right)^{-1} - \text{Tr} \left(zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}} \right)^{-1} \right), \end{aligned}$$

où \hat{W}_k est la matrice obtenue à partir de W_N en enlevant la k ième ligne et la k ième colonne.

En utilisant le lemme 1.5.6, on obtient que

$$|\gamma_k| \leq \frac{2}{|\Im z|}.$$

De plus, en remarquant que $\{\gamma_k\}$ est une différence de martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_k\}$ et appliquant Lemme 1.5.7 pour $p = 4$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \right|^4 \right) &\leq K_4 \frac{1}{N^4} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^N |\gamma_k|^2 \right)^2 \\ &\leq \frac{16K_4}{N^2 |\Im z|^4}. \square \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \right| > \epsilon \right) &\leq \frac{1}{\epsilon^4} \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \right|^4 \right) \\ &\leq \frac{C}{\epsilon^4 N^2 |\Im z|^4}. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_N \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \right| > \epsilon \right) < +\infty$ et par le Lemme de Borel-Cantelli $\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right)$ converge vers 0 presque sûrement.

b) Démontrons maintenant que $g_N(z) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right)$ converge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vers $g_{\mu_{sc}}(z)$.

Pour ce faire, nous allons montrer que g_N vérifie asymptotiquement l'équation quadratique vérifiée par $g_{\mu_{sc}}$, plus précisément que $g_N^2(z) - z g_N(z) + 1 \rightarrow 0$. La convergence de $g_N(z)$ vers $g_{\mu_{sc}}(z)$ s'en déduira en effet par exemple de la façon suivante. Posons

$$A_N(z) = g_N(z)^2 - z g_N(z) + 1,$$

$$A(z) = g_{\mu_{sc}}(z)^2 - z g_{\mu_{sc}}(z) + 1 (= 0),$$

et supposons avoir démontré que $A_N(z) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Nous avons

$$A_N(z) - A(z) = (g_N(z) - g_{\mu_{sc}}) \{g_N(z) + g_{\mu_{sc}}(z) - z\},$$

$\Im g_N(z)$, $\Im g_{\mu_{sc}}(z)$ et $\Im(-z)$ sont toutes de même signe donc si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$|\Im \{g_N(z) + g_{\mu_{sc}}(z) - z\}| > |\Im z| > 0,$$

et

$$\frac{1}{|g_N(z) + g_{\mu_{sc}}(z) - z|} \leq \frac{1}{|\Im z|}.$$

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$|g_N(z) - g_{\mu_{sc}}(z)| \leq \frac{1}{|\Im z|} |A_N(z)| \rightarrow 0. \quad (1.1.11)$$

Nous allons donc démontrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, quand $N \rightarrow +\infty$,

$$g_N^2(z) - zg_N(z) + 1 \rightarrow 0. \quad (1.1.12)$$

Puisque $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$|g_N(z) - z| \leq \frac{1}{|\Im z|} + |z|,$$

et

$$|\Im(g_N(z) - z)| > |\Im z| > 0,$$

(1.1.12) est équivalent à

$$g_N(z) - \frac{1}{z - g_N(z)} \rightarrow 0,$$

et c'est ce résultat asymptotique que nous allons démontrer. Appliquant Théorème 1.5.3 à $A = (z - \frac{W_N}{\sqrt{N}})$, on obtient pour tout $k = 1, \dots, N$,

$$(G_N(z))_{kk} = \frac{1}{z - \frac{(W_N)_{kk}}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k},$$

où $Y_k = \begin{pmatrix} (W_N)_{k1} \\ \vdots \\ (W_N)_{k(k-1)} \\ (W_N)_{k(k+1)} \\ \vdots \\ (W_N)_{kN} \end{pmatrix}$, et \hat{W}_k est la matrice de taille $N-1 \times N-1$

obtenue en enlevant la k -ième ligne et la k -ième colonne de W_N . Si bien que

$$\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - \frac{(W_N)_{kk}}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k}.$$

Nous allons donc étudier $\mathbb{E}(\Delta_N(z))$ où

$$\begin{aligned} \Delta_N(z) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - \frac{(W_N)_{kk}}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k} - \frac{1}{z - g_N(z)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\epsilon_k}{(z - \frac{(W_N)_{kk}}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k)(z - g_N(z))} \end{aligned}$$

où

$$\epsilon_k = \frac{(W_N)_{kk}}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k - g_N(z).$$

Utilisant Lemme 1.5.4, nous avons

$$\begin{aligned} (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} &= \left((\Re z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}}) + i\Im z I_{N-1} \right)^{-1} \\ &= \left((\Re z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}}) - i\Im z I_{N-1} \right) \left((\Re z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^2 + |\Im z|^2 I_{N-1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\Im(z - \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k) = \Im z \left\{ 1 + \frac{1}{N} {}^t Y_k \left[(\Re z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^2 + |\Im z|^2 I_{N-1} \right]^{-1} Y_k \right\},$$

et donc

$$|\Im(z - \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k)| \geq |\Im z|.$$

De plus $|\Im(z - g_N(z))| \geq |\Im z|$. On en déduit donc que

$$|\Delta_N(z)| \leq \frac{1}{|\Im z|^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\epsilon_k|.$$

Décomposons

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= \frac{(W_N)_{kk}}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k - g_N(z) \\ &= \epsilon_k(1) + \epsilon_k(2) + \epsilon_k(3) + \epsilon_k(4) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_k(1) &= \frac{W_{kk}}{\sqrt{N}}, \\ \epsilon_k(2) &= \frac{1}{N} \left\{ {}^t Y_k (zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k - \text{Tr}(zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} \right\}, \\ \epsilon_k(3) &= \frac{1}{N} \left\{ \text{Tr}(zI_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} - \text{Tr}G_N(z) \right\}, \\ \epsilon_k(4) &= \frac{1}{N} \text{Tr}G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr}G_N(z) \right). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer qu'il existe une constante $C(z) > 0$ telle que $\forall k = 1, \dots, N, \forall i = 1, \dots, 4,$

$$\mathbb{E}(|\epsilon_k(i)|^2) \leq \frac{C(z)}{N}.$$

On aura ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\Delta_N(z)|) &\leq \frac{1}{|\Im z|^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{\mathbb{E}(|\epsilon_k(1)|) + \mathbb{E}(|\epsilon_k(2)|) + \mathbb{E}(|\epsilon_k(3)|) + \mathbb{E}(|\epsilon_k(4)|)\} \\ &\leq \frac{\tilde{C}(z)}{\sqrt{N}} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Etude de $\mathbb{E}(|\epsilon_k(1)|^2)$:

$$\mathbb{E}(|\epsilon_k(1)|^2) = \frac{\mathbb{E}(|W_{kk}|^2)}{N} \leq \frac{C(2)}{N}.$$

Etude de $\mathbb{E}(|\epsilon_k(2)|^2)$: Pour tout $k = 1, \dots, N$, Y_k est indépendant de \hat{W}_k et les entrées de Y_k sont indépendantes, centrées, de variance 1 et telles que $\max \mathbb{E}(|(Y_k)_i|^4) \leq C_4$. D'après Proposition 1.5.8,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\epsilon_k(2)|^2) &= \frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\left| {}^t Y_k (z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} Y_k - \text{Tr}(z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} \right|^2 \mid \hat{W}_k \right] \right\} \\ &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \text{Tr}(z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} \left((z I_{N-1} - \frac{\hat{W}_k}{\sqrt{N}})^{-1} \right)^* \right\} \\ &\leq \frac{1}{N} \frac{1}{|\Im z|^2}.\end{aligned}$$

Etude de $\mathbb{E}(|\epsilon_k(3)|^2)$: D'après Lemme 1.5.6,

$$\mathbb{E}(|\epsilon_k(3)|^2) \leq \frac{1}{N^2} \frac{1}{|\Im z|^2}.$$

Etude de $\mathbb{E}(|\epsilon_k(4)|^2)$: En utilisant le Lemme 1.1.10, on obtient

$$\mathbb{E}(|\epsilon_k(3)|^2) \leq \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right) \right|^4 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{N} \frac{1}{|\Im z|^2}.$$

Ceci termine la preuve de la convergence de $g_N(z) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z) \right)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vers $g_{\mu_{sc}}(z)$.

c) Application de la Proposition 1.5.5.

Soit z un point de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $(z_p)_{p \geq 0}$ une suite de points de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ distincts de z , convergeant vers z . Alors, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\exists \Omega(z_j)$ tel que $\mathbb{P}(\Omega(z_j)) = 1$ et $\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z_j)$ converge vers $g_{\mu_{sc}}(z_j)$ sur $\Omega(z_j)$. Soit $\Omega^* = \cap_j \Omega(z_j)$; on a $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$. Sur Ω^* , $\frac{1}{N} \text{Tr} G_N(z_j)$ converge vers $g_{\mu_{sc}}(z_j)$ pour tout j . $\forall \omega \in \Omega^*$, $\{f_N(\omega) : z \mapsto \frac{1}{N} \text{Tr}(z I_N - \frac{W_N(\omega)}{\sqrt{N}})^{-1}; N \geq 1\}$ est une suite bornée dans l'ensemble des fonctions analytiques muni de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. D'après le théorème de Vitali, $\forall \omega \in \Omega^*$, $f_N(\omega)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Le Théorème de Wigner découle alors de Proposition 1.5.5.

1.2 Théorème de Wigner dans le cas de variables i.i.d hors diagonale et i.i.d sur la diagonale

Si les variables W_{ii} suivent une même loi ν et si les variables $W_{ij}, 1 \leq i < j$ suivent une même loi μ , on peut en fait facilement relaxer les hypothèses sur les moments des entrées de la matrice de Wigner et obtenir le résultat suivant.

Théorème 1.2.1. *Soit $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que les variables W_{ii} suivent une même loi ν , et les variables $W_{ij}, 1 \leq i < j$ suivent une même loi μ de variance 1. Soit W_N une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq N$. Alors presque sûrement, la mesure spectrale $\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} .*

Nous allons tout d'abord établir la proposition intermédiaire suivante.

Proposition 1.2.1. *Soit $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que les variables W_{ii} suivent une même loi ν admettant un moment d'ordre 2, et les variables $W_{ij}, 1 \leq i < j$ suivent une même loi μ centrée de variance 1. Soit W_N une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq N$. Alors presque sûrement, la mesure spectrale $\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} .*

Preuve : Nous allons utiliser un argument de troncature de la manière suivante. Soit $\delta > 0$. Soit $C > 0$ tel que

$$\int_{|x|>C} x^2 d\mu(x) \leq \delta.$$

(Ceci est possible puisque nous supposons toujours $\int x^2 d\mu(x) < \infty$.) Définissons

$$\begin{aligned} (\hat{W}_N)_{ij} &= W_{ij} \mathbf{1}_{|W_{ij}| \leq C} - \mathbb{E}(W_{ij} \mathbf{1}_{|W_{ij}| \leq C}) \quad \text{si } i < j, \\ (\hat{W}_N)_{ii} &= 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\mathbb{E}(W_{12}^2 \mathbf{1}_{|W_{12}| \leq C}) - \mathbb{E}(W_{12} \mathbf{1}_{|W_{12}| \leq C})^2}.$$

Remarquons que puisque $\mathbb{E}(W_{12}) = 0$ et $\mathbb{E}(W_{12}^2) = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(W_{12} \mathbf{1}_{|W_{12}| \leq C})| &= |-\mathbb{E}(W_{12} \mathbf{1}_{|W_{12}| > C})| \\ &\leq \mathbb{E}(W_{12}^2 \mathbf{1}_{|W_{12}| > C})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\delta}, \end{aligned}$$

et $1 \geq \hat{\sigma} \geq \sqrt{1 - 2\delta}$.

La convergence étroite des mesures de probabilité sur \mathbb{R} peut être caractérisée par la distance :

$$d(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{B}\mathcal{L}_1(\mathbb{R})} |\mu(f) - \nu(f)|,$$

où $\mathcal{BL}_1(\mathbb{R})$ est la boule unité de l'ensemble des fonctions Lipschitziennes bornées sur \mathbb{R} muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_x |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Soit f Lipschitzienne sur \mathbb{R} de constante de Lipschitz $C_{\mathcal{L}}$. Nous avons d'après Corollaire 1.5.1

$$\left| \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) - \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}\right) \right| \leq \frac{C_{\mathcal{L}}}{\sqrt{N}} \left\| \frac{W_N}{\sqrt{N}} - \frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}} \right\|_2.$$

En utilisant $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$, nous avons pour $i \neq j$,

$$(W_N)_{ij} - (\hat{W}_N)_{ij} = W_{ij} \mathbf{1}_{|W_{ij}| > C} - \mathbb{E}(W_{ij} \mathbf{1}_{|W_{ij}| > C})$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \left\| \frac{W_N}{\sqrt{N}} - \frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}} \right\|_2 \right\}^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N W_{ii}^2 \\ &\quad + \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} \{W_{ij} \mathbf{1}_{|W_{ij}| > C} - \mathbb{E}(W_{ij} \mathbf{1}_{|W_{ij}| > C})\}^2. \end{aligned}$$

D'après la loi des grands nombres, on en déduit que presque sûrement,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) - \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}\right) \right|^2 \leq \left\{ \int_{|x| > C} x^2 d\mu(x) - \left(\int_{|x| > C} x d\mu(x) \right)^2 \right\} \leq \delta.$$

Ainsi, en utilisant le fait que \hat{W}_N satisfait les hypothèses du Théorème 1.1.1 (voir Remarque 1.1.2), on obtient que, pour tout $\delta > 0$, il existe Ω_δ tel que $\mathbb{P}(\Omega_\delta) = 1$ et sur Ω_δ ,

$$\begin{aligned} &\limsup_{N \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int f(x) d\mu_{sc}(x) \right| \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \int f(x) d\mu_{\frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int f(x) d\mu_{sc}^{(\hat{\sigma})}(x) \right| + \limsup_{N \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) - \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}\right) \right| \\ &\quad + \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \int f(x) d\mu_{sc}^{(\hat{\sigma})}(x) - \int f(x) d\mu_{sc}(x) \right| \\ &\leq \sqrt{\delta} + \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \int f(\hat{\sigma}x) d\mu_{sc}(x) - \int f(x) d\mu_{sc}(x) \right| \\ &\leq \sqrt{\delta} + |1 - \hat{\sigma}| \int |x| d\mu_{sc}(x) \\ &\leq (\sqrt{\delta} + 1 - \sqrt{1 - 2\delta}). \end{aligned}$$

Sur $\Omega = \cap_{\delta \in \mathbb{Q}^*} \Omega_\delta$ qui vérifie aussi $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, on a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \int f(x) d\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) - \int f(x) d\mu_{sc}(x) \right| = 0.$$

Ceci termine la démonstration de Proposition 1.2.1.

- Nous allons maintenant démontré que l'on peut enlever l'hypothèse que μ est centrée. Soit donc W_N vérifiant les hypothèses de Proposition 1.2.1 sauf celle que μ est centrée. Soit $\hat{W}_N = W_N - a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \dots 1)$, où $a = \int x d\mu(x)$.

D'après Théorème 1.5.2,

$$\sup_x \left| F^{\frac{\hat{w}_N}{\sqrt{N}}}(x) - F^{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \right| \leq \frac{1}{N},$$

où $F^{\frac{\hat{w}_N}{\sqrt{N}}}(x) = \mu_{\frac{\hat{w}_N}{\sqrt{N}}}([-\infty; x])$ et $F^{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) = \mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}([-\infty; x])$.

\hat{W}_N vérifiant les hypothèses de Proposition 1.2.1, on en déduit que presque sûrement, la mesure spectrale $\mu_{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} .

- Nous allons maintenant démontré que l'on peut enlever l'hypothèse que ν admet un moment d'ordre 2. Soit donc W_N vérifiant les hypothèses de Proposition 1.2.1 sauf celle que μ est centrée et celle que ν admet un moment d'ordre 2. Soit \tilde{W}_N et \hat{W}_N les matrices obtenues en remplaçant dans W_N les éléments diagonaux W_{ii} par respectivement zéro et $W_{ii} \mathbf{1}_{\{|W_{ii}| < N^{\frac{1}{4}}\}}$.

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que presque sûrement, la mesure spectrale $\mu_{\frac{\tilde{w}_N}{\sqrt{N}}}$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} .

Utilisant Corollaire 1.5.1, nous avons quelque soit f Lipschitzienne sur \mathbb{R} de constante de Lipschitz $C_{\mathcal{L}}$,

$$\left| \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}\right) - \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}\right) \right| \leq \frac{C_{\mathcal{L}}}{\sqrt{N}} \left\| \frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}} - \frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}} \right\|_2.$$

Or $\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \left\| \frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}} - \frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}} \right\|_2 \right\}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N W_{ii}^2 \mathbf{1}_{\{|W_{ii}| < N^{\frac{1}{4}}\}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$.

On a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{BL}_1(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}\right) - \frac{1}{N} \text{Tr} f\left(\frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}\right) \right| = 0.$$

La convergence étroite presque sûre de la mesure spectrale $\mu_{\frac{\tilde{w}_N}{\sqrt{N}}}$ vers la loi du demi-cercle μ_{sc} en découle.

D'autre part, utilisant Théorème 1.5.2, nous avons

$$\sup_x \left| F^{\frac{\tilde{w}_N}{\sqrt{N}}}(x) - F^{\frac{w_N}{\sqrt{N}}}(x) \right| \leq \frac{q_N}{N} \quad (1.2.1)$$

où $q_N = \text{card} \{i \in \{1, \dots, N\}, |W_{ii}| \geq N^{\frac{1}{4}}\}$.
 Soit $\epsilon > 0$. Notons $p_N = \mathbb{P}(|W_{11}| \geq N^{\frac{1}{4}})$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{q_N}{N} \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N \left\{ \mathbf{1}_{\{|W_{ii}| \geq N^{\frac{1}{4}}\}} - p_N \right\} \geq (\epsilon - p_N)N\right) \\ &\leq 2 \exp(-(\epsilon - p_N)^2 N^2 / [2(Np_N(1 - p_N) + 2(\epsilon - p_N)N)]) \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Bernstein (Proposition 1.5.7). Puisque $p_N \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, on aura donc pour une certaine constante C fixée et pour tout N suffisamment grand, $\mathbb{P}\left(\frac{q_N}{N} > \epsilon\right) \leq \exp(-CN)$ d'où l'on déduit par le lemme de Borel-Cantelli que $\frac{q_N}{N}$ converge vers zéro presque sûrement. La convergence étroite presque sûre de la mesure spectrale $\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}$ vers la loi du demi-cercle μ_{sc} découle alors de (1.2.1).

Le théorème 1.2.1 est donc établi.

1.3 Quelques remarques

Remarque 1.3.1. *Tout ce qui précède est adaptable au cas Hermitien (au lieu de symétrique).*

Remarque 1.3.2. *Sans la condition d'existence de moment d'ordre 2, on ne peut espérer un résultat de convergence universelle vers la demi-cercle.*

Remarque 1.3.3. *Si les variables $(\frac{W_{ii}}{\sqrt{2}}, W_{uv}, 1 \leq i, 1 \leq u < v)$ dans le cas symétrique ou $(\frac{W_{ii}}{\sqrt{2}}, \Re(W_{uv}), \Im(W_{uv}), 1 \leq i, 1 \leq u < v)$ dans le cas Hermitien, sont i.i.d et si leur loi μ vérifie une inégalité de concentration, alors on peut démontrer la convergence presque sûre avec beaucoup moins d'effort (i.e sans avoir à effectuer l'étude des variances)! C'est le cas par exemple si μ satisfait une inégalité de Poincaré.*

En effet, lorsqu'on a établi (1.1.3), on peut, en utilisant le Théorème de Weierstrass de la même façon qu'à la fin du paragraphe 1.1.1, en déduire que pour toute fonction f continue bornée sur \mathbb{R} ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \mathbb{E} \left(\int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) \right) - \int f(x) d\mu_{sc}(x) \right| = 0.$$

Maintenant, si les variables $(\frac{W_{ii}}{\sqrt{2}}, W_{ij}, 1 \leq i < j \leq N)$ sont i.i.d et si leur loi vérifie une inégalité de Poincaré, d'après le Lemme 1.5.8 et le corollaire 1.5.1, nous avons pour toute fonction Lipschitzienne f de constante de Lipschitz $C_{\mathcal{L}}$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) - \mathbb{E} \left(\int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) \right) \right| > \epsilon \right) \leq K_1 \exp \left(- \frac{\epsilon N^{\frac{1}{2}}}{K_2 \sqrt{C_{PI}} \sqrt{2} C_{\mathcal{L}}} \right).$$

On en déduit alors (en utilisant le Lemme de Borell-Cantelli), que pour f Lipschitzienne bornée

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int f(x) d\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}(x) = \int f(x) d\mu_{sc}(x), \quad \text{presque sûrement.} \quad (1.3.1)$$

Les topologies étroite et faible coïncident sur l'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbb{R} . $C_0(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, la convergence étroite d'une suite $(\mu_n)_n$ de mesures de probabilité sur \mathbb{R} vers une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} peut donc être caractérisée par :

$$\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \quad \int f(x) d\mu_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \int f(x) d\mu(x).$$

Or $C_0(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme est séparable. De plus toute fonction de $C_0(\mathbb{R})$ peut être approchée par des fonctions C^1 à support compact donc Lipschitzienne. On en déduit alors aisément de (1.3.1) que presque sûrement $\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}$ converge étroitement vers μ_{sc} .

La remarque 1.3.3 permet aussi dans l'approche par transformée de Cauchy d'obtenir immédiatement que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\frac{1}{N} \text{Tr} \left((zI_N - \frac{W_N}{\sqrt{N}})^{-1} \right) - \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \text{Tr} \left((zI_N - \frac{W_N}{\sqrt{N}})^{-1} \right) \right]$ tend vers zéro presque sûrement puisque $x \mapsto \frac{1}{z-x}$ est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $C_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{|\Im z|^2}$.

Remarque 1.3.4. *Dans le cas non iid, (en travaillant davantage !), on peut en fait obtenir le théorème suivant.*

Théorème 1.3.1. *(Théorème 2.9 [4]) (Admis) Soit W_N une matrice $N \times N$ hermitienne telle que les entrées $\{(W_N)_{ij}, i \leq j\}$ sont indépendantes, centrées, de variance 1, mais peuvent dépendre de N et peuvent avoir des lois différentes. On suppose que les $(W_N)_{ij}, i \leq j, N \in \mathbb{N}$, sont définies sur un même espace de probabilités. Supposons de plus que $\forall \eta > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \mathbb{E} \left(|(W_N)_{ij}|^2 \mathbf{1}_{\{|(W_N)_{ij}| \geq \eta \sqrt{N}\}} \right) = 0.$$

Alors presque sûrement, la mesure spectrale $\mu_{\frac{W_N}{\sqrt{N}}}$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} .

Pour étudier des matrices de Wigner générales, on ne dispose guère de ces deux outils : l'étude des moments ou celle de la transformée de Cauchy. Mais ces méthodes sont puissantes et permettent également d'établir des résultats sur les propriétés locales du spectre.

1.4 Convergence des valeurs propres extrêmes

Théorème 1.4.1. *Soient $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $(W_{ij}, 1 \leq i < j)$ ont même loi symétrique de variance 1,*

admettant un moment d'ordre $4 + \alpha$ pour un certain $\alpha > 0$, et les W_{ii} ont même loi satisfaisant $\mathbb{E}\{(W_{11}^+)^2\} < \infty$. Soit W_N une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$, $1 \leq i \leq j \leq N$. Alors la plus grande valeur propre de W_N converge presque sûrement vers 2 quand $N \rightarrow +\infty$.

Preuve : Soit $0 < \epsilon < 1$. Soit f_ϵ une fonction positive continue bornée à support dans $[2 - \epsilon; 2]$ strictement positive sur $[2 - 3\frac{\epsilon}{4}; 2 - \frac{\epsilon}{4}]$. D'après Théorème 1.2.1, sur un ensemble de probabilité 1, $\forall \epsilon > 0$, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_\epsilon(\lambda_i(\frac{W_N}{\sqrt{N}}))$ converge vers $\int f_\epsilon(x) d\mu_{sc}(x) > 0$. et donc, pour N suffisamment grand, $\lambda_{max}(\frac{W_N}{\sqrt{N}}) \geq 2 - \epsilon$. On peut donc en déduire $\liminf_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{max}(\frac{W_N}{\sqrt{N}}) \geq 2$.

Nous allons maintenant démontrer que presque sûrement,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{max}(\frac{W_N}{\sqrt{N}}) \leq 2.$$

1.4.1 Réduction du problème

Nous allons tout d'abord démontrer que nous pouvons remplacer les éléments diagonaux de la matrice W_N par des zéros. Définissons \tilde{W}_N par $(\tilde{W}_N)_{ij} = (W_N)_{ij}$ si $i \neq j$ et $(\tilde{W}_N)_{ii} = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(\frac{W_N}{\sqrt{N}}) &= \sup_{x, \|x\|=1} \langle \frac{W_N}{\sqrt{N}} x, x \rangle \\ &= \sup_{x, \|x\|=1} \left\{ \sum_{i \neq j} \frac{(W_N)_{ij}}{\sqrt{N}} x_j x_i + \sum_i \frac{(W_N)_{ii}}{\sqrt{N}} x_i^2 \right\} \\ &\leq \sup_{x, \|x\|=1} \left\{ \sum_{i,j} \frac{(\tilde{W}_N)_{ij}}{\sqrt{N}} x_j x_i \right\} + \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} \\ &\leq \lambda_{max}(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}) + \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

où $x^+ = \max(x, 0)$.

Lemma 1.4.1. *Presque sûrement,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_i \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} = 0$$

Lemma 1.4.2. *Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$ alors*

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) < \infty.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|^2) &= \mathbb{E}\left(2 \int_0^{|X|} t dt\right) \\
&= \mathbb{E}\left(2 \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{0 < t \leq |X|} t dt\right) \\
&= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{m-1}{2}}}^{2^{\frac{m}{2}}} \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt \\
&\geq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{m-1}{2}}}^{2^{\frac{m}{2}}} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) t dt + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (2^m - 2^{m-1}) \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{m}{2}}) + 2 \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t dt. \square
\end{aligned}$$

Preuve du Lemme 1.4.1 : Soit $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq 2^m} W_{ii}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq 2^m} W_{ii}^+ < \epsilon 2^{\frac{m}{2}}\right)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \{\mathbb{P}(W_{11}^+ < \epsilon 2^{\frac{m}{2}})\}^{2^m}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \{1 - \mathbb{P}(W_{11}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}})\}^{2^m}\right) \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \mathbb{P}(W_{11}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}})
\end{aligned}$$

(en utilisant le simple fait que pour $0 \leq x \leq 1$, $1 - x^p \leq p(1 - x)$).

D'après la lemme 1.4.2, on a donc pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq 2^m} W_{ii}^+ \geq \epsilon 2^{\frac{m}{2}}\right) < +\infty$ et donc presque sûrement $\lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq i \leq 2^m} \frac{W_{ii}^+}{2^{\frac{m}{2}}} = 0$.

Pour tout $N \geq 1$, soit $m_N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m_N} \leq N \leq 2^{m_N+1}$. En remarquant que

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq N} \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{2} \max_{1 \leq i \leq 2^{m_N+1}} \frac{W_{ii}^+}{2^{\frac{m_N+1}{2}}}$$

on en déduit aisément que presque sûrement $\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq i \leq N} \frac{W_{ii}^+}{\sqrt{N}} = 0$. \square

On a donc presque sûrement $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}\left(\frac{W_N}{\sqrt{N}}\right) \leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}\left(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}\right)$.
Il suffit donc de démontrer que presque sûrement, $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}\left(\frac{\tilde{W}_N}{\sqrt{N}}\right) \leq 2$.

Nous allons maintenant démontrer que nous pouvons tronquer les éléments hors diagonale de la matrice \tilde{W}_N .

Lemma 1.4.3. *Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) < +\infty$, pour un certain $\alpha > 0$. Soit $(\delta_N)_{N \geq 1}$ la suite définie par*

$$\delta_N = \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}.$$

Alors

$$\sum_{m \geq 1} 2^{2m} \mathbb{P}(|X| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}) < +\infty.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|^{4+\alpha}) &= \mathbb{E}\left((4+\alpha) \int_0^{|X|} t^{3+\alpha} dt\right) \\ &= \mathbb{E}\left((4+\alpha) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{0 < t \leq |X|} t^{3+\alpha} dt\right) \\ &= (4+\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{2(m-1)}{4+\alpha}}}^{2^{\frac{2m}{4+\alpha}}} \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt \\ &\geq (4+\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{\frac{2(m-1)}{4+\alpha}}}^{2^{\frac{2m}{4+\alpha}}} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}) t^{3+\alpha} dt + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (2^{2m} - 2^{2(m-1)}) \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}) + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt \\ &= \frac{3}{4} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m} \mathbb{P}(|X| \geq 2^{\frac{2m}{4+\alpha}}) + (4+\alpha) \int_0^1 \mathbb{P}(|X| \geq t) t^{3+\alpha} dt. \end{aligned}$$

La preuve est donc terminée en remarquant que $2^{\frac{2m}{4+\alpha}} = \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}$. \square

Définissons \hat{W}_N en posant pour $i \neq j$, $(\hat{W}_N)_{ij} = (\tilde{W}_N)_{ij} \mathbf{1}_{|(W_N)_{ij}| \leq \delta_N \sqrt{N}}$ où

$$\delta_N = \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}$$

et $(\hat{W}_N)_{ii} = 0$.

D'après Lemme 1.4.3,

$$\sum_{m \geq 1} 2^{2m} \mathbb{P}(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{2}}) < +\infty. \quad (1.4.1)$$

Soit

$$A_k = \{\exists N \geq 2^k, \exists (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, i < j, |(W_N)_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}.$$

On a $A_{k+1} \subset A_k$ donc $\mathbb{P}(\bigcap A_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_k)$. De plus

$$\mathbb{P}\left({}^c \bigcap A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\text{pour } N \text{ grand } \tilde{W}_N = \hat{W}_N\right).$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{N > 2^k} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geq k} \bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}\right) \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_N \sqrt{N}\}\right) \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{2^m < N \leq 2^{m+1}} \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{|W_{ij}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}\}\right) \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq 2^{m+1}} \{|W_{ij}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}\}\right) \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{2(m+1)} \mathbb{P}\left(|W_{12}| > \delta_{2^{m+1}} 2^{m/2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$ puis $\mathbb{P}\left(\text{pour } N \text{ grand } \tilde{W}_N = \hat{W}_N\right) =$

1. La suite de la preuve va donc consister à démontrer que presque sûrement,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{max}(M_N) \leq 2, \quad (1.4.2)$$

où

$$M_N = \frac{\hat{W}_N}{\sqrt{N}}.$$

1.4.2 Méthode des grandes traces

Nous avons pour tout $k \geq 1$ et tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\lambda_{max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) \leq \mathbb{P}(Tr(M_N^{2k}) > 2^{2k}(1 + \epsilon)^{2k}) \leq \frac{1}{2^{2k}(1 + \epsilon)^{2k}} \mathbb{E}(Tr(M_N^{2k})). \quad (1.4.3)$$

En permettant à k de tendre vers l'infini avec N , un choix judicieux de k_N nous donnera

$$\sum_N \frac{1}{2^{2k_N}(1 + \epsilon)^{2k_N}} \mathbb{E}(Tr(M_N^{2k_N})) < +\infty,$$

permettant de conclure par le lemme de Borel-Cantelli que presque sûrement $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{max}(M_N) \leq 2(1+\epsilon)$. (1.4.2) en découlera alors aisément. Il s'agit donc d'estimer $\mathbb{E} \left(Tr(M_N^{2k_N}) \right)$ pour un choix judicieux de puissance k_N tendant vers l'infini avec N . Cette méthode est appelée *Méthode des grandes traces*.

Lemma 1.4.4. *Soit*

$$a_k(N) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} Tr M_N^{2k} \right).$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$, pour N suffisamment grand et tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$ où $\delta_N = \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}} 2^{\frac{\alpha}{2(4+\alpha)}}$,

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l(N) a_{k-l}(N).$$

Preuve :

$$a_k(N) = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{i_1, \dots, i_{2k}} \mathbb{E} \left(\hat{W}_{i_1 i_2} \hat{W}_{i_2 i_3} \cdots \hat{W}_{i_{2k} i_1} \right).$$

Les \hat{W}_{ij} étant indépendantes et symétriques, chaque terme non nul de cette somme est positif puisque chaque \hat{W}_{ij} doit apparaître un nombre pair de fois. En particulier, il existe l dans $\{2, \dots, 2k\}$ telle que $(i_1, i_2) = (i_l, i_{l+1})$ ou $(i_2, i_1) = (i_l, i_{l+1})$ (avec la convention $i_{2k+1} = i_1$). Donc

$$a_k(N) \leq \Sigma_1(k) + \Sigma_2(k),$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k) &= \sum_{l=0}^{2k-2} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2=1}^N \frac{\hat{W}_{i_1 i_2}}{\sqrt{N}} (M_N^l)_{i_2 i_1} \frac{\hat{W}_{i_1 i_2}}{\sqrt{N}} (M_N^{2k-2-l})_{i_2 i_1} \right\}, \\ \Sigma_2(k) &= \sum_{l=0}^{2k-2} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2=1}^N \frac{\hat{W}_{i_1 i_2}}{\sqrt{N}} (M_N^l)_{i_2 i_2} \frac{\hat{W}_{i_2 i_1}}{\sqrt{N}} (M_N^{2k-2-l})_{i_1 i_1} \right\}. \end{aligned}$$

De plus

$$\Sigma_2(k) = \Sigma_{2,1}(k) + \Sigma_{2,2}(k),$$

où $\Sigma_{2,1}(k)$ contient les termes de $\Sigma_2(k)$ où $\hat{W}_{i_1 i_2} = \hat{W}_{i_2 i_1}$ apparaît seulement deux fois et $\Sigma_{2,2}(k)$ contient les termes de $\Sigma_2(k)$ où $\hat{W}_{i_1 i_2} = \hat{W}_{i_2 i_1}$ apparaît au moins quatre fois.

$$\Sigma_1(k) \leq \delta_N^2 \sum_{l=0}^{2k-2} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2=1}^N (M_N^l)_{i_2 i_1} (M_N^{2k-2-l})_{i_2 i_1} \right\} \leq 2k \delta_N^2 a_{k-1}(N).$$

$$\Sigma_{2,1}(k) \leq \sum_{l=0}^{2k-2} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} Tr(M_N^l) \frac{1}{N} Tr(M_N^{2k-2-l}) \right\} \mathbb{E} \left\{ \hat{W}_{12}^2 \right\}.$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \text{Tr}(M_N^l) \frac{1}{N} \text{Tr}(M_N^m) \right\} - \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \text{Tr}(M_N^l) \right\} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \text{Tr}(M_N^m) \right\} \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i_1, \dots, i_l} \sum_{j_1, \dots, j_m} (\mathbb{E} \{ M_{i_1 i_2} \dots M_{i_l i_1} M_{j_1 j_2} \dots M_{j_m j_1} \} - \mathbb{E} \{ M_{i_1 i_2} \dots M_{i_l i_1} \} \mathbb{E} \{ M_{j_1 j_2} \dots M_{j_m j_1} \}) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_m, \\ \exists s \in \{1, \dots, l\}, \\ \exists t \in \{1, \dots, m\}, \\ \{i_s, i_{s+1}\} = \{j_t, j_{t+1}\}}} (\mathbb{E} \{ M_{i_1 i_2} \dots M_{i_l i_1} M_{j_1 j_2} \dots M_{j_m j_1} \} - \mathbb{E} \{ M_{i_1 i_2} \dots M_{i_l i_1} \} \mathbb{E} \{ M_{j_1 j_2} \dots M_{j_m j_1} \}) \\
&\leq \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^l \sum_{t=1}^m \sum_{i_s, i_{s+1}} \sum_{i_1, j_1} \mathbb{E} \{ (M^{s-1})_{i_1 i_s} M_{i_s i_{s+1}} (M^{l-s})_{i_{s+1} i_1} (M^{t-1})_{j_1 i_s} M_{i_s i_{s+1}} (M^{m-t})_{i_{s+1} j_1} \} \\
&\quad + \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^l \sum_{t=1}^m \sum_{i_s, i_{s+1}} \sum_{i_1, j_1} \mathbb{E} \{ (M^{s-1})_{i_1 i_s} M_{i_s i_{s+1}} (M^{l-s})_{i_{s+1} i_1} (M^{t-1})_{j_1 i_{s+1}} M_{i_{s+1} i_s} (M^{m-t})_{i_s j_1} \} \\
&\leq \frac{2}{N^2} \sum_{s=1}^l \sum_{t=1}^m \sum_{i_s, i_{s+1}} \mathbb{E} \{ (M^{l-1})_{i_{s+1} i_s} M_{i_s i_{s+1}}^2 (M^{m-1})_{i_{s+1} i_s} \} \\
&\leq \frac{2lm}{N} \delta_N^2 a_{\frac{l+m-2}{2}}(N)
\end{aligned}$$

Donc il existe une certaine constante $C > 0$ telle que

$$\Sigma_{2,1}(k) \leq \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N) a_{k-1-l}(N) + Ck^3 \delta_N^2 a_{k-2}(N) a_1(N),$$

où l'on a majoré $\mathbb{E} \left\{ \frac{\hat{W}_{12}^2}{N} \right\}$ par 1 pour le premier terme et utilisé le fait pour le second terme que $a_1(N) = \frac{N(N-1)}{N^2} \mathbb{E} \left\{ \hat{W}_{12}^2 \right\}$ et donc $\mathbb{E} \left\{ \hat{W}_{12}^2 \right\} \leq 2a_1(N)$ pour $N \geq 2$.

$\Sigma_{2,2}(k)$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=2k-4} \frac{1}{N^3} \sum_{i_1, i_2} \mathbb{E} \left\{ \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_1})_{i_2 i_1} \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_2})_{i_2 i_1} \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_3})_{i_2 i_1} \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_4})_{i_2 i_1} \right\} \\
&\quad + \mathbb{E} \left\{ \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_1})_{i_2 i_1} \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_2})_{i_2 i_1} \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_3})_{i_2 i_2} \hat{W}_{i_2 i_1}(M^{l_4})_{i_1 i_1} \right\} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \mathbb{E} \left\{ \hat{W}_{i_1 i_2}(M^{l_1})_{i_2 i_1} \hat{W}_{i_2 i_1}(M^{l_2})_{i_1 i_2} \hat{W}_{i_2 i_1}(M^{l_3})_{i_1 i_2} \hat{W}_{i_2 i_1}(M^{l_4})_{i_1 i_1} \right\}
\end{aligned}$$

Chaque terme dans la somme $\sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=2k-4}$ est majoré par $\delta_N^2 a_{(l_1+l_2+l_3+l_4+2)/2}(N) = \delta_N^2 a_{k-1}(N)$. Donc il existe une certaine constante $C > 0$ telle que

$$\Sigma_{2,2}(k) \leq Ck^3 \delta_N^2 a_{k-1}(N).$$

Finalement il existe une certaine constante $C > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$ et tout $N \geq 2$,

$$a_k(N) \leq 2k\delta_N^2 a_{k-1}(N) + \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N)a_{k-1-l}(N) + Ck^3\delta_N^2 a_{k-2}(N)a_1(N) + Ck^3\delta_N^2 a_{k-1}(N).$$

Pour $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$, on obtient

$$\begin{aligned} a_k(N) &\leq 2\delta_N^{2-\frac{1}{3}} a_{k-1}(N) + \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N)a_{k-1-l}(N) + C\delta_N a_{k-2}(N)a_1(N) + C\delta_N a_{k-1}(N) \\ &\leq \left(1 + 2\delta_N^{\frac{5}{3}} + 2C\delta_N\right) \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N)a_{k-1-l}(N). \end{aligned}$$

Puisque δ_N tend vers zéro, on obtient donc que pour tout $\epsilon > 0$, pour N suffisamment grand et tout $k \leq \delta_N^{-\frac{1}{3}}$, $a_k(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^{k-1} a_l(N)a_{k-1-l}(N)$. \square

Preuve de (1.4.2) : Soit $\epsilon > 0$. Soit S une variable aléatoire suivant la loi du demi-cercle de variance 1 :

$$d\mu_1(t) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-2;2]}(t) \sqrt{4-t^2} dt.$$

Soit $X_\epsilon = \sqrt{1+\epsilon}S$. X suit la loi du demi-cercle de variance $1 + \epsilon$:

$$d\mu_{\sqrt{1+\epsilon}}(t) = \frac{1}{2\pi(1+\epsilon)} 1_{[-2\sqrt{1+\epsilon}; 2\sqrt{1+\epsilon}]}(t) \sqrt{4(1+\epsilon)-t^2} dt.$$

En utilisant la relation de récurrence (1.5.1) satisfaite par les moments pairs de S , on déduit aisément que la suite $\{a_k^*\}_{k \geq 0}$ des moments pairs de X_ϵ (i.e $a_k^* = \mathbb{E}(X_\epsilon^{2k})$) satisfait

$$a_0^* = 1,$$

$$a_{k+1}^* = (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l^* a_{k-l}^*.$$

On a

$$a_0^* = 1 = a_0(N)$$

et

$$a_1(N) \leq 1 < (1 + \epsilon) = a_1^*.$$

D'après Lemme 1.4.4, il existe $N(\epsilon)$ tel que $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l(N)a_{k-l}(N).$$

Soit $1 \leq k \leq \delta_N^{-1/3}$. Supposons que $\forall N \geq N(\epsilon)$ pour tout $p \leq k$, $a_p(N) \leq a_p^*$. Alors

$$a_{k+1}(N) \leq (1 + \epsilon) \sum_{l=0}^k a_l^* a_{k-l}^* = a_{k+1}^*.$$

On obtient donc par récurrence que $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$a_k(N) \leq a_k^*.$$

Or $a_k^* = \int \frac{1}{2\pi(1+\epsilon)} 1_{[-2\sqrt{1+\epsilon}; 2\sqrt{1+\epsilon}]}(t) t^{2k} \sqrt{4(1+\epsilon) - t^2} dt \leq (2\sqrt{1+\epsilon})^{2k}$. Donc $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$a_k(N) \leq 2^{2k} (1 + \epsilon)^k.$$

Nous obtenons donc d'après (1.4.3), $\forall N \geq N(\epsilon)$, pour tout $k \leq \delta_N^{-1/3}$,

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) \leq \frac{N}{2^{2k} (1 + \epsilon)^{2k}} 2^{2k} (1 + \epsilon)^k \leq N(1 + \epsilon)^{-k}.$$

Choisissons k_N tel que $k_N / \log N \rightarrow +\infty$ et $\forall N \geq N(\epsilon)$, $k_N \leq \delta_N^{-1/3}$. Alors pour N grand, $N(1 + \epsilon)^{-k} \leq \exp(-Ck_N)$, et

$$\sum_N \mathbb{P}(\lambda_{\max}(M_N) > 2(1 + \epsilon)) < +\infty. \square$$

On peut en fait établir la condition nécessaire et suffisante suivante pour que les valeurs propres extrêmes convergent vers les bords du support de la demi-cercle.

Théorème 1.4.2. *Soient $(W_{ij}, 1 \leq i \leq j)$ des variables aléatoires indépendantes telles que $(W_{ij}, 1 \leq i < j)$ sont complexes et ont même loi, et les W_{ii} sont réelles et ont même loi. Soit W_N une matrice $N \times N$ hermitienne telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq N$. Alors, quand $N \rightarrow +\infty$, la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre de $\frac{W_N}{\sqrt{N}}$ convergent presque sûrement respectivement vers c_1 et c_2 ssi les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. $\mathbb{E}\{(W_{11})^2\} < \infty$.
2. $\mathbb{E}\{W_{12}\} = 0$.
3. $\mathbb{E}\{|W_{12}|^2\} = \sigma^2$.
4. $\mathbb{E}\{|W_{12}|^4\} < \infty$.
5. $c_1 = 2\sigma$ et $c_2 = -2\sigma$.

1.5 Appendice

1.5.1 Nombres de Catalan

Proposition 1.5.1. *Les nombres de Catalan $C_0 = 1$ et $C_k = \frac{1}{k}C_{2k}^{k-1}$, sont caractérisés par*

$$C_0 = 1 \text{ et } \forall k \geq 1, C_k = \sum_{l=1}^k C_{l-1}C_{k-l}. \quad (1.5.1)$$

Preuve :

$$(1 - 4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} x^{k+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1} \end{aligned}$$

On remarque que, posant $g(x) := \frac{1}{2}(1 - (1 - 4x)^{\frac{1}{2}})$,

$$g^2(x) = g(x) - x.$$

$$\implies \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_p C_l x^{p+1} x^{l+1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1} - x$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^{k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k C_{k-l} C_l x^{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1-l} C_l x^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k C_{k-l} C_{l-1} x^{k+1}. \end{aligned}$$

$$\implies C_k = \sum_{l=1}^k C_{l-1} C_{k-l}.$$

Les nombres de Catalan comptent de nombreux objets combinatoires différents.

1.5.2 Partitions non-croisées

Une partition d'un ensemble fini M est une famille de parties disjointes de M de réunion égale à M .

Definition 1.5.1. Soit M un ensemble fini ordonné et $\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$ une partition de M . On note pour i et j dans M :

$$i \overset{\pi}{\sim} j \iff i \text{ et } j \text{ appartiennent au même bloc de } \pi.$$

La partition π est dite *Non Croisée* et on note $\pi \in NC(M)$ lorsque, si $i, j, k, l \in M$ sont tels que $i < j < k < l$, alors on ne peut avoir $i \overset{\pi}{\sim} k$ et $j \overset{\pi}{\sim} l$ que si $i \overset{\pi}{\sim} j \overset{\pi}{\sim} k \overset{\pi}{\sim} l$.

Lorsque $M = \{1, \dots, n\}$, on note plus simplement $NC(M) = NC(n)$.

En fait, si $\text{card } M = n$, $NC(M)$ est naturellement en bijection avec $NC(n)$, c'est pourquoi on ne parlera que de $NC(n)$.

On peut représenter graphiquement une partition non croisée par une ligne de n points que l'on joint par un pont lorsqu'ils appartiennent au même bloc, ou encore par un cercle sur lequel on place n points équirépartis et l'on joint les points d'un même bloc par une ligne polygonale. Les ponts ou les lignes polygonales ne doivent pas se croiser.

Exemple : $\{\{1, 10\}, \{2, 5, 9\}, \{3, 4\}, \{6\}, \{7, 8\}\} \in NC(10)$.

Lemma 1.5.1. Une partition π d'un ensemble fini ordonné M est non croisée si et seulement si au moins un bloc V de π est soit un singleton soit formé d'éléments consécutifs dans M et la partition restante $\pi \setminus V$ est non croisée.

\Leftarrow trivial.

Preuve de \implies par récurrence sur $\text{card } M$.

Si $\text{card } M = 1$, le résultat est trivial.

Supposons le résultat vrai pour tout ensemble ordonné de cardinal inférieur ou égal à $k - 1 \geq 1$. Soit une partition π d'un ensemble ordonné M de cardinal k . Si π n'a qu'un bloc ou a un singleton alors la propriété est trivialement vérifiée. Supposons que π ait au moins deux blocs et n'ait pas de singleton. Soit V_1 le bloc contenant le plus petit élément de M . S'il est formé d'éléments consécutifs de M , la propriété est vérifiée. Sinon, on le supprime. Les autres blocs constituent une partition π' trivialement non croisée d'un ensemble $M' \subset M$ de cardinal inférieur ou égal à $k - 1$. Il existe par hypothèse de récurrence au moins un bloc V de π' qui soit formé d'éléments consécutifs dans M' . Ce bloc V est un bloc de π nécessairement formé d'éléments consécutifs de M . Ceci termine donc la preuve par récurrence.

Désignons par $NC_2(2q)$ l'ensemble des partitions non croisées de $\{1, \dots, 2q\}$ formées de paires.

Lemma 1.5.2.

$$\text{Card } NC_2(2q) = C_q.$$

Preuve : Soit s_k le nombre de partitions par paires non croisées de $\{1, \dots, 2k\}$. L'élément 1 doit être associé à un élément pair $2l$. Le nombre de partitions non croisées par paires contenant $\{1, 2l\}$ est $s_{l-1}s_{k-l}$. Ainsi, en posant $s_0 = 1$, $s_k = \sum_{l=1}^k s_{l-1}s_{k-l}$. Ceci caractérisant les nombres de Catalan, on en déduit $s_k = C_k, \forall k$.

1.5.3 Loi du demi-cercle

La loi du demi-cercle appelée aussi loi semi-circulaire ou encore loi de Wigner est la loi suivante

$$d\mu_{sc}(t) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-2;2]} \sqrt{4-t^2} dt.$$

Proposition 1.5.2. - Si n est impair $\frac{1}{2\pi} \int_{[-2;2]} t^n \sqrt{4-t^2} dt = 0$ (évident)

- $\frac{1}{2\pi} \int_{[-2;2]} \sqrt{4-t^2} dt = 1$
- Si $n = 2k$ avec $k \geq 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-2;2]} t^{2k} \sqrt{4-t^2} dt = \frac{1}{k} C_{2k}^{k-1} = C_k.$$

(C_k nombres de Catalan).

Preuve :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-2;2]} t^{2k} \sqrt{4-t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^2 t^{2k} \sqrt{4-t^2} dt; \text{ posons } t = 2\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{[-2;2]} t^{2k} \sqrt{4-t^2} dt &= \frac{4^{k+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2k} (\sin\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{4^{k+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2k} (1 - (\cos\theta)^2) d\theta \\ &= \frac{4^{k+1}}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2k} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2k+2} d\theta \right\} \end{aligned}$$

Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p} d\theta$:

$$\begin{aligned} (\cos\theta)^{2p} &= \frac{1}{2^{2p}} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2p} \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{l=0}^{2p} C_{2p}^l e^{il\theta} e^{-i(2p-l)\theta} \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{l=0}^{2p} C_{2p}^l e^{-2i(p-l)\theta} \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{l=1}^p C_{2p}^{p-l} (e^{2il\theta} + e^{-2il\theta}) + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p \\ &= \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{l=1}^p C_{2p}^{p-l} \cos 2l\theta + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p} d\theta &= \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{l=1}^p C_{2p}^{p-l} \left[\frac{\sin 2l\theta}{2l} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2^{2p+1}} C_{2p}^p = \frac{\pi}{2^{2p+1}} C_{2p}^p. \\
\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^2 t^{2k} \sqrt{4-t^2} dt &= 4^{k+1} \left\{ \frac{1}{2^{2k+1}} C_{2k}^k - \frac{1}{2^{2(k+1)+1}} C_{2(k+1)}^{k+1} \right\} \\
&= 2C_{2k}^k - \frac{1}{2} C_{2(k+1)}^{k+1} \\
&= \frac{1}{k} C_{2k}^{k-1}.
\end{aligned}$$

1.5.4 Quelques outils analytiques

a) Transformée de Cauchy

Definition 1.5.2. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . La transformée de Cauchy de μ est définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$g_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z-x}.$$

Voici quelques propriétés fondamentales de la transformée de Cauchy. On réfère à [3] pour les démonstrations des propositions suivantes.

Proposition 1.5.3. Soit g la transformée de Cauchy d'une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} . Alors

- i) g est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$.
- ii) $\Im z \Im g_\mu(z) < 0$ pour $\Im z \neq 0$.
- iii) $\lim_{y \rightarrow +\infty} iy g(iy) = 1$.
- v) Si I est un intervalle de \mathbb{R} dont les extrémités ne sont pas chargées par μ alors

$$\mu(I) = - \lim_{\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_I \Im g(x + i\epsilon) dx.$$

(cette formule est connue sous le nom de "formule d'inversion de Frobenius-Perron".)

v)

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, |g_\mu(z)| \leq \frac{1}{|\Im z|}.$$

Proposition 1.5.4. La transformation de Cauchy est une bijection de l'ensemble des mesures de probabilités sur \mathbb{R} sur l'ensemble des fonctions g vérifiant i), ii) et iii).

Proposition 1.5.5. Soit μ_n une suite de mesures de probabilités sur \mathbb{R} . On note g_n la transformée de Cauchy de μ_n : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$g_n(z) = \int \frac{d\mu_n(t)}{z-t}.$$

On suppose que $\forall z$ tel que $\Im z > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(z) = g(z)$$

et que g vérifie

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} iyg(iy) = 1.$$

Alors la suite μ_n converge étroitement vers une mesure de probabilité μ dont g est la transformée de Cauchy.

b) Théorème de Vitali

Théorème 1.5.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$, un ouvert connexe. Soient $(z_p)_{p \geq 0}$ une suite de U ayant un point d'accumulation dans U et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée dans l'ensemble des fonctions analytiques muni de la convergence uniforme sur tout compact de U et telles que $(f_n(z_p))_{n \geq 0}$ soient convergentes pour tout $p \in \mathbb{N}$. Alors f_n est une suite uniformément convergente sur tout compact de U .

1.5.5 Quelques outils algébriques

Lemma 1.5.3. Soit f une fonction $C_{\mathcal{L}}$ -Lipschitz sur \mathbb{R} . Alors son extension sur les matrices $N \times N$ Hermitiennes est $C_{\mathcal{L}}$ -Lipschitz par rapport à la norme $\|M\|_2 = \{\text{Tr}(MM^*)\}^{\frac{1}{2}}$.

Preuve : Soient A et B des matrices $N \times N$ Hermitiennes. Considérons leurs décompositions spectrales :

$$A = \sum_i \lambda_i(A) P_i^{(A)}$$

et

$$B = \sum_i \lambda_i(B) P_i^{(B)},$$

On a

$$\begin{aligned} \|f(B) - f(A)\|_2^2 &= \text{Tr} \left(\sum_i f(\lambda_i(A)) P_i^{(A)} - \sum_i f(\lambda_i(B)) P_i^{(B)} \right)^2 \\ &= \text{Tr} \left(\sum_i f(\lambda_i(A))^2 P_i^{(A)} + \sum_j f(\lambda_j(B))^2 P_j^{(B)} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i,j} f(\lambda_i(A)) f(\lambda_j(B)) \text{Tr}(P_i^{(A)} P_j^{(B)}) \\ &= \text{Tr} \left(\sum_{i,j} (f(\lambda_i(A))^2 P_i^{(A)} P_j^{(B)} + \sum_{i,j} (f(\lambda_j(B))^2 P_i^{(A)} P_j^{(B)} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i,j} f(\lambda_i(A)) f(\lambda_j(B)) \text{Tr}(P_i^{(A)} P_j^{(B)}) \\ &= \sum_{i,j} (f(\lambda_i(A)) - f(\lambda_j(B)))^2 \text{Tr}(P_i^{(A)} P_j^{(B)}). \end{aligned}$$

Puisque $Tr(P_i^{(A)}P_j^{(B)}) \geq 0$, on en déduit que

$$\|f(B) - f(A)\|_2^2 \leq \sum_{i,j} C_{\mathcal{L}}^2 (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 Tr(P_i^{(A)}P_j^{(B)}) = C_{\mathcal{L}}^2 \|B - A\|_2^2. \square$$

Corollaire 1.5.1. *Soit f une fonction $C_{\mathcal{L}}$ -Lipschitz sur \mathbb{R} . Alors $X \mapsto Tr f(X)$ sur les matrices $N \times N$ Hermitiennes est $\sqrt{N}C_{\mathcal{L}}$ -Lipschitz par rapport à la norme $\|M\|_2 = \{Tr(MM^*)\}^{\frac{1}{2}}$.*

Preuve : Soient A et B des matrices $N \times N$ Hermitiennes. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} |Tr f(B) - Tr f(A)| &\leq \sqrt{N}(Tr(f(B) - f(A))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{N}\|f(B) - f(A)\|_2 \\ &\leq \sqrt{N}C_{\mathcal{L}}\|B - A\|_2. \square \end{aligned}$$

Théorème 1.5.2. *Théorème 11.42 [4] Pour toute matrice A , $N \times N$ Hermitienne, désignons par $\lambda_i, i = 1, \dots, N$ ses valeurs propres et définissons*

$$F^A(x) = \frac{1}{N} \text{card}\{\lambda_i, i = 1, \dots, N, \lambda_i \leq x\}.$$

Alors pour toutes matrices A et B , $N \times N$ Hermitiennes,

$$\sup_x |F^A(x) - F^B(x)| \leq \frac{1}{N} \text{rang}(A - B).$$

Théorème 1.5.3. *[Theorème 11.4 [4]] Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ une matrice $N \times N$ et A_k la matrice de taille $N - 1 \times N - 1$ obtenue en enlevant la k -ième ligne et la k -ième colonne de A . Soit β_k le vecteur obtenu en supprimant la k -ième coordonnée du k -ième vecteur colonne de A . Soit α_k le vecteur obtenu en supprimant la k -ième coordonnée du k -ième vecteur ligne de A . Si A et A_k sont inversibles alors*

$$(a_{kk} - {}^t \alpha_k A_k^{-1} \beta_k) \neq 0 \quad (1.5.2)$$

et

$$(A^{-1})_{kk} = \frac{1}{a_{kk} - {}^t \alpha_k A_k^{-1} \beta_k}. \quad (1.5.3)$$

Preuve : Puisque

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}A,$$

nous avons

$$(A^{-1})_{kk} = \frac{1}{\det A} \det A_k. \quad (1.5.4)$$

Soit M une matrice carrée inversible. En remarquant que

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CM^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & B \\ 0 & D - CM^{-1}B \end{pmatrix},$$

on obtient aisément que

$$\det \begin{pmatrix} M & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det M \det(D - CM^{-1}B).$$

On a donc

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_k & \beta_k \\ {}^t\alpha_k & a_{kk} \end{pmatrix} \quad (1.5.5)$$

$$= \det A_k(a_{kk} - {}^t\alpha_k A_k^{-1}\beta_k). \quad (1.5.6)$$

$\det A \neq 0 \implies (a_{kk} - {}^t\alpha_k A_k^{-1}\beta_k) \neq 0$. De plus (1.5.4) et (1.5.6) entraînent (1.5.3).

Lemma 1.5.4. *Si A et B sont deux matrices qui commutent telles que $A^2 + B^2$ est inversible alors $A + iB$ est inversible et*

$$(A + iB)^{-1} = (A - iB)(A^2 + B^2)^{-1}.$$

Se vérifie trivialement.

Lemma 1.5.5. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ une matrice $N \times N$ et A_k la matrice de taille $(N-1) \times (N-1)$ obtenue en enlevant la k -ième ligne et la k -ième colonne de A . Soit β_k le vecteur obtenu en supprimant la k -ième coordonnée du k -ième vecteur colonne de A . Soit α_k le vecteur obtenu en supprimant la k -ième coordonnée du k -ième vecteur ligne de A . Si A et A_k sont inversibles, alors*

$$\text{Tr}A^{-1} - \text{Tr}A_k^{-1} = \frac{1 + {}^t\alpha_k A_k^{-2}\beta_k}{a_{kk} - {}^t\alpha_k A_k^{-1}\beta_k}.$$

Preuve : Soit \tilde{A} la matrice obtenue en déplaçant la k -ième ligne de A en dernière ligne puis la k -ième colonne en dernière colonne. On a $\text{Tr}A^{-1} = \text{Tr}\tilde{A}^{-1}$. D'autre part A_k correspond au coin supérieur gauche de \tilde{A} . Il suffit donc de démontrer que si

$$A = \begin{pmatrix} \Sigma & V_1 \\ {}^tV_2 & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \Sigma \text{ inversible}$$

alors

$$\text{Tr}A^{-1} - \text{Tr}\Sigma^{-1} = \frac{1 + {}^tV_2 \Sigma^{-2} V_1}{a - {}^tV_2 \Sigma^{-1} V_1}. \quad (1.5.7)$$

(Par (1.5.2), on sait que $a - {}^tV_2 \Sigma^{-1} V_1 \neq 0$.) Or on vérifie aisément que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a - {}^tV_2 \Sigma^{-1} V_1} \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} V_1 {}^tV_2 \Sigma^{-1} & -\Sigma^{-1} V_1 \\ -{}^tV_2 \Sigma^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

et (1.5.7) s'en déduit trivialement.

Lemma 1.5.6. *Soit A une matrice $N \times N$ symétrique et A_k la matrice de taille $N - 1 \times N - 1$ obtenue en enlevant la k -ième ligne et la k -ième colonne de A . Alors, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$|\text{Tr}((zI_N - A)^{-1}) - \text{Tr}((zI_{N-1} - A_k)^{-1})| \leq \frac{1}{|\Im z|}. \quad (1.5.8)$$

Preuve : D'après Lemme 1.5.5,

$$|\text{Tr}((zI_N - A)^{-1}) - \text{Tr}((zI_{N-1} - A_k)^{-1})| = \frac{1 + {}^t\alpha_k(zI_{N-1} - A_k)^{-2}\alpha_k}{z - a_{kk} - {}^t\alpha_k(zI_{N-1} - A_k)^{-1}\alpha_k},$$

où α_k est le vecteur obtenu en supprimant la k -ième coordonnée du k -ième vecteur colonne de A . On a, en utilisant Lemme 1.5.4,

$$\Im(z - {}^t\alpha_k(zI_{N-1} - A_k)^{-1}\alpha_k) = \Im z \left\{ 1 + {}^t\alpha_k [(\Re z I_{N-1} - A_k)^2 + |\Im z|^2 I_{N-1}]^{-1} \alpha_k \right\}.$$

D'autre part si

$$A_k = {}^t O \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) O$$

avec O orthogonale et si l'on pose

$$O\alpha_k = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} |1 + {}^t\alpha_k(zI_{N-1} - A_k)^{-2}\alpha_k| &= \left| 1 + \sum_{l=1}^{N-1} |\beta_l|^2 (z - \lambda_l)^{-2} \right| \\ &\leq 1 + \sum_{l=1}^{N-1} |\beta_l|^2 \{(\Re z - \lambda_l)^2 + |\Im z|^2\}^{-1} \\ &= 1 + {}^t\alpha_k \{(\Re z I_{N-1} - A_k)^2 + |\Im z|^2 I_{N-1}\}^{-1} \alpha_k. \end{aligned}$$

(1.5.8) en découle aisément. \square

Proposition 1.5.6. *Soit $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $N \times N$ à entrées complexes muni de la norme opérateur*

$$\|M\| = \sup_{\|x\|_2=1} |Mx|.$$

On a

- (i) $|M_{ij}| \leq \|M\|$.
- (ii) $|\text{Tr} M_1 M_2| \leq (\text{Tr} M_1 M_1^*)^{\frac{1}{2}} (\text{Tr} M_2 M_2^*)^{\frac{1}{2}}$.
- (iii) $|\text{Tr} M| \leq N \|M\|$.

– (iv) Pour toute matrice réelle symétrique ou Hermitienne M , sa résolvante

$$G(z) = (zI_N - M)^{-1}$$

est définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et vérifie

$$\|G(z)\| \leq |\Im z|^{-1}, \quad |G_{ij}(z)| \leq |\Im z|^{-1}.$$

– (v) Si M_1 et M_2 sont deux matrices réelles symétriques ou Hermitiennes, et G_1 et G_2 leurs résolvantes alors

$$G_2(z) - G_1(z) = G_1(z)(M_2 - M_1)G_2(z).$$

1.5.6 Quelques outils probabilistes

a) Inégalité de Bernstein

Proposition 1.5.7. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et uniformément bornée par b . Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \epsilon) \leq 2 \exp(-\epsilon^2/[2(m_n^2 + b\epsilon)])$$

où $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $m_n^2 = \mathbb{E}(S_n^2)$.

b) Inégalité pour certaines formes quadratiques

Proposition 1.5.8. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ une matrice déterministe $N \times N$ et

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^N à entrées indépendantes telles que

$\mathbb{E}(y_i) = 0$, $\mathbb{E}(|y_i|^2) = 1$, $\mathbb{E}(|y_i|^4) \leq \nu_4$. Alors

$$\mathbb{E}(|{}^t Y B Y - \text{Tr} B|^2) \leq C \text{Tr} B^* B.$$

Preuve :

$$\mathbb{E}(|{}^t Y B Y - \text{Tr} B|^2)$$

$$= \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i,j} y_i b_{ij} y_j - \sum_i b_{ii} \right|^2 \right) = \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^N \left\{ b_{ii}(y_i^2 - 1) + y_i \left[\sum_{j=1}^{i-1} y_j (b_{ij} + b_{ji}) \right] \right\} \right|^2 \right).$$

Si $i \neq i'$,

$$\mathbb{E} \left(\left\{ b_{ii}(y_i^2 - 1) + y_i \left[\sum_{j=1}^{i-1} y_j (b_{ij} + b_{ji}) \right] \right\} \left\{ \overline{b_{i'i'}}(y_{i'}^2 - 1) + y_{i'} \left[\sum_{j=1}^{i'-1} y_j (\overline{b_{i'j}} + \overline{b_{ji'}}) \right] \right\} \right) = 0$$

car $\forall p$, y_p est indépendant de $\{y_l, l < p\}$, $\mathbb{E}(y_p^2 - 1) = 0$ et $\mathbb{E}(y_p) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|{}^tYBY - \text{Tr}B|^2) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left(\left| b_{ii}(y_i^2 - 1) + y_i \left[\sum_{j=1}^{i-1} y_j(b_{ij} + b_{ji}) \right] \right|^2 \right) \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^N |b_{ii}|^2 \nu_4 + 2 \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^{i-1} y_j(b_{ij} + b_{ji}) \right|^2 \right) \\
&\leq 2\nu_4 \sum_{i=1}^N |b_{ii}|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij} + b_{ji}|^2 \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^N |b_{ii}|^2 + \sum_{i \neq j} |b_{ij}|^2 \right) \\
&\leq C \text{Tr}B^*B. \square
\end{aligned}$$

c) Inégalités de Burkholder (Lemme 2.11 [4] et Théorème 5 [13])

Lemma 1.5.7. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une filtration $\{\mathcal{F}_k\}_k$. Soit $\{X_k\}$ la différence de martingale définie par $X_k = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{k-1})$. Alors, pour tout $p > 1$,

$$\mathbb{E} \left| \sum X_k \right|^p \leq K_p \mathbb{E} \left(\sum |X_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Remarque 1.5.1. Si pour tout $k = 1, \dots, N$, $Y_k \in \mathcal{F}_k$ et $\mathbb{E}(Y_k | \mathcal{F}_{k-1}) = 0$, alors $Y_k = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{k-1})$ où $X = \sum_{l=1}^N Y_l$.

d) Inégalité de Poincaré et inégalités de concentration

Definition 1.5.3. Une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} satisfait l'inégalité de Poincaré de constante C_{PI} si pour toute fonction \mathcal{C}^1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que f et f' sont dans $L^2(\mu)$,

$$\mathbf{V}(f) \leq C_{PI} \int |f'|^2 d\mu,$$

avec $\mathbf{V}(f) = \int |f - \int f d\mu|^2 d\mu$.

[5] fournit une caractérisation des mesures sur \mathbb{R} qui satisfont une inégalité de Poincaré. Par exemple, les mesures de la forme $\mu(dx) = C \exp(-|x|^\alpha) dx$ avec $\alpha \geq 1$, satisfont une inégalité de Poincaré.

Une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} satisfaisant une inégalité de Poincaré a des moments de tout ordre (cf. Corollaire 3.2 et Proposition 1.10 dans [11]).

Remarque 1.5.2. Si la loi d'une variable aléatoire X satisfait une inégalité de Poincaré de constante C_{PI} alors, pour toute constante $\alpha \neq 0$, la loi de αX satisfait l'inégalité de Poincaré de constante $\alpha^2 C_{PI}$.

Si une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} satisfait l'inégalité de Poincaré de constante

C_{PI} alors la mesure produit $\mu^{\otimes M}$ sur \mathbb{R}^M satisfait l'inégalité de Poincaré de constante C_{PI} : pour toute fonction différentiable F telle que F et son gradient ∇F sont dans $L^2(\mu^{\otimes M})$,

$$\mathbf{V}(F) \leq C_{PI} \int \|\nabla F\|_2^2 d\mu^{\otimes M}$$

avec $\mathbf{V}(F) = \int |F - \int F d\mu^{\otimes M}|^2 d\mu^{\otimes M}$ (cf Theorem 2.5 in [1]).

Une conséquence importante de l'inégalité de Poincaré est le résultat de concentration suivant.

Lemma 1.5.8. *Lemma 4.4.3 et Exercise 4.4.5 in [2] où Chapter 3 in [11]. Soit \mathbb{P} une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^M qui satisfait une inégalité de Poincaré de constante C_{PI} . Alors il existe $K_1 > 0$ and $K_2 > 0$ tels que, pour toute fonction Lipschitzienne F sur \mathbb{R}^M de constante de Lipschitz $|F|_{Lip}$,*

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|F - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(F)| > \epsilon) \leq K_1 \exp\left(-\frac{\epsilon}{K_2 \sqrt{C_{PI}} |F|_{Lip}}\right).$$

Chapitre 2

Matrices de covariance empirique

En statistique multivariée, (mais aussi en télécommunications sans fil, en finance...) la connaissance des propriétés spectrales des *matrices de covariance empirique* est particulièrement intéressante (notamment pour établir de nombreux tests statistiques). Ce chapitre présente sans démonstration des résultats désormais classiques concernant ces modèles matriciels.

Soient X_1, \dots, X_p , p vecteurs aléatoires dans \mathbb{C}^N , indépendants, identiquement distribués suivant une loi de matrice de covariance égale à I_N . Soit Σ une matrice $N \times N$ Hermitienne positive déterministe. Soit pour $i = 1, \dots, p$, $Y_i = \Sigma^{\frac{1}{2}} X_i$. Y_1, \dots, Y_p sont p vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^N , indépendants, identiquement distribués suivant une loi de matrice de covariance Σ . Soit

$$M_N = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p Y_i Y_i^*.$$

Posons $B = (X_1, \dots, X_p)$, on a alors

$$M_N = \frac{1}{p} \Sigma^{\frac{1}{2}} B B^* \Sigma^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque $\Sigma = \sigma^2 I_N$, M_N est une *matrice de Wishart*. Lorsque $\Sigma \neq \sigma^2 I_N$, on dit que M_N est une *matrice de Wishart non-blanche*.

2.1 Matrices de Wishart

Lorsque les X_i ont des coordonnées i.i.d, on peut aussi formuler la définition de la manière suivante.

Definition 2.1.1. Soit B_N une matrice $N \times p$ telle que $((B_N)_{ij})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq p}$,

sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

$$M_N = \frac{1}{p} B_N B_N^*$$

est appelée matrice de Wishart.

Remarque 2.1.1. Si la loi commune des entrées de B_N admet une variance égale à σ^2 notons alors $B_N = B_N(\sigma)$. On a

$$M_N(\sigma) = \frac{1}{p} B_N(\sigma) B_N(\sigma)^* = \sigma^2 \left[\frac{1}{p} \frac{B_N(\sigma)}{\sigma} \frac{B_N(\sigma)^*}{\sigma} \right] = \sigma^2 M_N(1)$$

où les entrées de $\frac{B_N(\sigma)}{\sigma}$ admettent pour variance 1. Les propriétés spectrales de $M_N(\sigma)$ se déduisent donc immédiatement de celles de $M_N(1)$.

2.1.1 Théorème de Marchenko-Pastur

Théorème 2.1.1. (Théorème 3.6 [4]) Soit $\{B_{uv}, (u, v) \in \mathbb{N}^{*2}\}$ un tableau de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $\mathbb{E}(|B_{uv} - \mathbb{E}(B_{uv})|^2) = 1$. Soit $(p_N)_N$ une suite d'entiers tels que $\frac{N}{p} \rightarrow c > 0$. Soit B_N une matrice $N \times p_N$ telle que pour tout $(u, v) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, p_N\}$, $(B_N)_{uv} = B_{uv}$. Soit

$$M_N = \frac{1}{p} B_N B_N^*.$$

Alors presque sûrement, la mesure spectrale μ_{M_N} converge étroitement vers la loi de Marchenko-Pastur μ_c définie par

$$\mu_{MP,c}(dx) = \max\left\{1 - \frac{1}{c}, 0\right\} \delta_0 + f(x) \mathbf{1}_{[(1-\sqrt{c})^2; (1+\sqrt{c})^2]}(x) dx \quad (2.1.1)$$

où

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x - (1 - \sqrt{c})^2)((1 + \sqrt{c})^2 - x)}}{2\pi c x}.$$

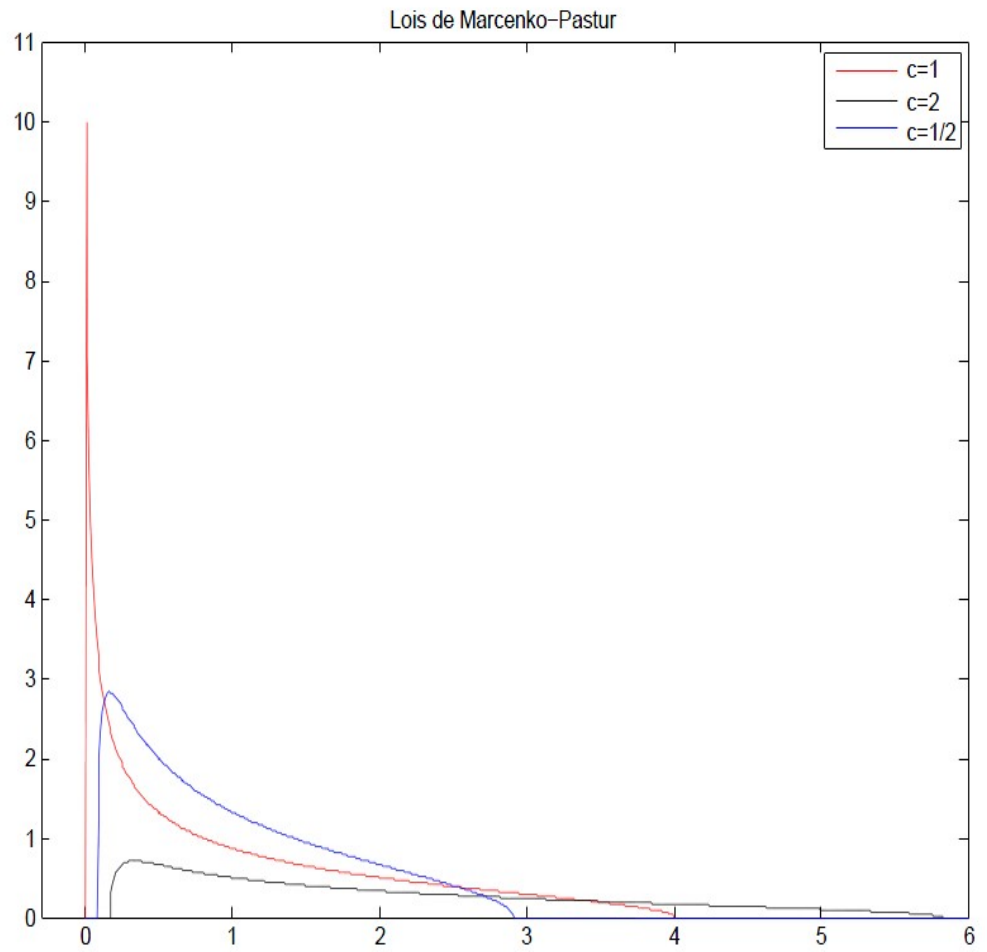


Figure: Densités de Marcenko-Pastur pour différentes valeurs de c

La preuve de ce résultat peut être obtenue dans un premier temps sous une hypothèse d'uniforme bornitude des moments par la méthode combinatoire des moments décrite dans le cas de matrices de Wigner. Notons que l'obtient que pour tout $k \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Tr}(M_N^k) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} C_k^{l-1} C_{k-1}^{l-1} c^{l-1} \quad p.s.,$$

où $\frac{1}{l} C_k^{l-1} C_{k-1}^{l-1}$ correspond au nombre de partitions non-croisées de $\{1, \dots, k\}$ en l blocs. Il faut donc démontrer l'égalité entre cette limite obtenue et le k ième moment de la Marchenko-Pastur (cf. section 3.1.1 [4]). On utilise enfin des techniques de centralisation (utilisant notamment Théorème 2.3.1) et de troncature pour obtenir le résultat sous les hypothèses du Théorème 2.1.1.

Remarque 2.1.2. *Le k -ième moment de la loi de Marchenko-Pastur de paramètre $c = 1$ est donc égal à $\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} C_k^{l-1} C_{k-1}^{l-1} = \frac{1}{k+1} C_{2k}^k = \int x^{2k} d\mu_{sc}(x)$. Ainsi, si S suit une loi du demi-cercle μ_{sc} alors S^2 suit une loi de Marchenko-Pastur de paramètre $c = 1$.*

Ce résultat nous dit aussi que le nombre de partitions non-croisées de $\{1, \dots, k\}$ est égal au nombre de partitions non-croisées par paires de $\{1, \dots, 2k\}$.

Théorème 2.1.1 peut également être obtenu par une approche “transformée de Cauchy”. On montre alors par des techniques très similaires à celles présentées dans le cas des matrices de Wigner que, pour $z \in \mathbb{C}^+$, $\int \frac{1}{z-t} d\mu_{M_N}(t)$ converge presque sûrement vers la transformée de Cauchy de la loi de Marchenko-Pastur,

$$g_{\mu_{\text{MP},c}}(z) = \frac{z - (1-c) - \sqrt{(z-1-c)^2 - 4c}}{2cz}, \quad (\text{cf. (3.3.2) dans [4]}),$$

le théorème de Vitali permettant de conclure.

2.1.2 Convergence des valeurs propres extrêmes

Soit M_N une matrice de Wishart et désignons par

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$$

ses valeurs propres ordonnées. Appelons

$$\lambda_{\min}(M_N) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } N \leq p, \\ \lambda_{N-p+1} & \text{si } N > p. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Remarque 2.1.3. *Si $N > p$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-p} = 0$.*

Par une méthode type “Grandes traces”, on peut établir le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. *(Théorème 5.11 [4]) Soit $\{B_{uv}, (u, v) \in \mathbb{N}^{*2}\}$ un tableau de variables aléatoires complexes indépendantes de même loi telle que $\mathbb{E}(B_{uv}) = 0$, $\mathbb{E}(|B_{uv}|^2) = 1$ et $\mathbb{E}(|B_{uv}|^4) < +\infty$. Soit $(p_N)_N$ une suite d'entiers tels*

que $\frac{N}{p} \rightarrow c > 0$. Soit B_N une matrice $N \times p_N$ telle que pour tout $(u, v) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, p_N\}$, $(B_N)_{uv} = B_{uv}$. Soit

$$M_N = \frac{1}{p} B_N B_N^*.$$

Alors, avec la notation (2.1.2), presque sûrement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\min}(M_N) = (1 - \sqrt{c})^2$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}(M_N) = (1 + \sqrt{c})^2.$$

Remarque 2.1.4. Si le quatrième moment de la loi des entrées n'est pas fini alors, presque sûrement, $\limsup \lambda_{\max}(M_N) = +\infty$ (cf Théorème 5.8 [4]).

2.2 Matrices de Wishart non blanches

Pour ce paragraphe, on réfère à [4] et aux références d'articles qui s'y trouvent. A l'aide de techniques basées sur la transformée de Cauchy, on peut établir le résultat suivant.

2.2.1 Convergence de la mesure spectrale

Théorème 2.2.1. Soit $\{B_{uv}, (u, v) \in \mathbb{N}^{*2}\}$ un tableau de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $\mathbb{E}(|B_{uv} - \mathbb{E}(B_{uv})|^2) = 1$. Soit $(p_N)_N$ une suite d'entiers tels que $\frac{N}{p} \rightarrow c > 0$. Soit B_N une matrice $N \times p_N$ telle que pour tout $(u, v) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, p_N\}$, $(B_N)_{uv} = B_{uv}$. Soit Σ_N une matrice $N \times N$ positive déterministe telle que μ_{Σ_N} converge étroitement vers une mesure de probabilité ρ .

$$M_N = \frac{1}{p} \Sigma_N^{\frac{1}{2}} B_N B_N^* \Sigma_N^{\frac{1}{2}}.$$

Alors presque sûrement, la mesure spectrale μ_{M_N} converge étroitement vers une mesure de probabilité ne dépendant que de c et ρ que nous noterons $\mu_{c,\rho}$. La transformée de Cauchy de $\mu_{c,\rho}$, $g_{\mu_{c,\rho}}(z) = \int \frac{1}{z-x} d\mu_{\mu_{c,\rho}}(x)$, pour $z \in \mathbb{C}^+$, est l'unique solution Z dans $\{Z \in \mathbb{C}, -\frac{(1-c)}{z} - cZ \in \mathbb{C}^+\}$ de l'équation

$$Z = \int \frac{1}{z - t(1 - c + czZ)} d\rho(t). \quad (2.2.1)$$

2.2.2 Convergence des valeurs propres extrêmes

Théorème 2.2.2. Plaçons nous sous les hypothèses du Théorème 2.2.1 et supposons de plus que $\mathbb{E}(B_{uv}) = 0$ et $\mathbb{E}(|B_{uv}|^4) < +\infty$ et que ρ est à support compact. Si la plus grande valeur propre de Σ_N converge vers $\sup\{x \in \text{supp}(\rho)\}$ alors la plus grande valeur propre de M_N converge presque sûrement

vers $\sup\{x \in \text{supp}(\mu_{c,\rho})\}$. Si la plus petite valeur propre de Σ_N converge vers $\inf\{x \in \text{supp}(\rho)\}$ et si $c < 1$ alors la plus petite valeur propre de M_N converge vers $\inf\{x \in \text{supp}(\mu_{c,\rho})\}$.

Le comportement des valeurs propres extrêmes va fortement dépendre de celui des valeurs propres extrêmes de Σ_N .

Prenons l'exemple

$$\Sigma_N = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{N-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

pour un certain $\alpha > 0$. Dans ce cas très simple μ_{Σ_N} converge étroitement vers δ_1 et donc presque sûrement, la mesure spectrale μ_{M_N} converge encore étroitement vers la loi de Marchenko-Pastur. On peut en fait établir la transition de phase suivante :

- Si $\alpha > \sqrt{c}$ alors $\lambda_{max}(M_N) \rightarrow_{+\infty} (1 + \alpha)(1 + \frac{c}{\alpha}) > (1 + \sqrt{c})^2$; $\lambda_{max}(M_N)$ converge donc à l'extérieur du support de la loi de Marchenko-Pastur.
- Si $\alpha \leq \sqrt{c}$ alors $\lambda_{max}(M_N) \rightarrow_{+\infty} (1 + \sqrt{c})^2$; $\lambda_{max}(M_N)$ converge alors vers le bord droit du support de la loi de Marchenko-Pastur.

2.3 Appendice

Théorème 2.3.1. ((Théorème 11.43 [4]) Soient A et B deux matrices complexes $N \times p$. Alors

$$\|F^{AA^*} - F^{BB^*}\| \leq \frac{1}{N} \text{rang}(A - B).$$

Chapitre 3

Ensembles gaussiens GUE, GOE (et GSE)

Même si on ne connaît pas l'hamiltonien d'un système complexe, certaines symétries du système peuvent indiquer le modèle de matrices à employer.

3.1 Modèle GUE

Quand l'hamiltonien est invariant par rotation, on utilisera une matrice hermitienne dont la loi est invariante par action du groupe unitaire \mathcal{U}_N . Parmi les matrices de Wigner complexes que nous avons précédemment étudiées, lorsque les entrées sont gaussiennes, nous allons montrer que nous obtenons une matrice aléatoire ayant cette propriété d'invariance : c'est le modèle du GUE (Gaussian Unitary Ensemble).

Definition 3.1.1. Une variable aléatoire W_N à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$ des matrices Hermitiennes de taille N sera dite appartenir au $GUE(N, \sigma^2)$ si ses coefficients $(W_N)_{ij}$ sont tels que $(W_N)_{ii}$, $i = 1, \dots, N$, $\sqrt{2}\Re((W_N)_{ij})$, $1 \leq i < j \leq N$, $\sqrt{2}\Im((W_N)_{ij})$, $1 \leq i < j \leq N$ sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées de variance σ^2 .

On identifie $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$ à \mathbb{R}^{N^2} de la façon suivante. Définissons la matrice $N \times N$ E_{st} , $(E_{st})_{uv} = \delta_{su}\delta_{tv}$.

$$\frac{E_{st} + E_{ts}}{\sqrt{2}}, \quad i \frac{E_{st} - E_{ts}}{\sqrt{2}}, \quad 1 \leq s < t \leq N, E_{ss}, \quad 1 \leq s \leq N,$$

forment une base orthonormale de l'espace des matrices hermitiennes muni du produit scalaire $X, Y \mapsto \text{Tr}XY$.

Toute matrice $H \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C})$ s'écrit

$$H = \sum_{s < t} \sqrt{2}\Re(H_{st}) \frac{E_{st} + E_{ts}}{\sqrt{2}} + \sum_{s < t} \sqrt{2}\Im(H_{st}) i \frac{E_{st} - E_{ts}}{\sqrt{2}} + \sum_{s=1}^N H_{ss} E_{ss},$$

et

$$\text{Tr}H^2 = \|h\|_{\mathbb{R}^{N^2}}^2,$$

où $h = (\sqrt{2}\Re(H_{st}), s < t, \sqrt{2}\Im(H_{st}), s < t, H_{ss}, s = 1, \dots, N)$.

$dH = \prod_{l=1}^{N^2} dh_l$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{H}_N(\mathbb{C}) \approx \mathbb{R}^{N^2}$. On peut alors écrire la loi d'une matrice de type $GUE(N, \sigma^2)$ sur l'espace $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} dP_{N, \sigma^2}(H) &= \prod_{s=1}^{N^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{h_s^2}{2\sigma^2}\right) dh_s \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{N^2} \exp\left(-\frac{\text{Tr}H^2}{2\sigma^2}\right) dH \end{aligned}$$

On peut donc également définir une matrice de type $GUE(N, \sigma^2)$ comme étant une variable aléatoire à valeurs dans les matrices hermitiennes ayant pour loi

$$dP_{N, \sigma^2}(H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{N^2} \exp\left(-\frac{\text{Tr}H^2}{2\sigma^2}\right) dH, \quad (3.1.1)$$

où dH désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace des matrices Hermitiennes.

Effectuons le changement de variable suivant dans (3.1.1),

$$\phi_U : H \mapsto UHU^* \text{ pour } U \in \mathcal{U}_N,$$

ϕ_U est une isométrie :

$$\|\phi_U(H)\|^2 = \text{Tr}UHU^*UHU = \text{Tr}H^2 = \|H\|^2.$$

Donc $|\det\phi_U| = 1$. D'autre part

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\text{Tr}UHU^*UHU^*\right) = \exp\left(-\frac{\text{Tr}H^2}{2\sigma^2}\right).$$

Donc dP_{N, σ^2} est bien invariante sous l'action du groupe unitaire i.e

$$\forall U \in \mathcal{U}_N, \quad \mathbb{E}_{P_{N, \sigma^2}}(f(H)) = \mathbb{E}_{P_{N, \sigma^2}}(f(UHU^*))$$

ou encore si W_N est de type $GUE(N, \sigma^2)$,

$$\forall U \in \mathcal{U}_N, \quad UW_NU^* \text{ a même loi que } W_N.$$

3.2 Modèle GOE

Si l'hamiltonien est stable par renversement du temps et par rotation, on considèrera une matrice symétrique dont la loi est invariante par action du groupe orthogonal \mathcal{O}_N . Parmi les matrices de Wigner réelles que nous avons précédemment étudiées, lorsque les entrées sont gaussiennes, nous allons montrer que nous obtenons une matrice aléatoire ayant cette propriété d'invariance : c'est le modèle du GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble).

Definition 3.2.1. Une variable aléatoire W_N à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_N(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille N sera dite appartenir au $GOE(N, \sigma^2)$ si ses coefficients $(W_N)_{ij}$ sont tels que $(W_N)_{ii}$, $i = 1, \dots, N$, $\sqrt{2}(W_N)_{ij}$, $1 \leq i < j \leq N$, sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées de variance σ^2 .

De la même façon que dans le cas complexe, on identifie $\mathcal{H}_N(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}$ en écrivant toute matrice symétrique H dans la base orthonormale

$$\frac{E_{ij} + E_{ji}}{\sqrt{2}}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad E_{ii}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

de l'espace des matrices symétriques muni du produit scalaire $X, Y \mapsto \text{Tr}XY$. On obtient de la même façon que l'on peut également définir une matrice de type $GOE(N, \sigma^2)$ comme étant une variable aléatoire à valeurs dans les matrices symétriques ayant pour loi

$$dP_{N, \sigma^2}(H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{\frac{N(N+1)}{2}} \exp\left(-\frac{\text{Tr}H^2}{2\sigma^2}\right) dH, \quad (3.2.1)$$

où dH désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace des matrices symétriques.

De même dP_{N, σ^2} est invariante sous l'action du groupe orthogonal i.e pour tout f mesurable de $\mathcal{H}_N(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} ,

$$\forall O \in \mathcal{O}_N, \quad \mathbb{E}_{P_{N, \sigma^2}}(f(H)) = \mathbb{E}_{P_{N, \sigma^2}}(f(OHO^t))$$

ou encore si W_N est de type $GOE(N, \sigma^2)$,

$$\forall O \in \mathcal{O}_N, \quad OW_N O^t \text{ a même loi que } W_N.$$

3.3 Lois des valeurs propres

Soit $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ and $G_N = \mathcal{O}_N, \mathcal{U}_N$ respectivement. Désignons par β la dimension de \mathbb{F} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel i.e $\beta = 1, 2$ respectivement.

Pour toute fonction continue sur \mathbb{R} et toute matrice H dans $\mathcal{H}_N(\mathbb{F})$,

$$f(H) = g \text{diag}(f(a_1), \dots, f(a_N)) g^{-1}$$

si $H = g \text{diag}(a_1, \dots, a_N) g^{-1}$ avec $g \in G_N$.

3.3.1 Formule d'intégration de Weyl

Proposition 3.3.1. (admise cf chapitre 10 [7]) Notons D_N l'espace des matrices diagonales réelles et pour tout $a \in D_N$, $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$. Si f est une

fonction intégrable sur $\mathcal{H}_N(\mathbb{F})$ muni de la mesure de Lebesgue, alors il existe une constante positive C_N telle que

$$\int_{\mathcal{H}_N(\mathbb{F})} f(H) dH = C_N \int_{D_N} \int_{G_N} f(gag^{-1}) \alpha_N(dg) |\Delta(a)|^\beta da_1 \cdots da_N,$$

où $\Delta(a) = \prod_{j < k} (a_k - a_j)$ et α_N est la mesure de Haar normalisée du groupe compact G_N .

Rappel : la mesure de Haar normalisée α_N du groupe compact G_N est l'unique mesure de probabilité sur G_N telle que pour tout Borélien A et tout g dans G_N ,

$$\alpha_N(A) = \alpha_N(\{ga, a \in A\}).$$

Elle vérifie également pour tout Borélien A et tout g dans G_N ,

$$\alpha_N(A) = \alpha_N(\{ag, a \in A\}).$$

Si pour tout H dans $\mathcal{H}_N(\mathbb{F})$ et tout $g \in G_N$, $f(H) = f(gHg^{-1})$ alors $f(H) = F(\lambda_1(H), \dots, \lambda_N(H))$ avec $F(\lambda_1(H), \dots, \lambda_N(H)) = F(\lambda_{\tau(1)}(H), \dots, \lambda_{\tau(N)}(H))$ pour toute permutation τ sur $\{1, \dots, N\}$; alors la formule d'intégration de Weyl se simplifie :

$$\int_{\mathcal{H}_N(\mathbb{F})} f(H) dH = C_N \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1, \dots, a_N) |\Delta(a)|^\beta da_1 \cdots da_N. \quad (3.3.1)$$

3.3.2 Loi jointe des valeurs propres

Soit pour $\beta = 1, 2$,

$$N_\beta = N + \beta \frac{N(N-1)}{2}.$$

Nous avons vu que la loi d'une matrice W_N de type $GUE(N, \sigma^2)$, $GOE(N, \sigma^2)$ s'écrit

$$dP_{N, \sigma^2}(H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{N_\beta} \exp\left(-\frac{\text{Tr} H^2}{2\sigma^2}\right) dH,$$

où dH désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{H}_N(\mathbb{F})$ et $\beta = 2, 1$ respectivement. Soit F une fonction symétrique sur \mathbb{R}^N . En posant pour tout $H \in \mathcal{H}_N(\mathbb{F})$, $f(H) = F(\lambda_1(H), \dots, \lambda_N(H))$, on obtient une fonction f qui vérifie pour tout $g \in G_N$, $f(H) = f(gHg^{-1})$. Ainsi, utilisant (3.3.1),

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(F(\lambda_1(W_N), \dots, \lambda_N(W_N))) \\
&= \int_{\mathcal{H}_N(\mathbb{F})} f(H) dP_{N, \sigma^2}(H) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{N\beta} \int_{\mathcal{H}_N(\mathbb{F})} f(H) \exp\left(-\frac{\text{Tr}H^2}{2\sigma^2}\right) dH \\
&= C_N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{N\beta} \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1, \dots, a_N) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N a_i^2\right) |\Delta(a)|^\beta da_1 \cdots da_N \\
&= \frac{1}{Z_N} \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1, \dots, a_N) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N a_i^2\right) |\Delta(a)|^\beta da_1 \cdots da_N,
\end{aligned}$$

où $Z_N = \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N a_i^2\right) |\Delta(a)|^\beta da_1 \cdots da_N$ est l'intégrale de Mehta :

$$Z_N = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{N\beta}{2}} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right)^{-N} \prod_{k=1}^N \Gamma\left(k\frac{\beta}{2} + 1\right).$$

(Rappel : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.) On a donc le résultat suivant :

Théorème 3.3.1. *La loi jointe des valeurs propres d'une matrice de type $GUE(N, \sigma^2)$, $GOE(N, \sigma^2)$ restreinte aux fonctions symétriques sur \mathbb{R}^N , est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité (β valant respectivement 2, 1),*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^\beta$$

où

$$Z_N = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{N\beta}{2}} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right)^{-N} \prod_{k=1}^N \Gamma\left(k\frac{\beta}{2} + 1\right).$$

Pour toute fonction g sur \mathbb{R}^N définissons $F(x) = g(x(1), \dots, x(N))$ où $x(1) \leq x(2) \leq \dots \leq x(N)$. F est une fonction symétrique sur \mathbb{R}^N et d'après Théorème 3.3.1,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(g(\lambda_1(W_N), \dots, \lambda_N(W_N))) \\
&= \frac{1}{Z_N} \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1, \dots, a_N) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N a_i^2\right) |\Delta(a)|^\beta da_1 \cdots da_N \\
&= \frac{1}{Z_N} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_N} \int_{a_{\tau(1)} < \dots < a_{\tau(N)}} g(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(N)}) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N a_i^2\right) |\Delta(a)|^\beta da_1 \cdots da_N \\
&= \frac{1}{Z_N} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_N} \int_{a_{\tau(1)} < \dots < a_{\tau(N)}} g(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(N)}) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N a_{\tau(i)}^2\right) |\Delta(a_\tau)|^\beta da_{\tau(1)} \cdots da_{\tau(N)} \\
&= \frac{N!}{Z_N} \int g(x_1, \dots, x_N) \mathbf{1}_{x_1 < \dots < x_N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^\beta dx_1 \cdots dx_N.
\end{aligned}$$

On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1. *La loi jointe des valeurs propres ordonnées $\lambda_1(W_N) \leq \dots \leq \lambda_N(W_N)$ d'une matrice W_N de type $GUE(N, \sigma^2)$, $GOE(N, \sigma^2)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité (β valant respectivement 2, 1),*

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \frac{N!}{Z_N} \mathbf{1}_{x_1 < \dots < x_N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^\beta$$

où

$$Z_N = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{N\beta}{2}} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right)^{-N} \prod_{k=1}^N \Gamma\left(k\frac{\beta}{2} + 1\right).$$

3.4 Modèle GSE

Si le système est stable par renversement du temps et mais pas par rotation, on considèrera une matrice quaternionique réelle dont la loi est invariante par action du groupe symplectique USp_N . Faisons quelques rappels sur le corps \mathbb{H} des quaternions réels. C'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} admettant pour base $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et sa structure multiplicative est défini par :

- 1 est l'élément neutre.
- $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$.
- $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$.
- $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$.
- $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$.

Pour tout $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, on définit $\bar{q} = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$. La conjugaison inverse l'ordre des facteurs : $\overline{\overline{p}q} = p$. Les matrices à coefficients dans \mathbb{H} sont appelées matrices quaternioniques réelles. Soit $Q = (q_{ij})$ une matrice $N \times N$ quaternionique réelle. Le dual Q^R de Q est la matrice définie par

$$(Q^R)_{ij} = \overline{q_{ji}}.$$

Q est dite self-duale si $Q^R = Q$.

Il est simple de voir qu'une matrice Q quaternionique réelle est self-duale ssi elle s'écrit

$$Q = Q_0 + Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k}$$

où Q_0 est une matrice $N \times N$ réelle symétrique et Q_1, Q_2, Q_3 sont des matrices $N \times N$ réelles antisymétriques. Nous noterons $\mathcal{H}_N(\mathbb{H})$ l'ensemble des matrices quaternioniques réelles self-duales.

Le groupe Symplectique USp_N est l'ensemble des matrices S , $N \times N$, quaternioniques réelles, telles que $SS^R = I_N$.

Théorème 3.4.1. *(admis) Pour toute matrice Q quaternionique réelle self-duale, il existe une matrice diagonale D réelle et une matrice $S \in USp_N$ telles que $Q = SDS^R$. De plus pour toute matrice diagonale réelle D et toute matrice $S \in USp_N$ telles que $Q = SDS^R$, la suite des éléments diagonaux de D rangés par ordre croissant est toujours la même. Ces éléments diagonaux sont appelés valeurs propres de Q .*

Definition 3.4.1. *Une variable aléatoire Q à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_N(\mathbb{H})$ des matrices quaternioniques réelles self-duales de taille N sera dite appartenir au $GSE(N, \sigma^2)$ si les coefficients $(Q_0)_{ss}$, $s = 1, \dots, N$, $\sqrt{2}(Q_0)_{st}$, $\sqrt{2}(Q_1)_{st}$, $\sqrt{2}(Q_2)_{st}$, $\sqrt{2}(Q_3)_{st}$, $1 \leq s < t \leq N$, sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées de variance σ^2 .*

Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \text{Tr}Q^2 &= \sum_{s,t=1}^N \{(Q_0)_{st}^2 + (Q_1)_{st}^2 + (Q_2)_{st}^2 + (Q_3)_{st}^2\} \\ &= \sum_{s < t} \left\{ (\sqrt{2}Q_0)_{st}^2 + (\sqrt{2}Q_1)_{st}^2 + (\sqrt{2}Q_2)_{st}^2 + (\sqrt{2}Q_3)_{st}^2 \right\} + \sum_{s=1}^N (Q_0)_{ss}^2. \end{aligned}$$

On identifie $\mathcal{H}_N(\mathbb{H})$ à $\mathbb{R}^{N(2N-1)}$ de la façon suivante. $\frac{E_{st}+E_{ts}}{\sqrt{2}}$, $\frac{E_{st}-E_{ts}}{\sqrt{2}}\mathbf{i}$, $\frac{E_{st}-E_{ts}}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $\frac{E_{st}-E_{ts}}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $1 \leq s < t \leq N$, E_{ss} , $1 \leq s \leq N$, forment une base orthonormale de l'espace des matrices quaternioniques réelles self-duales muni du produit scalaire $X, Y \mapsto (\text{Tr}XY)_0$

On peut donc également définir une matrice de type $GSE(N, \sigma^2)$ comme étant une variable aléatoire à valeurs dans les matrices quaternioniques réelles self-duales ayant pour loi

$$dP_{N,\sigma^2}(H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{N(2N-1)} \exp\left(-\frac{\text{Tr}H^2}{2\sigma^2}\right)dH, \quad (3.4.1)$$

où dH désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace des matrices quaternioniques réelles self-duales.

dP_{N,σ^2} est invariante sous l'action du groupe symplectique i.e pour tout f mesurable de $\mathcal{H}_N(\mathbb{H})$ dans \mathbb{R} ,

$$\forall S \in USp_N, \quad \mathbb{E}_{P_{N,\sigma^2}}(f(H)) = \mathbb{E}_{P_{N,\sigma^2}}(f(SHS^R))$$

ou encore si Q est de type $GSE(N, \sigma^2)$,

$$\forall S \in USp_N, \quad SQS^R \text{ a même loi que } Q.$$

Théorème 3.3.1 est encore vrai pour une matrice de type $GSE(N, \sigma^2)$ avec $\beta = 4$.

3.5 Les β -ensembles

Soient ξ_i des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance 1. Soient Y_i des variables indépendantes et indépendantes des ξ_i , telles que Y_i suit la loi de $\chi_{i\beta}$. On rappelle que la loi de χ_t a pour densité sur \mathbb{R}^+

$$f(x) = \frac{2^{1-t/2} x^{t-1} \exp^{-x^2/2}}{\Gamma(t/2)}.$$

Soit $H_N^{(\beta)}$ la matrice réelle $N \times N$ symétrique tridiagonale telles que $H_N^{(\beta)}(i, j) = 0$ si $|i - j| > 1$, $H_N^{(\beta)}(i, i) = \sqrt{2/\beta} \xi_i$ pour $i = 1, \dots, N$ et $H_N^{(\beta)}(i, i + 1) = Y_{N-i}/\sqrt{\beta}$ pour $i = 1, \dots, N - 1$.

Théorème 3.5.1 (Edelman-Dimitriu). (*admis*) *Théorème 4.5.35 [2]*

La loi jointe des valeurs propres de $H_N^{(\beta)}$, restreinte aux fonctions symétriques sur \mathbb{R}^N , est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\frac{\beta}{4} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^\beta$$

Remarque 3.5.1. *Pour $\beta = 2, 1, 4$, on retrouve respectivement la loi des valeurs propres du $GUE(N, \sigma^2)$, $GOE(N, 2\sigma^2)$ et $GSE(N, \frac{\sigma^2}{2})$.*

3.6 Vecteurs propres GUE, GOE

Notons \mathbb{O}_N^+ , respectivement \mathbb{U}_N^+ , l'ensemble des matrices orthogonales, respectivement unitaires, O telles que la première coordonnée non nulle de chaque vecteur colonne de O est un réel positif.

Appelons

$$\mathcal{M}_0 = \{M \in \mathcal{H}(\mathbb{F}), M \text{ a ses valeurs propres distinctes}\}.$$

Pour toute matrice M dans $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ aux valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$, notons

$$\Phi(M) = (O, D)$$

où

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

et

$$O = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{O}_N, \text{ resp. } \mathbb{U}_N$$

où V_1, \dots, V_N sont les vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tels que la première coordonnée non nulle de chaque vecteur V_i est un réel strictement positif.

Considérons le cas orthogonal. Pour tout $O \in \mathbb{O}_N$, soit $O^+ = O\Delta$, où $\Delta = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ avec $\epsilon_j = \text{sgn}(O_{m_j j})$, $m_j = \min\{i, O_{ij} \neq 0\}$. Soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{O}_N \rightarrow \mathbb{O}_N^+ \\ O \mapsto O^+ \end{cases}$.

Théorème 3.6.1. *Soit W_N une matrice de type GOE. Soit (O, D) une variable aléatoire telle que sur l'évènement $\{W_N \in \mathcal{M}_0\}$ de probabilité 1, $(O, D) = \Phi(W_N)$. Alors D et O sont indépendants et O a pour loi l'image sur \mathbb{O}_N^+ de la mesure de Haar sur \mathbb{O}_N par ψ .*

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(O, D)) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{W_N \in \mathcal{M}_0\}} f(O, D)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{W_N \in \mathcal{M}_0\}} f(\Phi(W_N))) \\ &= \int_{\mathbb{O}_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tilde{O}W_N\tilde{O}^t \in \mathcal{M}_0\}} f(\Phi(\tilde{O}W_N\tilde{O}^t))) d\alpha_N(\tilde{O}) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{W_N \in \mathcal{M}_0\}} \int_{\mathbb{O}_N} f(\Phi(\tilde{O}ODO^t\tilde{O}^t)) d\alpha_N(\tilde{O})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{W_N \in \mathcal{M}_0\}} \int_{\mathbb{O}_N} f(\Phi(\tilde{O}D\tilde{O}^t)) d\alpha_N(\tilde{O})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{W_N \in \mathcal{M}_0\}} \int_{\mathbb{O}_N} f(\Phi(\tilde{O}^+\Delta D\Delta(\tilde{O}^+)^t)) d\alpha_N(\tilde{O})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{W_N \in \mathcal{M}_0\}} \int_{\mathbb{O}_N} f(\Phi(\tilde{O}^+D(\tilde{O}^+)^t)) d\alpha_N(\tilde{O})\right) \\ &= \int_{\mathbb{O}_N} \mathbb{E}(f(\psi(\tilde{O}), D)) d\alpha_N(\tilde{O}) \\ &= \int_{\mathbb{O}_N} \int f(\psi(\tilde{O}), X) d\mathcal{L}_D(X) d\alpha_N(\tilde{O}), \end{aligned}$$

où \mathcal{L}_D désigne la loi de D . \square

On démontre de même que

Théorème 3.6.2. Soit W_N une matrice de type GUE. Soit (O, D) une variable aléatoire telle que sur l'évènement $\{W_N \in \mathcal{M}_0\}$ de probabilité 1, $(O, D) = \Phi(W_N)$. Alors D et O sont indépendants et O a pour loi l'image sur \mathbb{U}_N^+ de la mesure de Haar sur \mathbb{U}_N par ψ où

$$\psi : U \mapsto U^+, U^+ = U\Delta, \text{ où } \Delta = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}) \text{ avec } e^{i\theta_j} = \frac{\overline{U_{m_j j}}}{|U_{m_j j}|},$$

$$m_j = \min\{i, U_{ij} \neq 0\}.$$

Remarques

Avant même d'établir Théorèmes 3.6.1 et 3.6.2, nous savions que la loi de O serait portée par l'ensemble des matrices orthogonales resp. unitaires dont les vecteurs colonnes appartiennent à

$$\mathcal{S}_{N-1}^+ = \{(x_1, \dots, x_N), \sum_i |x_i|^2 = 1, x_1 \in]0, +\infty[\}.$$

En effet,

Lemma 3.6.1. $\{M \in \mathcal{H}_N(\mathbb{F}) \text{ a un vecteur propre } V = (v_1, \dots, v_N) \text{ tel que } v_1 = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Preuve : Soit M telle qu'il existe λ valeur propre de M , et $V = (v_1, \dots, v_N)$ vecteur propre associé à λ tel que $v_1 = 0$; alors λ est aussi valeur propre de \hat{M} où \hat{M} est la matrice obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne de M . Les polynômes caractéristiques de M et \hat{M} ont donc une racine en commun. Leur résultant (qui est un polynôme Q en les entrées de la matrice M) est donc nul. Or $\int_{\{h_1, Q(h_1, \dots, h_{N_\beta})=0\}} dh_1 = 0$ puisque pour h_2, \dots, h_{N_β} fixés, $\text{card}\{h_1, Q(h_1, \dots, h_{N_\beta}) = 0\} < +\infty$ d'où la conclusion. \square

Après avoir établi Théorèmes 3.6.1 et 3.6.2, nous voyons évidemment encore que la loi de O est portée par l'ensemble des matrices orthogonales resp. unitaires dont les vecteurs colonnes appartiennent à

$$\mathcal{S}_{N-1}^+ = \{(x_1, \dots, x_N), \sum_i |x_i|^2 = 1, x_1 \in]0, +\infty[\},$$

car

Lemma 3.6.2. Soit G suivant la mesure de Haar sur G_N . Alors presque sûrement $\forall i = 1, \dots, N, G_{1i} \neq 0$.

Preuve : Ce résultat est évident puisque chaque vecteur colonne suit la loi uniforme sur la sphère.

Chapitre 4

Modèles matriciels Hermitiens de loi invariante par conjugaison unitaire. Méthode des polynômes orthogonaux

Une matrice de type GUE est une matrice de Wigner particulière mais elle appartient également à une autre famille de matrices aléatoires Hermitiennes : celles dont la loi sur l'ensemble des matrices Hermitiennes $N \times N$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue dH sur l'ensemble des matrices Hermitiennes de la forme $\frac{1}{C_N} \exp(-TrV(H))$ où V est une fonction continue telle que l'intégrale $\int_{\mathcal{H}_N} \frac{1}{C_N} \exp(-TrV(H))dH$ soit bien définie. Dans le cas du $GUE(N, \sigma^2)$, $V(x) = \frac{x^2}{2\sigma^2}$.

$$dP_V(H) = \frac{1}{C_N} \exp(-TrV(H))dH$$

est invariante sous l'action du groupe unitaire i.e

$$\forall U \in \mathbb{U}_N, \quad \mathbb{E}_{P_{N,V}}(f(H)) = \mathbb{E}_{P_V}(f(UHU^*))$$

ou encore si M_N a pour loi P_V ,

$$\forall U \in \mathbb{U}_N, \quad UM_NU^* \text{ a même loi que } M_N.$$

L'avantage de ces modèles est que la loi jointe des valeurs propres est explicite. En effet, en utilisant la formule de Weyl, on obtient comme on l'avait obtenu dans le cas du GUE le résultat suivant.

Théorème 4.0.3. *La loi jointe des valeurs propres d'une matrice aléatoire Hermitienne de loi P_V , restreinte aux fonctions symétriques sur \mathbb{R}^N , est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^2,$$

où Z_N est une constante de normalisation.

La loi jointe des valeurs propres ordonnées $\lambda_1(M_N) \leq \dots \leq \dots \leq \lambda_N(M_N)$ d'une matrice M_N aléatoire Hermitienne de loi P_V , est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{N!}{\tilde{Z}_N} \mathbf{1}_{x_1 < \dots < x_N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^\beta,$$

où \tilde{Z}_N est une constante de normalisation.

De plus, nous allons démontrer que cette loi a une forme *déterminantale* rendant souvent possible une analyse des propriétés locales du spectre.

4.1 Préliminaires sur les polynômes orthogonaux

(cf p 382 [12])

Soit μ une mesure sur \mathbb{R} telle que :

- $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}, \mu(x - \epsilon, x + \epsilon) > 0, \forall \epsilon > 0\}$ contient un nombre infini de points,
- pour tout $k \geq 0$, $\int |x|^k d\mu(x) < +\infty$.

Nous allons déterminer des polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\int P_n(x) P_m(x) d\mu(x) = \delta_{nm}, \quad \text{pour tout } n \text{ et } m, \quad (4.1.1)$$

$$\text{et } P_n(x) = a_{nn}x^n + \dots + a_{n0}, \quad a_{nn} > 0, \quad \text{pour tout } n. \quad (4.1.2)$$

Définissons pour tout $r \geq 0$,

$$A_r = \det M_r$$

où $M_r = [m_{i+j}]_{i,j=0,\dots,r}$, $m_k = \int x^k d\mu(x)$.

Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}^{r+1}$,

$$\langle M_r y, y \rangle = \sum_{i,j=0}^r y_i y_j \int x^{i+j} d\mu(x) = \int \left(\sum_{i=0}^r y_i x^i\right)^2 d\mu(x).$$

Ainsi, il est clair que M_r est définie positive et donc pour tout $r \geq 0$, $A_r > 0$.

Proposition 4.1.1. Soient $P_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{f} d\mu}$ et pour $r \geq 1$,

$$P_r(x) = (A_r A_{r-1})^{-1/2} \det \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_r \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r-1} & m_r & \cdots & m_{2r-1} \\ 1 & x & \cdots & x^r \end{pmatrix}$$

Les P_r vérifient (4.1.1) et (4.1.2).

Preuve : Il est clair que

$$P_r(x) = (A_r A_{r-1})^{-1/2} A_{r-1} x^r + \dots,$$

Donc (4.1.2) est vérifiée.

Par linéarité, pour tout $j < r$,

$$\int x^j P_r(x) d\mu(x) = (A_r A_{r-1})^{-1/2} \det \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_r \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r-1} & m_r & \cdots & m_{2r-1} \\ \int x^j d\mu(x) & \int x^{j+1} d\mu(x) & \cdots & \int x^{r+j} d\mu(x) \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne est égale à l'une des autres lignes au-dessus donc

$$\int x^j P_r(x) d\mu(x) = 0.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer que $\int P_r(x)^2 d\mu(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \int P_r(x)^2 d\mu(x) &= \int \left((A_r A_{r-1})^{-1/2} A_{r-1} x^r + \dots \right) P_r(x) d\mu(x) \\ &= (A_r A_{r-1})^{-1/2} A_{r-1} \int x^r P_r(x) d\mu(x) \\ &= (A_r A_{r-1})^{-1} A_{r-1} \det \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_r \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r-1} & m_r & \cdots & m_{2r-1} \\ \int x^r d\mu(x) & \int x^{r+1} d\mu(x) & \cdots & \int x^{2r} d\mu(x) \end{pmatrix} \\ &= 1. \square \end{aligned}$$

$xP_r(x)$ étant un polynôme de degré $r + 1$, il existe des constantes $C_{r,j}, j = 0, \dots, r + 1$, telles que

$$xP_r(x) = \sum_{j=0}^{r+1} C_{r,j} P_j(x).$$

Si $r = 0$, $xP_0(x) = C_{0,0}P_0(x) + C_{0,1}P_1(x)$.
 Soit $r \geq 1$. Pour tout $l < r - 1$,

$$0 = \int xP_r(x)P_l(x)d\mu(x) = \sum_{j=0}^{r+1} C_{r,j} \int P_j(x)P_l(x)d\mu(x) = C_{r,l}.$$

Ainsi pour tout $l < r - 1$, $C_{r,l} = 0$.
 Nous obtenons donc pour tout $r \geq 1$,

$$xP_r(x) = C_{r,r-1}P_{r-1}(x) + C_{r,r}P_r(x) + C_{r,r+1}P_{r+1}(x).$$

Posons pour tout $l \geq 0$, $a_l = \int xP_l^2(x)d\mu(x)$ et $b_l = \int xP_{l+1}(x)P_l(x)d\mu(x)$.
 Il est facile de déduire que les P_l vérifient les relations de récurrence :

$$xP_0(x) = b_0P_1(x) + a_0P_0(x),$$

$$xP_l(x) = b_lP_{l+1}(x) + a_lP_l(x) + b_{l-1}P_{l-1}(x), \quad l \geq 1.$$

Supposons de plus à partir de maintenant que $d\mu(x) = \omega(x)dx$ pour un certain $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Posons

$$\Psi_l(x) = \{\omega(x)\}^{\frac{1}{2}} P_l(x),$$

et

$$K_n(x, y) = \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l(x)\Psi_l(y).$$

Nous avons

$$\int K_n(x, x)dx = \sum_{l=0}^{n-1} \int \omega(x)P_l^2(x)dx = n.$$

De plus

$$\begin{aligned} \int K_n(x, y)K_n(y, z)dy &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int \Psi_l(x)\Psi_l(y)\Psi_j(y)\Psi_j(z)dy \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_l(x)\Psi_j(z) \int \omega(y)P_l(y)P_j(y)dy \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l(x)\Psi_l(z) \\ &= K_n(x, z). \end{aligned}$$

Aussi $K_n(x, y)$ est appelé *noyau autoreproduisant*.

En utilisant la formule de récurrence vérifiée par les P_l , on obtient très simplement la *formule de Christoffel-Darboux* :

$$K_n(x, y) = b_{n-1} \frac{\Psi_n(x)\Psi_{n-1}(y) - \Psi_{n-1}(x)\Psi_n(y)}{x - y}. \quad (4.1.3)$$

4.2 Forme déterminantale de la loi jointe des valeurs propres

Considérons une fonction V de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue, telle que l'intégrale $\int_{\mathcal{H}_N} \frac{1}{C_N} \exp(-\text{Tr}V(H))dH$ soit bien définie, et la loi associée P_V sur l'ensemble des matrices Hermitiennes :

$$dP_V(H) = \frac{1}{C_N} \exp(-\text{Tr}V(H))dH. \quad (4.2.1)$$

Soient P_i les polynômes orthonormaux associés à $\mu(dx) = \omega(x)dx = \exp(-V(x))dx$. Nous avons vu que la loi jointe des valeurs propres d'une matrice aléatoire Hermitienne de loi P_V , restreinte aux fonctions symétriques sur \mathbb{R}^N , est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^2,$$

où Z_N est une constante de normalisation.

Nous avons

$$\prod_{j < k} |x_k - x_j|^2 = \left\{ \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \right\}^2.$$

Soit γ_{j-1} le coefficient de x^{j-1} dans $P_{j-1}(x)$. Multiplions la ligne N du déterminant de Van Der Mond par γ_{N-1} et ajoutons une combinaison linéaire adéquate des $N-1$ lignes précédentes pour obtenir $P_{N-1}(x_1) \dots P_{N-1}(x_N)$ comme dernière ligne du déterminant. On continue ainsi en remontant jusqu'à la première ligne : on multiplie la ligne j par γ_{j-1} et on lui ajoute une combinaison linéaire adéquate des $j-1$ lignes précédentes pour obtenir $P_{j-1}(x_1) \dots P_{j-1}(x_N)$. On obtient ainsi

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_N (\prod_{l=0}^{N-1} \gamma_l)^2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \left\{ \det \begin{pmatrix} P_0(x_1) & \dots & P_0(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{N-1}(x_1) & \dots & P_{N-1}(x_N) \end{pmatrix} \right\}^2.$$

En faisant rentrer, pour chaque i , $\exp(-\frac{1}{2}V(x_i))$ dans la i ème colonne on obtient

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_N (\prod_{l=0}^{N-1} \gamma_l)^2} \left\{ \det \begin{pmatrix} \Psi_0(x_1) & \dots & \Psi_0(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Psi_{N-1}(x_1) & \dots & \Psi_{N-1}(x_N) \end{pmatrix} \right\}^2.$$

Définissons la matrice

$$\Psi = (\Psi_{i-1}(x_j))_{1 \leq i, j \leq N}.$$

On a (Q_N désignant une certaine constante de normalisation)

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Q_N} (\det \Psi)^2 = \frac{1}{Q_N} \det({}^t \Psi \Psi).$$

Or

$$({}^t \Psi \Psi)_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k(x_i) \Psi_k(x_j) = K_N(x_i, x_j).$$

Ainsi

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Q_N} \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \right).$$

Lemma 4.2.1. (cf Théorème 5.2.1 [12])

Soit $J_N = (J_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ une matrice Hermitienne $N \times N$ telle que

- (a) $J_{ij} = \overline{f(x_i, x_j)}$
- (b) $\int f(x, x) d\mu(x) = C$
- (c) $\int f(x, y) f(y, z) d\mu(y) = f(x, z)$

pour une certaine fonction f , une certaine mesure μ et une certaine constante C . Alors

$$\int \det J_N d\mu(x_N) = (C - N + 1) \det J_{N-1}$$

où J_{N-1} est la matrice $N - 1 \times N - 1$ obtenue en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne de J_N .

Preuve du Lemme 4.2.1 : Pour toute permutation σ dans le groupe symétrique \mathcal{S}_n , notons $\epsilon(\sigma)$ sa signature :

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

$$\int \det J_N d\mu(x_N) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \epsilon(\sigma) \int f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_N, x_{\sigma(N)}) d\mu(x_N).$$

- Si $\sigma(N) = N$, alors en utilisant (b),

$$\begin{aligned} \int f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_N, x_{\sigma(N)}) d\mu(x_N) &= f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_{N-1}, x_{\sigma(N-1)}) \int f(x_N, x_N) d\mu(x_N) \\ &= C f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_{N-1}, x_{\sigma(N-1)}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_N \\ \sigma(N) = N}} \epsilon(\sigma) \int f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_N, x_{\sigma(N)}) d\mu(x_N) \\ &= C \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{N-1}} \epsilon(\tau) f(x_1, x_{\tau(1)}) \cdots f(x_{N-1}, x_{\tau(N-1)}) \\ &= C \det J_{N-1}. \end{aligned}$$

- Si $\sigma(N) = k < N$ alors il existe $j < N$, $\sigma(j) = N$. Pour un tel σ , en utilisant (c),

$$\begin{aligned} & \int f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_N, x_{\sigma(N)}) d\mu(x_N) \\ &= \int f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_{j-1}, x_{\sigma(j-1)}) f(x_j, x_N) f(x_{j+1}, x_{\sigma(j+1)}) \cdots f(x_N, x_k) d\mu(x_N) \\ &= f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_{j-1}, x_{\sigma(j-1)}) f(x_j, x_k) f(x_{j+1}, x_{\sigma(j+1)}) \cdots f(x_{N-1}, x_{\sigma(N-1)}). \end{aligned}$$

Soit $\hat{\sigma}$ la permutation de \mathcal{S}_{N-1} définie par $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ si $i \in \{1, \dots, N-1\} \setminus j$ et $\hat{\sigma}(j) = k$.
 Soit $\tilde{\sigma}$ la permutation de \mathcal{S}_N définie par $\tilde{\sigma}(i) = \hat{\sigma}(i)$ si $i \in \{1, \dots, N-1\}$ et $\tilde{\sigma}(N) = N$.
 Soit τ la transposition de \mathcal{S}_N définie par $\tau(k) = N$, $\tau(N) = k$ et $\tau(i) = i$ si $i \notin \{k, N\}$.
 Il est facile de vérifier que $\tau\tilde{\sigma} = \sigma$ si bien que

$$\epsilon(\sigma) = -\epsilon(\tilde{\sigma}) = -\epsilon(\hat{\sigma}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_N \\ \sigma(N) \neq N}} \epsilon(\sigma) \int f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_N, x_{\sigma(N)}) d\mu(x_N) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_N \\ \sigma(N) = k \\ \sigma(j) = N}} \epsilon(\sigma) f(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots f(x_{j-1}, x_{\sigma(j-1)}) f(x_j, x_k) f(x_{j+1}, x_{\sigma(j+1)}) \cdots f(x_{N-1}, x_{\sigma(N-1)}) \\ &= - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{\hat{\sigma} \in \mathcal{S}_{N-1} \\ \hat{\sigma}(j) = k}} \epsilon(\hat{\sigma}) f(x_1, x_{\hat{\sigma}(1)}) \cdots f(x_{j-1}, x_{\hat{\sigma}(j-1)}) f(x_j, x_{\hat{\sigma}(j)}) f(x_{j+1}, x_{\hat{\sigma}(j+1)}) \cdots f(x_{N-1}, x_{\hat{\sigma}(N-1)}) \\ &= - \sum_{k=1}^{N-1} \det J_{N-1} = -(N-1) \det J_{N-1}. \end{aligned}$$

Le résultat en découle. \square

La matrice $(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N}$ vérifie les conditions du lemme précédent avec $C = N$, $d\mu(x) = dx$. On obtient ainsi en itérant ce lemme :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-k}} \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \right) dx_{k+1} \cdots dx_N = (N-k)! \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right). \quad (4.2.2)$$

En particulier

$$\int \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \right) dx_1 \dots dx_N = N!, \quad \text{et donc } Q_N = N!.$$

On a donc établi la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. *La densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N de la loi jointe des valeurs propres d'une matrice aléatoire Hermitienne de loi P_V définie par (4.2.1), restreinte aux fonctions symétriques sur \mathbb{R}^N , peut s'écrire*

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N!} \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \right) \quad (4.2.3)$$

où

$$K_N(x_i, x_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \{\omega(x_i)\}^{1/2} \{\omega(x_j)\}^{1/2} P_l(x_i) P_l(x_j),$$

$$\omega(x) = \exp(-V(x)),$$

les P_i sont les polynômes orthonormaux associés à $\omega(x)$.

De (4.2.3) et (4.2.2), nous pouvons déduire que pour tout k dans $\{1, \dots, N\}$,

$$R_{k,N}(x_1, \dots, x_k) := \frac{N!}{(N-k)!} \int_{\mathbb{R}^{N-k}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_{k+1} \dots dx_N = \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right).$$

$R_{k,N}(x_1, \dots, x_k)$ est appelée la fonction de corrélation à k points.

Ces fonctions de corrélations sont très utiles dans le calcul de nombreuses quantités. Voici quelques exemples.

1. La densité d'état

Soit

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}.$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int \phi(x) d\hat{\mu}_N(x) \right) &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x_1) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1) \frac{1}{N} R_{1,N}(x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Proposition 4.2.2. *La mesure sur \mathbb{R} définie par, pour tout borélien A , $\mu_N(A) = \mathbb{E}(\hat{\mu}_N(A))$, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet pour densité $\frac{1}{N} R_{1,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (P_i(x))^2 \exp(-V(x))$.*

Autrement dit, pour tout Borélien B , $\int_B R_{1,N}(x)dx$ est l'espérance du nombre de valeurs propres appartenant à B .

2. Le nombre moyen de paires de valeurs propres dans un Borélien donné

Soit un Borélien B .

$$\begin{aligned}
\int_{B \times B} R_{2,N}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= N(N-1) \int \mathbf{1}_B(x_1) \mathbf{1}_B(x_2) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= \sum_{(i,j), i \neq j} \int \mathbf{1}_B(x_i) \mathbf{1}_B(x_j) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= \sum_{(i,j), i \neq j} \int \mathbf{1}_B(x_i) \mathbf{1}_B(x_j) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= \int \left(\sum_{(i,j), i \neq j} \mathbf{1}_B(x_i) \mathbf{1}_B(x_j) \right) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= N! \int_{x_1 < \dots < x_N} \left(\sum_{(i,j), i \neq j} \mathbf{1}_B(x_i) \mathbf{1}_B(x_j) \right) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= \mathbb{E}(\text{card}\{(\lambda_i, \lambda_j) \in B \times B, i \neq j\}).
\end{aligned}$$

où $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ sont les valeurs propres ordonnées de M_N .

3. Le nombre moyen de valeurs propres successives qui sont à une distance plus petite que s .

(Admis cf section 5.5 [6])

Pour tout $s > 0$ et toute matrice $N \times N$ Hermitienne M , soit

$$S(s, M) = \text{card} \{1 \leq j \leq n-1 : \lambda_{j+1}(M) - \lambda_j(M) \leq s\} \quad (4.2.4)$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ sont les valeurs propres ordonnées de M . Alors si M_N est une matrice aléatoire Hermitienne suivant la loi P_V définie en (4.2.1),

$$\mathbb{E}(S(s, M_N)) = \sum_{m \geq 2} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} dr \int_0^s \dots \int_0^s R_m(r, y_2+r, \dots, y_m+r) dy_2 \dots dy_m.$$

4. La probabilité qu'un Borélien corresponde à un "trou" dans le spectre.

Soit f une fonction bornée sur \mathbb{R} . Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ les valeurs propres non ordonnées d'une matrice aléatoire Hermitienne M_N suivant la loi P_V

définie en (4.2.1). On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^N (1 + f(\lambda_i)) \right] &= \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N (1 + f(x_i)) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= 1 + \sum_{k=1}^N \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{\mathbb{R}^N} f(x_{i_1}) \dots f(x_{i_k}) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= 1 + \sum_{k=1}^N C_N^k \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^k f(x_i) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= 1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^k f(x_i) R_{k,N}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Soit Δ un Borélien de \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}
P(\lambda_l \notin \Delta, \forall l = 1, \dots, N) &= \mathbb{E} \left[\prod_{l=1}^N (1 - 1_{\Delta}(\lambda_l)) \right] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\Delta^k} R_{k,N}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

4.3 Estimation des probabilités $A_N(m, B)$ en termes de déterminant de Fredholm

4.3.1 Déterminants de Fredholm

(cf paragraphe 3.4 [2])

Soit (X, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Soit $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable borné et M tel que $\|K\| := \sup_{(x,y) \in X \times X} |K(x,y)| \leq M$. Le déterminant de Fredholm de $I - \lambda K$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ est défini par

$$\text{Det}(I - \lambda K) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \int_{X^m} \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & \dots & K(x_1, x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_m, x_1) & \dots & K(x_m, x_m) \end{vmatrix} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_m).$$

Proposition 4.3.1. *La série converge pour tout λ et $\text{Det}(I - \lambda K)$ est une fonction entière de λ .*

Lemma 4.3.1. *(Inégalité de Hadamard) Soit A une matrice $N \times N$ à coefficients complexes. Soient A_1, \dots, A_N les vecteurs colonnes de A . Alors*

$$|\det A| \leq \|A_1\| \dots \|A_N\|,$$

où

$$\|A_j\| = \sqrt{|a_{1j}|^2 + \cdots + |a_{1j}|^2}.$$

Preuve : Si $\det A = 0$, le résultat est trivial. Supposons A inversible. Il existe une matrice unitaire U telle que UA soit triangulaire supérieure. Or on a trivialement

$$|\det UA| \leq \|(UA)_1\| \cdots \|(UA)_N\|.$$

Le résultat découle alors du fait que $|\det UA| = |\det A|$ et $\|(UA)_j\| = \|UA_j\| = \|A_j\|$. \square

Preuve de Proposition 4.3.1 : D'après l'inégalité de Hadamard,

$$\left| \begin{array}{ccc} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(x_m, x_1) & \cdots & K(x_m, x_m) \end{array} \right| \leq m^{m/2} M^m.$$

Appelons

$$a_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int_{X^m} \left| \begin{array}{ccc} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(x_m, x_1) & \cdots & K(x_m, x_m) \end{array} \right| d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_m).$$

On a $|a_m| \leq u_m = \frac{1}{m!} m^{m/2} M^m \mu(X)^m$, avec $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_{m+1}}{u_m} = 0$. Le rayon de convergence de la série entière correspondante est donc infinie. \square

4.3.2 Probabilités $A_N(m, B)$

Soit B un ensemble borélien borné de \mathbb{R} . Pour $0 \leq m \leq N$, on note $A_N(m, B)$ la probabilité pour que la matrice hermitienne M_N de loi P_V ait exactement m valeurs propres dans B . $A_N(0, B)$ est la probabilité que B soit un "trou" dans le spectre de M_N .

Proposition 4.3.2.

$$A_N(0, B) = \text{Det}_B(I - K_N)$$

où l'indice B signifie que le noyau K_N est restreint à $B \times B$.

Preuve : D'après (4.2.6)

$$\begin{aligned} P(\lambda_l \notin B, \forall l = 1, \dots, N) &= 1 + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \int_{B^k} R_{k,N}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \int_{B^k} \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right) dx_1 \cdots dx_k. \end{aligned}$$

Pour tous x_1, \dots, x_k dans \mathbb{R}^k ,

$$(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} = \sum_{l=0}^{N-1} X_l.$$

où

$$X_l = \begin{pmatrix} \Psi_l(x_1) \\ \vdots \\ \Psi_l(x_m) \end{pmatrix} (\Psi_l(x_1) \dots \Psi_l(x_m)).$$

$(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ est donc au plus de rang N et pour $k > N$,

$$\det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right) = 0.$$

Ainsi

$$A_N(0, B) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{B^k} \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right) dx_1 \cdots dx_k = \text{Det}_B(I - K_N). \square$$

Proposition 4.3.3.

$$A_N(m, B) = \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{dz} \right)^m \text{Det}_B(I - zK_N)|_{z=1}.$$

Preuve : Nous avons

$$A_N(m, B) = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{P}_m} \prod_{i \in \mathcal{E}} \mathbf{1}_B(x_i) \prod_{j \notin \mathcal{E}} (1 - \mathbf{1}_B(x_j)) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N, \quad (4.3.1)$$

où \mathcal{P}_m désigne l'ensemble des parties de m éléments de $\{1, \dots, N\}$.

D'autre part

$$\text{Det}_B(I - zK_N) = \sum_{k=0}^N \frac{(-z)^k}{k!} \int_{B^k} \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right) dx_1 \cdots dx_k$$

Pour z fixé, posons $f_z = -z\mathbf{1}_B$. D'après (4.2.5),

$$\begin{aligned} \text{Det}_B(I - zK_N) &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^N (1 + f_z(\lambda_i)) \right] & (4.3.2) \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^N (1 - z\mathbf{1}_B(\lambda_i)) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N (1 - z\mathbf{1}_B(x_i)) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N. & (4.3.3) \end{aligned}$$

Or, on peut démontrer aisément par récurrence sur m que pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ fixés,

$$\left(-\frac{d}{dz}\right)^m \prod_{i=1}^N (1 - z\alpha_i) = m! \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{P}_m} \prod_{i \in \mathcal{E}} \alpha_i \prod_{j \notin \mathcal{E}} (1 - \alpha_j).$$

Proposition 4.3.3 découle alors de (4.3.1) et (4.3.3). \square

Le résultat suivant sera fondamental pour obtenir des résultats asymptotiques quand $N \rightarrow +\infty$.

Proposition 4.3.4. *Soient $(F_N)_{N \geq 0}$ et F des noyaux bornés sur $X \times X$ tels que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|F_N - F\| \rightarrow 0$. Alors quand $N \rightarrow +\infty$, $\text{Det}(I - \lambda F_N)$ tend vers $\text{Det}(I - \lambda F)$, la convergence étant uniforme en λ sur tout compact de \mathbb{C} .*

Lemma 4.3.2. *Soient $F(x, y)$ et $G(x, y)$ deux noyaux bornés.*

$$\left| \det \left((F(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} \right) - \det \left((G(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} \right) \right| \leq m^{1+m/2} \|F - G\| \max\{\|F\|, \|G\|\}^{m-1}. \quad (4.3.4)$$

Preuve Pour tout $k = 1, \dots, m$, définissons

$$H_{ij}^{(k)} = \begin{cases} G(x_i, x_j) & \text{si } i < k \\ F(x_i, x_j) - G(x_i, x_j) & \text{si } i = k \\ F(x_i, x_j) & \text{si } i > k \end{cases}$$

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne, on obtient $\det \left((F(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} \right) - \det \left((G(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} \right) = \sum_{k=1}^m \det H^{(k)}$. Le résultat découle alors de l'inégalité d'Hadamard. \square

On déduit alors facilement la proposition 4.3.4.

4.4 Application à l'étude du régime local pour le modèle du GUE

Polynômes d'Hermite

Definition 4.4.1. *Le l -ième polynôme d'Hermite h_l est défini par*

$$h_l(x) := (-1)^l e^{x^2/2} \frac{d^l}{dx^l} e^{-x^2/2}. \quad (4.4.1)$$

Remarque 4.4.1. *Dans la littérature, le l -ième polynôme d'Hermite est souvent défini par $(-1)^l e^{x^2} \frac{d^l}{dx^l} e^{-x^2}$ mais nous adoptons ici la définition adoptée par [2].*

Lemma 4.4.1. *(cf Lemme 3.2.5 [2]) Les polynômes d'Hermite satisfont*

1. $\int_{\mathbb{R}} h_k(x) h_l(x) e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} k! \delta_{kl}$.
2. $x h_n(x) = h_{n+1}(x) + n h_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$.

3. $h'_n(x) = nh_{n-1}(x)$.

Dans le cas du $GUE(N, 1)$, $V(x) = \frac{x^2}{2}$, $\omega(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ et les P_l sont définis par

$$\int \exp(-\frac{x^2}{2}) P_l(x) P_{l'}(x) dx = \delta_{l,l'}.$$

Ceci implique que

$$P_l(x) = \frac{h_l(x)}{\sqrt{\sqrt{2\pi}l!}}$$

où h_l est le l ième polynôme d'Hermite défini en (4.4.1). En utilisant 2) du Lemme 4.4.1, nous voyons que les P_l satisfont la relation de récurrence :

$$xP_n(x) = \sqrt{n+1}P_{n+1}(x) + \sqrt{n}P_{n-1}(x), \text{ pour } n \geq 1.$$

De plus, le noyau défini par

$$K_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k(x) \Psi_k(y)$$

où

$$\Psi_l(x) = \exp(-\frac{x^2}{4}) P_l(x),$$

peut encore s'écrire d'après la formule (4.1.3),

$$K_N(x, y) = \sqrt{N} \frac{\Psi_N(x) \Psi_{N-1}(y) - \Psi_{N-1}(x) \Psi_N(y)}{x - y}. \quad (4.4.2)$$

Enfin en utilisant 3) du Lemme 4.4.1, nous obtenons que

$$\Psi'_n(x) = -\frac{x}{2} \Psi_n(x) + \sqrt{n} \Psi_{n-1}(x). \quad (4.4.3)$$

Nous avons vu que pour tout Borélien Δ de \mathbb{R} .

$$P(\lambda_l \notin \Delta, \forall l = 1, \dots, N) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\Delta^k} R_{k,N}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k.$$

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} , $a_0 \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_N)_{N \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs.

$$\begin{aligned} P(\alpha_N(\frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - a_0) \notin [a, b], \forall l = 1, \dots, N) &= P(\lambda_l \notin \Delta_N, \forall l = 1, \dots, N) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\Delta_N^k} R_{k,N}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k. \end{aligned}$$

où $\Delta_N = [a_0\sqrt{N} + \frac{a\sqrt{N}}{\alpha_n}; a_0\sqrt{N} + \frac{b\sqrt{N}}{\alpha_n}]$ et $R_{k,N}(x_1, \dots, x_k) = \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right)$.
 Pour tous x_1, \dots, x_m dans \mathbb{R}^m ,

$$(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k.$$

où

$$X_k = \begin{pmatrix} \Psi_k(x_1) \\ \vdots \\ \Psi_k(x_m) \end{pmatrix} (\Psi_k(x_1) \dots \Psi_k(x_m)).$$

$(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m}$ est donc au plus de rang N et pour $m > N$,

$$\det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} \right) = 0.$$

Ainsi

$$P(\alpha_N(\frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - a_0) \notin [a; b], \forall l = 1, \dots, N) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\Delta_N^k} \det \left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right) dx_1 \dots dx_k.$$

Effectuons le changement de variable $y_i = \alpha_N(\frac{x_i}{\sqrt{N}} - a_0)$ dans chaque intégrale :

$$\begin{aligned} & P(\alpha_N(\frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - a_0) \notin [a; b], \forall l = 1, \dots, N) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{[a; b]^k} \det \left(\left(\frac{\sqrt{N}}{\alpha_N} K_N(a_0\sqrt{N} + \frac{y_i\sqrt{N}}{\alpha_N}, a_0\sqrt{N} + \frac{y_j\sqrt{N}}{\alpha_N}) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) dy_1 \dots dy_k \\ &= \text{Det}_{[a; b]}(I - \tilde{K}_N) \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

où

$$\tilde{K}_N(x, y) = \frac{\sqrt{N}}{\alpha_N} K_N(a_0\sqrt{N} + \frac{x\sqrt{N}}{\alpha_N}, a_0\sqrt{N} + \frac{y\sqrt{N}}{\alpha_N}).$$

Ou un peu plus généralement, pour tout Borélien borné B ,

$$P(\alpha_N(\frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - a_0) \notin B, \forall l = 1, \dots, N) = \text{Det}_B(I - \tilde{K}_N) \quad (4.4.5)$$

où

$$\tilde{K}_N(x, y) = \frac{\sqrt{N}}{\alpha_N} K_N(a_0\sqrt{N} + \frac{x\sqrt{N}}{\alpha_N}, a_0\sqrt{N} + \frac{y\sqrt{N}}{\alpha_N}).$$

4.4.1 A l'intérieur du "bulk"

Si W_N est une matrice de type $GUE(N, 1)$, presque sûrement la mesure spectrale empirique de $\frac{W_N}{\sqrt{N}}$ convergeant étroitement vers la loi du demi-cercle μ_{sc} , on a pour tout $a \in]-2; 2[$,

$$\min_{i=1}^N \left| \frac{\lambda_i}{\sqrt{N}} - a \right| \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0 \text{ p.s.}$$

On peut s'interroger sur la vitesse de cette convergence. Notons ρ_{sc} la densité de la loi du demi-cercle μ_{sc} .

$$\rho_{sc}(t) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-2;2]}(t) \sqrt{4 - t^2}.$$

Pour un intervalle I le nombre de valeurs propres tombant dans I étant de l'ordre de $N\mu_{sc}(I)$, si $I =]a - \epsilon_N; a + \epsilon_N[$, avec $a \in]-2; 2[$, le nombre de valeurs propres tombant dans I_N est donc de l'ordre de $2N\epsilon_N\rho_{sc}(a)$. On conjecture donc une vitesse de l'ordre de $\frac{1}{N}$. Nous allons présenter en détail le cas techniquement plus facile $a = 0$ qui nous ramène à considérer les asymptotiques des probabilités $A_N(0, \frac{B}{\sqrt{N}})$.

Asymptotique des probabilités $A_N(0, \frac{B}{\sqrt{N}})$.

Proposition 4.4.1. *Soit B un Borélien borné de \mathbb{R} . Alors*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N(0, \frac{B}{\sqrt{N}}) = Det_B(I - \mathbb{S}).$$

où \mathbb{S} est le noyau sinus :

$$\mathbb{S}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x - y)}{x - y}.$$

Preuve : Choissant $a_0 = 0$ et $\alpha_N = N$ dans (4.4.5), nous obtenons

$$A_N(0, \frac{B}{\sqrt{N}}) = Det_B(I - \tilde{K}_N)$$

où

$$\tilde{K}_N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{N}} K_N\left(\frac{x}{\sqrt{N}}, \frac{y}{\sqrt{N}}\right).$$

Proposition 4.4.2.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{(x,y) \in B \times B} |\tilde{K}_N(x, y) - \mathbb{S}(x, y)| = 0$$

Preuve : En utilisant (4.4.2), on obtient

$$\tilde{K}_N(x, y) = \sqrt{N} \frac{\Psi_N\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)\Psi_{N-1}\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right) - \Psi_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)\Psi_N\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right)}{x - y}$$

Puis en utilisant (4.4.3) et le fait que pour toutes fonctions différentiables f et g sur \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} &= \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right) g(y) - f(y) \left(\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right) \\ &= g(y) \int_0^1 f'(tx + (1-t)y) dt \\ &\quad - f(y) \int_0^1 g'(tx + (1-t)y) dt, \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\tilde{K}_N(x, y) \\ &= \Psi_{N-1}\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right) \int_0^1 \Psi'_N\left(s\frac{x}{\sqrt{N}} + (1-s)\frac{y}{\sqrt{N}}\right) ds - \Psi_N\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right) \int_0^1 \Psi'_{N-1}\left(s\frac{x}{\sqrt{N}} + (1-s)\frac{y}{\sqrt{N}}\right) ds \\ &= \Psi_{N-1}\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right) \int_0^1 \left\{ \sqrt{N} \Psi_{N-1}(z) - \frac{z}{2} \Psi_N(z) \right\} \Big|_{z=s\frac{x}{\sqrt{N}} + (1-s)\frac{y}{\sqrt{N}}} ds \\ &\quad - \Psi_N\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right) \int_0^1 \left\{ \sqrt{N-1} \Psi_{N-2}(z) - \frac{z}{2} \Psi_{N-1}(z) \right\} \Big|_{z=s\frac{x}{\sqrt{N}} + (1-s)\frac{y}{\sqrt{N}}} ds \end{aligned}$$

Posons

$$S_\nu(t) = N^{1/4} \Psi_\nu\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right).$$

Lemma 4.4.2. *Soit $\nu = N - k$ avec k fixé indépendant de N . $S_\nu(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(t - \frac{\pi\nu}{2})$ converge vers zéro quand $N \rightarrow +\infty$ uniformément en t dans tout intervalle borné.*

Preuve : L'obtention du Lemme 4.4.2 est basée sur la réécriture suivante des polynômes d'Hermite

$$P_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\nu!} \sqrt{2\pi}} \int (i\xi)^\nu e^{-\xi^2/2 - i\xi x} d\xi, \quad (4.4.7)$$

et l'utilisation d'une méthode de Laplace.

(4.4.7) découle du fait que

$$e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\xi^2/2 - i\xi x} d\xi.$$

En effet, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} h_\nu(x) e^{-x^2/2} &= (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{-x^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (i\xi)^\nu e^{-\xi^2/2 - i\xi x} d\xi, \end{aligned}$$

puis (4.4.7). On en déduit que pour tout t fixé,

$$\begin{aligned}
S_\nu(t) &= N^{1/4} \Psi_\nu\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right) \\
&= \frac{N^{1/4}}{\sqrt{\nu!}} \frac{e^{\frac{t^2}{4N}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int (i\xi)^\nu e^{-\xi^2/2 - i\xi \frac{t}{\sqrt{N}}} d\xi \\
&= \frac{N^{1/4}}{\sqrt{\nu!}} \frac{e^{\frac{t^2}{4N}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} i^\nu \sqrt{N}^{\nu+1} \int \xi^\nu e^{-N\xi^2/2 - i\xi t} d\xi \\
&= \frac{N^{1/4}}{\sqrt{\nu!}} \frac{e^{\frac{t^2}{4N}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} i^\nu \sqrt{N}^{\nu+1} \int (\xi e^{-\xi^2/2})^N e^{-i\xi t} \xi^{\nu-N} d\xi
\end{aligned}$$

Dans les lignes suivantes tous les $o(1)$ seront uniformes en t dans tout intervalle borné. D'après la formule de Stierling, $\nu! = \sqrt{2\pi\nu} \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu (1 + o(1))$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
S_\nu(t) &= \frac{N^{1/4}}{\sqrt{\sqrt{2\pi\nu} \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu}} \frac{e^{\frac{t^2}{4N}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} i^\nu \sqrt{N}^{\nu+1} \int (\xi e^{-\xi^2/2})^N e^{-i\xi t} \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{N}{\nu}}\right)^\nu e^{\frac{t^2}{4N}} i^\nu \sqrt{N} \int (\xi e^{-\xi^2/2})^N e^{-i\xi t} \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)) \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{N}{2}} i^\nu \sqrt{N} \int (\xi e^{-\xi^2/2})^N e^{-i\xi t} \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

$S_\nu(t)$ étant réel, on en déduit

$$\begin{aligned}
S_\nu(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \int |\xi e^{-\xi^2/2}|^N \Re [(i \operatorname{sign}(\xi))^\nu e^{-i\xi t}] |\xi^{\nu-N}| d\xi (1 + o(1)) \\
&= \frac{1}{\pi} e^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \int_0^{+\infty} (\xi e^{-\xi^2/2})^N \Re [i^\nu e^{-i\xi t}] \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)) \\
&= \frac{1}{\pi} e^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \int_0^{+\infty} (\xi e^{-\xi^2/2})^N \cos\left(\nu \frac{\pi}{2} - \xi t\right) \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
S_{4r}(t) &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \int_0^{+\infty} (\xi e^{-\xi^2/2})^N \cos(\xi t) \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)). \\
S_{4r+1}(t) &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \int_0^{+\infty} (\xi e^{-\xi^2/2})^N \cos\left(\frac{\pi}{2} - \xi t\right) \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)). \\
S_{4r+2}(t) &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \int_0^{+\infty} (\xi e^{-\xi^2/2})^N \cos\left(2\frac{\pi}{2} - \xi t\right) \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)). \\
S_{4r+3}(t) &= \frac{1}{\pi} e^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \int_0^{+\infty} (\xi e^{-\xi^2/2})^N \cos\left(3\frac{\pi}{2} - \xi t\right) \xi^{\nu-N} d\xi (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

$\nu - N$ étant par hypothèse indépendant de N , les dernières intégrales sont toutes de la forme $\int f(x)^N g(x) dx$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ admettant un maximum global. Pour déterminer un équivalent de ces intégrales, nous disposons de la méthode de Laplace.

Définissons tout d'abord les familles de fonctions suivantes. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et ϵ_0, s_0, K, L, M des constantes strictement positives. Nous désignerons par $\mathcal{G}(f, a, \epsilon_0, s_0, K, L, M)$ l'ensemble des fonctions mesurables $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes.

1. $|g(a)| \leq K$
2. $\sup_{0 < |x-a| \leq \epsilon_0} \left| \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right| \leq L.$
3. $\int f(x)^{s_0} |g(x)| dx \leq M.$

Théorème 4.4.1. (cf Théorème 3.5.3 [2]) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et des constantes strictement positives ϵ_0 et c , tels que

- $f(x) \leq f(x')$ si $a - \epsilon_0 \leq x \leq x' \leq a$ ou $a \leq x' \leq x \leq a + \epsilon_0$
- $\forall \epsilon < \epsilon_0, \sup_{|x-a| > \epsilon} f(x) \leq f(a) - c\epsilon^2.$
- f est deux fois continuellement dérivable sur $]a - 2\epsilon_0; a + 2\epsilon_0[.$
- $f''(a) < 0.$

Alors, pour toute fonction $g \in \mathcal{G}(f, a, \epsilon_0, s_0, K, L, M)$, on a

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{s} f(a)^{-s} \int f(x)^s g(x) dx = \sqrt{-\frac{2\pi f(a)}{f''(a)}} g(a).$$

De plus pour tous $f, a, \epsilon_0, s_0, K, L, M$ fixés, la convergence est uniforme sur $\mathcal{G}(f, a, \epsilon_0, s_0, K, L, M)$.

Preuve du Théorème 4.4.1

Soit pour $s \geq s_0$, $\epsilon(s) = \epsilon_0 (s_0/s)^{\frac{1}{4}}$. On a $\epsilon(s) \rightarrow_{s \rightarrow +\infty} 0$, $s\epsilon(s)^2 \rightarrow_{s \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\epsilon_0 = \sup_{s \geq s_0} \epsilon(s)$. Pour $s \geq s_0$,

$$\int f(x)^s g(x) dx = g(a)I_1 + I_2 + I_3$$

où

$$I_1 = \int_{|x-a| \leq \epsilon(s)} f(x)^s dx.$$

$$I_2 = \int_{|x-a| \leq \epsilon(s)} f(x)^s (g(x) - g(a)) dx.$$

$$I_3 = \int_{|x-a| > \epsilon(s)} f(x)^s g(x) dx.$$

Pour $|t| < 2\epsilon_0$, soit la fonction continue

$$h(t) = \int_0^1 (1-r)(\log f)''(a+rt) dr.$$

On a $h(0) = f''(a)/2f(a)$. De plus pour $|x - a| < 2\epsilon_0$,

$$f(x) = f(a) \exp(h(x-a)(x-a)^2).$$

Ainsi

$$I_1 = \frac{f(a)^s}{\sqrt{s}} \int_{|t| \leq \epsilon(s)\sqrt{s}} \exp(h(t/\sqrt{s})t^2) dt$$

et donc

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{s} f(a)^{-s} I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(h(0)t^2) dt = \sqrt{-\frac{2\pi f(a)}{f''(a)}}.$$

On a de plus $|I_2| \leq L\epsilon(s)I_1$ et donc

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{s} f(a)^{-s} I_2 = 0.$$

Enfin, puisque $\epsilon(s) < \epsilon_0$, $|I_3| \leq M \sup_{x, |x-a| > \epsilon(s)} |f(x)|^{s-s_0} \leq M f(a)^{s-s_0} \left(1 - \frac{c\epsilon(s)^2}{f(a)}\right)^{s-s_0}$
et donc

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{s} f(a)^{-s} I_3 = 0. \square$$

On applique le théorème 4.4.1 à chacune des intégrales apparaissant dans $S_{4\tau+i}(t)$, $i = 0, \dots, 3$ (la fonction g change donc mais pas f). f a un maximum en $x = 1$. $f(1) = e^{-1/2}$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = -2e^{-1/2}$. Le résultat obtenu peut se reformuler par la conclusion du Lemme 4.4.2. \square

On a alors $\tilde{K}_N(x, y)$ équivalent quand N tend vers l'infini à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \left(\cos\left(y - \frac{\pi(N-1)}{2}\right) \int_0^1 \cos\left(tx + (1-t)y - \frac{\pi(N-1)}{2}\right) dt \right. \\ & \left. - \cos\left(y - \frac{\pi N}{2}\right) \int_0^1 \cos\left(tx + (1-t)y - \frac{\pi(N-2)}{2}\right) dt \right) \end{aligned}$$

qui est en fait égal par des formules trigonométriques à $\frac{1}{\pi} \frac{\sin(x-y)}{x-y}$. La proposition 4.4.2 en découle. \square

D'après la proposition 4.3.4, nous pouvons en déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Det}_B(I - \tilde{K}_N) = \text{Det}_B(I - \mathbb{S}). \square$$

Corollaire 4.4.1.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N\left(m, \frac{B}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{dz}\right)^m \text{Det}_B(I - z\mathbb{S})|_{z=1}.$$

Asymptotique des $A_N(0, a\sqrt{N}+] - \frac{t}{2\sqrt{N}\rho_{sc}(a)}; \frac{t}{2\sqrt{N}\rho_{sc}(a)}[$, $a \in]-2; 2[$, $t > 0$.

Soit $a \in]-2; 2[$. Soit $t > 0$. D'après (4.4.4) (avec $a_0 = a$ et $\alpha_N = N\rho_{sc}(a)$),

$$\begin{aligned} A_N(0, a\sqrt{N} + \frac{B}{\sqrt{N}}) &= P(N \left(\frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - a \right) \notin] - \frac{t}{2\rho_{sc}(a)}; \frac{t}{2\rho_{sc}(a)}[, \forall l = 1, \dots, N) \\ &= \text{Det}_{]-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}[}(I - \tilde{K}_N) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{K}_N(x, y) = \frac{1}{\rho_{sc}(a)\sqrt{N}} K_N(a\sqrt{N} + x \frac{1}{\rho_{sc}(a)\sqrt{N}}, a\sqrt{N} + y \frac{1}{\rho_{sc}(a)\sqrt{N}}).$$

On peut en fait généraliser Proposition 4.4.2 (voir Remarque 4.4.3) et obtenir :

Proposition 4.4.3.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{(x, y) \in]-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}[^2} |\tilde{K}_N(x, y) - \tilde{S}(x, y)| = 0$$

où \tilde{S} est défini par

$$\tilde{S}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\pi(x - y)]}{x - y}. \quad (4.4.8)$$

Remarque 4.4.2. On retrouve Proposition 4.4.2 en choisissant $a = 0$ dans Proposition 4.4.3 et en remarquant que $\rho_{sc}(0) = \frac{1}{\pi}$.

D'après la proposition 4.3.4, nous pouvons en déduire que $\forall a \in]-2; 2[$, $\forall t > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P \left(2\rho_{sc}(a)N \min_{l=1}^N \left| \frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - a \right| > t \right) = \text{Det}_{]-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}[}(I - \tilde{S}).$$

Proposition 4.4.4. (Admise)

$$\text{Det}_{]-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}[}(I - \tilde{S}) = 1 - F(t)$$

où $F(t)$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité,

$$F(t) = 1 - \exp \left(\int_0^{\pi t} \frac{\sigma(x)}{x} dx \right),$$

où σ est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$(x\sigma''(x))^2 + 4(x\sigma'(x) - \sigma(x))(x\sigma'(x) - \sigma(x) + (\sigma'(x))^2) = 0,$$

avec $\sigma(x) - \left(\frac{\lambda}{\pi}x - \frac{\lambda^2}{\pi^2}x^2\right) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$.

Loi des espacements entre valeurs propres :

Les probabilités de “trous” sont intimement liées aux espacements entre valeurs propres. En effet, de manière heuristique pour tous $x < y$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{au moins une valeur propre dans } [y; y + \Delta y[, \\ & \quad \text{aucune valeur propre dans } [x + \Delta x; y[\mid \text{au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x]) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(\text{au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x])} \\ & \quad \times \mathbb{P}(\text{au moins une valeur propre dans } [y; y + \Delta y[, \\ & \quad \text{aucune valeur propre dans } [x + \Delta x; y[, \text{ au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } & \mathbb{P}(\text{au moins une valeur propre dans } [y; y + \Delta y[, \\ & \quad \text{aucune valeur propre dans } [x + \Delta x; y[, \text{ au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x]) \\ &= \mathbb{P}(\text{ aucune valeur propre dans } [x + \Delta x; y[, \text{ au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x]) \\ & \quad - \mathbb{P}(\text{ aucune valeur propre dans } [x + \Delta x; y + \Delta y[, \text{ au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x]) \\ &= A_N(0, [x + \Delta x; y]) - A_N(0, [x, y]) - \{A_N(0, [x + \Delta x; y + \Delta y]) - A_N(0, [x, y + \Delta y])\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{au moins une valeur propre dans } [y; y + \Delta y[, \\ & \quad \text{aucune valeur propre dans } [x + \Delta x; y[\mid \text{au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x]) \\ &= \frac{A_N(0, [x + \Delta x; y]) - A_N(0, [x, y]) - \{A_N(0, [x + \Delta x; y + \Delta y]) - A_N(0, [x, y + \Delta y])\}}{\Delta x \frac{1 - A_N(0, [x, x + \Delta x])}{\Delta x}}. \end{aligned}$$

En faisant tendre Δx vers zéro, le dernier terme de l'égalité précédente tend vers

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} A_N(0, [x, y]) - \frac{\partial}{\partial x} A_N(0, [x, y + \Delta y])}{R_{1,N}(x)}.$$

(En utilisant le fait que $A_N(0, [x, x + \Delta x]) = 1 - \int_x^{x + \Delta x} R_{1,N}(u) du + O(|\Delta x|^2)$)

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathbb{P}(\text{au moins une valeur propre dans } [y; y + \Delta y[, \\ & \quad \text{aucune valeur propre dans } [x + \Delta x; y[\mid \text{au moins une valeur propre dans } [x, x + \Delta x]) \\ &= -\frac{1}{R_{1,N}(x)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} A_N(0, [x, y]). \end{aligned}$$

On admet le théorème suivant.

Théorème 4.4.2. Soit t_N une suite telle que, quand $N \rightarrow +\infty$, $t_N \rightarrow +\infty$ mais $t_N/N \rightarrow 0$. Définissons pour tout $s \geq 0$ et tout $u \in]-2; 2[$, pour toute matrice $N \times N$ Hermitienne M ,

$$S_N(u, s, M) = \frac{1}{2t_N} \text{card} \left\{ 1 \leq j \leq N-1 : \lambda_{j+1}(M) - \lambda_j(M) \leq \frac{s}{N\rho_{sc}(u)}, |\lambda_j(M) - u| \leq \frac{t_N}{N\rho_{sc}(u)} \right\} \quad (4.4.9)$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ sont les valeurs propres ordonnées de M . Soit W_N une matrice de type $GUE(N, 1)$. Alors,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(S \left(u, s, \frac{W_N}{\sqrt{N}} \right) \right) = \int_0^s p(t) dt$$

où

$$p(t) = \frac{d^2}{dt^2} \text{Det}_{[0, t]}(I - \tilde{S}),$$

\tilde{S} étant défini par (4.4.8). p est la densité de la loi locale des espacements appelée loi de Gaudin.

4.4.2 Fluctuations de la plus grande valeur propre autour de 2

Pour un intervalle I le nombre de valeurs propres d'une matrice de type $GUE(N, 1)$ renormalisée par \sqrt{N} tombant dans I est de l'ordre de $N\mu_{sc}(I)$. Puisque $N \frac{1}{2\pi} \int_{2-\delta}^{2+\delta} \sqrt{4-x^2} dx \approx CN\delta^{\frac{3}{2}}$ pour δ petit, on va se placer dans une fenêtre de taille de l'ordre de $\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}$. Soit $[a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} . D'après (4.4.4),

$$P(N^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - 2 \right) \notin [a; b], \forall l = 1, \dots, N) = \text{Det}_{[a, b]}(I - \tilde{K}_N)$$

où

$$\tilde{K}_N(x, y) = N^{-1/6} K_N(2\sqrt{N} + xN^{-1/6}, 2\sqrt{N} + yN^{-1/6}).$$

Proposition 4.4.5.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{(x, y) \in [a, b]^2} |\tilde{K}_N(x, y) - \mathbb{A}(x, y)| = 0$$

où \mathbb{A} est le noyau d'Airy défini par

$$\mathbb{A}(x, y) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai(y)Ai'(x)}{(x-y)},$$

Ai : fonction d'Airy standard i.e la solution de l'équation différentielle

$$f'' - xf = 0,$$

telle que, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \frac{\exp^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} (1 + o(1)).$$

Preuve : En utilisant les formules (4.4.2) et (4.4.3), on voit aisément que

$$K_N(x, y) = \frac{\Psi_N(x)\Psi'_N(y) - \Psi_N(y)\Psi'_N(x)}{x - y} - \frac{1}{2}\Psi_N(x)\Psi_N(y).$$

Ainsi pour tous x et y dans $[a, b]$

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_N(x, y) \\ &= \frac{\Psi_N(2\sqrt{N}+xN^{-1/6})\Psi'_N(2\sqrt{N}+yN^{-1/6}) - \Psi_N(2\sqrt{N}+yN^{-1/6})\Psi'_N(2\sqrt{N}+xN^{-1/6})}{x-y} \\ & \quad - \frac{N^{-1/6}}{2}\Psi_N(2\sqrt{N}+xN^{-1/6})\Psi_N(2\sqrt{N}+yN^{-1/6}). \end{aligned}$$

Posons

$$A_N(x) = N^{1/12}\Psi_N(2\sqrt{N}+xN^{-1/6}).$$

On a

$$A'_N(x) = N^{-1/12}\Psi'_N(2\sqrt{N}+xN^{-1/6}),$$

et

$$\tilde{K}_N(x, y) = \frac{A_N(x)A'_N(y) - A_N(y)A'_N(x)}{x - y} - \frac{1}{2N^{1/3}}A_N(x)A_N(y).$$

Lemma 4.4.3. (*Admis*) Soit $C > 0$.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{u \in \mathbb{C}; |u| < C} |A_N(u) - A_i(u)| = 0.$$

(voir Remarque 4.4.3).

Les fonctions A_N étant holomorphes, on peut déduire du lemme 4.4.3 que A'_N (et d'ailleurs toute dérivée $A_N^{(l)}$) converge également vers A_i' (resp. $A_i^{(l)}$) uniformément sur les compacts de \mathbb{C} . En utilisant (4.4.6), on déduit aisément Proposition 4.4.5. \square

D'après la proposition 4.3.4, nous pouvons en déduire que pour tout intervalle borné $[a, b]$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(N^{\frac{2}{3}}(\frac{\lambda_l}{\sqrt{N}} - 2) \notin [a, b], \forall l = 1, \dots, N) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{[a, b]^k} \det \left((A(y_i, y_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right) dy_1 \cdots dy_k$$

où $A(x, y)$ est le noyau d'Airy. A l'aide d'arguments techniques que nous n'aborderons pas ici, on peut en fait faire tendre b vers $+\infty$ et obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.4.3. *Pour tout réel t ,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(N^{\frac{2}{3}}(\frac{\lambda_{max}}{\sqrt{N}} - 2) \leq t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{[t, +\infty]^k} \det \left((A(y_i, y_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right) dy_1 \cdots dy_k := F_2(t).$$

Théorème 4.4.4. (admis) La fonction $F_2(t)$ est la fonction de répartition d'une probabilité et admet la représentation suivante :

$$F_2(t) = \exp \left(- \int_t^{+\infty} (x-t)q(x)^2 dx \right),$$

où q satisfait l'équation de Painlevé II

$$q'' = tq + 2q^3, \quad q(t) = A_i(t)(1 + o(1)), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

F_2 est appelée loi de Tracy-Widom.

Remarque 4.4.3. L'obtention des Lemmes 4.4.2 et 4.4.3 est encore basée sur la réécriture suivante des polynômes d'Hermite

$$P_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\nu!}} \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int (i\xi)^\nu e^{-\xi^2/2 - i\xi x} d\xi, \quad (4.4.10)$$

mais

$$N^\alpha \Psi_\nu \left(a\sqrt{N} + \frac{t}{N^\beta} \right) = \frac{N^\alpha}{\sqrt{\nu!}} \frac{e^{\frac{(a\sqrt{N} + \frac{t}{N^\beta})^2}{4}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int (i\xi)^\nu e^{-\xi^2/2 - i\xi \frac{t}{N^\beta} - ia\xi\sqrt{N}} d\xi$$

dont l'évaluation asymptotique quand $N \rightarrow +\infty$ nécessite une "méthode de Laplace" plus élaborée appelée méthode du col ou méthode de steepest descent permettant d'étudier des intégrales curvilignes de la forme $\int_C (f(z))^s g(z) dz$ avec f et g analytiques.

Chapitre 5

Modèle matriciel de loi invariante par conjugaison unitaire associé à un potentiel V et mesure d'équilibre

Si W_N est de type $GUE(N, 1)$, alors la loi de la matrice renormalisée $\frac{W_N}{\sqrt{N}}$ admet pour densité $\frac{1}{C_N} \exp(-\frac{N}{2} \text{Tr} H^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dH sur l'ensemble des matrices Hermitiennes. On sait qu'alors la mesure spectrale empirique des valeurs propres converge vers la loi du demi-cercle μ_{sc} . Le but de ce chapitre est de considérer d'autres potentiels V que $x \mapsto x^2/2$ (V est continue, positive, vérifiant certaines conditions) et d'étudier l'asymptotique quand $N \rightarrow +\infty$ de la mesure spectrale empirique moyenne des valeurs propres d'une matrice aléatoire admettant une densité de la forme

$$\mathbb{P}_N(dH) = \frac{1}{C_N} \exp(-N \text{Tr} V(H)) \quad (5.0.1)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dH sur l'ensemble des matrices Hermitiennes. Les notes de ce chapitre s'inspirent amplement des chapitres 6 et 7 du cours de Jacques Faraut, Université Virtuelle de Tunis 2007.

En utilisant la formule de Weyl, on obtient comme on l'avait obtenu dans le cas du GUE le résultat suivant.

Théorème 5.0.5. *La loi jointe des valeurs propres d'une matrice aléatoire Hermitienne de loi \mathbb{P}_N , restreinte aux fonctions symétriques sur \mathbb{R}^N , est absolument*

continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_N} \exp\left(-N \sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^2,$$

où Z_N est une constante de normalisation.

La loi jointe des valeurs propres ordonnées $\lambda_1(M_N) \leq \dots \leq \dots \leq \lambda_N(M_N)$ d'une matrice M_N aléatoire Hermitienne de loi \mathbb{P}_N , est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et a pour densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{N!}{\tilde{Z}_N} \mathbf{1}_{x_1 < \dots < x_N} \exp\left(-N \sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^2,$$

où \tilde{Z}_N est une constante de normalisation.

Remarque 5.0.4. Soit $g_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable telle que $\mu(dx) = g_N(x)dx$ vérifie les conditions du début du paragraphe 4.1. Soit

$$p_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_N} \prod_{i=1}^N g_N(x_i) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^2.$$

Alors on peut "dérouler" le formalisme du paragraphe 4.2 en remplaçant $e^{-V(x)}$ par $g_N(x)$ pour obtenir

$$p_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \det\left((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N}\right) \quad (5.0.2)$$

où

$$K_N(x_i, x_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \{\omega_N(x_i)\}^{1/2} \{\omega_N(x_j)\}^{1/2} P_l^{(N)}(x_i) P_l^{(N)}(x_j),$$

$$\omega_N(x) = g_N(x),$$

les polynômes $P_l^{(N)}$ sont les polynômes orthonormaux associés à ω_N .

En particulier, la loi jointe des valeurs propres d'une matrice aléatoire Hermitienne de loi \mathbb{P}_N , restreinte aux fonctions symétriques sur \mathbb{R}^N , vérifiant les conditions de la remarque 5.0.4 avec $g_N(x) = \exp(-NV(x))$, admet une forme déterminantale. Cependant, nous n'exploiterons pas ici cette forme déterminantale mais nous obtiendrons la limite de la mesure spectrale empirique moyenne des valeurs propres comme minimiseur d'un problème variationnel. L'idée de base est de remarquer que

$$p_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_N} \exp\left\{-N^2 \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{|x_i - x_j|} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(x_i)\right)\right\}$$

Ceci conduit à introduire pour toute mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} , la quantité

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} \log \frac{1}{|x-y|} d\mu(x)d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} V(x)d\mu(x).$$

I est appelée *énergie* de la mesure μ . On pressent alors que le comportement asymptotique sera déterminé par le minimiseur de cette énergie. Ce minimiseur est appelé *mesure d'équilibre*.

5.1 Existence et unicité de la mesure d'équilibre

Nous considérerons un potentiel $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continu tel que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (V(x) - \log(1+x^2)) = +\infty. \quad (5.1.1)$$

Soit $H(x) = V(x) - \log(1+x^2)$. H étant continue et vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x) = +\infty. \quad (5.1.2)$$

est bornée inférieurement. Appelons m sa borne inférieure.

Définissons

$$K(x, y) = \log \frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{2}V(x) + \frac{1}{2}V(y), \text{ si } x \neq y, \quad (5.1.3)$$

$$K(x, x) = +\infty.$$

En remarquant que pour tous réels x, y , $1 + 2xy + x^2y^2 = (1 + xy)^2 \geq 0$, on obtient aisément que

$$|x-y| \leq \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} \quad (5.1.4)$$

puis

$$K(x, y) \geq \frac{1}{2}H(x) + \frac{1}{2}H(y) \geq m. \quad (5.1.5)$$

Pour toute mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} , on peut donc définir l'énergie $I(\mu)$ à valeurs dans $[m; +\infty]$ en posant

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y)\mu(dx)\mu(dy).$$

Proposition 5.1.1. *Si $\mu(dx) = f(x)dx$ où f est une fonction continue à support compact alors $I(\mu) < +\infty$.*

Preuve : La fonction $x \mapsto \log|x|$ étant localement intégrable, la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y) \log \frac{1}{|x-y|} dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \log \frac{1}{|y|} dy$ est continue sur \mathbb{R} et le résultat en découle. \square

Puisque pour toute mesure de probabilité μ , $I(\mu) \geq m$ et qu'il existe au moins une mesure μ telle que $I(\mu)$ soit finie, on peut définir

$$I_0 = \inf\{I(\mu), \mu \text{ mesure de probabilité sur } \mathbb{R}\}.$$

Théorème 5.1.1. *Il existe une et une seule mesure de probabilité μ_e sur \mathbb{R} telle que $I(\mu_e) = I_0$. De plus μ_e est à support compact.*

Pour démontrer l'existence d'une telle mesure, nous allons établir le résultat suivant :

Lemma 5.1.1. *$\mu \mapsto I(\mu)$ est semi-continue inférieurement sur l'ensemble des mesures de probabilité muni de la convergence étroite.*

Preuve : Définissons pour tout réel $b > 0$,

$$K_b(s, t) = \min\{K(s, t), b\}.$$

On a donc pour tout b , K_b continu, borné et $K_b \leq K$. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur \mathbb{R} convergeant étroitement vers μ . On a pour tout n et pour tout b ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_b(x, y) \mu_n(dx) \mu_n(dy) \leq I(\mu_n).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} K_b(x, y) \mu(dx) \mu(dy) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} K_b(x, y) \mu_n(dx) \mu_n(dy) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I(\mu_n). \end{aligned}$$

D'autre part $K_b(x, y)$ croit vers $K(x, y)$ quand b croit vers $+\infty$ avec $K_b \geq \min(b, 0)$. Par convergence monotone on obtient donc

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I(\mu_n). \square$$

Nous utiliserons le critère de compacité suivant.

Théorème 5.1.2. *(Critère de Prokhorov) Soit M un ensemble de mesures de probabilité sur \mathbb{R} . L'ensemble M est relativement compact pour la topologie étroite si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall \mu \in M, \mu(K^c) \leq \epsilon.$$

Corollaire 5.1.1. *Soit M un ensemble de mesures de probabilité sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe une fonction mesurable $h \geq 0$ vérifiant*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = +\infty$$

et une constante C telle que $\forall \mu \in M$,

$$\int h(t) d\mu(t) \leq C.$$

Alors l'ensemble M est relativement compact.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$; $\exists A > 0$, si $|t| \geq A$ alors $h(t) \geq \frac{1}{\epsilon}$ et donc pour $\mu \in M$,

$$\frac{1}{\epsilon} \mu(\{t \in \mathbb{R}, |t| > A\}) \leq \int_{|t| > A} h(t) d\mu \leq \int h(t) d\mu \leq C$$

et

$$\mu([-A; A]^c) \leq C\epsilon.$$

On conclut par le critère de Prokhorov. \square

Soit $\alpha > I_0 \geq m$ et $\mathcal{A}_\alpha = \{\mu \text{ mesure de probabilité sur } \mathbb{R}; I(\mu) \leq \alpha\}$. D'après Lemme 5.1.1, \mathcal{A}_α est fermé. La première inégalité de (5.1.5) implique que pour tout μ dans \mathcal{A}_α , $\int [H(x) - m] d\mu(x) \leq \alpha - m$ avec $\alpha - m > 0$. D'après Corollaire 5.1.1, on peut donc conclure que \mathcal{A}_α est compact. $\mu \mapsto I(\mu)$ étant semi-continue inférieurement est minorée sur \mathcal{A}_α et y atteint sa borne inférieure qui est aussi sa borne inférieure sur l'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbb{R} i.e I_0 . Ainsi il existe μ tel que $I(\mu) = I_0$.

Pour démontrer l'unicité de la mesure minimisante, on montre tout d'abord que si μ est une mesure minimisante alors μ est à support compact; l'unicité découle alors de la stricte convexité de $\mu \mapsto I(\mu)$ sur l'ensemble des mesures de probabilité à support compact sur \mathbb{R} .

Commençons donc par démontrer que si μ vérifie $I(\mu) = I_0$ alors μ est à support compact. Soit $a > 0$ tel que,

$$\forall x, |x| > a, H(x) + \int H(y) d\mu(y) - 2I_0 > 0. \quad (5.1.6)$$

Appelons $A = \{x, |x| > a\}$. Pour tout $t \in]0; 1[$, définissons la mesure de probabilité suivante :

$$\mu_t = \frac{1 + t\mathbf{1}_A}{1 + t\mu(A)} \mu.$$

Puisque $\mu_0 = \mu$, le minimum de $I(\mu_t)$ est atteint en $t = 0$, donc

$$\frac{d}{dt} I(\mu_t)|_{t=0} = 0$$

ce qui donne

$$2\mu(A)I_0 = \int K(x, y) (\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_A(y)) \mu(dx) \mu(dy). \quad (5.1.7)$$

En intégrant en la variable x la première inégalité de (5.1.5) : $K(x, y) \geq \frac{1}{2}H(x) + \frac{1}{2}H(y)$ nous obtenons $\int \mathbf{1}_A(x) K(x, y) d\mu(x) \geq \frac{1}{2} \int_A H(x) d\mu(x) + \frac{1}{2} H(y) \mu(A)$ puis en intégrant en la variable y ,

$$\int \mathbf{1}_A(x) K(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \geq \frac{1}{2} \int_A H(x) d\mu(x) + \frac{1}{2} \mu(A) \int H(y) d\mu(y). \quad (5.1.8)$$

(5.1.7), (5.1.8) impliquent

$$2\mu(A)I_0 \geq \int_A H(x)d\mu(x) + \mu(A) \int H(y)d\mu(y),$$

ou encore

$$\int_A \left(H(x) + \int H(y)d\mu(y) - 2I_0 \right) d\mu(x) \leq 0. \quad (5.1.9)$$

(5.1.6) et (5.1.9) impliquent $\mu(A) = 0$ et donc que le support de μ est inclus dans $[-a; a]$.

Pour démontrer la stricte convexité de $\mu \mapsto I(\mu)$ sur l'ensemble des mesures de probabilité à support compact sur \mathbb{R} , nous utiliserons la proposition suivante.

Proposition 5.1.2. *Soit μ une mesure de Radon réelle sur \mathbb{R} de support compact et d'intégrale nulle. Alors*

$$\int \log \frac{1}{|x-y|} \mu(dx)\mu(dy) = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t} dt, \quad (5.1.10)$$

où $\hat{\mu}$ est la transformée de Fourier de la mesure μ ,

$$\hat{\mu}(t) = \int e^{itx} \mu(dx).$$

Preuve : Soit pour $0 < \epsilon < 1$,

$$F_\epsilon(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t} \frac{1 - \cos tx}{t} dt.$$

On a

$$F'_\epsilon(x) = \int e^{-\epsilon t} \sin tx dt = \frac{x}{\epsilon^2 + x^2}.$$

Ainsi

$$F_\epsilon(x) = \log \sqrt{(\epsilon^2 + x^2)} - \log \epsilon. \quad (5.1.11)$$

En utilisant (5.1.11) et les faits que $\hat{\mu}(0) = 0$ et $\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)}$, on obtient

$$\int \int \log ((x-y)^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} d\mu(x)d\mu(y) = - \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t} \frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t} dt.$$

Décomposons $\mu = \mu^+ - \mu^-$ où μ^+ et μ^- sont deux mesures positives. Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int \int \log ((x-y)^2 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \{d\mu^+(x)d\mu^+(y) + d\mu^-(x)d\mu^-(y)\} \\ &= \int \int \log ((x-y)^2 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \{d\mu^+(x)d\mu^-(y) + d\mu^-(x)d\mu^+(y)\} + \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t} \frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t} dt. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Remarquons alors que $\log((x-y)^2 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$ croit vers $\log \frac{1}{|x-y|}$ lorsque ϵ décroît vers zéro et que $\forall 0 < \epsilon < 1, \forall (x, y) \in \text{supp}(\mu) \times \text{supp}(\mu), \log((x-y)^2 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \geq \log \frac{1}{\sup_{(s,t) \in (\text{supp}(\mu))^2} ((s-t)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à chacune des intégrales de (5.1.12) et obtenir

$$\begin{aligned} & \int \int \log \frac{1}{|x-y|} \{d\mu^+(x)d\mu^+(y) + d\mu^-(x)d\mu^-(y)\} \\ &= \int \int \log \frac{1}{|x-y|} \{d\mu^+(x)d\mu^-(y) + d\mu^-(x)d\mu^+(y)\} + \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\mu}(t)|^2}{t} dt \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

et donc (5.1.10). \square

Soient μ_0 et μ_1 deux mesures distinctes de probabilité à support compact sur \mathbb{R} et, pour $0 < t < 1$, $\mu_t = (1-t)\mu_0 + t\mu_1$. Soit $\nu = \mu_1 - \mu_0$. On a

$$I(\mu_t) = t^2 \int \log \frac{1}{|x-y|} d\nu(x)d\nu(y) + t \int \left(2 \int \log \frac{1}{|x-y|} d\mu_0(x) + V(y) \right) d\nu(y) + I(\mu_0).$$

D'après Proposition 5.1.2, $\int \log \frac{1}{|x-y|} d\nu(x)d\nu(y) > 0$. Ainsi $t \mapsto f(t) = I(\mu_t)$ est strictement convexe : $f(t) < (1-t)f(0) + tf(1)$ i.e $I(\mu_t) < (1-t)I(\mu_0) + tI(\mu_1)$. Ceci implique l'unicité de la mesure minimisante et termine la démonstration du Théorème 5.1.1.

5.2 Convergence de la mesure spectrale empirique vers la mesure d'équilibre

Soit

$$p_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_N} \exp \left(-N \sum_{i=1}^N V(x_i) \right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^2,$$

En utilisant

$$\prod_{j < k} |x_k - x_j|^2 = \exp \left\{ 2 \sum_{j < k} \log |x_k - x_j| \right\}$$

et

$$\log |x - y| \leq \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \log(y^2 + 1),$$

on montre facilement que, si

$$V(x) - \log(1 + x^2) \rightarrow_{x \rightarrow \pm\infty} +\infty,$$

alors $\int p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$ est bien convergente. Soit μ_N la mesure de probabilité définie par, pour toute fonction continue bornée sur \mathbb{R} ,

$$\int \phi(t) \mu_N(dt) = \int \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i) \right) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

μ_N est la mesure spectrale empirique intégrée des valeurs propres du modèle Hermitien de loi \mathbb{P}_N définie en (5.0.1). Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.2.1. *La mesure μ_N converge étroitement vers la mesure d'équilibre μ_e .*

Définissons

$$K_N(x) = \sum_{i \neq j} K(x_i, x_j)$$

où $K(x, y)$ est définie en (5.1.3). Pour $\eta > 0$, soit

$$A_{\eta, N} = \{x \in \mathbb{R}^N, K_N(x) \leq (I_0 + \eta)N^2\}.$$

Lemma 5.2.1. *L'ensemble $A_{\eta, N}$ est compact et*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{c_{A_{\eta, N}}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = 0.$$

Preuve : La fonction K_N étant s.c.i (comme limite d'une suite croissante de fonctions continues), $A_{\eta, N}$ est fermé. De l'inégalité (5.1.5) : $K(x, y) \geq \frac{1}{2}H(x) + \frac{1}{2}H(y)$, nous pouvons déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

$$K_N(x) \geq (N-1) \sum_{i=1}^N H(x_i), \quad (5.2.1)$$

Donc

$$A_{\eta, N} \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N H(x_i) \leq \frac{N^2}{N-1}(I_0 + \eta) \right\}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x) = +\infty$, nous pouvons en déduire que $A_{\eta, N}$ est borné. $A_{\eta, N}$ est donc compact. Nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{c_{A_{\eta, N}}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &= \frac{1}{Z_N} \int_{c_{A_{\eta, N}}} \exp\left(-N \sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \prod_{j < k} |x_k - x_j|^2 dx_1 \dots dx_N \\ &= \frac{1}{Z_N} \int_{c_{A_{\eta, N}}} \exp\left(-N \sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \exp\left(-\sum_{j \neq k} \log\left(\frac{1}{|x_k - x_j|}\right)\right) dx_1 \dots dx_N. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
K_N(x) &= \sum_{i \neq j} \log\left(\frac{1}{|x_i - x_j|}\right) + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2}(V(x_i) + V(x_j)) \\
&= \sum_{i \neq j} \log\left(\frac{1}{|x_i - x_j|}\right) + \sum_{i=1}^N (N-1)V(x_i) \\
&= \sum_{i \neq j} \log\left(\frac{1}{|x_i - x_j|}\right) + N \sum_{i=1}^N V(x_i) - \sum_{i=1}^N V(x_i)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\int_{c_{A_{\eta,N}}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= \frac{1}{Z_N} \int_{c_{A_{\eta,N}}} \exp\left(-K_N(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^N V(x_i)\right) dx_1 \dots dx_N \\
&\leq \frac{1}{Z_N} \exp(-(I_0 + \eta)N^2) \left(\int \exp(-V(u)) du\right)^N. \tag{5.2.2}
\end{aligned}$$

Lemma 5.2.2.

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \log \frac{1}{Z_N} \leq I_0.$$

Pour démontrer ce dernier lemme, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemma 5.2.3. (Admis cf [9] p 192) Définissons pour $\epsilon > 0$, la mesure de probabilité $d\mu_\epsilon(x) = \Psi_\epsilon(x)dx$ où $\Psi_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} d\mu_\epsilon(dt)$. Alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\mu_\epsilon) = I(\mu_\epsilon) (= I_0).$$

Preuve du Lemme 5.2.2 : Soit $\delta > 0$. Soit $0 < \epsilon < 1$ tel que $I(\mu_\epsilon) \leq I_0 + \frac{\delta}{2}$ où μ_ϵ est définie dans le lemme 5.2.3. Soit $U_\epsilon = \{t, \Psi_\epsilon(t) > 0\}$. Sur U_ϵ , $1 = \Psi_\epsilon(t) \exp(-\log \Psi_\epsilon(t))$. Nous avons

$$\begin{aligned}
Z_N &= \int \exp\left(-K_N(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^N V(x_i)\right) dx_1 \dots dx_N \\
&\geq \int_{U_\epsilon^N} \exp\left(-K_N(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^N V(x_i) - \sum_{i=1}^N \log \Psi_\epsilon(x_i)\right) \prod_{i=1}^N \Psi_\epsilon(x_i) dx_1 \dots dx_N \\
&\geq \exp \int_{U_\epsilon^N} \left(-K_N(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^N V(x_i) - \sum_{i=1}^N \log \Psi_\epsilon(x_i)\right) \prod_{i=1}^N \Psi_\epsilon(x_i) dx_1 \dots dx_N
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue par l'inégalité de Jensen. Ainsi,

$$\begin{aligned}
-\log Z_N &\leq \int_{U_\epsilon^N} \left(K_N(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^N V(x_i) + \sum_{i=1}^N \log \Psi_\epsilon(x_i) \right) \prod_{i=1}^N \Psi_\epsilon(x_i) dx_1 \dots dx_N \\
&= \int K_N(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^N \Psi_\epsilon(x_i) dx_1 \dots dx_N + N \int V(u) \Psi_\epsilon(u) du \\
&\quad + N \int_{U_\epsilon} \log(\Psi_\epsilon(u)) \Psi_\epsilon(u) du.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\int K_N(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^N \Psi_\epsilon(x_i) dx_1 \dots dx_N \\
&= \sum_{i \neq j} \int \log\left(\frac{1}{|x_i - x_j|}\right) \Psi_\epsilon(x_i) \Psi_\epsilon(x_j) dx_i dx_j + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} (V(x_i) + V(x_j)) \Psi_\epsilon(x_i) \Psi_\epsilon(x_j) dx_i dx_j \\
&= N(N-1) \left[\int \log\left(\frac{1}{|u-v|}\right) \Psi_\epsilon(u) \Psi_\epsilon(v) dudv + \int V(u) \Psi_\epsilon(u) du \right] \\
&= N(N-1) I(\mu_\epsilon).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{1}{N^2} \log \frac{1}{Z_N} \leq \frac{N(N-1)}{N^2} I(\mu_\epsilon) + \frac{1}{N} \int V(u) \Psi_\epsilon(u) du + \frac{1}{N} \int_{U_\epsilon} \log(\Psi_\epsilon(u)) \Psi_\epsilon(u) du,$$

puis pour N suffisamment grand, $\frac{1}{N^2} \log \frac{1}{Z_N} \leq I_0 + \delta$ ce qui termine la démonstration du lemme 5.2.2. \square

Soit $0 < \epsilon < \eta$. D'après le lemme 5.2.2, pour N suffisamment grand,

$$\frac{1}{N^2} \log \frac{1}{Z_N} \leq I_0 + \epsilon.$$

D'après (5.2.2), on a donc pour N suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
&\int_{c_{A_{\eta,N}}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&\leq \exp((I_0 + \epsilon)N^2) \exp(-(I_0 + \eta)N^2) \left(\int \exp(-V(u)) du \right)^N \\
&= \exp((\epsilon - \eta)N^2) \left(\int \exp(-V(u)) du \right)^N.
\end{aligned}$$

On obtient alors aisément

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{c_{A_{\eta,N}}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = 0$$

ce qui termine la démonstration du lemme 5.2.1. \square .

Soit f une fonction continue bornée sur \mathbb{R} et pour tout entier non nul N , définissons la fonction F_N définie sur \mathbb{R}^N par

$$F_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

Soit $0 < \eta \leq 1$. L'ensemble $A_{\eta, N}$ étant compact, la fonction F_N atteint son maximum sur $A_{\eta, N}$ en un point

$$x^{(\eta, N)} = \left(x_1^{(\eta, N)}, \dots, x_N^{(\eta, N)} \right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int f(t) \mu_N(dt) &= \int_{A_{\eta, N}} f(t) \mu_N(dt) + \int_{cA_{\eta, N}} f(t) \mu_N(dt) \\ &= \int_{A_{\eta, N}} F_N(x_1, \dots, x_N) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &\quad + \int_{cA_{\eta, N}} F_N(x_1, \dots, x_N) p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N, \end{aligned}$$

d'où découle aisément

$$\int f(t) \mu_N(dt) \leq F_N(x^{(\eta, N)}) + \|f\|_{\infty} \int_{cA_{\eta, N}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (5.2.3)$$

Définissons la mesure de probabilité

$$\nu_{\eta}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i^{(\eta, N)}}.$$

L'inégalité (5.2.3) peut se réécrire

$$\int f(t) \mu_N(dt) \leq \int f(t) \nu_{\eta}^{(N)}(dt) + \|f\|_{\infty} \int_{cA_{\eta, N}} p_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (5.2.4)$$

Définissons pour tout réel $b > 0$,

$$K_b(s, t) = \min\{K(s, t), b\}.$$

On a donc pour tout b , K_b continu, borné et $K_b \leq K$. Posons pour toute mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} ,

$$I^b(\mu) = \int_{\mathbb{R}^2} K_b(s, t) \mu(ds) \mu(dt).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
I^b(\nu_\eta^{(N)}) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \min \left(K(x_i^{(\eta,N)}, x_j^{(\eta,N)}), b \right) \\
&= \frac{b}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \min \left(K(x_i^{(\eta,N)}, x_j^{(\eta,N)}), b \right) \\
&\leq \frac{b}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} K(x_i^{(\eta,N)}, x_j^{(\eta,N)}) \\
&= \frac{b}{N} + \frac{1}{N^2} K_N(x^{(\eta,N)}) \\
&\leq \frac{b}{N} + I_0 + \eta.
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

De l'inégalité (5.2.1) :

$$K_N(x) \geq (N-1) \sum_{i=1}^N H(x_i),$$

nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}
(N-1) \sum_{i=1}^N H(x_i^{(\eta,N)}) &\leq K_N(x_i^{(\eta,N)}) \\
&\leq N^2(I_0 + \eta)
\end{aligned}$$

et donc

$$\int H(t) \nu_\eta^{(N)}(dt) \leq \frac{N}{N-1} (I_0 + \eta)$$

puis pour tout $N \geq 2$ et tout $0 < \eta \leq 1$,

$$\int (H(t) - m) \nu_\eta^{(N)}(dt) \leq 2(I_0 + 1) - m.$$

D'après le corollaire 5.1.1, il découle que l'ensemble $\{\nu_\eta^{(N)}, N \geq 2, 0 < \eta \leq 1\}$ est relativement compact.

Soit $\mu_{\phi(N)}$ une sous-suite telle que

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \int f(t) \mu_N(dt) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int f(t) \mu_{\phi(N)}(dt).$$

Il existe une sous suite $\nu_\eta^{(\psi(N))}$ extraite de $\nu_\eta^{(\phi(N))}$ convergente vers ν_η . Nous avons d'après (5.2.5),

$$I^b(\nu_\eta^{(\psi(N))}) \leq \frac{b}{\psi(N)} + I_0 + \eta.$$

$\nu_\eta^{(\psi(N))} \otimes \nu_\eta^{(\psi(N))}$ convergeant étroitement vers $\nu_\eta \otimes \nu_\eta$ et K_b étant continue bornée, $I^b(\nu_\eta^{(\psi(N))})$ converge vers $I^b(\nu_\eta)$ quand N tend vers $+\infty$. On obtient alors

$$I^b(\nu_\eta) \leq I_0 + \eta. \quad (5.2.6)$$

D'autre part $K_b(x, y)$ croit vers $K(x, y)$ quand b croit vers $+\infty$ avec $K_b \geq \min(m, 0)$. Par convergence monotone on obtient donc

$$I(\nu_\eta) \leq I_0 + \eta. \quad (5.2.7)$$

D'après le lemme du porte-manteau, pour tout ouvert O ,

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \nu_\eta^{(\psi(N))}(O) \geq \nu_\eta(O).$$

D'après le critère de Prokhorov, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$, $\forall N \geq 2, \forall 0 < \eta \leq 1, \nu_\eta^{(N)}({}^c K) \leq \epsilon$. Ainsi $\forall \epsilon > 0, \forall 0 < \eta \leq 1$,

$$\epsilon \geq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \nu_\eta^{(\psi(N))}({}^c K) \geq \nu_\eta({}^c K),$$

et $(\nu_\eta)_\eta$ est donc relativement compacte. Or de (5.2.7) et du fait que $\mu \mapsto I(\mu)$ est s.c.i, on peut déduire que pour toute sous-suite convergente $\nu_{\tau(\eta)}$ vers une certaine mesure ν ,

$$I(\nu) \leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} I(\nu_{\tau(\eta)}) \leq I_0$$

ce qui implique $\nu = \mu_\epsilon$. On peut donc déduire que $(\nu_\eta)_{\eta > 0}$ converge vers μ_ϵ quand η tend vers zéro. D'après (5.2.4),

$$\int f(t) \mu_{\psi(N)}(dt) \leq \int f(t) \nu_\eta^{(\psi(N))}(dt) + \|f\|_\infty \int_{{}^c A_{\eta, \psi(N)}} p_{\psi(N)}(x_1, \dots, x_{\psi(N)}) dx_1 \dots dx_{\psi(N)}.$$

Ainsi en utilisant Lemme 5.2.1

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \int f(t) \mu_N(dt) \leq \int f(t) \nu_\eta(dt),$$

puis en faisant tendre η vers zéro,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \int f(t) \mu_N(dt) \leq \int f(t) \mu_\epsilon(dt).$$

En changeant f en $-f$ nous obtenons

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \int f(t) \mu_N(dt) \geq \int f(t) \mu_\epsilon(dt).$$

Finalement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int f(t) \mu_N(dt) = \int f(t) \mu_\epsilon(dt).$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 5.2.1. \square

Chapitre 6

Introduction aux probabilités libres

La théorie des probabilités libres est une théorie de probabilité non commutative dans laquelle le concept d'indépendance a été remplacé par celui de liberté :

probabilités libres = probabilités non commutatives + liberté.

La notion de liberté a été introduite par Dan Voiculescu dans les années 80 pour l'étude de problèmes de classification d'algèbres d'opérateurs. Voici quelques ouvrages d'introduction à la théorie.

- Dan Voiculescu, *Lectures on free probability theory*, (279-349) Lectures on probability theory and statistics, Saint-Flour 1998, Lecture Notes in Math., 1738, Springer, 2000.
- Voiculescu, D.V., Dykema, K. and Nica, A., *Free random variables*, CRM Monograph Series No. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- Alexandru Nica, Roland Speicher, *Lectures on the combinatorics of free probability*, Volume 13, Cambridge University Press, 2006
- Hiai F., Petz D. (2000) *The semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 77, AMS.

6.1 Espace de probabilité non commutatif

La mécanique quantique a été l'une des plus grandes motivations pour développer une théorie des probabilités non commutatives (cf P.Biane "Calcul Stochastique non commutatif" Lecture Notes in Mathematics 1608 Ecole d'Eté de probabilité de Saint-Flour XXIII 1993).

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité classique. L'espace des variables aléatoires complexes $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est muni de sa structure d'espace de Hilbert :

$$\langle f, g \rangle = \mathbb{E}(f\bar{g}).$$

Soit X une variable aléatoire réelle bornée. Définissons l'opérateur de multiplication

$$M_X : \begin{array}{l} L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P) \\ f \mapsto Xf \end{array}$$

X étant réel, M_X est autoadjoint. Remarquons que $\mathbb{E}(X^n) = \langle (M_X)^n 1, 1 \rangle$.

L'idée de base ayant son origine dans la mécanique quantique est de remplacer l'espace de probabilité usuel par un couple (H, Ψ) où H Hilbert et Ψ un vecteur de H de norme 1, et les variables aléatoires par les opérateurs autoadjoints sur H , $A \mapsto \langle A\Psi, \Psi \rangle$ remplaçant l'espérance. On dit que la mesure μ sur le spectre de A définie par $\mu(f) = \langle f(A)\Psi, \Psi \rangle$ est la loi de A dans l'état Ψ . (Ψ est aussi appelé fonction d'onde). Voici une version algébrique générale d'un espace de probabilité non commutatif.

6.1.1 Définition et exemples

Definition 6.1.1. Une algèbre \mathcal{A} est un espace vectoriel sur \mathbb{C} muni d'une opération (la multiplication) $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}^2 \mapsto a_1 a_2 \in \mathcal{A}$ qui est

- bilinéaire : si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ alors

$$(\lambda a_1 + \mu a_2) a_3 = \lambda a_1 a_3 + \mu a_2 a_3.$$

$$a_1 (\lambda a_2 + \mu a_3) = \lambda a_1 a_2 + \mu a_1 a_3.$$

- associative :

$$a_1 (a_2 a_3) = (a_1 a_2) a_3.$$

Definition 6.1.2. On dit qu'une algèbre \mathcal{A} est unitaire ou unifière elle possède un élément unité pour la multiplication.

Definition 6.1.3. Un espace de probabilité non commutatif est un couple (\mathcal{A}, ϕ) où \mathcal{A} est une algèbre complexe unitaire et $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire sur \mathcal{A} tel que $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$. Un élément a de \mathcal{A} est appelé variable aléatoire non commutative. $\phi(a^n)$ est appelé le n ième moment de a .

Exemples

1. \mathcal{A} : L'ensemble $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ des variables aléatoires essentiellement bornées sur un espace de probabilité classique (Ω, \mathcal{F}, P) . ϕ : l'espérance \mathbb{E}
2. \mathcal{A} : L'ensemble $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H . $\phi : \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(A) = \langle A\Psi, \Psi \rangle$, où Ψ vecteur de norme 1 de H .
3. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité classique. Soit \mathcal{M}_n l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients complexes et $\mathcal{A}_n = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{M}_n)$ l'algèbre des matrices aléatoires $n \times n$ admettant des moments de tout ordre. Soit

$$\phi_n : A \mapsto \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(A)).$$

(\mathcal{A}_n, ϕ_n) est un espace de probabilité non-commutatif.

Definition 6.1.4. Soit $\mu_a : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire sur les polynomes définie par

$$\mu_a(P) = \phi(P(a)).$$

μ_a est appelée loi de a . Plus généralement, si $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ est une famille de variables aléatoires non commutatives dans (\mathcal{A}, ϕ) , soit $\mathbb{C} \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ l'ensemble des polynomes à n indéterminées non commutatives X_i et soit $\mu_{(a_i)_{i=1,\dots,n}} : \mathbb{C} \langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par

$$\mu_{(a_i)_{i=1,\dots,n}} = \phi(P((a_i)_{i=1,\dots,n})).$$

$\mu_{(a_i)_{i=1,\dots,n}}$ est appelée loi de la famille $(a_i)_{i=1,\dots,n}$.

Dans les exemples 1 et 3 d'espaces de probabilité non commutatifs :

- x v.a réelle dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La loi de x dans $(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P), \mathbb{E})$ = les moments de la loi classique de x .
- Dans le contexte matriciel de l'exemple 2 de la section 2.1, soit $A = A^*$ une matrice aléatoire autoadjointe de \mathcal{A}_n . Soient $\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_n(\omega)$ les n valeurs propres de $A(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned} \phi_n(A^k) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(A^k)) \\ &= \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n [\lambda_i(\omega)]^k dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}} t^k (d\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(\omega)})(t) \right) dP(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^k d\nu(t) \end{aligned}$$

où

$$\nu = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(\omega)} \right) dP(\omega)$$

La loi de A dans (\mathcal{A}_n, ϕ_n) est donc la collection des moments de la moyenne ν de la mesure μ_n (aléatoire !) de comptage des valeurs propres de A :

$$\nu = \mathbb{E}(\mu_n)$$

où

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}.$$

Le schéma suivant résume les notions introduites précédemment.

probabilités classiques	probabilités non commutatives
$L^\infty(\Omega, P)$	algèbre non commutative unitaire \mathcal{A}
$X \in L^\infty(\Omega, P)$	variable aléatoire non commutative : $a \in \mathcal{A}$
\mathbb{E}	$\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire , $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$.
loi de X	loi de a : collection des moments $\{\phi(a^n), n \in \mathbb{N}\}$ ou de manière équivalente $\mu_a : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C} \\ P \mapsto \phi(P(a)) \end{cases}$
loi de (X_1, \dots, X_n)	loi de (a_1, \dots, a_n) : $\mu_{(a_i)_{i=1, \dots, n}} : \begin{cases} \mathbb{C} \langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \mathbb{C} \\ P \mapsto \phi(P((a_i)_{i=1, \dots, n})) \end{cases}$

6.2 Cas particuliers fondamentaux d'espaces de probabilité non commutatifs : les C^* -espaces de probabilité

Le but de cette section est d'introduire les C^* -espaces de probabilité, d'expliquer pourquoi il est naturel de considérer ces espaces de probabilité non commutatifs particuliers.

Tout d'abord rappelons le Théorème de Riesz :

Théorème 6.2.1. *Soit X un espace localement compact et $\mathcal{B}(X)$ sa tribu Borélienne. Soit $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions complexes continues et tendant vers zéro à l'infini sur X . Soit ϕ une forme linéaire positive (i.e telle que $f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$) sur $C_0(X)$. Il existe une unique mesure μ positive bornée sur $\mathcal{B}(X)$ telle que*

$$\forall f \in C_0(X), \quad \phi(f) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

D'après le théorème de Riesz, les mesures positives bornées sur X correspondent donc aux formes linéaires positives sur $C_0(X)$. Or $C_0(X)$, muni de la conjugaison classique sur \mathbb{C} pour involution et de la norme de la convergence uniforme sur X est une C^* -algèbre. Rappelons ici les définitions nécessaires à la présentation d'une C^* -algèbre.

Definition 6.2.1. *Soit \mathcal{A} une algèbre sur \mathbb{C} . On appelle involution dans \mathcal{A} une application $a \mapsto a^*$ de \mathcal{A} dans \mathcal{A} telle que*

$$1) (a + b)^* = a^* + b^*$$

$$2) (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*,$$

$$3) (ab)^* = b^* a^*,$$

$$3) (a^*)^* = a. \text{ quels que soient } a, b \in \mathcal{A} \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Une algèbre sur \mathbb{C} munie d'une involution est appelée une algèbre involutive.

$a \in \mathcal{A}$ est dit hermitien si $a^* = a$, normal si $aa^* = a^*a$. Si \mathcal{A} possède un élément unité $1_{\mathcal{A}}$, $a \in \mathcal{A}$ est dit unitaire si $aa^* = a^*a = 1_{\mathcal{A}}$.

Definition 6.2.2. Soit \mathcal{A} une algèbre. \mathcal{A} est une algèbre normée si l'espace vectoriel \mathcal{A} est muni d'une norme et $\forall x, y \in \mathcal{A}$,

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

Definition 6.2.3. On appelle algèbre normée involutive une algèbre normée \mathcal{A} munie d'une involution $a \mapsto a^*$ telle que $\|a^*\| = \|a\|$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Si en outre \mathcal{A} est complète, on dit que \mathcal{A} est une algèbre de Banach involutive.

Definition 6.2.4. \mathcal{A} est une C^* -algèbre si \mathcal{A} est une algèbre de Banach involutive telle que $\|a^*a\| = \|a\|^2$, pour tout a dans \mathcal{A} .

Exemple : Toute sous-algèbre involutive fermée d'un $\mathcal{L}(H)$ est une C^* -algèbre.

De plus, d'après un théorème de Gelfand, toute C^* -algèbre commutative est isomorphe à une algèbre du type $C_0(X)$. Nous référons à 1.4.I "Les C^* -algèbres et leurs représentations", J. Dixmier pour ce résultat.

Il est donc naturel d'essayer de transporter les idées, les techniques et les résultats de la théorie des probabilités classiques au cadre plus général des formes linéaires positives sur une C^* algèbre non commutative cette fois, notion que nous allons maintenant définir.

Definition 6.2.5. $a \in \mathcal{A}$ algèbre involutive, est dit positif si a est de la forme xx^* pour un certain x dans \mathcal{A} . On écrit alors $a \geq 0$.

Definition 6.2.6. Une forme linéaire ϕ sur une algèbre involutive \mathcal{A} est dite positive si $\phi(a) \geq 0$ dès que $a \geq 0$.

Definition 6.2.7. Un état ϕ sur une C^* -algèbre unitaire \mathcal{A} est une forme linéaire positive sur \mathcal{A} tel que $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

Rem : dans le cas commutatif : état \leftrightarrow proba.

Definition 6.2.8. Un espace de probabilité non commutatif (\mathcal{A}, ϕ) est un C^* -espace de probabilité si \mathcal{A} est une C^* -algèbre unitaire et ϕ est un état sur \mathcal{A}

Théorème 6.2.2. Soit (\mathcal{A}, ϕ) est un C^* -espace de probabilité et $a = a^* \in \mathcal{A}$. Alors μ_a peut toujours être décrite par une mesure de probabilité ν_a à support compact sur \mathbb{R} . On identifie μ_a et ν_a . Plus généralement, si a est normal i.e $aa^* = a^*a$, $\mu_{(a, a^*)}$ peut toujours être décrite par une mesure de probabilité $\nu_{(a, a^*)}$ sur \mathbb{C} telle que pour tout polynome Q à deux variables commutatives,

$$\phi(Q(a, a^*)) = \int Q(z, \bar{z}) d\nu_{(a, a^*)}(z).$$

Exemple : Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert de dimension infinie admettant pour base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. On définit l'opérateur u sur H par $ue_k = e_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Son adjoint est donné par

$$u^*e_k = e_{k-1}.$$

On a

$$u^*u = uu^* = id$$

i.e u est unitaire. On considère sur $\mathcal{L}(H)$ l'état

$$\phi(a) := \langle ae_0, e_0 \rangle.$$

On a pour tout $n \geq 0$,

$$\phi(u^n) = \langle u^n e_0, e_0 \rangle = \langle e_n, e_0 \rangle = \delta_{n,0},$$

$$\phi((u^*)^n) = \langle (u^*)^n e_0, e_0 \rangle = \langle e_{-n}, e_0 \rangle = \delta_{n,0}.$$

$u + u^*$ est un opérateur autoadjoint. Puisque u et u^* commutent

$$\phi((u + u^*)^n) = \sum_{p=0}^n C_n^p \phi(u^p (u^*)^{n-p}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ impair} \\ C_n^k & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Les $\alpha_k := C_{2k}^k$ sont caractérisés par la relation de récurrence

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_k = \frac{2}{k}(2k-1)\alpha_{k-1}, \forall k \geq 1.$$

Les moments pairs de *la loi de l'arcsinus*

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}} 1_{]-2;2[}(x) dx$$

vérifient cette relation. En effet, en intégrant par partie,

$$\int_{-2}^2 \frac{x^{2k}}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_{-2}^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} x^{2k-1} dx = (2k-1) \int_{-2}^2 x^{2k-2} \sqrt{4-x^2} dx.$$

Or

$$\int_{-2}^2 x^{2k-2} \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-2}^2 x^{2k-2} \frac{(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \int_{-2}^2 \frac{x^{2k-2}}{\sqrt{4-x^2}} dx - \int_{-2}^2 \frac{x^{2k}}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Posant $m_k := \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{x^{2k}}{\sqrt{4-x^2}} dx$ on a donc

$$m_k = (2k-1)(4m_{k-1} - m_k) \Leftrightarrow m_k = \frac{2}{k}(2k-1)m_{k-1}.$$

La loi de $u + u^*$ dans $(\mathcal{L}(H), \phi)$ est donc la loi de l'arcsinus.

6.3 Définition et premières propriétés de la liberté

Definition 6.3.1. Soit (\mathcal{A}, ϕ) un espace de probabilité non commutatif. Soient $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-algèbres contenant $1_{\mathcal{A}}$. Les \mathcal{A}_i sont libres sous ϕ si $\forall a_1, \dots, a_n$ tels que $\forall k, a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$ avec $i_k \neq i_{k+1}$ et $\phi(a_k) = 0$, on a alors $\phi(a_1 \cdots a_n) = 0$.

Des ensembles de variables non commutatives de (\mathcal{A}, ϕ) sont dits libres si les sous-algèbres respectives qu'ils engendrent avec $1_{\mathcal{A}}$ sont libres.

Remarque : Soit (\mathcal{A}, ϕ) et \mathcal{B} une sous-algèbre contenant $1_{\mathcal{A}}$. Alors les sous-algèbres $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ et \mathcal{B} sont libres. En effet $\phi(a_i) = 0$ pour $a_i \in \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$ signifie $a_i = 0$ et implique donc $a_1 \cdots a_n = 0$ puis $\phi(a_1 \cdots a_n) = 0$.

Non corrélation de variables libres :

Proposition 6.3.1. Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille libre de sous-algèbres de (\mathcal{A}, ϕ) alors les restrictions de ϕ à chaque \mathcal{A}_i déterminent complètement ϕ sur l'algèbre engendrée par les $\mathcal{A}_i, i \in I$.

Preuve : L'algèbre engendrée par les $\mathcal{A}_i, i \in I$ est constituée de combinaisons linéaires de monômes de la forme $a_1 \cdots a_n$ où $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$ avec $i_k \neq i_{k+1}$ pour tout $1 \leq k < n$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $\phi(a_1 \cdots a_n)$ est complètement déterminé par les restrictions de ϕ à chaque \mathcal{A}_i .

- C'est évident pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour tout $k \leq n - 1$. Par définition même de la liberté

$$\phi((a_1 - \phi(a_1)1_{\mathcal{A}}) \cdots (a_n - \phi(a_n)1_{\mathcal{A}})) = 0.$$

En développant le produit ci-dessus on obtient que $\phi(a_1 \cdots a_n)$ s'exprime à l'aide de termes de la forme $\phi(a_{j_1} \cdots a_{j_k})$ avec $k < n$ et la récurrence s'applique. \square

Indépendance algébrique (en général) de variables libres :

Soient a et b deux variables non commutatives libres dans (\mathcal{A}, ϕ) . On a

$$\phi(a^2 b^2) = \phi(a^2) \phi(b^2),$$

$$\phi(abab) = \phi(a^2) \phi(b)^2 + \phi(a)^2 \phi(b^2) - \phi(a)^2 \phi(b)^2.$$

Si a et b commutent on doit donc avoir

$$\phi(a^2) \phi(b^2) = \phi(a^2) \phi(b)^2 + \phi(a)^2 \phi(b^2) - \phi(a)^2 \phi(b)^2,$$

ce qui équivaut à

$$\phi((a - \phi(a)1_{\mathcal{A}})^2) \phi((b - \phi(b)1_{\mathcal{A}})^2) = 0.$$

Prenons par exemple le cas d'opérateurs autoadjoints a et b et ϕ fidèle (i.e $\phi(xx^*) = 0 \implies x = 0$), ceci impliquerait $a = \phi(a)1_{\mathcal{A}}$ ou $b = \phi(b)1_{\mathcal{A}}$. Donc sauf cas trivial deux variables autoadjointes qui commutent ne seront pas libres en général.

La réalisation de v.a. indépendantes en probabilités classiques s'effectue via des produits d'espaces. A la liberté correspond une construction de produits libres d'espaces, dépendant du contexte (algèbres, C^* -algèbres, W^* -algèbres) (cf Chap1 "Free Random Variables" D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica). Soient (\mathcal{A}_1, ϕ_1) et (\mathcal{A}_2, ϕ_2) deux espaces de probabilité non commutatifs. On peut toujours plonger chaque \mathcal{A}_i dans le produit libre des espaces de probabilité non commutatifs (\mathcal{A}_1, ϕ_1) et (\mathcal{A}_2, ϕ_2) noté $(\mathcal{A}_1, \phi_1) * (\mathcal{A}_2, \phi_2)$ de telle sorte que la restriction de $\phi_1 * \phi_2$ à chaque \mathcal{A}_i est alors égale à ϕ_i et \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont libres dans $(\mathcal{A}_1, \phi_1) * (\mathcal{A}_2, \phi_2)$.

6.3.1 Définition de la convolution additive libre

En probabilité classique, la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est la convolution de leurs lois respectives. C'est dans le même esprit que nous allons définir la convolution additive libre.

Soient a, b des variables libres dans un espace de probabilité quelconque (\mathcal{A}, ϕ) . La restriction de ϕ à l'algèbre engendrée par $\{1, a, b\}$ est complètement déterminée par la restriction de ϕ aux sous-algèbres respectivement engendrées par $\{1, a\}$ et $\{1, b\}$. En particulier, les moments $\phi((a + b)^n)$, $n \geq 0$, sont complètement déterminés par les $\phi(a^p)$, $p \geq 0$ et $\phi(b^q)$, $q \geq 0$. Ainsi la loi μ_{a+b} est complètement déterminé par les lois μ_a et μ_b .

Notons Σ l'ensemble des formes linéaires $\mu : \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\mu(1) = 1$. Prenons deux lois μ et ν dans Σ . La variable $a : x \mapsto x$ a pour loi μ dans $(\mathbb{C}(X), \mu)$. De même, la variable $b : x \mapsto x$ a pour loi ν dans $(\mathbb{C}(X), \nu)$. a et b sont libres et de lois respectives μ et ν dans le produit libre $(\mathbb{C}(X), \mu) * (\mathbb{C}(X), \nu)$.

On peut donc définir une opération \boxplus appelée *convolution libre* sur l'ensemble Σ des lois en posant

$$\mu \boxplus \nu = \mu_{a+b}$$

où a et b sont deux variables libres dans un certain espace de probabilité non commutatif (\mathcal{A}, ϕ) et de lois respectives μ et ν .

La convolution libre définit en particulier une opération sur les mesures de probabilité à support compact sur \mathbb{R} . En effet, soient μ et ν deux mesures de probabilité à support compact sur \mathbb{R} . L'opérateur autoadjoint a de multiplication par la fonction identité

$$\begin{aligned} a : L^2(\mathbb{R}, d\mu) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu) \\ f &\mapsto (x \mapsto xf(x)) \end{aligned}$$

a a pour loi μ dans le C^* -espace de probabilité $(\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\mu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\mu)})$. De même, l'opérateur autoadjoint b de multiplication par la fonction identité a pour loi ν dans le C^* -espace de probabilité $(\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\nu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\nu)})$. a et b sont libres et de lois respectives μ et ν dans le produit libre de C^* -espaces de probabilité $(\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\mu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\mu)}) * (\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\nu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\nu)})$ que nous noterons (\mathcal{A}, ϕ) . $a + b$ étant autoadjoint, sa loi $\mu \boxplus \nu$ dans (\mathcal{A}, ϕ) correspond à une mesure de probabilité à support compact.

6.4 Convolution multiplicative libre

On définit la convolution multiplicative libre de manière analogue à la convolution additive libre.

Definition 6.4.1. Soit μ et ν deux fonctionnelles linéaires dans Σ , a et b des variables libres dans un espace de probabilité quelconque (\mathcal{A}, ϕ) de lois respectives μ et ν . Alors la convolution libre multiplicative de μ et ν , notée $\mu \boxtimes \nu$, est la loi de ab .

Remarques :

- La convolution multiplicative libre est commutative :

$$\mu \boxtimes \nu = \nu \boxtimes \mu.$$

La preuve résulte du lemme 6.4.1 suivant.

- Si μ et ν sont des mesures de probabilité à support compact dans $[0, \infty)$, L'opérateur autoadjoint positif a de multiplication par la fonction identité

$$\begin{aligned} a : L^2(\mathbb{R}, d\mu) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu) \\ f &\mapsto (x \mapsto xf(x)) \end{aligned}$$

a a pour loi μ dans $(\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\mu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\mu)})$. De même, l'opérateur autoadjoint positif b de multiplication par la fonction identité a pour loi ν dans $(\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\nu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\nu)})$. a et b sont libres et de lois respectives μ et ν dans le produit libre de C^* -espaces de probabilité $(\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\mu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\mu)}) * (\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, d\nu)), \langle \cdot, 1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\nu)}) := (\mathcal{A}, \phi)$. $b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur auto-adjoint positif. Or là encore le lemme suivant montre que

$$\phi((ab)^k) = \phi((b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{2}})^k),$$

de sorte que $b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{2}}$ est de loi $\mu \boxtimes \nu$. Ainsi $\mu \boxtimes \nu$ est également à support compact dans $[0, \infty)$.

Lemma 6.4.1. Soit $(\mathcal{A}_j)_{j \geq 1}$ une famille libre de sous-algèbres unifères d'un espace de probabilité non commutatif (\mathcal{A}, ϕ) telle que $\bigcup_j \mathcal{A}_j$ engendre \mathcal{A} . Supposons que la restriction de ϕ à chaque \mathcal{A}_j soit une trace. Alors ϕ est une trace sur tout \mathcal{A} .

6.5 Approche combinatoire de la liberté

R. Speicher a développé une approche combinatoire de la liberté se révélant très utile pour “tester” la liberté de variables aléatoires ou rendre possible de nombreux calculs pratiques. Il s’est inspiré de l’approche algébrique de l’indépendance en théorie des probabilités classiques due à Rota qui utilise le treillis des partitions d’un ensemble fini pour définir les cumulants d’une famille de variables aléatoires. La notion combinatoire adéquate en probabilités libres est celle de partition non croisée.

Definition 6.5.1. Soit (\mathcal{A}, ϕ) un espace de probabilité non commutatif. On définit des formes multilinéaires $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \phi_n : \quad \mathcal{A}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto \phi_n(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

en posant

$$\phi_n(a_1, \dots, a_n) = \phi(a_1 \cdots a_n),$$

et des formes multilinéaires $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} k_n : \quad \mathcal{A}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto k_n(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

de façon récursive par le système d’équations :

$$\phi(a_1 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi[a_1, \dots, a_n] \quad (6.5.1)$$

où

$$k_\pi[a_1, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^r k_{|V_i|}(a_{j_{i,1}}, \dots, a_{j_{i,|V_i|}})$$

pour une partition $\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \in NC(n)$ en r blocs $V_i = \{j_{i,1}, \dots, j_{i,|V_i|}\}$, tels que $j_{i,1} < \dots < j_{i,|V_i|}$.

On note également

$$\phi_\pi[a_1, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^r \phi_{|V_i|}(a_{j_{i,1}}, \dots, a_{j_{i,|V_i|}})$$

Pour une variable a , on note plus brièvement

$$k_n(a) := k_n(a, \dots, a).$$

Donnons les premières formes k_n pour des petites valeurs de n et montrons comment apparait la récursivité.

- $n = 1$, $NC(1) = \{\{1\}\} \implies \phi(a_1) = k_1(a_1)$.
- $n = 2$, $NC(2)$ a 2 éléments : $\{\{1\}, \{2\}\}, \{1, 2\}$. $\implies \phi(a_1 a_2) = k_1(a_1)k_1(a_2) + k_2(a_1, a_2)$
 $\implies k_2(a_1, a_2) = \phi(a_1 a_2) - \phi(a_1)\phi(a_2)$

– $n = 3$, $NC(3)$ a 5 éléments : $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$ et $\{\{1, 2, 3\}\}$. D'où :

$$\begin{aligned}\phi(a_1 a_2 a_3) &= k_1(a_1)k_1(a_2)k_1(a_3) + k_2(a_1, a_2)k_1(a_3) + k_2(a_1, a_3)k_1(a_2) + k_2(a_2, a_3)k_1(a_1) \\ &\quad + k_3(a_1, a_2, a_3) \\ k_3(a_1, a_2, a_3) &= \phi(a_1 a_2 a_3) - \phi(a_1)\phi(a_2 a_3) - \phi(a_2)\phi(a_1 a_3) - \phi(a_3)\phi(a_1 a_2) + 2\phi(a_1)\phi(a_2)\phi(a_3)\end{aligned}$$

Théorème 6.5.1. *Soit (\mathcal{A}, ϕ) un espace de probabilité non commutatif et soit $\mathcal{A}_1 \cdots, \mathcal{A}_m$ des sous-algèbres unifères de \mathcal{A} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ sont libres,
- ii) Pour tout $n \geq 2$ et toutes v.a.n.c. $a_i \in \mathcal{A}_{j_i}$, $1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m$, alors dès qu'il existe $1 \leq l, k \leq n$ tels que $j_l \neq j_k$,

$$k_n(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Le corollaire suivant est alors immédiat :

Corollaire 6.5.1. *Soit a et b deux v.a.n.c. libres. Alors*

$$k_n(a + b) = k_n(a) + k_n(b).$$

a étant une v.a.n.c, les $(k_n(a))_{n \geq 0}$ sont appelés *cumulants libres* de a .

Définissons la série formelle

$$R_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(a)z^n.$$

R_a est appelée la R -transformée de a . Si a est autoadjoint, R_a caractérise la loi de a .

La R -transformée linéarise la convolution additive libre.

L'approche combinatoire développée par Roland Speicher permet de rendre explicite de nombreux calculs. Par exemple les moments de produits de v.a.n.c. libres sont déterminés par les formules générales suivantes.

Théorème 6.5.2. *Soit (\mathcal{A}, ϕ) un espace de probabilité non commutatif et considérons $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ dans \mathcal{A} telles que $\{a_1, \dots, a_n\}$ et $\{b_1, \dots, b_n\}$ soient libres. Alors*

$$\phi(a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n) = \sum_{\sigma \in NC(n)} k_{\sigma}[a_1, \dots, a_n] \phi_{K(\sigma)}[b_1, \dots, b_n]$$

où K est l'isomorphisme de Kreweras.

Isomorphisme de Kreweras : On introduit des points intermédiaires $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$, rangés alternativement avec $1, 2, \dots, n$. Pour une partition σ , on note $\bar{\sigma}$ la partition correspondante de $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$. Alors si $\pi \in NC(n)$,

la partition $\sigma = K(\pi)$ est la plus grande partition de $NC(n)$ telle que
 $\pi \cup \bar{\sigma} \in NC(\{1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \dots, n, \bar{n}\})$

($NC(n)$ est muni de l'ordre partiel : $\nu_1 \leq \nu_2$ si chaque bloc de ν_1 est contenu dans un bloc de ν_2 .)

Par exemple,

$$K(\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}, \{6, 7\}\}) = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5, 7\}, \{6\}\}.$$

6.6 Analyse harmonique

Pour des calculs plus concrets, il est bien utile d'avoir une description plus analytique des relations entre moments et cumulants.

6.6.1 Convolution additive libre

Soit τ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . Sa transformée de Cauchy g_τ est analytique sur \mathbb{C}^+ . Il existe un domaine

$$D_{\alpha, \beta} = \{u + iv \in \mathbb{C}, |u| < \alpha v, v > \beta\}$$

sur lequel g_τ est univalente. Soit K_τ sa fonction inverse, défini sur $g_\tau(D_{\alpha, \beta})$. Alors

$$K_\tau(z) = R_\tau(z) + \frac{1}{z}.$$

Remarque 6.6.1. Si $\mu_{sc}^{(\sigma^2)}$ est la loi du demi-cercle centrée de variance σ^2 alors $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\sigma^2 g_{\mu_{sc}^{(\sigma^2)}}^2(z) - z g_{\mu_{sc}^{(\sigma^2)}}(z) + 1 = 0$. On en déduit aisément que $\forall z \in g_{\mu_{sc}^{(\sigma^2)}}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, $K_{\mu_{sc}^{(\sigma^2)}}(z) = \sigma^2 z + \frac{1}{z}$ puis

$$R_{\mu_{sc}^{(\sigma^2)}}(z) = \sigma^2 z.$$

Corollaire 6.6.1.

$$\mu_{sc}^{(\sigma_1^2)} \boxplus \mu_{sc}^{(\sigma_2^2)} = \mu_{sc}^{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Concrètement, étant donné deux mesures de probabilité τ et ν sur \mathbb{R} , pour déterminer $\tau \boxplus \nu$:

1. On calcule les transformées de Cauchy g_τ et g_ν .
2. On inverse ces fonctions pour obtenir K_τ et K_ν . On obtient donc aussi $R_\tau(z) = K_\tau(z) - \frac{1}{z}$, et $R_\nu(z) = K_\nu(z) - \frac{1}{z}$,
3. On calcule $R_{\tau \boxplus \nu} = R_\tau(z) + R_\nu(z)$. On obtient donc aussi $K_{\tau \boxplus \nu}(z) = R_{\tau \boxplus \nu}(z) + \frac{1}{z}$.
4. On inverse $K_{\tau \boxplus \nu}$ pour obtenir $g_{\tau \boxplus \nu}$.

6.6.2 Convolution multiplicative libre

Soit $\tau \neq \delta_0$ une mesure de probabilité sur $[0; +\infty[$. Soit

$$\Psi_\tau(z) = \int \frac{tz}{1-tz} d\tau(t) = \frac{1}{z} g_\tau\left(\frac{1}{z}\right) - 1,$$

pour z tel que $\frac{1}{z}$ n'est pas dans le support de τ . Ψ_τ détermine uniquement τ et est univalente sur $\{z \in \mathbb{C}, \Re z < 0\}$.

Il existe une fonction S_τ analytique dans un certain domaine telle que

$$\Psi_\tau \left[\frac{z}{z+1} S_\tau(z) \right] = z.$$

S_τ est appelé S -transformée de τ . La S -transformée satisfait $S_{\mu \boxtimes \nu} = S_\mu S_\nu$. Concrètement, étant donné deux mesures de probabilité τ et ν sur $[0; +\infty[$, différentes de δ_0 , pour déterminer $\tau \boxtimes \nu$:

1. On calcule les transformées Ψ_τ et Ψ_ν .
2. On inverse ces fonctions pour obtenir $S_\tau = \frac{z+1}{z} \Psi_\tau^{(-1)}$ et $S_\nu = \frac{z+1}{z} \Psi_\nu^{(-1)}$.
3. On calcule $S_{\tau \boxtimes \nu} = S_\tau S_\nu$. On obtient donc aussi $\Psi_{\tau \boxtimes \nu}^{(-1)} = \frac{z}{z+1} S_{\tau \boxtimes \nu}$.
4. On inverse $\Psi_{\tau \boxtimes \nu}^{(-1)}$ pour obtenir $\Psi_{\tau \boxtimes \nu}$.

6.7 Convergence

On rappelle que l'on note Σ l'ensemble des formes linéaires $\mu : \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\mu(1) = 1$.

6.8 Definition

Definition 6.8.1. Soit μ_N, μ des fonctionnelles de Σ . On dit que (μ_N) converge vers μ dans Σ si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(X^k) = \mu(X^k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Soit (\mathcal{A}_N, ϕ_N) ($N \in \mathbb{N}$), et (\mathcal{A}, ϕ) des espaces de probabilité non commutatifs et soit $a_N \in \mathcal{A}_N$, $a \in \mathcal{A}$ des v.a.n.c. On dit que a_N convergent en loi vers a quand N tend vers $+\infty$ et on note

$$a_N \xrightarrow{\mathcal{L}} a,$$

lorsque μ_{a_N} converge vers μ_a dans Σ , autrement dit si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(a_N^k) = \phi(a^k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Soit $(a_{i,N})_{i \in I}$ une famille de \mathcal{A}_N , $(a_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}$. On dit que $(a_{i,N})_{i \in I}$ converge en loi vers $(a_i)_{i \in I}$ quand N tend vers $+\infty$ lorsque les lois jointes $\mu_{(a_{i,N})_{i \in I}}$

convergent vers $\mu_{(a_i)_{i \in I}}$. autrement dit si pour tout polynome P non commutatif et toute suite d'indices $(i_j)_{j=1, \dots, k}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(P(a_{i_1, N}, \dots, a_{i_k, N})) = \phi(P(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})).$$

Proposition 6.8.1. Soit μ_N , $N \in \mathbb{N}$, et μ des fonctionnelles de Σ . Alors il est équivalent de dire :

- (i) les fonctionnelles μ_N convergent vers μ ,
- iii) Pour tout n , les cumulants libres $k_n(\mu_N)$ convergent vers $k_n(\mu)$.

6.8.1 Théorème Central Limite Libre

En utilisant la proposition 6.8.1, il n'est pas difficile de montrer le théorème suivant.

Théorème 6.8.1. Soit $a_1, a_2, \dots \in (\mathcal{A}, \phi)$ une suite de v.a.n.c. libres. On suppose que

$$\phi(a_i) = 0 \ (j \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} \phi(a_j^2) = \sigma^2 > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |\phi(a_j^k)| = C_k < \infty.$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(a_1 + \dots + a_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_{sc}^{(\sigma^2)}$$

où $\mu_{sc}^{(\sigma^2)}$ est la loi du demi-cercle centrée de variance σ^2 , dont la densité est

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} 1_{[-2\sigma; 2\sigma]}.$$

Remarque : le théorème s'applique pour une suite de v.a.n.c. libres et identiquement distribuées avec comme seules hypothèses $\phi(a_j) = 0$ et $\phi(a_j^2) = \sigma^2$.

La loi du demi-cercle joue en probabilités libres le rôle central de la loi gaussienne en probabilités classiques.

6.9 Liberté asymptotique

D. Voiculescu a jeté un pont fondamental entre la théorie des matrices aléatoires de grande taille et la théorie des probabilités libres quand il a réalisé que certaines matrices indépendantes fournissaient asymptotiquement des modèles de variables libres.

6.9.1 Définition et résultats

Definition 6.9.1. Une famille de variables non-commutatives $(a_i^N)_{i=1,\dots,q}$ dans un espace de probabilité non-commutatif (\mathcal{A}_N, ϕ_N) est dite **asymptotiquement libre** si

- elle admet une loi limite $\mu : \mathbb{C}\langle X_i | i = 1, \dots, q \rangle \rightarrow \mathbb{C}$
- (X_1, \dots, X_q) sont libres dans $(\mathbb{C}\langle X_i | i = 1, \dots, q \rangle, \mu)$.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité classique. Soit \mathcal{A}_N l'algèbre des matrices $N \times N$ à coefficients complexes. Soit

$$\phi_N : A \mapsto \frac{1}{N} \text{Tr}(A).$$

(\mathcal{A}_N, ϕ_N) est un espace de probabilité non-commutatif. Considérons les matrices dans ce contexte de probabilités non commutatives.

Théorème 6.9.1. Soit $\{H_N(i), i \in I\}$ une famille de matrices aléatoires hermitiennes indépendantes $N \times N$, la loi de chacune étant invariante par conjugaison par une matrice unitaire. On suppose que lorsque N décrit \mathbb{N} , toutes ces matrices sont définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) Soit $\{D_N(j), j \in J\}$ une famille de matrices $N \times N$ déterministes, telles que $\sup_N \|D_N(j)\| < +\infty$ pour tout j , $\{D_N(j), D_N(j)^*, j \in J\}$ admet (en tant que variable non commutative dans (\mathcal{A}_N, ϕ_N)) une loi limite. Si pour chaque i , $H_N(i) \in (\mathcal{A}_N, \phi_N)$ converge en loi presque sûrement vers une mesure à support compact ρ_i , alors la famille $(H_N(i), i \in I, \{D_N(j), D_N(j)^*, j \in J\})$ est presque sûrement asymptotiquement libre.

En particulier des matrices $G_i, i \in I$, indépendantes de type $GUE(N, 1/N)$, définies sur un même espace de probabilité, seront asymptotiquement libres : pour tout polynôme P non commutatif

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Tr}(P(G_i, i \in I)) \rightarrow \phi(P(s_i, i \in I)) \text{ presque sûrement}$$

où les $s_i, i \in I$ sont des v.a.n.c sur un certain espace de probabilité non commutatif (\mathcal{A}, ϕ) telle que la famille $\{s_i, i \in I\}$ est libre et chaque s_i suit une loi du demi-cercle μ_{sc} .

6.9.2 Exemples d'application

Grâce à ces résultats de liberté asymptotique de matrices M_1, \dots, M_m , on peut prédire quand la dimension est grande, avec une bonne probabilité et une bonne précision, la valeur d'une quantité de la forme $\frac{1}{N} \text{Tr}(M_{i_1} \dots M_{i_k})$ en connaissant seulement les spectres de chacun des M_i . Par exemple, puisque lorsque deux variables a et b sont libres dans (\mathcal{A}, ϕ) , on a par exemple

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$

ou encore

$$\phi(ab^2a^2b^2) = \phi(a^3)\phi(b^2)^2 + \phi(a)\phi(a^2)\phi(b^4) - \phi(a)\phi(a^2)\phi(b^2)^2,$$

on peut en déduire que pour N grand

$$\frac{1}{N}\text{Tr}(M_1M_2) \sim \frac{1}{N}\text{Tr}(M_1)\frac{1}{N}\text{Tr}(M_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\text{Tr}(M_1M_2^2M_1^2M_2^2) &\sim \frac{1}{N}\text{Tr}(M_1^3)\left(\frac{1}{N}\text{Tr}(M_2^2)\right)^2 + \frac{1}{N}\text{Tr}(M_1)\frac{1}{N}\text{Tr}(M_1^2)\frac{1}{N}\text{Tr}(M_2^4) \\ &\quad - \frac{1}{N}\text{Tr}(M_1)\frac{1}{N}\text{Tr}(M_1^2)\left(\frac{1}{N}\text{Tr}(M_2^2)\right)^2. \end{aligned}$$

Ces résultats permettent également d'avoir une bonne approximation de la mesure spectrale empirique de $M_1 + M_2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\text{Tr}((M_1 + M_2)^m) &\longrightarrow_{N \rightarrow +\infty} \phi((a+b)^m) \\ \mu_{M_1} &\longrightarrow_{N \rightarrow +\infty} \mu_a, \quad \mu_{M_2} \longrightarrow_{N \rightarrow +\infty} \mu_b \\ \mu_{M_1+M_2} &\approx \mu_a \boxplus \mu_b \end{aligned}$$

En voici une illustration proposée par P. Biane. L'histogramme suivant est obtenu à partir du spectre de la somme de deux projecteurs orthogonaux aléatoires : $\Pi_i = U_i D U_i^*$, $i = 1, 2$, où U_1 et U_2 sont deux matrices unitaires indépendantes suivant chacune la mesure de Haar sur le groupe unitaire $U(2N)$ et $D = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{N \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N \text{ fois}})$.

Π_1 et Π_2 étant asymptotiquement libres et leur mesure spectrale empirique respective étant une loi de Bernoulli sur $\{0, 1\}$, la théorie des probabilités libres permet de déterminer la forme asymptotique de l'histogramme correspondant à la densité de la convolée additive libre de deux lois de Bernoulli sur $\{0, 1\}$.

Encadré 1

SOMME DE DEUX PROJECTEURS

On tire au hasard, et indépendamment, deux projecteurs orthogonaux Π_1 et Π_2 de rang N dans un espace complexe de dimension $2N$, sous la forme $\Pi_i = U_i D U_i^*$ où D est la matrice diagonale dont les N premiers éléments diagonaux valent 1 et les autres 0, et U_i est une matrice unitaire, choisie selon la mesure de Haar sur le groupe unitaire $U(2N)$. Tirer une matrice unitaire selon la mesure de Haar est très facile : on commence par tirer le premier vecteur colonne uniformément parmi tous les vecteurs de norme 1, puis on choisit le deuxième vecteur colonne uniformément parmi les vecteurs de norme 1 orthogonaux au premier, et ainsi de suite. Un moyen simple de réaliser cela consiste à choisir une matrice $2N \times 2N$ à coefficients indépendants avec des lois gaussiennes complexes standard, puis à appliquer le procédé de Gramm-Schmidt à ses vecteurs colonnes.

La figure représente l'histogramme obtenu à partir du spectre d'une matrice $\Pi_1 + \Pi_2$ choisie comme ci-dessus, avec $N = 400$. Avec deux projections de rang 400 on peut obtenir des histogrammes très différents, par exemple si $\Pi_1 = I - \Pi_2$ alors toutes les valeurs propres valent 1, alors que si $\Pi_1 = \Pi_2$ la moitié vaut 2 et l'autre moitié vaut 0, mais on observe que pour N grand, avec une probabilité presque égale à 1, cet histogramme reste dans le voisinage d'une certaine courbe, que la théorie des probabilités libres permet de calculer explicitement.

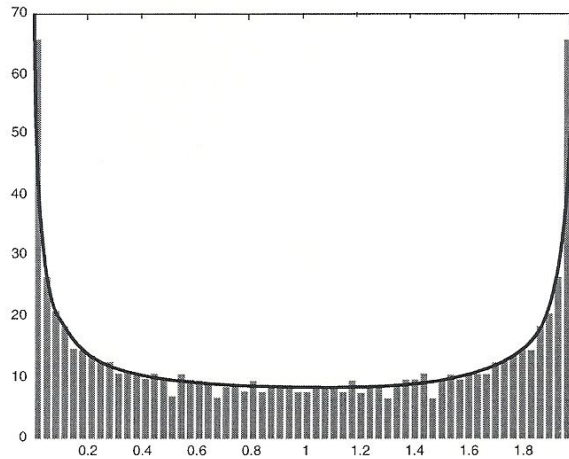


Figure - Histogramme du spectre de $\Pi_1 + \Pi_2$.

Dans le cas de notre figure, cette courbe est le graphe de la fonction $y = \frac{80}{3\pi\sqrt{x(2-x)}}$.

Bibliographie

- [1] A. Guionnet and B. Zegarlinski. Lectures on Logarithmic Sobolev inequalities. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*. Springer, Berlin, 2003.
- [2] G. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. *An Introduction to Random Matrices*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] N.I. Akhiezer et I.M.Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. vol. 1. Dover, 1993.
- [4] Z. D. Bai and J. W. Silverstein. Spectral Analysis of large-dimensional random matrices. Mathematics Monograph Series 2, Science Press Beijing 2006.
- [5] S. G. Bobkov and F. Götze. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 163(1) :1–28, 1999.
- [6] P. Deift. Orthogonal Polynomials and Random Matrices : A Riemann-Hilbert Approach Courant Lecture Notes in Mathematics, A.M.S
- [7] J. Faraut. *Analysis on Lie Groups : An introduction*. Cambridge Studies in advanced mathematics. 77, American Mathematical Society.
- [8] F. Hiai and D. Petz. The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy Mathematical Surveys and Monographs Volume 77, American Mathematical Society.
- [9] K. Johansson. *On fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices*. Duke Mathematical Journal. Vol. 91 n1, 151–204, 1998.
- [10] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [11] M. Ledoux. *The concentration of Measure Phenomenon*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [12] M.L Mehta, *Random Matrices*. Academic Press San Diego, 2nd edition, 1991.
- [13] P.A Meyer, Les inégalités de Burkholder en théorie des martingales, d'après Gundy. *Séminaire de probabilité* , tome 3, pp 163-174, 1969.

- [14] L. Pastur and M. Shcherbina. Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices Mathematical Surveys and Monographs Volume 171, American Mathematical Society.
- [15] E. P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Ann. of Math. (2)*, 62 :548-564, 1955.
- [16] E. P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Ann. of Math. (2)*, 67 :325-327, 1958.