ALGÈBRE COMMUTATIVE

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif unitaire, et M un A-module.

(a) Supposons M plat sur A, et considérons un morphisme d'anneaux $A \to B$. Pour montrer que $B \otimes_A M$ est plat sur B, il suffit de prouver que, pour tout morphisme injectif de B-modules $N' \to N$, l'application induite

$$(B \otimes_A M) \otimes_B N' \to (B \otimes_A M) \otimes_B N$$

est injective. Or, pour tout B-module N, on a un isomorphisme naturel

$$(B \otimes_A M) \otimes_B N \simeq M \otimes_A N,$$

de sorte qu'il suffit de prouver que l'application induite

$$M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$$

est injective, ce qui résulte aussitôt du fait que M est plat sur A.

(b) Soit $S \subset A$ un système multiplicatif. Si M est plat sur A, alors $S^{-1}M$ est plat sur $S^{-1}A$, car on a un isomorphisme canonique

$$S^{-1}A \otimes_A M \simeq S^{-1}M,$$

ce qui permet d'appliquer (a) pour $B = S^{-1}A$.

(c) Supposons que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$, le $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$ soit plat. Considérons une application A-linéaire injective $u : N' \to N$, et notons

$$K = \ker(M \otimes_A N' \to M \otimes_A N).$$

Montrons que $K \simeq 0$. Pour cela, il suffit de prouver que $K_\mathfrak{p} \simeq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Or, comme $A_\mathfrak{p}$ est plat sur A, on a un isomorphisme canonique

$$K_\mathfrak{p} \simeq \ker(M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N'_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}).$$

D'autre part, l'application $A_\mathfrak{p}$-linéaire

$$N'_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$$

est injective (puisque $A_\mathfrak{p}$ est plat sur A), et comme $M_\mathfrak{p}$ est plat sur $A_\mathfrak{p}$, on voit que

$$\ker(M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N'_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}) \simeq M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \ker(N'_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}),$$

d'où on déduit que $K_\mathfrak{p} \simeq 0$. En conclusion, on a démontré que M est plat sur A.

Exercice 2. On suppose à présent que A est un anneau commutatif unitaire noethérien muni d'un idéal I contenu dans le radical de Jacobson de A. On considère une suite exacte de A-modules de la forme suivante.

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

On suppose enfin que M et M'' sont de type fini et que M'' est plat sur A.

(a) Montrons que, pour tout A-module plat M, l'application

$$I \otimes_A M \to IM$$

est injective. L'inclusion de A-modules $I \subset A$ induit dans ce cas une application A-linéaire injective

$$I \otimes_A M \to A \otimes_A M \simeq M,$$

et l'image de $\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ dans M via cette application est précisément IM (essentiellement par définition). On a donc bien un isomorphisme canonique $\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\to\mathrm{IM}$ dès que M est plat sur A.

(b) Montrons que

$$0\to\mathrm{IM}'\to\mathrm{IM}\to\mathrm{IM}''\to 0$$

est une suite exacte courte. Comme le foncteur $\mathrm{N}\mapsto\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ est exact à droite, on a une suite exacte à droite

$$\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}'\to\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\to\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}''\to 0\,.$$

On a d'autre part un diagramme commutatif évident dans la catégorie des A-modules

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}'' \arrow[d, "u''"'] \\ \mathrm{IM} \arrow[r] & \mathrm{IM}'' \end{tikzcd}$$

Comme l'application $\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\to\mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}''$ est surjective, ainsi que les applications u et u'', on en déduit que l'application $\mathrm{IM}\to\mathrm{IM}''$ est surjective. En conclusion, on a un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & \mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{IM}\cap\mathrm{M}' \arrow[r] & \mathrm{IM} \arrow[r] & \mathrm{IM}'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont la première ligne est une suite exacte à droite, et la seconde ligne une suite exacte courte (on a fait l'abus de remplacer M' par son image dans M, de sorte que l'on verra par la suite M' comme un sous-module de M). On remarque que l'image de u' est précisément IM'. Pour conclure, il suffit de prouver que u' est surjective : cela montrera que $\mathrm{IM}\cap\mathrm{M}'=\mathrm{IM}'$, et achèvera la démonstration. Il résulte du lemme du serpent qu'on a une suite exacte de la forme

$$\ker(u')\to\ker(u)\to\ker(u'')\to\operatorname{coker}(u')\to\operatorname{coker}(u)\to\operatorname{coker}(u'')\,.$$

Or on sait que l'application u'' est bijective : comme M'' est plat, on peu lui appliquer (a). Autrement dit, les A-modules $\ker(u'')$ et $\operatorname{coker}(u'')$ sont nuls. On a donc un isomorphisme canonique :

$$\operatorname{coker}(u')\simeq\operatorname{coker}(u)\,.$$

Or l'application u étant surjective, on a aussi

$$\operatorname{coker}(u)\simeq 0\,.$$

Cela montre que $\operatorname{coker}(u')\simeq 0$, et donc que u' est surjective.

(c) Pour tout A-module M, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A/I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{IM} \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r] & \mathrm{M/IM} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont la première ligne est une suite exacte à droite, et la seconde ligne une suite exacte courte, la flèche verticale du milieu étant un isomorphisme, et la flèche verticale de gauche, une surjection. On en déduit un isomorphisme canonique $\mathrm{A/I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\simeq\mathrm{M/IM}$, ce qui se traduit en l'existence d'une suite exacte courte de la forme :

$$0\to\mathrm{IM}\to\mathrm{M}\to\mathrm{A/I}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\to 0\,.$$

D'autre part, si on se donne une suite exacte courte de A-modules

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

avec M'' plat, on a, grâce à la question (b), un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & IM' \arrow[r] \arrow[d] & IM \arrow[r] \arrow[d] & IM'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des suites exactes courtes, toutes les flèches verticales étant injectives. Ce qui précède et le lemme du serpent nous assure donc qu'on a une suite exacte courte de la forme

$$0 \to A/I \otimes_A M' \to A/I \otimes_A M \to A/I \otimes_A M'' \to 0.$$

(d) Comme M' est de type fini, il résulte du lemme de Nakayama que $M' \simeq 0$ si et seulement si $M'/IM' = A/I \otimes_A M' \simeq 0$. La suite exacte obtenue dans la question (c) montre donc que l'application $M \to M''$ est injective (et donc bijective) si et seulement si l'application induite $A/I \otimes_A M \to A/I \otimes_A M''$ est injective (et donc bijective).

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif unitaire noethérien, et $u : M \to N$ un morphisme de A-modules. On suppose que M et N sont de type fini.

(a) Supposons que le morphisme

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A M \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A N$$

soit surjectif pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Posons $Q = \operatorname{coker}(u)$. Alors on sait que

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A Q \simeq \operatorname{coker}(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A M \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A N).$$

On a donc $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A Q \simeq 0$. Or on a aussi des isomorphismes canoniques

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A Q \simeq (\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p}) \otimes_A Q \simeq \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p} \otimes_A Q) \simeq \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} Q_\mathfrak{p},$$

et il résulte du lemme de Nakayama que $Q_\mathfrak{p} \simeq 0$ (car il est clair que Q est de type fini, puisque c'est le cas de N), et ce pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. On en déduit que $Q \simeq 0$. Autrement dit, u est surjectif.

(b) Supposons à présent que l'application

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A M \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A N$$

soit bijective pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. La question précédente montre que u est surjective. D'autre part, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'application

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}$$

est bijective. Il résulte de la question (d) de l'exercice 2 que l'application

$$M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$$

est injective. Autrement dit, $\ker(u)_\mathfrak{p} \simeq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, et donc $\ker(u) \simeq 0$. Cela montre que u est aussi injective, et donc bijective. La réciproque est évidente.

Exercice 4. Soit A un anneau noethérien.

(a) On sait que tout module libre sur un anneau est plat. Par conséquent, si M est un A-module localement libre, alors $M_\mathfrak{p}$ est plat sur $A_\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, et il résulte de la question (c) de l'exercice 1 que M est plat sur A.

Réciproquement, supposons que M soit plat sur A. La question (b) de l'exercice 1 montre que $M_\mathfrak{p}$ est plat sur $A_\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Pour conclure, on peut supposer que A est en outre un anneau local, et il nous suffit de prouver que, sous cette hypothèse supplémentaire, tout A-module plat et de type fini est libre de rang fini. Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, et posons $\kappa = \mathrm{A}/\mathfrak{m}$. Soit M un A-module plat et de type fini. On choisit une base $e_1, \ldots, e_n$ du κ-espace vectoriel $\kappa \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, et on choisit $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{M}$ des éléments tels que x_i soit envoyé sur e_i via le morphisme canonique $\mathrm{M} \to \kappa \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ pour $1 \le i \le n$. La famille $x_1, \ldots, x_n$ définit une application linéaire $u : \mathrm{A}^n \to \mathrm{M}$ telle que $\kappa^n \simeq \kappa \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}^n \to \kappa \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ soit la bijection κ-linéaire induite par la base $e_1, \ldots, e_n$. La question (b) de l'exercice 3 implique que u est bijective, et donc que M est libre de rang n sur A.

(b) Soient M', M et M'' trois A-modules plats et de type fini. Un diagramme de A-modules

$$0 \to \mathrm{M}' \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}'' \to 0$$

est une suite exacte courte si et seulement si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$, le diagramme induit

$$0 \to \mathrm{M}'_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{M}_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{M}''_{\mathfrak{p}} \to 0$$

est une suite exacte courte de $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$-modules. Or les isomorphismes canoniques

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{N}_{\mathfrak{p}} \simeq \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$$

pour tout A-module N et la question (c) de l'exercice 2 impliquent que si

$$0 \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}' \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}'' \to 0$$

est une suite exacte courte de $\kappa(\mathfrak{p})$-espaces vectoriels pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, alors $0 \to \mathrm{M}'_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{M}_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{M}''_{\mathfrak{p}} \to 0$ est une suite exacte courte pour tout $\mathfrak{p}$, ce qui prouve l'assertion voulue.

Exercice 5. Soit A un anneau. Pour un A-module M et un élément $f \in \mathrm{A}$, on rappelle que $\mathrm{M}_f = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ où $\mathrm{S} = \{f^n \mid n \ge 0\}$.

On va montrer tout d'abord que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, et si M est un A-module de type fini tel que $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}} \simeq 0$, il existe un élément $f \notin \mathfrak{p}$ tel que $\mathrm{M}_f \simeq 0$. En effet, si on écrit $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ où $\mathrm{S} = \mathrm{A} \setminus \mathfrak{p}$, et si on choisit une famille génératrice $x_1, \ldots, x_n$ de M, alors on voit qu'il existe $s_1, \ldots, s_n \notin \mathfrak{p}$ tels que $s_i x_i = 0$ dans M pour $1 \le i \le n$. Si f désigne le produit de tous les s_i, on a donc $f x_i = 0$ pour tout i, de sorte que $f\mathrm{M} = 0$, ce qui implique que $\mathrm{M}_f \simeq 0$.

Considérons à présent un A-module de type fini M, un idéal premier $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$, et supposons que $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ soit un $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$-module libre de rang fini. Montrons qu'il existe un élément $f \notin \mathfrak{p}$ tel que M_f soit un A_f-module libre de rang fini. On commence par choisir une famille à la fois libre et génératrice $e_1, \ldots, e_n$ dans le $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$-module libre de rang fini $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$. On peut alors écrire

$$e_i = \frac{x_i}{s_i}\,, \quad 1 \le i \le n\,,$$

où $x_i \in \mathrm{M}$ et $s_i \notin \mathfrak{p}$. Soit $s = s_1 \ldots s_n$. On peut alors voir e_i comme un élément du A_s-module localisé M_s. La famille $e_1, \ldots, e_n$ définit donc une application A_s-linéaire

$$u : \mathrm{A}_s^n \to \mathrm{M}_s$$

telle que l'application induite

$$\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}^n \simeq \mathrm{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}_s} \mathrm{A}_s^n \to \mathrm{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}_s} \mathrm{M}_s \simeq \mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$$

soit bijective. Soit $\mathrm{Q} = \mathrm{coker}(u)$. On sait qu'il existe $g \notin \mathfrak{p}$ tel que $\mathrm{Q}_g = 0$ (car $\mathrm{Q}_{\mathfrak{p}} \simeq 0$). De même, si on pose $\mathrm{K} = \ker(u)$, comme $\mathrm{K}_{\mathfrak{p}} \simeq 0$, il existe $h \notin \mathfrak{p}$ tel que $\mathrm{K}_h \simeq 0$. Si on pose $f = sgh$, on en déduit que l'application A_f-linéaire

$$u_f : A_f^n = (A_s^n)_f \to (M_s)_f = M_f$$

est bijective, ce qui montre que M_f est libre de rang n sur A_f, avec $f \notin \mathfrak{p}$.

Soit M un A-module localement libre. Montrons qu'il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in$ A, $n \geq 1$, de sorte que $(f_1, \dots, f_n) = A$ et que M_{f_i} soit un A_{f_i}-module libre de type fini pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$, on choisit un élément $f_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$ tel que $M_{f_\mathfrak{p}}$ soit un $A_{f_\mathfrak{p}}$-module libre de rang fini. On rappelle que, pour $f \in A$, l'ensemble

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,|\, f \notin \mathfrak{p}\}$$

est un ouvert de Zariski. On remarque d'autre part que

$$\mathfrak{p} \in D(f_\mathfrak{p})$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Autrement dit, la famille $(D(f_\mathfrak{p}))_\mathfrak{p}$ forme un recouvrement ouvert de Spec(A). Comme Spec(A) est quasi-compact, ce recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini : il existe donc une famille finie d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ telle que, si on pose $f_i = f_{\mathfrak{p}_i}$ pour $1 \leq i \leq n$, on ait

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} D(f_i),$$

de sorte que M_{f_i} soit un A_{f_i}-module libre de rang fini pour tout i. Or, pour $f \in A$, le complémentaire de $D(f)$ dans Spec(A) est le fermé

$$V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,|\, (f) \subset \mathfrak{p}\}.$$

On a donc

$$V((f_1, \dots, f_n)) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V((f_i)) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \Big(\bigcup_{1 \leq i \leq n} D(f_i) \Big) = \emptyset,$$

ce qui signifie précisément que $A = (f_1, \dots, f_n)$.

On déduit de cet exercice que tout A-module localement libre est globalement de type fini. En effet, on choisit une famille génératrice finie (en tant que A_{f_i}-module)

$$x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i} \in M_{f_i}$$

pour chaque i. On peut supposer que chaque élément $x_{i,j}$ est de la forme

$$x_{i,j} = \frac{y_{i,j}}{1}$$

où $y_{i,j} \in M$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n_i$. Soit N le sous-module de M engendré par les éléments $y_{i,j}$ pour tous i,j. Il est clair que $N_{f_i} = M_{f_i}$ pour tout i. On va en déduire que $N = M$ de la manière suivante. Soit x un élément de M. Pour chaque i, il existe un entier positif m_i tel que $f_i^{m_i} x \in N$. Soit $m = \max_{1 \leq i \leq n} m_i$. On a donc $f_i^m x \in N$ pour tout i. Or les idéaux $(f_1^m, \dots, f_n^m)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ ont le même nilradical (*i.e.* définissent le même fermé de Spec(A)), de sorte que $A = (f_1^m, \dots, f_n^m)$. Il existe donc $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $1 = a_1 f_1^m + \cdots + a_n f_n^m$, d'où on déduit que $x = 1.x = a_1 f_1^m x + \cdots + a_n f_n^m x$ appartient à N. Comme N est clairement de type fini, cela prouve que $M = N$ est de type fini.

Exercice 6. Soit A un anneau noethérien et $S \subset A$ un système multiplicatif. On considère un A-module de type fini M et un A-module quelconque N. On considère l'application canonique

$$u_{M,N} : S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Lorsque $M = A^n$, on a $\mathrm{Hom}_A(A^n, N) \simeq N^n$, et $\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A^n, S^{-1}N) \simeq (S^{-1}N)^n$, de sorte que $u_{M,N}$ est bijective dans ce cas : il s'agit essentiellement de l'isomorphisme canonique $(S^{-1}N)^n \simeq S^{-1}(N^n)$.

Considérons la classe $\mathscr{C}$ des A-modules M tels que l'application $u_{M,N}$ soit bijective pour tout A-module N. Soit

$$M' \to M \to M'' \to 0$$

suite exacte à droite de A-modules, telle que M' et M soient dans $\mathscr{C}$. Montrons que M'' est dans $\mathscr{C}$.

On a une suite exacte à gauche

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M', N)$$

et comme le foncteur de localisation est exact, on a aussi une suite exacte à gauche

$$0 \to S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M'', N) \to S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M, N) \to S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M', N).$$

De même, comme le foncteur de localisation est exact, on a une suite exacte à droite

$$S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M'' \to 0$$

d'où une suite exacte à gauche

$$0 \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M'', S^{-1}N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M', S^{-1}N).$$

En conclusion, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M'', N) \arrow[r] \arrow[d, "u_{M'',N}"] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M, N) \arrow[r] \arrow[d, "u_{M,N}"] & S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M', N) \arrow[d, "u_{M',N}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M'', S^{-1}N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M', S^{-1}N)
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont des suites exactes à gauche, avec $u_{M,N}$ et $u_{M',N}$ des isomorphismes. On en déduit aussitôt que $u_{M'',N}$ est un isomorphisme.

Pour conclure, il suffit de prouver que tout A-module de type fini est dans $\mathscr{C}$. Soit M un A-module de type fini. On choisit une application A-linéaire surjective de la forme $u : A^n \to M$, et on pose $K = \ker(u)$. Comme A est noethérien, A^n est noethérien, et donc son sous-module K est de type fini. On peut donc choisir une nouvelle fois une application A-linéaire surjective de la forme $w : A^m \to K$. Soit $v : A^m \to A^n$ l'application composée de w et l'inclusion $K \subset A^n$. On a alors $\mathrm{Im}(v) = K = \ker(u)$, avec u surjective. Autrement dit, on a une suite exacte à droite

$$A^m \xrightarrow{v} A^n \xrightarrow{u} M \to 0.$$

Comme A^m et A^n sont dans $\mathscr{C}$, il en résulte que M est dans $\mathscr{C}$. En particulier, $u_{M,N}$ est alors bijective pour tout A-module N.

Exercice 7. Soit A un anneau noethérien.

(a) Si $M = A^m$ et $N = A^n$ pour deux entier $m, n \in \mathbf{N}$, alors on a

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq A^{mn}.$$

En particulier, si M et N sont deux A-modules libres de rang fini, il en est de même de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Considérons deux A-modules localement libres M et N. En particlulier, ils sont de type fini (voir la fin de la correction de l'exercice 5). Il résulte donc de l'exercice 6 qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$. Cela implique que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})_{\mathfrak{p}}$ est libre de rang fini pour tout $\mathfrak{p}$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) Si $\mathrm{M} = \mathrm{A}^m$ et $\mathrm{N} = \mathrm{A}^n$, alors on a

$$\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \simeq \mathrm{A}^{mn}.$$

En particulier, si M et N sont libres de rang fini, alors il en est de même de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$. En général, pour deux A-modules M et N, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{N}_{\mathfrak{p}} &\simeq (\mathrm{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}} (\mathrm{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \\ &\simeq ((\mathrm{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{A}_{\mathfrak{p}}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \\ &\simeq (\mathrm{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \\ &\simeq \mathrm{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \\ &\simeq (\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N})_{\mathfrak{p}}, \end{aligned}$$

d'où on déduit que les A-modules localement libres sont stables par produit tensoriel sur A.

(c) Soient M et N deux A-modules localement libres. On a une application canonique

$$v = v_{\mathrm{M,N}} : \mathrm{M}^{\wedge} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$$

définie par

$$v(\varphi \otimes y) = (x \mapsto \varphi(x)y)$$

pour toute application A-linéaire $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{A}$ et tout élément $y \in \mathrm{N}$. Lorsque M et N sont des A-modules localement libres, il est facile de voir que $v_{\mathrm{M,N}}$ est une bijection : en procédant comme dans les questions précédentes, on voit qu'il suffit de le vérifier dans le cas où A est un anneau local, auquel cas M et N sont libres de rang fini. Si $\mathrm{M} = a^m$ et $\mathrm{N} = \mathrm{A}^n$, on a alors des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{M}^{\wedge} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \simeq \mathrm{A}^{mn} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}).$$

Exercice 8. Soit A un anneau noethérien. Montrons qu'un A-module de type fini est localement libre si et seulement s'il est projectif.

Soit M un A-module de type fini. Dire que M est projectif équivaut à dire que, pour toute application A-linéaire surjective $u : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$, l'application induite

$$u^* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P})$$

est surjective. Notons Q le conoyau de u^*. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on a une suite exacte de la forme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{u_{\mathfrak{p}}^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P})_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Q}_{\mathfrak{p}} \to 0.$$

Comme M est de type fini, en vertu de l'exercice 6, cette suite exacte est isomorphe à la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}}(\mathrm{M}_{\mathfrak{p}},\mathrm{N}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{u_{\mathfrak{p}}^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}}(\mathrm{M}_{\mathfrak{p}},\mathrm{P}_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Q}_{\mathfrak{p}} \to 0.$$

Si M est localement libre, comme $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ est un $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$-module libre, il est projectif, et on en déduit que $\mathrm{Q}_{\mathfrak{p}} \simeq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A (car l'application $u_{\mathfrak{p}} : \mathrm{N}_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{P}_{\mathfrak{p}}$ est encore surjective pour tout $\mathfrak{p}$). Il s'en suit que $\mathrm{Q} \simeq 0$, ce qui montre que M est un A-module projectif. Réciproquement, si M est projectif et de type fini, il est en particulier plat et de type fini, ce qui implique que $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ est un $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$-module plat et de type fini pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ (pour la platitude, cela résulte de la question (b) de l'exercice 1). On conclut alors grâce à la question (a) de l'exercice 4 que M est localement libre.