THÉORÈMES DE COFINALITÉ EN K-THÉORIE (D'APRÈS THOMASON)

DENIS-CHARLES CISINSKI

Ces notes ne concernent que des assertions bien connues : elles établissent des résultats de cofinalité "non stricte" pour la K-théorie des catégories de Waldhausen. Ces derniers permettent une preuve du théorème de Gillet-Waldhausen affirmant que pour toute petite catégorie exacte $\mathcal{A}$, la flèche canonique

$$\mathsf{K}_i(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}_i(\mathsf{C}^b(\mathcal{A})) \quad , \qquad i \geq 0 \ ,$$

est un isomorphisme, ce qui n'est démontré par Thomason [2] que dans le cas où $\mathcal{A}$ est karoubienne.

1. D'une manière générale, le foncteur nerf étant pleinement fidèle, les petites catégories seront notées de la même manière, qu'elles soient vues comme des catégories où comme des ensembles simpliciaux.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen, $\mathsf{c}\mathcal{A}$ désigne la sous-catégorie des cofibrations, $\mathsf{i}\mathcal{A}$ celle des isomorphismes, et $\mathsf{w}\mathcal{A}$, celle des équivalences faibles.

Les cofibrations (resp. les équivalences faibles) sont notées

$$\rightarrowtail \qquad (\text{resp.} \quad \xrightarrow{\sim} \ ).$$

Une *suite exacte de* $\mathcal{A}$ est un diagramme de la forme

$$X' \rightarrowtail X \twoheadrightarrow X''$$

tel que le carré ci-dessous soit cocartésien (0 désignant l'objet nul de $\mathcal{A}$).

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & X \arrow[d, two heads] \\ 0 \arrow[r, tail] & X'' \end{tikzcd}$$

$\mathsf{S}\mathcal{A}$ est la catégorie de Waldhausen simpliciale définie dans [3, § 1.3].

Pour $i \geq 0$, on pose $\mathsf{K}_i\mathcal{A} = \pi_{i+1}\mathsf{wS}\mathcal{A}$.

2. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen, le groupe $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$ peut être décrit comme le groupe (nécessairement abélien) libre engendré par les symboles $[X]$, $X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$, avec les relations :

Si $X \xrightarrow{\sim} Y$ est une équivalence faible, alors $[X] = [Y]$.

Si $X' \rightarrowtail X \twoheadrightarrow X''$ est une suite exacte, alors $[X] = [X'] + [X'']$.

Cela implique en particulier que si X et Y sont deux objets de $\mathcal{A}$, on a l'égalité $[X \vee Y] = [X] + [Y]$ ($X \vee Y$ désignant la somme catégorique de X et de Y). En outre, tout élément de $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$ est de la forme $[X] - [Y]$ où $X, Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$.

Date: 13 septembre 2002.

3. Définition. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen. Un sous-groupe N de $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$ est *cofinal* (sous-entendu, dans $\mathcal{A}$) si pour tout objet X de $\mathcal{A}$, il existe un objet Y de $\mathcal{A}$ tels que $[X]+[Y]\in N$.

4. *Remarque.* Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen vérifiant l'axiome de saturation et l'axiome du cylindre, alors tout sous-groupe de $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$ est cofinal.

L'énoncé fondamental suivant est une légère généralisation d'un théorème dû à Thomason (cf. [2, Cofinality Theorem, 1.10.1]).

5. Théorème (cofinalité galoisienne)**.** *On considère une catégorie de Waldhausen $\mathcal{A}$ et un sous-groupe cofinal N de $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}^N$ la sous-catégorie de Waldhausen de $\mathcal{A}$ formée des objets X tels que $[X]\in N$. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathsf{K}_i\mathcal{A}^N \xrightarrow{\simeq} \mathsf{K}_i\mathcal{A} \qquad \textit{pour } i\geq 1,$$

$$\textit{et} \quad \mathsf{K}_0\mathcal{A}^N \xrightarrow{\simeq} N\subset \mathsf{K}_0\mathcal{A}\ .$$

Démonstration. En vertu de [3, corollaire 1.5.7], on a une suite homotopiquement fibrée

$$\mathsf{wS}\mathcal{A}^N \longrightarrow \mathsf{wS}\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{wSF}(\mathcal{A},\mathcal{A}^N) \qquad .$$

On remarque aussitôt que $\mathrm{Im}(\mathsf{K}_0\mathcal{A}^N \longrightarrow \mathsf{K}_0\mathcal{A})\ = N$, et si on pose $G=\mathsf{K}_0\mathcal{A}/N$, on voit qu'il s'agit de construire une équivalence faible d'ensembles simpliciaux

$$\mathsf{wSF}(\mathcal{A},\mathcal{A}^N) \xrightarrow{\sim} BG \qquad .$$

En considérant G comme un ensemble simplicial discret, on définit des morphismes

$$\mathsf{wS}_n\mathsf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^N) \xrightarrow{\pi} G^n\ , \qquad n\geq 0$$

comme suit. Pour $p,q\geq 0$, on considère l'application

$$\mathsf{w}_p\mathsf{S}_n\mathsf{F}_q(\mathcal{A},\mathcal{A}^N) \longrightarrow \mathsf{w}_0\mathsf{S}_n\mathsf{F}_0(\mathcal{A},\mathcal{A}^N) = \mathsf{s}_n\mathcal{A}$$

induite par les inclusions $\Delta_0\subset\Delta_p$ et $\Delta_0\subset\Delta_q$. On a une application

$$\mathsf{s}_n\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathsf{K}_0\mathcal{A}^n$$

définie par

$$\begin{aligned}\varphi X &= ([X_{0,1}]\,,[X_{1,2}]\,,\dots\,,[X_{n-1,n}])\\ &= ([X_{0,1}]\,,[X_{0,2}]-[X_{0,1}]\,,\dots\,,[X_{0,n}]-[X_{0,n-1}])\end{aligned}$$

On obtient ainsi une application par composition

$$\mathsf{w}_p\mathsf{S}_n\mathsf{F}_q(\mathcal{A},\mathcal{A}^N) \longrightarrow \mathsf{s}_n\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}_0\mathcal{A}^n \longrightarrow G^n\ .$$

On va montrer que π est une équivalence faible. Pour $p\geq 0$, $\mathsf{w}_p\mathsf{S}_n\mathsf{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^N)$ est une catégorie, notée pour abréger C_p. Explicitement, C_p est la sous-catégorie de $\mathsf{c}\underline{\mathsf{w}}_p\mathsf{S}_n\mathcal{A}$ dont les flèches sont les cofibrations $X \rightarrowtail Y$ telles que Y/X soit un objet de $\mathsf{c}\underline{\mathsf{w}}_p\mathsf{S}_n\mathcal{A}^N$ (où on note pour toute catégorie de Waldhausen $\mathcal{A}$ et tout entier $k \geq 0$, $\underline{\mathsf{w}}_p\mathcal{A}$ la catégorie de Walhausen dont les objets sont les suite d'équivalences faibles de longueur k, *i.e.* des diagrammes de la forme

$$X_0 \xrightarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} X_k\ ,$$

dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs évidents, et dont les équivalences faibles et les cofibrations sont définies argument par argument). Il suffit de montrer que les morphismes d'ensembles simpliciaux (ou de catégories)

$$C_p \xrightarrow{\pi} G^n$$

sont des équivalences faibles. Comme G^n est discret, il suffit encore de montrer que pour tout $g \in G^n$, $\pi^{-1}(g)$ est contractile. Pour $g = 0 = (0, \dots, 0)$, $\pi^{-1}(0) = \mathsf{c}\underline{\mathsf{w}}_p\mathsf{S}_n\mathcal{A}^N$ est une catégorie admettant un objet initial et donc est contractile. Pour en déduire une propriété analogue, on commence par le lemme suivant.

6. Lemme. *Pour tout élément g de G^n, il existe un objet X de C_p tel que $\pi X = g$.*

Démonstration du lemme. L'application canonique $\mathsf{Ob}\,\mathcal{A} \longrightarrow G$ est surjective. En effet, tout élément de $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$ est de la forme $[X] - [Y]$ pour $X, Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$. Comme N est cofinal, tout objet X de $\mathcal{A}$ admet un inverse modulo N dans $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$.

Soit $g = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$. Chaque g_i est donc représenté par un objet Y_i de $\mathcal{A}$. La suite de cofibrations

$$0 \rightarrowtail Y_1 \rightarrowtail Y_1 \vee Y_2 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail Y_1 \vee \cdots \vee Y_n$$

définit un objet Y de $\mathsf{S}_n\mathcal{A}$. On note X l'objet de $\underline{\mathsf{w}}_p\mathsf{S}_n\mathcal{A}$ défini par la suite d'équivalences faibles

$$Y \xrightarrow{=} Y \xrightarrow{=} \cdots \xrightarrow{=} Y\ .$$

On vérifie immédiatement que $\pi X = g$. □

Pour en revenir à la preuve du théorème, considérons un élément g de G^n. On peut donc choisir un représentant X (resp. X') de g (resp. de $-g$) dans $\mathsf{Ob}\,C_p$. On obtient deux foncteurs

$$\pi^{-1}(0) \xrightarrow{?\vee X} \pi^{-1}(g) \qquad \text{et} \qquad \pi^{-1}(g) \xrightarrow{?\vee X'} \pi^{-1}(0)$$

et les morphismes naturels (en Y)

$$Y \rightarrowtail Y \vee X \vee X' \qquad \text{et} \qquad Y \rightarrowtail Y \vee X' \vee X$$

montrent que ce sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre. On a ainsi montré que π est une équivalence faible, et en passant à la diagonale, on obtient de la sorte une équivalence faible

$$\mathsf{wSF}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^N) \xrightarrow{\sim} BG \qquad ,$$

ce qui achève la démonstration. □

7. Définition. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen, et $\mathcal{A}'$ une sous-catégorie de Waldhausen.

$\mathcal{A}'$ est *stable par extensions* si pour toute suite exacte

$$X' \rightarrowtail X \twoheadrightarrow X'' \qquad X', X'' \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}'$$

X est isomorphe à un objet de $\mathcal{A}'$.

$\mathcal{A}'$ est *précofinale* si pour tout objet X de $\mathcal{A}$, il existe un objet X' de $\mathcal{A}$ tel que $X \vee X'$ soit isomorphe à un objet de $\mathcal{A}'$.

$\mathcal{A}'$ est *cofinale* si elle est à la fois stable par extensions et précofinale.

8. *Remarque.* Si $\mathcal{A}'$ est précofinale dans $\mathcal{A}$, alors $\mathrm{Im}(\mathsf{K}_0\mathcal{A}' \longrightarrow \mathsf{K}_0\mathcal{A})$ est un sous-groupe cofinal dans $\mathcal{A}$.

9. Lemme (l'astuce de Grayson)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie avec cofibrations, et $\mathcal{A}'$ une sous-catégorie cofinale de $\mathcal{A}$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$ par :*

$X \sim Y$ si et seulement s'il existe deux objets X' et Y' de $\mathcal{A}'$ tels que $X \vee X'$ et $Y \vee Y'$ soient isomorphes.

On pose $G = \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}/\sim$, et on note $X \longmapsto < X >$ l'application canonique de $\mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$ sur G. Alors la formule $< X > + < Y > = < X \vee Y >$ définit une structure de groupe abélien sur G. En outre, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{coker}(\mathsf{K}_0\mathcal{A}' \longrightarrow \mathsf{K}_0\mathcal{A}) \xrightarrow{\simeq} G\ .$$

Démonstration. On reproduit ici en substance la preuve de [1, théorème 1.1].

Il est immédiat que G est ainsi muni d'une structure de monoïde commutatif et que pour tout objet X de $\mathcal{A}'$, on a $< X > = 0$. La précofinalité de $\mathcal{A}'$ implique en outre que G est un groupe. D'autre part, si $X' \rightarrowtail X \twoheadrightarrow X''$ est une suite exacte de $\mathcal{A}$, alors $< X > = < X' > + < X'' >$. En effet, il existe deux objets Y' et Y'' tels que $X' \vee Y'$ et $X'' \vee Y''$ soient isomorphes à des objets de $\mathcal{A}'$. La suite exacte

$$X' \vee Y' \rightarrowtail X \vee Y' \vee Y'' \twoheadrightarrow X'' \vee Y''$$

et la stabilité de $\mathcal{A}'$ par extensions dans $\mathcal{A}$ impliquent que $X \vee Y' \vee Y''$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{A}'$. On en déduit les relations ci-dessous dans G.

$$0 = < X \vee Y' \vee Y'' > = < X > + < Y' > + < Y'' > = < X > - < X' > - < X'' >$$

L'isomorphisme annoncé s'en déduit aussitôt (grâce à la description explicite du foncteur K_0). □

10. Théorème (cofinalité discrète)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie avec cofibrations, et $\mathcal{A}'$ une sous-catégorie cofinale de $\mathcal{A}$. On note N l'image du morphisme canonique de $\mathsf{K}_0\mathcal{A}'$ vers $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$. Alors le foncteur d'inclusion de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ induit des isomorphismes $\mathsf{K}_i\mathcal{A}' \simeq \mathsf{K}_i\mathcal{A}$, $i \geq 1$, et $\mathsf{K}_0\mathcal{A}' \simeq N \subset \mathsf{K}_0\mathcal{A}$.*

Démonstration. En vertu du théorème de cofinalité galoisienne et du théorème de cofinalité stricte de Waldhausen [3], il suffit de montrer que pour tout objet X de $\mathcal{A}^N$, il existe un objet X' de $\mathcal{A}'$ tel que $X \vee X'$ soit isomorphe à un objet de $\mathcal{A}'$. Or cela résulte facilement de l'astuce de Grayson. □

11. Corollaire. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie exacte. On note $\mathcal{A}^+$ sa karoubiannisée. Alors le foncteur d'inclusion induit des isomorphismes $\mathsf{K}_i\mathcal{A} \simeq \mathsf{K}_i\mathcal{A}^+$, $i \geq 1$, et une inclusion $\mathsf{K}_0\mathcal{A} \subset \mathsf{K}_0\mathcal{A}^+$.*

12. Théorème (cofinalité localisée)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen vérifiant l'axiome de saturation ainsi que l'axiome du cylindre, et dont les équivalences faibles soient stables par extensions. On considère une sous-catégorie de Waldhausen cofinale $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$, telle que le cylindre de $\mathcal{A}$ se restreigne en un cylindre sur $\mathcal{A}'$. Le foncteur d'inclusion induit des isomorphismes $\mathsf{K}_i\mathcal{A}' \simeq \mathsf{K}_i\mathcal{A}$, $i \geq 1$, et un monomorphisme $\mathsf{K}_0\mathcal{A}' \subset \mathsf{K}_0\mathcal{A}$.*

La preuve de cet énoncé utilise le résultat suivant (on rappelle que $\mathcal{A}^{\mathsf{w}}$ désigne la sous-catégorie de Waldhausen de $\mathcal{A}$ formée des objets asphériques, *i.e.* des objets X dont la flèche vers l'objet nul est une équivalence faible).

13. Lemme (cofinalité asphérique)**.** *Sous les hypothèses ci-dessus, si X est un objet de $\mathcal{A}^{\mathsf{w}}$, et Y un objet de $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{A}'$) tels que $X \vee Y$ soit isomorphe à un objet de $\mathcal{A}'$, alors il existe un objet Y' de $\mathcal{A}^{\mathsf{w}}$ (resp. de $\mathcal{A}'^{\mathsf{w}}$) tel que $X \vee Y'$ soit isomorphe à un objet de $\mathcal{A}'^{\mathsf{w}}$.*

Démonstration. Soit T un cylindre adéquat de $\mathcal{A}$, Σ désignant le foncteur de suspension associé. On pose $Z = T(\, Y \longrightarrow 0 \,)$, puis on définit $Y' = Z \vee \Sigma X$ (resp. $Y' = Z$). On sait que Z est asphérique et on a par construction une suite exacte $Y \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow \Sigma Y$. En considérant la suite exacte

$$X \vee Y \rightarrowtail X \vee Y' \twoheadrightarrow \Sigma X \vee \Sigma Y$$

$$(\text{resp. } X \vee Y \rightarrowtail X \vee Y' \twoheadrightarrow \Sigma Y\ )$$

et la stabilité de $\mathcal{A}'$ par extensions, on en déduit que Y' vérifie la propriété escomptée. □

Démonstration du théorème de cofinalité localisée. Le lemme de cofinalité asphérique montre en particulier que $\mathcal{A}'^{\mathsf{w}}$ est cofinale dans $\mathcal{A}^{\mathsf{w}}$. D'autre part, le théorème de localisation de Waldhausen (cf. [3, Fibration Theorem]) implique que les deux lignes horizontales du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{iS}\mathcal{A}'^{\mathsf{w}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{iS}\mathcal{A}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{wS}\mathcal{A}' \arrow[d] \\
\mathsf{iS}\mathcal{A}^{\mathsf{w}} \arrow[r] & \mathsf{iS}\mathcal{A} \arrow[r] & \mathsf{wS}\mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

sont des fibrations homotopiques. En passant aux longues suites exactes de groupes d'homotopie, on en déduit aussitôt grâce au théorème de cofinalité discrète des isomorphismes $\mathsf{K}_i\mathcal{A}' \simeq \mathsf{K}_i\mathcal{A}$ pour $i \geq 2$, et une inclusion $\mathsf{K}_1\mathcal{A}' \subset \mathsf{K}_1\mathcal{A}$. Si F désigne la fibre homotopique du morphisme $\mathsf{wS}\mathcal{A}' \longrightarrow \mathsf{wS}\mathcal{A}$, on obtient d'autre part le diagramme commutatif suivant dont toutes les lignes et colonnes sont exactes (on note $\mathsf{K}\,\mathsf{i}\mathcal{A}$ la K-théorie de $\mathcal{A}$ vue comme une catégorie avec cofibrations, *i.e.* avec pour équivalences faibles les isomorphismes).

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \pi_1 F \arrow[d] \\
\mathsf{K}_1\mathsf{i}\mathcal{A}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_1\mathcal{A}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_0\mathsf{i}\mathcal{A}'^{\mathsf{w}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_0\mathsf{i}\mathcal{A}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_0\mathcal{A}' \arrow[d] \\
\mathsf{K}_1\mathsf{i}\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_1\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_0\mathsf{i}\mathcal{A}^{\mathsf{w}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_0\mathsf{i}\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{K}_0\mathcal{A} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \pi_1 F \arrow[r] & G^{\mathsf{w}} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0 F \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Or il résulte du lemme de cofinalité asphérique et de la description explicite des groupes G^{w} et G donnée par l'astuce de Grayson que le morphisme de G^{w} vers G est injectif. Cela implique que $\pi_1 F = 0$ et achève donc la preuve du théorème. $\square$

14. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie exacte, on note $\mathsf{C}^b\mathcal{A}$ la catégorie de Waldhausen des complexes bornés sur $\mathcal{A}$, avec pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes.

15. Corollaire. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie exacte. On note $\mathcal{A}^+$ sa karoubiannisée. Alors le foncteur d'inclusion induit des isomorphismes $\mathsf{K}_i\mathsf{C}^b\mathcal{A} \simeq \mathsf{K}_i\mathsf{C}^b\mathcal{A}^+$, $i \geq 1$, et une inclusion $\mathsf{K}_0\mathsf{C}^b\mathcal{A} \subset \mathsf{K}_0\mathsf{C}^b\mathcal{A}^+$.*

16. Théorème (Gillet-Waldhausen)**.** *Pour toute catégorie exacte $\mathcal{A}$, on a des isomorphismes canoniques $\mathsf{K}_i\mathcal{A} \simeq \mathsf{K}_i\mathsf{C}^b\mathcal{A}$, $i \geq 0$.*

Démonstration. L'assertion est démontrée par Thomason-Trobaugh [2] dans le cas où $\mathcal{A}$ est karoubienne. Dans le cas général, cela implique grâce aux corollaires 11 et 15 que $\mathsf{K}_i\mathcal{A} \simeq \mathsf{K}_i\mathsf{C}^b\mathcal{A}$, $i \geq 1$, et que $\mathsf{K}_0\mathcal{A} \subset \mathsf{K}_0\mathsf{C}^b\mathcal{A}$. Or pour tout complexe borné X sur $\mathcal{A}$, on a la relation $[X] = \sum_i (-1)^i [X^i]$ dans $\mathsf{K}_0\mathsf{C}^b\mathcal{A}$, ce qui prouve que le morphisme de $\mathsf{K}_0\mathcal{A}$ vers $\mathsf{K}_0\mathsf{C}^b\mathcal{A}$ est surjectif. $\square$

Références

[1] D. R. Grayson. Localization for Flat Modules in Algebraic K-Theory. *Journal of Algebra*, 61 :463–496, 1979.

[2] R. Thomason, T. Trobaugh. Higher Algebraic K-Theory of Schemes and of Derived Categories*, The Grothendieck Festschrift III*, pages 247–435. Birkhäuser, 1990.

[3] F. Waldhausen. Algebraic K-theory of spaces*, Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983)*, pages 318–419. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1126. Springer-Verlag, 1985.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case 7012, 2 place Jussieu, 75 251 Paris cedex 05 France

E-mail address: cisinski@math.jussieu.fr