Corrigé de l'examen

À la mémoire de Vladimir Arnol'd, qui s'est éteint le 3 juin 2010.

Un théorème d'Arnol'd

Dans tout ce problème, $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un difféomorphisme (au minimum C^1) du cercle qui préserve l'orientation, c'est à dire tel que $f'(x) > 0$.

1. Le nombre de rotation (1h)

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. On admettra qu'il existe un difféomorphisme $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait $f \circ p = p \circ F$ et $F(x+1) = F(x) + 1$. On dit que f possède un "relevé" F.

a. Démontrer que le relevé de f n'est pas unique.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $F + n$ est également un relevé : en effet $p(F(x) + n) = p(F(x)) = f \circ p(x)$.

Soit $d_n(x) = \frac{F^n(x)-x}{n}$ où F^n désigne la composée.

b. Démontrer

(1) $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$

(2) $d_n(x + 1) = d_n(x)$

(3) $x < y < x + 1 \implies F^n(x) < F^n(y) < F^n(x) + 1$

(1) Par récurrence. Initialisation : pour $n = 0$, F^n est l'identité et l'équation à démontrer est la trivialité suivante : $x + 1 = x + 1$. Hérédité : si $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$ alors $F^{n+1}(x + 1) = F(F^n(x + 1)) = F(F^n(x) + 1) = F(F^n(x)) + 1 = F^{n+1}(x) + 1$.

(2) $d_n(x + 1) = (F^n(x + 1) - (x + 1))/n = (F^n(x) + 1 - x - 1)/n = (F^n(x) - x)/n = d_n(x)$.

(3) Supposons $x < y < x + 1$. Comme F est strictement croissante $(F'(x) = f'(p(x)) > 0)$, F^n est strictement croissante et donc $F^n(x) < F^n(y) < F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$.

c. Soit $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} d_n(x)$ et $m_n = \inf_{x\in\mathbb{R}} d_n(x)$. Démontrer que $M_n < +\infty$, $m_n > -\infty$ et $M_n - m_n \leqslant 1/n$.

Une fonction continue périodique, telle que d_n, est bornée, donc $M_n < +\infty$ et $m_n > -\infty$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, démontrons que $|d_n(x) - d_n(y)| \leqslant 1/n$. Notons $u = d_n(x) - d_n(y)$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leqslant y + k < x + 1$. Alors $d_n(y + k) = d_n(y)$ d'après (2), d'où $u = d_n(x) - d_n(y + k)$. Si $y + k = x$

alors $u = 0$. Sinon $F^n(x) < F^n(y+k) < F^n(x) + 1$ d'après (3) et donc $u = \frac{F^n(x) - F^n(y+k) + y + k - x}{n}$ vérifie $\frac{-1+y+k-x}{n} < u < \frac{y+k-x}{n}$ ce qui implique $-1/n < u < 1/n$. D'où $M_n - m_n \leqslant 1/n$ (on a même mieux : $M_n - m_n < 1/n$ car le sup et l'inf sont atteints).

d. Démontrer que la suite $u_n = nM_n$ est sous-additive ($u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$). Démontrer que M_n et m_n convergent et possèdent la même limite.

Rappelons que $u_n = \sup_{x \in \mathbb{R}}(F^n(x) - x)$. Maintenant,

$$F^{n+m}(x) - x = F^n(F^m(x)) - F^m(x) + F^m(x) - x = F^n(v) - v + F^m(x) - x$$

avec $v = F^m(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F^{n+m}(x) - x \leqslant u_n + u_m$. Donc $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.

Pour toute suite sous-additive u_n, la suite u_n/n converge. Donc M_n converge. (La preuve pour m_n est complètement symétrique, mais notons qu'on obtient une autre preuve avec ce qui suit :) Comme $M_n - 1/n \leqslant m_n \leqslant M_n$, la suite m_n converge également et possède la même limite.

Cette limite est appelée le *nombre de translation* de F et noté $\tau(F)$.

Notons que nous avons démontré que $d_n(x)$ converge *uniformément* vers $\tau(F)$.

e. Démontrer que la classe de $\tau(F)$ modulo $\mathbb{Z}$ est indépendante du choix du relevé F de f.

Soient deux relevés de f. Leur différence doit être une fonction continue à valeur entière, donc constante. Notons ces deux relevés $x \mapsto F(x)$ et $x \mapsto \widehat{F}(x) = F(x) + N$. Coiffons d'un $\widehat{\ }$ les objets d_n, e.t.c. associés à $\widehat{F}$. Alors par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widehat{F}^n(x) = F^n(x) + nN$ (on utilise $F(x+k) = F(x) + k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$). Donc $\widehat{d}_n(x) = d_n(x) + N$. Donc $\tau(\widehat{F}) = \tau(F) + N \equiv \tau(F) \bmod \mathbb{Z}$.

Cette classe est appelée *nombre de rotation* de f et est notée $\rho(f)$.

f. Démontrer que le nombre de rotation est invariant par conjugaison de f par un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ préservant l'orientation, c'est à dire que $\rho(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) = \rho(f)$.

Soit Φ un relevé de ϕ : $p \circ \Phi = \phi \circ p$. C'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (d'après le début de l'énoncé). Démontrons que $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$ est un relevé de $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ (ce n'était pas nécessaire pour avoir tous les points). En effet, $\phi^{-1} \circ p = p \circ \Phi^{-1}$ par composition à gauche par ϕ^{-1} puis à droite par Φ^{-1}. Donc $p \circ \Phi \circ F \circ \Phi^{-1} = \phi \circ p \circ F \circ \Phi^{-1} = \cdots = \phi \circ f \circ \phi^{-1} \circ p$. Ensuite, notons $\widehat{F} = \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$ et $\widehat{d}_n$, e.t.c. les objets associés. Notons que puisque $\Phi(x) - x$ est périodique et continue, elle est bornée : $\exists M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |\Phi(x) - x| \leqslant M.$$

Puis $\widehat{d}_n(x) = ((\Phi \circ F \circ \Phi^{-1})^n(x) - x)/n = (\Phi \circ F^n \circ \Phi^{-1}(x) - x)/n = (\Phi \circ F^n(y) - \Phi(y))/n$ où l'on note $y = \Phi^{-1}(x)$. Comme Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, le sup sur $x \in \mathbb{R}$ est la même chose que le sup sur $y \in \mathbb{R}$. Or $\Phi \circ F^n(y) \leqslant M + F^n(y)$ et $\Phi(y) \geqslant -M + y$ d'où $(\Phi \circ F^n(y) - \Phi(y))/n \leqslant (2M + F^n(y) - y)/n \leqslant 2M/n + M_n$. De même, $(\Phi \circ F^n(y) - \Phi(y))/n \geqslant -2M/n + m_n$. On en déduit que $\widehat{d}_n$ tend uniformément vers $\rho(f)$.

g. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - (x+t)| \leqslant \varepsilon$. Démontrer que $|\rho(f) - t| \leqslant \varepsilon$.

L'énoncé manquait de rigueur : il fallait lire $|F(x)-(x+t)| \leqslant \varepsilon$. Alors $|F^{n+1}(x)-(x+(n+1)t)| = |F(F^n(x)) - (F^n(x)+t) + F^n(x) - (x+nt)| \leqslant \varepsilon + |F^n(x) - (x+nt)|$ et donc par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |F^n(x) - (x+nt)| \leqslant n\varepsilon.$$

d'où $|d_n(x) - t| \leqslant \varepsilon$ d'où $|\tau(F) - t| \leqslant \varepsilon$.

2. Fonctions analytiques du cercle (30mn)

On rappelle qu'une fonction d'une variable réelle est dite analytique quand elle possède un développement en série entière (DSE) au voisinage de tout point.

a. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction analytique et 1-périodique ($g(x+1) = g(x)$). Démontrer que g possède un prolongement analytique à une bande de la forme

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Im}(z)| < r\}.$$

À tout $x \in \mathbb{R}$ associons un disque $D_x = B(x, R_x) \subset \mathbb{C}$ où $R_x > 0$ est choisi de façon que d'une part D_x soit inclus dans le disque de convergence du DSE de g en x et d'autre part g coïncide avec son DSE sur $D_x \cap \mathbb{R}$. On s'arrange aussi pour que $R_{x+1} = R_x$. Soient $x \neq y$. Si $D_x \cap D_y \neq \varnothing$ alors $D_x \cap D_y \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ donc les DSE de g en x et en y coïncident sur un intervalle et donc par principe du prolongement analytique, sur l'ouvert connexe $D_x \cap D_y$. Ainsi la fonction $\widetilde{g}$ définie sur $\Omega = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} D_x$ par $z \in D_x \mapsto$ la valeur en z du DSE de g en x, associe bien une unique valeur à chaque z (si z appartient à deux disques différents, on a la même valeur de $\widetilde{g}(z)$). Notons que Ω est ouvert et g est holomorphe sur chaque D_x donc sur Ω. Comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact et Ω ouvert et invariant par la translation $z \mapsto z+1$, ce dernier contient un certain B_r (si on tient vraiment à écrire une preuve, utiliser un recouvrement de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par des voisinages carrés $\subset D_x$ des points $x \in \mathbb{R}$ et prendre un sous-recouvrement fini).

Soit $\mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions 1-périodiques analytiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ont une extension analytique à B_r.

On note $\mathcal{B}_r$ l'ensemble des $g \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dont le prolongement $\widetilde{g}$ à B_r vérifie $\sup|\widetilde{g}| < +\infty$.

b. Démontrer que $O_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \bigcap_{u<r} \mathcal{B}_u$.

Le prolongement est périodique : $\widetilde{g}(z+1) = \widetilde{g}(z) + 1$ (en effet c'est vrai sur $\mathbb{R}$ donc sur B_r par principe du prolongement analytique). Soit $g \in \mathcal{O}_r$. Par compacité de $\overline{B}_u/\mathbb{Z}$, et comme $\overline{B}_u \subset B_r$ et $\widetilde{g}$ continue, elle est bornée sur $\overline{B}_u$, donc $g \in \mathcal{B}_u$. Réciproquement si $\forall u < r$, $g \in B_u$, cela veut dire que g a des prolongements analytiques (et bornés) sur chaque B_u. Ils doivent coïncider par principe du prolongement analytique. Donc g a un prolongement à $\bigcup B_u = B_r$.

On note $\mathcal{F}_r$ l'ensemble des fonctions continues, 1-périodiques et dont le développement en série de Fourier $\sum c_m e^{i2\pi mx}$ vérifie $\exists A > 0$ tel que $\forall m \in \mathbb{Z}$, $|c_m| \leqslant A\, e^{-2\pi r|m|}$.

c. Démontrer que $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{F}_r$. Pour cela, étant donnée $g \in \mathcal{B}_r$, on remarquera qu'il existe une fonction f holomorphe telle que $\widetilde{g}(z) = f(e^{2i\pi z})$ (pas la peine de le justifier) et on en déduira que $|c_m| \leqslant e^{-2\pi r|m|} \sup|\widetilde{g}|$.

Il suffit d'écrire l'inégalité de Cauchy : rappelons que f a un développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

convergent sur l'anneau où f est définie : $A = \{z \,|\, e^{-2\pi r} < |z| < e^{2\pi r}\}$. Notons que $g(x) = f(e^{i2\pi x}) = \sum a_n e^{i2\pi n x}$ (série normalement convergente), donc par unicité du développement en série de Fourier :

$$a_n = c_n$$

Soit $R \in]e^{-2\pi r}, e^{2\pi r}[$. Alors on a l'inégalité de Cauchy

$$|a_n| \leqslant R^n \sup |f|.$$

(Preuve de l'inégalité de Cauchy : regardons l'intégrale de chemin $\frac{1}{2i\pi} \int f(z) z^{-n+1} dz$ sur le bord du cercle de centre 0 et de rayon R. D'une part cette intégrale vaut a_n, d'autre part elle est majorée par $R^{-n} \sup |f|$.) En faisant tendre R vers $e^{2\pi r}$ si $n \geqslant 0$ ou vers $e^{-2\pi r}$ si $n \leqslant 0$, et en utilisant $\sup |f| = \sup |\widetilde{g}|$ on obtient

$$|a_n| \leqslant e^{-2\pi |n| r} \sup |\widetilde{g}|.$$

d. Démontrer que $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Soit $g \in \mathcal{F}_r$. Alors $g(x) = \sum c_n e^{i2\pi n x}$, somme normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Notons que la série de fonctions holomorhes $\sum c_n e^{i2\pi n z}$ définies sur $\mathbb{C}$ est normalement convergente sur chaque B_u avec $u < r$, car $\sup_{z \in B_u} |c_n e^{i2\pi n z}| = |c_n| e^{2\pi |n| u} \leqslant A e^{-2\pi r |n|} e^{2\pi |n| u} = A \mu^{|n|}$ avec $\mu = e^{-2\pi(r-u)} < 1$. Donc $g \in \mathcal{B}_u$. On conclut avec la question b.

3. Linéarisation (1h30)

Soit $t(x) = x + \theta$ et $\widetilde{t}(z) = z + \theta$. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Arnol'd)**.** *Soit θ un nombre diophantien et $r > 0$. Alors il existe ε tel que si f est un difféomorphisme analytique du cercle préservant l'orientation, de nombre de rotation θ et possédant un prolongement $\widetilde{f}$ à B_r vérifiant $|\widetilde{f}(z) - \widetilde{t}(z)| < \varepsilon$, alors f est analytiquement linéarisable : il existe un difféomorphisme analytique du cercle ϕ préservant l'orientation, tel que $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = t$.*

Nous utiliserons pour cela la méthode KAM. Notons $f(x) = x + \theta + b(x)$, $\phi(x) = x + a(x)$. L'équation de linéarisation $\phi \circ f = t \circ \phi$ s'écrit

$$x + \theta + b(x) + a(x + \theta + b(x)) = x + \theta + a(x)$$

c'est à dire

$$a(x) - a(x + \theta + b(x)) = b(x).$$

On la rempace par l'équation plus simple

$$a(x) - a(x + \theta) = b(x) + c \qquad (1)$$

où c est une constante.

Dans la suite, $f \in \mathcal{B}_r$. On note

$$N_r(f) = \sup_{z \in B_r} |\widetilde{f}(z)|.$$

Note : ce n'est pas f qui appartient à $\mathcal{B}_r$ mais b.

a. En utilisant les séries de Fourier, démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tels que l'équation (1) est satisfaite. La valeur de c est-elle unique ? La valeur de a est-elle unique ?

L'équation en séries de Fourier s'écrit, en notant $a(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{a}_k e^{i2\pi nx}$, e.t.c. :

$$\begin{aligned}\forall k\neq 0,\quad \widehat{a}_k - e^{i2\pi k\theta}\widehat{a}_k &= \widehat{b}_k\\ \widehat{a}_0-\widehat{a}_0 &= \widehat{b}_0+c\end{aligned}$$

dont la solution est (notons que le dénominateur $1-e^{i2\pi k\theta}$ ne s'annule pas car θ est irrationnel)

$$\begin{aligned}\forall k\neq 0,\quad \widehat{a}_k &= \frac{\widehat{b}_k}{1-e^{i2\pi k\theta}}\\ \widehat{c} &= -\widehat{b}_0.\end{aligned}$$

En particulier c est unique mais pas a puisque $\widehat{a}_0$ est complètement libre.

Vérifions maintenant que la série de Fourier solution est normalement convergente et que sa somme appartient bien à $\mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Comme θ est diophantien, il existe $\tau\geqslant 2$ et $C>0$ tel que $\forall k\in\mathbb{Z}^*$, $|1-e^{i2\pi k\theta}|\geqslant \dfrac{1}{C|k|^{\tau-1}}$. Donc (en utilisant 2.c)

$$\forall k\in\mathbb{Z}^*,\quad |\widehat{a}_k|\leqslant Ck^{\tau-1}|\widehat{b}_k|\leqslant CN_r(b)k^{\tau-1}(e^{-2\pi r})^{|k|}.$$

On a bien convergence normale sur $\mathbb{R}$ et même sur tout B_u pour $u<r$. Donc $a\in\mathcal{O}_r(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

b. Démontrer qu'il y a une unique solution (a,c) vérifiant $\int_0^1 a(x)dx=0$.

En effet, $\int_0^1 a(x)dx=\widehat{a}_0$ et on a vu que $\widehat{a}_0$ est l'unique paramètre libre.

Dans la suite (a,c) est la solution de l'équation (1) vérifiant $\int_0^1 a(x)dx=0$.

Rappelons que $\forall\tau\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x^n n^{\tau-1}<\frac{(\tau-1)!}{(1-x)^\tau}$.

c. Démontrer que pour tout $r'<r$,

$$N_{r'}(a)\leqslant\frac{C}{\left(1-e^{-2\pi(r-r')}\right)^\tau}N_r(b)$$

et

$$N_{r'}(a')\leqslant\frac{C}{\left(1-e^{-2\pi(r-r')}\right)^{\tau+1}}N_r(b)$$

où C et τ ne dépendent que de θ.

Soit $z\in B_{r'}$.

$$|a(z)|\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|\widehat{a}_k e^{i2\pi kz}|=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|\widehat{a}_k|e^{-2\pi k\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Maintenant, $e^{-2\pi k\,\mathrm{Im}(z)}\leqslant e^{2\pi|k|r'}$ et d'après la majoration de $|\widehat{a}_k|$ effectuée dans la réponse à la question a :

$$|a(z)|\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}CN_r(b)k^{\tau-1}e^{-2\pi r|k|}e^{2\pi|k|r'}=2CN_r(b)\sum_{k>0}k^{\tau-1}(e^{-2\pi(r-r')})^{|k|}$$

d'où

$$|a(z)|\leqslant\frac{2C\,(\tau-1)!}{(1-e^{-2\pi(r-r')})^\tau}N_r(b).$$

Et $2C\,(\tau-1)!$ ne dépend que de θ. La preuve est analogue pour a' : comme $a'(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}2i\pi k\,\widehat{a}_k e^{i2\pi kz}$, c'est à dire $\widehat{a'}_k=2i\pi k\,\widehat{a}_k$, on obtient

$$|a'(z)|\leqslant 4\pi CN_r(b)\sum_{k>0}k^\tau(e^{-2\pi(r-r')})^{|k|}$$

d'où
$$|a(z)| \leqslant \frac{4\pi C\,\tau!}{(1-e^{-2\pi(r-r')})^{\tau+1}} N_r(b).$$

Soient $r_3 < r_2 < r_1 < r$.

d. Démontrer que si $r_3 \leqslant r_2 - N_{r_2}(a)$ alors le domaine de définition de $\widetilde{\phi}^{-1}$ contient B_{r_3} et que pour tout $z \in B_{r_3}$, $|\widetilde{\phi}^{-1}(z) - z| \leqslant N_{r_2}(a)$ et $|\phi^{-1}(z)| \leqslant r_2$.

Il y a encore une erreur dans l'énoncé : il faut lire $|\operatorname{Im}\widetilde{\phi}^{-1}(z)| \leqslant r_2$ et non $|\phi^{-1}(z)| \leqslant r_2$.

Rappelons que $\widetilde{\phi}(z) = z + \widetilde{a}(z)$. Soit $w \in B_{r_3}$. Démontrons que l'équation $\widetilde{\phi}(z) = w$, $z \in B_{r_2}$ possède une unique solution. Cela suit du théorème de Rouché : soit un rectangle
$$R = \{x + iy \,|\, -X < x < X,\ \ -Y < y < Y\}$$
avec $X > 0$ (qu'on fera tendre vers $+\infty$) et $Y < r_2$ (qu'on fera tendre vers r_2). Soient les fonctions $f(z) = \widetilde{\phi}(z) - w$ et $g(z) = z - w$. Sur le bord du rectangle, f et g diffèrent d'au plus $N_{r_2}(a)$, et $|g(z)| \geqslant Y - |\operatorname{Im} w|$. Donc pourvu que $Y > N_{r_2}(a) + |\operatorname{Im} w|$, alors $|f-g| > |g|$ sur le bord de R. De telles valeurs de Y existent puisque $N_{r_2}(a) + |\operatorname{Im} w| < r_2$ puisque $|\operatorname{Im} w| < r_3 = r_2 - N_{r_2}(a)$. Le théorème de Rouché implique que f et g ont le même nombre de racines, c'est à dire 1. Donc l'équation $\widetilde{\phi}(z) = w$ possède une unique solution dans chaque rectangle R admissible. Donc il possède une unique solution dans B_{r_2}.

Comme $\widetilde{\phi}^{-1}(w) - w = z - \widetilde{\phi}(z) = \widetilde{a}(z)$ et $z \in B_{r_2}$, on obtient $|\widetilde{\phi}^{-1}(w) - w| \leqslant N_{r_2}(a)$.

Enfin, $\widetilde{\phi}^{-1}(w) = z \in B_{r_2}$ donc $|\operatorname{Im}\widetilde{\phi}^{-1}(w)| \leqslant r_2$.

e. Démontrer que si de plus $r_2 + N_r(b) \leqslant r_1$ alors
$$\forall z \in B_{r_3}, \big|\widetilde{\phi} \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\phi}^{-1}(z) - (z + \theta + c)\big| \leqslant N_{r_1}(a')N_r(b).$$

Autre erreur d'énoncé : c'était $-c$ et non $+c$.

Notons que $\widetilde{\phi}^{-1}$ est holomorphe sur B_{r_3}. En effet $\widetilde{\phi}$ est continue et définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ donc $\widetilde{\phi}^{-1}(B_{r_3})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (et inclus dans B_{r_2}). Nous avons démontré à la question précédente que $\widetilde{\phi}$ est une bijection de $\widetilde{\phi}^{-1}(B_{r_3})$ vers B_{r_3}. Une bijection holomorphe a un inverse holomorphe.

Soit $z \in B_{r_3}$ et $u = \widetilde{\phi}^{-1}(z) \in B_{r_2}$, de sorte que $z = \widetilde{\phi}(u)$.

Justifions l'existence de $\widetilde{\phi} \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\phi}^{-1}(z) = \widetilde{\phi} \circ \widetilde{f}(u)$: comme $u \in B_{r_2}$, $\widetilde{f}(u)$ est bien défini et $|\operatorname{Im}\widetilde{f}(u)| = |\operatorname{Im}(u + \theta + \widetilde{b}(u))| \leqslant |\operatorname{Im} u| + N_r(b) < r_2 + N_r(b) \leqslant r_1 \leqslant r$. Donc $f(u)$ est dans le domaine de définition de $\widetilde{\phi}$. Notons en passant qu'on a démontré
$$|\operatorname{Im}\widetilde{f}(u)| < r_1.$$
Maintenant $\big|\widetilde{\phi}\circ\widetilde{f}\circ\widetilde{\phi}^{-1}(z) - (z+\theta-c)\big| = \big|\widetilde{\phi}\circ\widetilde{f}(u) - (\widetilde{\phi}(u)+\theta-c)\big| = \big|\widetilde{f}(u)+\widetilde{a}(f(u)) - (u+\widetilde{a}(u)+\theta-c)\big| = \big|u+\theta+\widetilde{b}(u)+\widetilde{a}(f(u)) - (u+\widetilde{a}(u)+\theta-c)\big| = \big|\widetilde{b}(u)+c+\widetilde{a}(f(u))-\widetilde{a}(u)\big| = \big|\widetilde{a}(u)-\widetilde{a}(u+\theta)+\widetilde{a}(f(u))-\widetilde{a}(u)\big| = \big|\widetilde{a}(\widetilde{f}(u))-\widetilde{a}(u+\theta)\big| = \big|\widetilde{a}(u+\theta+\widetilde{b}(u))-\widetilde{a}(u+\theta)\big| \leqslant \int_0^{\widetilde{b}(u)} \widetilde{a}'(u+\theta+v)dv \leqslant |\widetilde{b}(u)| \sup_{v\in[0,\widetilde{b}(u)]} |\widetilde{a}'(u+\theta+v)| \leqslant N_r(b)N_{r_1}(a')$ car le segment (complexe) $[u+\theta, u+\theta+\widetilde{b}(u)]$ est inclus dans B_{r_1} d'après l'analyse faite avant.

f. Quel est le nombre de rotation de $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$? En déduire que $|c| \leqslant N_{r_1}(a')N_r(b)$.

D'après la question 1.g, l'inégalité démontrée en 3.e implique que $|\rho(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) - (\theta - c)| \leqslant N_{r_1}(a')N_r(b)$. D'après la question 1.f, $\rho(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) = \rho(f) = \theta$.

On va définir par récurrence des suite de fonctions $f_n(x) = x + \theta + b_n(x)$ et $\phi_n = x + a_n(x)$. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = \phi_n \circ f_n \circ \phi_n^{-1}$ où $\phi_n = x + a_n(x)$ et (a_n, c_n) est la solution de

(2) $$a_n(x) - a_n(x + \theta) = b_n(x) + c_n$$

qui vérifie $\int_0^1 a_n = 0$. On pose également

$$\rho_n = r\frac{1 + 1/2^n}{2}.$$

g. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $N_{\rho_{3n}}(b_n) \leqslant \varepsilon/2^{3n} \implies N_{\rho_{3(n+1)}}(b_{n+1}) \leqslant \varepsilon/2^{3(n+1)}$. Pour cela on posera $r_3 = \rho_{3n+3}$, $r_2 = \rho_{3n+2}$, $r_1 = \rho_{3n+1}$, $r = \rho_{3n}$ et on utilisera les inégalités démontrées, en prenant bien soin de vérifier les hypothèses.

Encore une erreur, plus gênante cette fois-ci : il manquait un facteur $(1+\tau)$ dans certains exposants (on pourrait également utiliser n'importe quel facteur plus grand). Il faut en fait démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $N_{\rho_{3n}}(b_n) \leqslant \varepsilon/2^{3(1+\tau)n} \implies N_{\rho_{3(n+1)}}(b_{n+1}) \leqslant \varepsilon/2^{3(1+\tau)(n+1)}$.

D'autre part il était maladroit dans l'énoncé de définir $r = \rho_{3n}$, car il a une déjà une valeur fixe. Posons donc $r_0 = \rho_{3n}$.

Soit $z \in B_{r_3}$. On a $|\widetilde{\phi}_n \circ \widetilde{f}_n \circ \widetilde{\phi}_n^{-1}(z) - (z + \theta - c_n)| = |\widetilde{f}_{n+1}(z) - (z + \theta - c_n)| = |\widetilde{b}_{n+1}(z) - c_n|$ donc $|\widetilde{b}_{n+1}(z)| \leqslant |\widetilde{b}_{n+1}(z) - c_n| + |c_n| \leqslant 2N_{r_1}(a_n')N_{r_0}(b_n)$ pourvu que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) $r_3 \leqslant r_2 - N_{r_2}(a_n)$

(2) $r_2 + N_{r_0}(b_n) \leqslant r_1$

c'est à dire en remplaçant les r_i par leur valeur

(1) $N_{r_2}(a_n) \leqslant r/2^{3n+4}$

(2) $N_{r_0}(b_n) \leqslant r/2^{3n+3}$.

Maintenant, en utilisant la majoration de $N_{r_2}(a)$ de la question 3.c, il suffit que

(1) $CN_{r_0}(b_n)/(1 - e^{-2\pi(r_0 - r_2)})^\tau \leqslant r/2^{3n+4}$

(2) $N_{r_0}(b_n) \leqslant r/2^{3n+3}$.

Maintenant si on suppose que $N_{r_0}(b) \leqslant \varepsilon/2^{3(\tau+1)n}$ alors : la condition 2 est vérifiée pour ε suffisamment petit (indépendamment de n) et la conditon 1 s'écrit $N_{r_0}(b_n) \leqslant (1 - e^{-2\pi r 3/2^{3n+3}})^\tau r/2^{3n+4} \sim$ const $/2^{3(\tau+1)n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ avec const $= 3(2\pi)^\tau r^{\tau+1} 2^{-3\tau-4}$ ne dépendant que de r et τ. Cette condition est donc bien vérifiée si ε est assez petit (indépendamment de n).

Démontrons le membre de droite de l'implication : d'après l'analyse que nous venons de faire, $N_{r_3}(b_{n+1}) \leqslant 2N_{r_1}(a_n')N_{r_0}(b_n)$. Donc en utilisant la majoration de la question 3.c,

$$N_{r_3}(b_{n+1}) \leqslant 2CN_{r_0}(b_n)^2/(1 - e^{-2\pi(r_0 - r_1)})^{\tau+1}.$$

Notez la mise au carré de $N_{r_0}(b_n)$. Il suffit donc pour l'hérédité que

$$2CN_{r_0}(b_n)/(1 - e^{-2\pi(r_0 - r_1)})^{\tau+1} \leqslant 1/2^{3(\tau+1)}.$$

Or $(1-e^{-2\pi(r_0-r_1)})^{\tau+1} \sim (2\pi r/2^{3n+2})^{\tau+1}$. À nouveau il suffit que ε soit suffisamment petit (indépendamment de n).

h. Démontrer que la suite $\phi_n \circ \cdots \circ \phi_0$ converge dans $\mathcal{B}_{r/2}$.

(Sous-entendu, sous l'hypothèse que $N_r(b_0) \leqslant \varepsilon$).

Encore une erreur d'énoncé : on ne devait démontrer la convergence que dans un certain $\mathcal{B}_{r'}$ avec $r' < r/2$.

Remarquons que $r/2 \leqslant \rho_n$. Soit

$$\widetilde{\Phi}_n = \widetilde{\phi}_n \circ \cdots \circ \widetilde{\phi}_0.$$

Alors $\widetilde{\Phi}_n(z) - \widetilde{\Phi}_{n-1}(z) = \widetilde{\phi}_n \circ \widetilde{\Phi}_{n-1}(z) - \widetilde{\Phi}_{n-1}(z) = \widetilde{a}_n \circ \widetilde{\Phi}_{n-1}(z)$ donc

$$|\widetilde{\Phi}_n(z) - \widetilde{\Phi}_{n-1}(z)| = |\widetilde{a}_n(\widetilde{\Phi}_{n-1}(z))| \leqslant N_{\rho_{3n+2}}(a_n) \leqslant r/2^{3n+4},$$

pourvu que $\widetilde{\Phi}_{n-1}(z)$ soit défini et appartienne à $B_{\rho_{3n+2}}$, auquel cas $\widetilde{\Phi}_n(z)$ est également défini. Notons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} r/2^{3n+4} = r/14$. Soit $r' = r/2 - r/14$. Ainsi, si $|\operatorname{Im} z| < r'$, tous les $\widetilde{\Phi}_n(z)$ sont définis et la suite $\widetilde{\Phi}_n$ converge uniformément sur $B_{r'}$.

i. Conclure.

Notons $\widetilde{\Phi}$ la limite des $\widetilde{\Phi}_n$ sur $B_{r'}$. Elle est injective en tant que limite de fonctions injectives. En particulier Φ est un difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$, on a $\Phi_n \circ f \circ \Phi_n^{-1} = f_{n+1}$ et $f_{n+1}(x) = x + \theta + b_{n+1}(x)$. D'après la question 3.g, on a vu que $N_{\rho_{3(n+1)}}(b_{n+1}) \leqslant \varepsilon/2^{3(\tau+1)(n+1)}$. En particulier f_{n+1} tend uniformément vers $t : x \mapsto x + \theta$ sur $\mathbb{R}$. Maintenant de $\Phi_n \circ f = f_{n+1} \circ \Phi_n$ on déduit par passage à la limite que $\Phi \circ f = t \circ \Phi$. Donc $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} = t$: on a démontré le théorème d'Arnol'd.