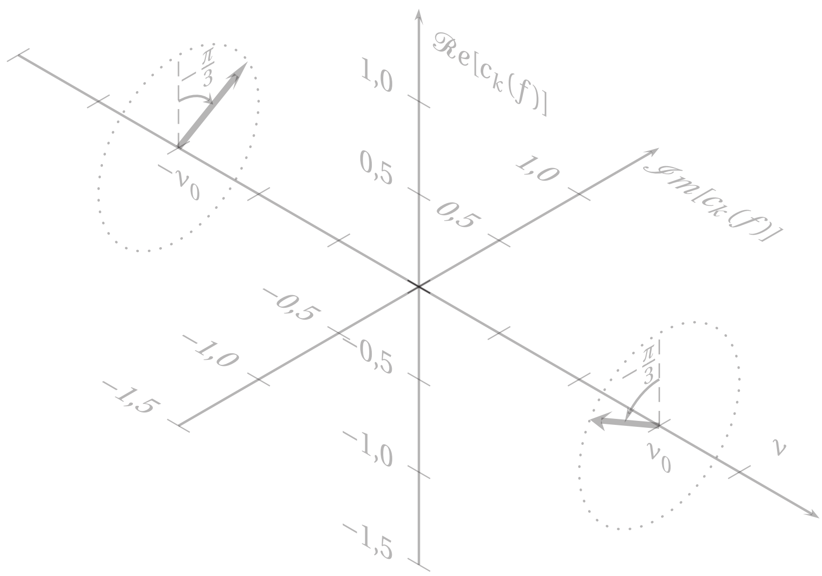
Éléments d'analyse pour le traitement du signal v 0.2β

André Legrand & Éric Tournier

9 octobre 2009

$$f(t) = \cos\left(2\pi\nu_0\, t - \frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{j2\pi k t}$$



Ce support de cours est encore en version *très préliminaire*.

Il comporte sûrement diverses erreurs…

Vous êtes invités à les signaler aux enseignants.

Table des matières

Chapitre 1

Analyse de Fourier des signaux périodiques

1.1 Généralités

Un filtre linéaire transforme une excitation de forme exponentielle $f(t) = e^{a\,t}$ en une réponse de même forme $g(t) = C\,e^{a\,t}$ où a et C sont des constantes dépendant du filtre.

Un signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$, si pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(t+T) = f(t)$$

La période fondamentale est le plus petit $T > 0$ tel que la relation précédente soit vérifiée.

Une exponentielle $e^{a\,t}$ est périodique de période T si $e^{a\,(t+T)} = e^{a\,t}$ c'est-à-dire, comme $e^{a\,(t+T)} = e^{a\,t}\,e^{a\,T}$, si $e^{a\,T} = 1$ ce qui est équivalent à $a\,T = 2\,\mathrm{j}\,\pi\,k$ où k est un entier relatif. En effet rappelons que $e^{2\mathrm{j}\pi\,k} = \cos(2\,\pi\,k) + \mathrm{j}\,\sin(2\,\pi\,k) = 1$

Les signaux exponentiels périodiques de période T sont donc de la forme :

$$e^{2\mathrm{j}\pi\,k\left(\frac{t}{T}\right)} = \cos\left[2\,\pi\,k\left(\frac{t}{T}\right)\right] + \mathrm{j}\,\sin\left[2\,\pi\,k\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

où k est un entier relatif.

Lorsqu'on se restreint aux signaux à valeurs réelles, on considère plutôt les fonctions circulaires :

$$\begin{aligned}
\cos\left[2\,\pi\,n\left(\frac{t}{T}\right)\right] &= \frac{e^{2\mathrm{j}\pi\,n\left(\frac{t}{T}\right)} + e^{2\mathrm{j}\pi\,(-n)\left(\frac{t}{T}\right)}}{2} \\
\sin\left[2\,\pi\,n\left(\frac{t}{T}\right)\right] &= \frac{e^{2\mathrm{j}\pi\,n\left(\frac{t}{T}\right)} - e^{2\mathrm{j}\pi\,(-n)\left(\frac{t}{T}\right)}}{2\,\mathrm{j}}
\end{aligned}$$

Cette fois n est un entier ≥ 0.

La fréquence de ces signaux réels est $\nu = \dfrac{n}{T}$, et complexes $\nu = \dfrac{k}{T}$.

Pour simplifier l'écriture on pose souvent $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$. Les signaux élémentaires précédents s'écrivent alors :

$$e^{k\mathrm{j}\omega\,t}\ ;\ \cos(n\,\omega\,t)\ ;\ \sin(n\,\omega\,t)$$

La réponse d'un filtre périodique à une excitation $e^{k\mathrm{j}\omega\,t}$ est de la forme $H(k)\,e^{k\mathrm{j}\omega\,t}$ où la fonction $k \mapsto H(k)$ est une constante du filtre, appelée fonction de transfert. Cette fonction décrit le filtre au niveau fréquentiel (section 1.5). En effet prenons comme entrée des signaux périodiques sommes (infinies) de signaux exponentiels :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k\,e^{k\mathrm{j}\omega\,t}$$

(nous verrons dans la section 1.3 que cette écriture est assez générale) alors la sortie sera donnée par la somme :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} H(k)\, c_k\, e^{k\mathrm{j}\omega t}$$

Sous l'hypothèse que la série trigonométrique :

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} H(k)\, e^{k\mathrm{j}\omega t}$$

converge, on peut aussi donner une représentation temporelle du filtre de la forme :

$$g = h \star f$$

où $\star$ est une opération appelée convolution que nous étudierons section 1.6.

Le calcul explicite de h sera abordé section 1.7.

Le calcul des coefficients c_k est l'objet de la section 1.2.

La relation entre la régularité des signaux périodiques et le comportement des coefficients c_k est étudiée section 1.4.

1.2 Coefficients de Fourier, premières propriétés.

Définition 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un signal périodique de période T. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres suivants $\left(\omega = \dfrac{2\pi}{T}\right)$:

- $\dfrac{a_0(f)}{2} = c_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$,
- pour tout entier $n > 0$, on pose : $a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$; $b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \sin(n\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$
- pour tout entier k relatif, on pose : $c_k(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e^{-k\mathrm{j}\omega t}\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

La série de Fourier de f est la série trigonométrique :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k(f)\, e^{\mathrm{j}k\omega t}$$

Motivons cette définition :

Proposition 1 :

Supposons que la série trigonométrique

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{\mathrm{j}k\omega t}$$

vérifie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty \left(\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty\right)$. On a $\dfrac{a_0(f)}{2} = c_0 = c_0(S)$ pour $n > 0$, $a_n = a_n(S)$, $b_n = b_n(S)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k = c_k(S)$.

Preuve :

Considérons la série d'exponentielles. L'hypothèse sur la convergence de S nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-k\mathrm{j}\omega t} S(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-k\mathrm{j}\omega t} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} c_q\, e^{\mathrm{j}q\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} c_q \int_0^T e^{-k\mathrm{j}\omega t}\, e^{\mathrm{j}q\omega t}\,\mathrm{d}t$$

et de même pour la série en cos et sin. Il suffit ensuite d'utiliser le lemme ci-dessous (dont la preuve est laissée en exercice) pour en déduire :

$$c_k(S) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-k\mathrm{j}\omega t}\, S(t)\,\mathrm{d}t = c_k$$

Lemme 1 :

– $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\,\cos(k\omega t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ si $n = k \in \mathbb{N}$ et 0 sinon,

– $\displaystyle\int_0^T \sin(n\omega t)\,\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ si $n = k \in \mathbb{N}$ et 0 sinon,

– $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\,\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$ si $n,k \in \mathbb{N}$.

– $\displaystyle\int_0^T e^{-n\mathrm{j}\omega t}e^{k\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = T$ si $n = k \in \mathbb{Z}$ et 0 sinon.

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier sous des hypothèses assez générales sur le signal f la convergence (vers $f(t)$) de la série de Fourier en t de f.

Proposition 2 :

1. Pour $n > 0$, on a $2\,c_n(f) = a_n(f) - \mathrm{j}\,b_n(f)$; $2\,c_{-n}(f) = a_n(f) + \mathrm{j}\,b_n(f)$; $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$
2. Par périodicité on peut définir les coefficients de Fourier en intégrant sur $[a,\, a+T]$.
3. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier k et pour tout $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, on a $a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda\, a_n(f) + \mu\, a_n(g)$, $b_n(\lambda f + \mu g) = \lambda\, b_n(f) + \mu\, b_n(g)$ et $c_k(\lambda f + \mu g) = \lambda\, c_k(f) + \mu\, c_k(g)$.

Preuve :

1. s'obtient en utilisant $2\cos(n\omega t) = e^{\mathrm{j}n\omega t} + e^{-\mathrm{j}n\omega t}$ et $2\,\mathrm{j}\sin(n\omega t) = e^{\mathrm{j}n\omega t} - e^{-\mathrm{j}n\omega t}$ dans les formules intégrales définissant les coefficients de Fourier.
2. se déduit de $\displaystyle\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T \int_T^{a+T}$ puis en remarquant que du fait de la périodicité $\displaystyle\int_T^{a+T} = \int_0^a = -\int_a^0$.
3. résulte immédiatement de la linéarité de $\displaystyle\int_0^T$.

Rappelons que

– f est paire si $\forall t$, on a $f(t) = f(-t)$ (symétrie du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées)

– f est impaire si $\forall t$, on a $-f(t) = f(-t)$ (symétrie du graphe de f par rapport à l'origine).

En changeant t en $-t$ dans les intégrales définissant les coefficients de Fourier on montre immédiatement :

Proposition 3 :

f paire implique $b_n(f) = 0$, f impaire implique $a_n(f) = 0$.

Exemple 1 :

Les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction périodique de période 2π suivante

$$g(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi} & \text{si } 0 < t \leq \pi \\ +\dfrac{1}{\pi} & \text{si } -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

vérifient :

– $a_n = 0$ par parité,

– pour $n > 0$, $b_n = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi^2}[(-1)^n - 1]$ donc $b_n = -\dfrac{4}{n\pi^2}$ si n est impair et 0 si n est pair.

1.3 Convergence ponctuelle de la série de Fourier

La convergence ponctuelle est donnée par le théorème de Dirichlet :

Théorème 1 :

On considère une fonction f périodique de période T, on pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. On suppose

1. f admet un nombre fini de discontinuités sur un intervalle de période T,
2. f admet une dérivée à droite et à gauche en en tout point de discontinuité

ce qui implique que f admet une limite à droite $f(t^+)$ et à gauche $f(t^-)$ en en tout point t, avec $f(t^+) = f(t^-) = f(t)$ en un point t où f est continue. Alors la série de Fourier de f converge en tout point t vers

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{k=+N} c_k(f)\, e^{k\mathrm{j}\omega t}$$

Exemple 2 :

Soit la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) = t$ pour $0 \le t < 2\pi$. La fonction de même période $g = f - \pi$ est une fonction impaire donc pour $n > 0$, on a $a_n(g) = 0 = a_n(f)$ et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(n\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-t\,\frac{\cos(n\,t)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{n}$$

Le théorème de Dirichlet donne : $f(t) = \pi - 2\sum_1^{\infty}\dfrac{\sin(n\,t)}{n}$. En particulier pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\sum_1^{\infty}\frac{\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n} = \pi - 2\sum_0^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)} = \pi - 2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

1.4 Régularité du signal et décroissance des coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier sont bornés. En effet :

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

et de même pour $a_n(f)$ et $b_n(f)$. On a le résultat plus précis, appelé théorème de Riemann-Lebesgue,

Théorème 2 :

Les coefficients de Fourier vérifient

- $a_n(f) \to 0$ et $b_n(f) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$
- $c_k(f) \to 0$ lorsque $|k| \to +\infty$.

Commentaire :

Il en résulte que des suites (a_n), (b_n) (ou la suite (c_k)) ne peuvent être des coefficients de Fourier d'un signal périodique modélisé par une fonction que si les suites (a_n), (b_n) (ou la suite (c_k)) tendent vers 0.

On peut montrer que si les coefficients de Fourier tendent assez vite vers 0 pour que $\sum_0^{\infty}|a_n| + |b_n|$ CV (ou $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|$ CV) alors le signal somme est continu.

Regardons la dérivabilité. En intégrant par parties dans les intégrales définissant les coefficients de Fourier on montre :

Lemme 2 :

Si f périodique est continuement dérivable de période T alors on a :

$$a_n(f') = n\omega\, b_n(f)\ ;\ b_n(f') = -n\omega\, a_n(f)\ ;\ c_k(f') = (\mathrm{j}\,k\,\omega)\, c_k(f)$$

Il en résulte

Proposition 4 :

1. Si f est périodique et k-fois continuement dérivable, alors $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{n^k}$. En particulier si f est indéfiniment dérivable, les coefficients de Fourier décroissent plus vite que toute puissance de $\dfrac{1}{n}$.
2. Si $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{n^k}$ avec $\alpha > k+1$, alors f est la somme de sa série de Fourier et est k-fois continuement dérivable. En particulier si les coefficients de Fourier sont à décroissance rapide, f est C^∞.

On a le même résultat en remplaçant $|c_n(f)|$ par $|a_n(f)| + |b_n(f)|$.

Le 1. de la proposition 4 résulte du lemme précédent. Le 1. se déduit du théorème de dérivation termes à termes dans les séries de fonctions.

Donnons une généralisation du lemme 2 :

Proposition 5 :

Si f est continue et si f' est défini sauf en un nombre fini de points (sur un intervalle de période) où f est dérivable à gauche et à droite et est continu par morceaux, alors les relations du lemme 2 restent valables :

$$a_n(f') = n\omega\, b_n(f)\ ;\ b_n(f') = -n\omega\, a_n(f)\ ;\ c_k(f') = k\,\mathrm{j}\,\omega\, c_k(f).$$

C'est-à-dire que si f est continue et est continuement dérivable par morceaux on obtient la série de Fourier de f' (qui est alors continue par morceaux) en dérivant termes à termes la série de Fourier de f.

Exemple 3 :

La fonction continue

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{\pi} & \text{si} \quad 0 < t \leq \pi \\ \dfrac{t}{\pi} + 1 & \text{si} \quad -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

est la primitive « par morceaux » de g (exemple 1) telle que $f(0) = 1$ et donc $b_n(f) = 0$ et $a_n(n) = \dfrac{4}{(n\pi)^2}$ si n est impair et 0 sinon.

Commentaire :

Supposons f dérivable. Alors si f est périodique f' est aussi périodique avec la même période. Mais f' périodique implique f périodique que si $c_0(f') = 0$.

1.5 Représentation fréquentielle d'un système périodique. Fonction de transfert

Commençons par traiter un exemple. On considère le système périodique $\left(\omega = \dfrac{2\pi}{T}\right)$ où la sortie g correspondant à l'entrée f vérifie l'équation différentielle :

$$g" + a^2 g = f\ ;\ \omega \neq a$$

On suppose que $f = \sum_{\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{\mathrm{j}\,k\,\omega\, t}$ est développable en série de Fourier et on cherche g sous la forme d'une série de Fourier,

$$g = \sum_{\infty}^{+\infty} c_k(g)\, e^{\mathrm{j}\,k\omega\,t}$$

On suppose qu'on peut dériver termes à termes. On obtient

$$g" + a^2\,g = \sum_{\infty}^{+\infty} c_k(g)\,[(k\,\mathrm{j}\,\omega)^2 + a^2]\,e^{\mathrm{j}\,k\omega\,t} = \sum_{\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{\mathrm{j}\,k\omega\,t}$$

Cette relation sera satisfaite si pour tout entier k, on a

$$c_k(g) = \frac{1}{a^2 - k^2\,\omega^2}\,c_k(f)$$

La fonction $H(k) = \dfrac{1}{a^2 - k^2\,\omega^2}$ est associée au système périodique, on l'appelle la fonction de transfert.

Définition 2 :

La fonction de transfert d'un système périodique est la fonction

$$k \mapsto H(k) = \frac{c_k(g)}{c_k(f)}$$

définie par le rapport entre les coefficients de Fourier de même rang de la sortie g et ceux de l'entrée f. Elle représente le système périodique dans l'espace des fréquences.

Pratiquement on calcule $H(k)$ comme le rapport $\dfrac{\text{sortie}}{\text{entrée}}$ pour l'entrée $f(t) = e^{k\mathrm{j}\omega\,t}$, pour laquelle $c_k(f) = 1$. Par exemple pour le système $g'' + a^2\,g = f$ posons $g(t) = H(k)\,e^{k\mathrm{j}\omega\,t}$ on déduit

$$g'' + a^2\,g = H(k)\,(-k^2\,\omega^2 + a^2)\,e^{k\mathrm{j}\omega\,t} = e^{k\mathrm{j}\omega\,t}$$

d'où la valeur de $H(k)$ trouvée précédemment.

1.6 Représentation temporelle d'un système périodique. Convolution des signaux périodiques

Dans la section précédente la fonction de transfert H du système périodique peut être vue comme les coefficients de Fourier d'une fonction périodique h de même période. En effet il suffit de poser

$$h(t) = \sum_{\infty}^{+\infty} H(k)\,e^{\mathrm{j}\,k\omega\,t}$$

La série converge (normalement) car chaque terme de la série vérifie la majoration $|H(k)\,e^{\mathrm{j}\,k\omega\,t}| \leq |\,H(k)|$ et $H(k)$ a un comportement en $\dfrac{1}{k^2}$ (cf. prop.1).

Le problème est alors : peut-on calculer directement la sortie g connaissant l'entrée f et la fonction h ?

La réponse est donnée par la convolution.

Définition 3 :

Soient f, h continues par morceaux, périodiques de période T. La convolution de f par h est la fonction périodique définie par la formule intégrale suivante :

$$(h \star f)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T h(\tau)\,f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Par périodicité on peut intégrer sur un intervalle $[a,\, a+T]$. L'importance de cette définition résulte de la relation :

Proposition 6 :

$$c_k(h \star f) = c_k(h)\, c_k(f)$$

La preuve s'obtient en permutant les signes intégraux dans l'intégrale double définissant les coefficients de Fourier de $h \star f$ (une $\int$ pour coefficient, une $\int$ pour $\star$).

Il en résulte de la relation $c_k(g) = H(k)\, c_k(f) = c_k(h)\, c_k(f)$ que la sortie g du système précédent est donnée en fonction de l'entrée f par convolution :

$$g = h \star f$$

Cet exemple se généralise immédiatement :

Proposition 7 :

Si la fonction de transfert $H(k)$ d'un système périodique vérifie $H(k) = c_k(h)$ pour une fonction périodique h de même période alors le système est équivalent au produit de convolution par h :

$$g = h \star f$$

Exemple 4 :

On considère le système périodique $\left(\omega = 2\,\dfrac{\pi}{T}\right)$ d'entrée f et de sortie g vérifiant $g' + a\,g = f$. La même méthode que précédemment donne

$$c_k(g) = \frac{1}{\mathrm{j}\,k\omega + a}\, c_k(f)$$

La fonction de transfert $H(k) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,k\omega + a}$ se comporte comme $\dfrac{1}{k}$ et à priori on ne peut rien dire sur la convergence de la série

$$\sum_{\infty}^{+\infty} H(k)\, e^{\mathrm{j}\,k\,\omega\,t}$$

Considérons la fonction $h_1(t) = e^{-a\,t}$ pour $0 \leq t < T$ et prolongée par périodicité de période T. Les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(h_1) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-(k\mathrm{j}\omega + a)\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - e^{-a\,T}}{T\,(k\mathrm{j}\omega + a)}$$

Posons $h(t) = \dfrac{T\,e^{-a\,t}}{1 - e^{-a\,T}}$ pour $0 \leq t < T$ et prolongée par périodicité de période T alors $c_k(h) = H(k)$ et par conséquent le système $g' + a\,g = f$ est représenté par la convolution $g = h \star f$.

La convolution vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 8 :

- $h \star f = f \star h$,
- $h \star (f_1 \star f_2) = (h \star f_1) \star f_2$,
- $h \star (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (h \star f_1) + \lambda_2 (h \star f_2)$,

Si l'un des facteurs est dérivable, le produit de convolution est dérivable, et on a la relation $h' \star f = (h \star f)'$.

1.7 Sommation des séries trigonométriques à coefficients rationnels en n

Traitons un exemple. On veut sommer la série de Fourier de période fondamentale 2π

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{k^2 - 2\,k + 2}\, e^{\mathrm{j}\,k\,t}.$$

La série converge absolument car le module du terme général vérifie la majoration

$$\left|\frac{1}{k^2-2k+2}\,e^{\mathrm{j}kt}\right| = \frac{1}{k^2-2k+2}$$

qui est le terme général d'un série convergente puisqu'il se comporte comme $\frac{1}{k^2}$ lorsque $k \to +\infty$ (on en déduit même la convergence normale d'où la continuité de la somme).

Décomposons les coefficients en éléments simples

$$\frac{1}{k^2-2k+2} = \frac{1}{(k-1-\mathrm{j})(k-1+\mathrm{j})} = \frac{-\frac{\mathrm{j}}{2}}{k-1-\mathrm{j}} + \frac{\frac{\mathrm{j}}{2}}{k-1+\mathrm{j}}$$

Les éléments simples sont des coefficients de Fourier en effet :

Proposition 9 :

Considérons la fonction périodique de période 2π définie par $f_\alpha(t) = e^{\alpha t}$ pour $0 \le t < 2\pi$ et prolongée par périodicité. On a

$$\frac{1}{\alpha + kj} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\pi\alpha}}\,c_k(f_\alpha).$$

Preuve :

$$c_k(f_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha t}e^{-k\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-t(\alpha+k\mathrm{j})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-t(\alpha+k\mathrm{j})}}{-(\alpha+k\mathrm{j})}\right]_0^{2\pi} = \frac{1-e^{-2\pi\alpha}}{2\pi(\alpha+k\mathrm{j})}$$

On en déduit

$$\frac{-\mathrm{j}/2}{k-1-\mathrm{j}} = \frac{\frac{1}{2}}{jk+(-\mathrm{j}+1)} = \frac{\pi\,c_k(f_{(1-\mathrm{j})})}{1-e^{-2\pi}}\ ;\ \frac{\frac{\mathrm{j}}{2}}{k-1+\mathrm{j}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\mathrm{j}k+(-\mathrm{j}-1)} = -\frac{\pi\,c_k(f_{(-1-\mathrm{j})})}{1-e^{2\pi}}$$

et donc la série de Fourier est celle de la fonction périodique définie pour $0 \le t < 2\pi$ par

$$f(t) = \frac{\pi f_{(1-\mathrm{j})}(t)}{1-e^{-2\pi}} - \frac{\pi f_{(-1-\mathrm{j})}(t)}{1-e^{2\pi}} = \frac{\pi e^{-1+\mathrm{j}t}}{1-e^{-2\pi}} - \frac{\pi e^{(1+\mathrm{j})t}}{1-e^{2\pi}} = \pi e^{jt}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-2\pi}} - \frac{e^{t}}{1-e^{2\pi}}\right)$$

Remarquons que f est continue car

$$f(0^+) = \frac{\pi}{1-e^{-2\pi}} - \frac{\pi}{1-e^{2\pi}} = \frac{\pi(e^{-2\pi}-e^{2\pi})}{(1-e^{-2\pi})(1-e^{2\pi})} = \frac{\pi e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} - \frac{\pi e^{2\pi}}{1-e^{2\pi}} = f(2\pi^-)$$

1.8 Exercices avec corrigés

Exercice 1 :

Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$ de la fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi,+\pi]$ de la manière suivante

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire les coefficients de Fourier $a_n(g)$ et $b_n(g)$ de la fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi,+\pi]$ de la manière suivante

$$g(t) = \begin{cases} +\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Peut on en déduire les coefficients de Fourier $a_n(h)$ et $b_n(h)$ de la fonction périodique de période 2π suivante

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} & \text{si } -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \\ +\frac{t}{2} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Etudier la convergence des séries de Fourier correspondantes.

Réponse :

$a_0 = \frac{1}{2}$ et par parité $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n\,t)\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}[\sin(n\,t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\,(-1)^k}{(2\,k+1)\pi}$ si $n = 2\,k+1$, 0 sinon.
Comme $g = f - \frac{1}{2}$ on a $a_0(g) = 0$ et $a_n(g) = a_n(f)$.
h est une primitive de g (périodique puisque $a_0(g) = 0$) on obtient les coefficients de Fourier en intégrant termes à termes, ce qui donne $b_n(h) = \frac{a_n(g)}{n}$, $a_0(h) = 0$, $a_n(h) = 0$ pour $n > 0$.
La série de Fourier de f converge vers $f(t)$ pour $t \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi$. En ces points la série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}$.
Même conclusion pour la série de g en substituant 0 à $\frac{1}{2}$. h étant continue la série de Fourier converge vers h.

Exercice 2 :

Soit la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) = t$ pour $0 \le t < 2\pi$. En considérant la fonction $f - \pi$ montrer $a_n(f) = 0$ pour $n > 0$. Calculer la série de Fourier de f.
Montrer $\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$.

Réponse :

$g = f - \pi$ est une fonction impaire donc pour $n > 0$, on a $a_n(g) = 0 = a_n(f)$. $a_0(f) = 2\pi$ et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(n\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos(n\,t)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi}$$

$f(t) = \pi - 2\sum_1^\infty \frac{\sin(n\,t)}{n}$. La valeur de $\frac{\pi}{4}$ est obtenue via le théorème de Dirichlet en se plaçant en $t = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\sum_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} = \pi - 2\sum_0^\infty \frac{\sin\left[(2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}\right]}{2\,k+1} = \pi - 2\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)}$$

Exercice 3 :

1. Calculer la fonction de transfert $k \mapsto H(k)$ du système périodique de période 2π d'entrée f, de sortie g, défini par l'équation différentielle
$$g' + a\,g = f,\ \ a > 0$$

2. Montrer que les coefficients de Fourier $c_k(h)$ de la fonction périodique de période 2π telle que pour $0 \le t < 2\pi$
$$h(t) = \frac{2\pi e^{-at}}{1 - e^{-2\pi a}},\ \ a > 0$$
vérifient $c_k(h) = \frac{1}{\mathrm{j}\,k + a} = H(k)$

Réponse :

1. On pose $f(t) = e^{\mathrm{j}\,k\,t}$ et on cherche $g(t) = H(k)\,e^{\mathrm{j}\,k\,t}$, ce qui donne $H(k) = \frac{1}{a+\mathrm{j}\,k}$.

2. On vérifie immédiatement que $c_k(e^{-at}) = \dfrac{1-e^{-2\pi a}}{2\pi(a+\mathrm{j}k)}$. On en déduit le résultat en multipliant par $\dfrac{2\pi}{1-e^{-2\pi a}}$.

Exercice 4 :

1. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction h paire périodique de période 2π telle que : $h(t) = \cos(a(t-\pi))$ pour $0 < t \leq \pi$.
2. Déterminer la fonction de transfert $H(k)$ du système périodique, de période 2π, $g'' + a^2 g = f$ d'entrée f et de sortie g.
3. Montrer la convergence et déterminer les coefficients de Fourier $a_n(h_1)$ et $b_n(h_1)$ de la série

$$h_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{e^{\mathrm{j}kt}}{a^2-k^2}$$

Comparer a_n et $a_n(h_1)$. En déduire la représentation de ce filtre par convolution.

Réponse :

1. h paire donc $b_n = 0$,
2. $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(a(t-\pi))\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{a\pi}\,[\sin(a(t-\pi))]_0^{\pi} = \dfrac{\sin(a\pi)}{a\pi}$ et pour $n > 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(a(t-\pi))\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos[(a+n)t-\pi a]\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\cos[(a-n)t-\pi a]\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{\sin[(a+n)t-\pi a]}{a+n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin[(a-n)t-\pi a]}{a-n}\right]_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\sin(\pi a)\left[\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right] = 2a\,\frac{\sin(\pi a)}{\pi(a^2-n^2)}$$

3. Pour $-\infty < k < +\infty$, on a $H(k) = \dfrac{1}{a^2-k^2}$ et la fonction :

$$h_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H(k)\,e^{\mathrm{j}kt} = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{a^2-n^2}\cos(nt) = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(h_1)\cos(nt)$$

vérifie, pour tout $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{a\sin(\pi a)}{\pi}\,a_n(h_1)$, d'où $h = \dfrac{a\sin(\pi a)}{\pi}\,h_1$ et le filtre est représenté par le produit de convolution $g = h_1 \star f = \dfrac{\pi}{a\sin(\pi a)}\,h \star f$.

Exercice 5 :

Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi, +\pi]$ de la manière suivante

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quels sont les coefficients de Fourier $a_n(g)$ et $b_n(g)$ de la sortie g du système périodique de période 2π représenté par l'équation différentielle $g' + \lambda g = f$?

Réponse :

$\dfrac{a_0(f)}{2} = \dfrac{1}{2}\pi$ et

$$a_n(f) = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n\pi}\,[\sin(nt)]_0^1 = \frac{\sin(n)}{n\pi} b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n\pi}\,[-\cos(nt)]_0^1 = \frac{1-\cos(n)}{n\pi}$$

Les coefficients $a_n(g)$ et $b_n(g)$ vérifient les équations

$$\lambda\,a_n(g) + n\,b_n(g) = a_n(f)\ ;\ -n\,a_n(g) + \lambda\,b_n(g) = a_n(f)$$

dont les solutions sont données, pour $n > 0$, par $a_n(g) = \dfrac{\lambda\, a_n(f) - n\, b_n(f)}{\lambda^2 + n^2}$, $b_n(g) = \dfrac{n\, a_n(f) + \lambda\, b_n(f)}{\lambda^2 + n^2}$ et $\lambda\, a_0(g) = a_0(f)$.

Exercice 6 :

Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi, +\pi]$ de la manière suivante

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos(2\,t) & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour quelle valeur maximum de m cette fonction est elle m-fois continuement différentiable ?

Réponse :

$b_n(f) = 0$, $\dfrac{a_0(f)}{2} = 1$, pour $n > 0$ pair $a_n(f) = 0$ et pour $n = 2\,k + 1$, $a_n(f) = \dfrac{(-1)^{k+1}\, 8}{n^3 - 4\,n}$.
$m = 1$

Chapitre 2

Transformée de Fourier des signaux intégrables

Principaux outils mathématiques utilisés : Intégrales généralisées (et fonctions définies par des intégrales généralisées).

2.1 Comportement limite du spectre de fréquences d'un signal périodique lorsque la période tend vers l'infini

Rappelons que pour un signal périodique f_T de période T

– les fréquences possibles sont $\nu = \dfrac{k}{T}$ où $k \in \mathbb{Z}$

– le spectre des fréquences est donné par les coefficients de Fourier

$$\nu = \frac{k}{T} \mapsto c_k(f_T) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\mathrm{j}\pi\,\frac{k}{T}\,t}\, f_T(t)\,\mathrm{d}t$$

– le spectre des fréquences détermine le signal par la série de Fourier

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k(f_T)\, e^{2\mathrm{j}\pi\,\frac{k}{T}\,t}.$$

– la « densité » en la fréquence $\nu = \dfrac{k}{T}$ est

$$T c_k(f_T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\mathrm{j}\pi\,\frac{k}{T}\,t}\, f_T(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'est le quotient du k^{e} coefficient de Fourier par longueur $\dfrac{1}{T}$ de l'intervalle sur lequel $\nu = \dfrac{k}{T}$ est la seule fréquence possible.

Un signal en régime permanent $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t)$ peut être vu comme un signal périodique dont la période est infinie. En effet supposons ce signal nul pour t assez grand, par exemple pour $|t| \geq \dfrac{a}{2}$, prenons $T \geq a$ et notons f_T le signal périodique de période T défini par $f_T(t) = f(t)$ pour $-\dfrac{T}{2} \leq t \leq \dfrac{T}{2}$ et prolongé par périodicité. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t).$$

Regardons la limite lorsque $T \to +\infty$

– des coefficients de Fourier de f_T (ou plus précisément de la densité de fréquences),

– de la série de Fourier de f_T.

Fixons une fréquence $\nu \in \mathbb{R}$. Posons $T = k\nu$ (T est $> a$ pour k assez grand). Remarquons que faire tendre $T \to +\infty$ revient à faire tendre $k \to +\infty$.

On a
$$\lim_{T\to+\infty} T c_k(f_T) = \lim_{T\to+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{T\geq a}{=} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction
$$\nu \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t$$
représente donc la limite lorsque la période tend vers l'infini du spectre de densité fréquences du signal périodique f_T. On appellera cette fonction
$$\widehat{f}(\nu) = \mathscr{F} f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t$$
la transformée de Fourier de f. Elle détermine le spectre des densités de fréquences du signal f.

Maintenant donnons un sens à la limite de la série de Fourier de f_T lorsque $T \to +\infty$. Comme

$$\widehat{f}\left(\frac{k}{T}\right) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\mathrm{j}\pi\frac{k}{T}t} f(t)\,\mathrm{d}t = T c_k(f_T)$$

la série de Fourier du signal périodique f_T

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k(f_T)\, e^{2\mathrm{j}\pi\frac{k}{T}t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \widehat{f}\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\mathrm{j}\pi\frac{k}{T}t}$$

s'interprète comme la formule approchée par la méthode des rectangles de l'intégrale

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\widehat{f}(\nu) d\nu$$

En effet prenons $\dfrac{1}{T}$ comme pas et effectuons les prélèvements aux points $\nu = \dfrac{k}{T}$ (t est un paramètre aussi bien dans l'intégrale que dans la série). La valeur de la fonction qu'on intègre en un de ces prélèvements est $\widehat{f}\left(\dfrac{k}{T}\right) e^{2\mathrm{j}\pi\frac{k}{T}t} = T c_k(f_T)\, e^{2\mathrm{j}\pi\frac{k}{T}t}$. L'aire d'un rectangle élémentaire est $\frac{1}{T}\, T c_k(f_T)\, e^{2\mathrm{j}\pi\frac{k}{T}t} = c_k(f_T)\, e^{2\mathrm{j}\pi\frac{k}{T}t}$. La valeur approché de l'intégrale est la somme des aires des rectangles élémentaires, c'est-à-dire la somme de la série de Fourier.

Dans ce sens l'intégrale
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\,\widehat{f}(\nu)\,\mathrm{d}\nu \tag{2.1}$$
peut être vue comme la limite lorsque $T \to +\infty$ de la série de Fourier de f_T. On appelle

$$\overline{\mathscr{F}}(g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\, g(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

la transformée de Fourier réciproque de g. C'est elle qui détermine le signal f à partir de son spectre des fréquences $\widehat{f}$.

Pour terminer indiquons l'utilisation de la transformée de Fourier dans l'étude des systèmes. Plaçons nous en régime permanent, c'est-à-dire pour $-\infty < t < +\infty$, et considérons le système :

$$g' + a g = f$$

Soit une fréquence donnée $\nu \in \mathbb{R}$. Une entrée f_ν de fréquence ν s'écrit $f_\nu(t) = a_\nu\, e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}$. On cherche la sortie correspondante sous la forme $g_\nu(t) = H(\nu)\, f_\nu(t)$. La fonction de transfert $H(\nu)$ devant vérifier la relation

$$H(\nu)\, a_\nu(2\mathrm{j}\pi\nu + a)e^{2\mathrm{j}\pi\nu t} = a_\nu e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}$$

est donnée par
$$H(\nu) = \frac{1}{2\mathrm{j}\pi\nu + a}$$

Considérons maintenant une entrée
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\widehat{f}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

La sortie correspondante sera donnée par la formule intégrale

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\nu(t)\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t} H(\nu)\,\widehat{f}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

L'objet de ce chapitre est l'étude des relations entre les propriétés d'un signal f et celles de son « spectre en fréquences »

$$\nu \mapsto \widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

appelé transformée de Fourier du signal f.

2.2 Transformée de Fourier des signaux intégrables

Un signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est intégrable si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$. On note $L^1(\mathbb{R})$ (notation standard) l'espace des signaux intégrables. On rappelle que la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$ entraîne la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t < +\infty$ (convergence absolue d'une intégrale généralisée implique convergence de cette intégrale).

Définition 4 :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction

$$\nu \mapsto \widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\mathrm{d}t.$$

Comme $|e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)| = |f(t)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'intégrale généralisée de la définition converge absolument.

Exemple 5 :

Transformée de Fourier du signal porte. Soit $a > 0$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \le a$ et 0 sinon. Alors

$$\widehat{\chi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t}\chi(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^{+a} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t}\mathrm{d}t = \frac{e^{-2\mathrm{j}\pi\nu a} - e^{2\mathrm{j}\pi\nu a}}{-2\mathrm{j}\pi\nu} = \frac{\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu a}$$

Exemple 6 :

Transformée de Fourier d'un signal exponentiel causal. Soit $a > 0$.

$$\mathscr{F}(ue^{-at})(\nu) = \mathscr{F}(u\,e^{-a\,t})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t}\,u\,e^{-a\,t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-(2\mathrm{j}\pi\nu+a)\,t}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-(2\mathrm{j}\pi\nu+a)\,t}}{-(2\mathrm{j}\pi\nu+a)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\mathrm{j}\pi\nu+a}$$

ceci car $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\dfrac{e^{-(2\mathrm{j}\pi\nu+a)t}}{-(2\mathrm{j}\pi\nu+a)}\right| = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{-at}}{|2\mathrm{j}\pi\nu+a|} = 0.$

Proposition 10 :

1. La transformation de Fourier est linéaire, c'est-à-dire $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$ et $\widehat{\lambda f} = \lambda\,\widehat{f}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

   Soit $U_\tau f$ la translatée de f par τ, c'est-à-dire $(U_\tau f)(t) = f(t-\tau)$, et $H_a f$ la compression de f par a, c'est-à-dire $(H_a f)(t) = f\left(\dfrac{t}{a}\right)$. On a :
2. $\widehat{(U_\tau f)}(\nu) = e^{-2\mathrm{j}\pi\nu\tau}\,\widehat{f}(\nu)$.
3. $\widehat{H_a f}(\nu) = a\,\widehat{f}(a\nu)$.

Preuve :

1. est immédiat et 2. et 3. se montrent par changement de variables. Par exemple,

$$\widehat{(U_\tau f)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t-\tau)\,\mathrm{d}t \overset{s=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu(s+\tau)} f(s)\,\mathrm{d}s = e^{-2\mathrm{j}\pi\nu\tau}\widehat{f}(\nu).$$

2.3 Régularité et croissance à l'infini. Représentation fréquentielle d'un filtre

Proposition 11 :

1. $\widehat{f}$ continue et bornée.
2. $\widehat{f}(\nu) \to 0$ lorsque $|\nu| \to +\infty$ (Riemann-Lebesgues).
3. $(\widehat{f})'(\nu) = \mathscr{F}(-2\mathrm{j}\pi\, t\, f(t))(\nu)$ si $f, t\,f \in L^1(\mathbb{R})$
4. $\widehat{f'}(\nu) = 2\mathrm{j}\pi\,\nu\,\widehat{f}(\nu)$ si $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Preuve :

1. $|\widehat{f}(\nu)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$. La dernière intégrale est finie car $f \in L^1\mathbb{R}$.
   La continuité résulte du théorème de la convergence dominée. En effet, on a la majoration suivante de la fonction $F(t,\nu) = e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)$ continue en ν (on utilise les notations du théorème de la convergence dominée, cf. fin des rappels mathématiques) :
   $$|e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)| \le |f(t)| = g(t)$$
   où par hypothèse g est une fonction intégrable indépendante du paramètre ν.
2. Résultat admis.
3. S'obtient en appliquant la relation
   $$\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\nu}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)}{\partial\nu}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t}(-2\mathrm{j}\pi\, t\, f(t))\,\mathrm{d}t = \mathscr{F}(-2\mathrm{j}\pi\, t\, f(t))(\nu)$$
   Pour montrer cette relation on applique le corollaire du théorème de la convergence dominée à $f(t,\nu) = e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)$ avec $\left|\frac{\partial e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)}{\partial\nu}\right| = 2\pi\,|t\,f(t)| = g(t)$.
4. On intègre par parties
   $$\widehat{f'}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f'(t)\,\mathrm{d}t = [e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)]_{-\infty}^{+\infty} + (2\mathrm{j}\pi\nu)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t = (2\mathrm{j}\pi\nu)\,\widehat{f}(\nu)$$

La partie intégrée est nulle comme il résulte du lemme suivant :

Lemme 3 :

$f, f' \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(t) \to 0$ lorsque $|t| \to +\infty$.

Preuve :

1. $f' \in L^1(\mathbb{R})$ implique
   $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(u)\,\mathrm{d}u$$
   existe et de même en $-\infty$.
2. Si une fonction intégrable admet une limite en $\pm\infty$ alors cette limite est nulle.

Application 1 :

Montrons que $\widehat{e^{-\pi t^2}}(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$. Posons $f(t) = e^{-\pi t^2}$. Cette fonction vérifie l'équation différentielle

$$f' + 2\,t\pi\,f = 0$$

Appliquons la transformée de Fourier de chaque coté, on obtient $\widehat{f'}(\nu) = -\widehat{(2t\pi f)}(\nu)$. La proposition 2. 4) appliquée au premier membre donne $\widehat{f'}(\nu) = 2\mathrm{j}\pi\,\nu\,\widehat{f}(\nu)$ et la proposition 2.3) appliquée au deuxième membre donne $-\widehat{(2\,t\pi\,f)}(\nu) = (1/j)(\widehat{f})'(\nu)$. Il en résulte $(\widehat{f})'(\nu) = -2\pi\,\nu\,\widehat{f}(\nu)$. Donc f et $\widehat{f}$ satisfont la même équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre nul. Ces deux fonctions sont donc proportionnelles $f(x) = C\,\widehat{f}(x)$. Faisons $x = 0$, alors $f(0) = 1$ et $C\,\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1$, donc $C = 1$.

Application 2 :

Représentation fréquentielle d'un filtre. Nous allons revenir sur l'exemple donné à la fin de la section 1. Considérons le filtre $g' + ag = f$. Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres

$$\mathscr{F}(g' + a\,g) = (2\,\mathrm{j}\pi\,\nu + a)\mathscr{F}g(\nu) = \mathscr{F}f(\nu).$$

On déduit la fonction de transfert du filtre

$$H(\nu) = \frac{\mathscr{F}g(\nu)}{\mathscr{F}f(\nu)} = \frac{1}{2\,\mathrm{j}\pi\,\nu + a}.$$

2.4 Transformée de Fourier réciproque.

Commentaire :

$f \in L^1(\mathbb{R})$ n'implique pas $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ par exemple $u\,e^{-a\,t} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $a > 0$ et $\widehat{u\,e^{-a\,t}}(\nu) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{j}\pi\,\nu + a} \notin L^1(\mathbb{R})$ (la fonction $\dfrac{1}{\nu} = \nu^{-1}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$).

Définition 5 :

Posons, pour $g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\overline{\mathscr{F}}g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\,t\,\nu}\,g(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

$\overline{\mathscr{F}}$ est appelée la transformée de Fourier inverse.

Proposition 12 :

La transformée de Fourier inverse vérifie au signe près les mêmes propriétés que la transformée de Fourier $\mathscr{F} = \widehat{\ }$(le vérifier en exercice) c'est-à-dire :

$\overline{\mathscr{F}}(U_{\nu_0}g)(t) = e^{2\mathrm{j}\pi\,t\,\nu_0}\overline{\mathscr{F}}g(t)$,

$\overline{\mathscr{F}}(H_\lambda g)(t) = \lambda(\overline{\mathscr{F}}g)(\lambda\,t)$,

$(\overline{\mathscr{F}}g)'(t) = \overline{\mathscr{F}}(2\,\mathrm{j}\pi\,\nu\,g)(t)$ lorsque les fonctions $g(\nu), \nu\,g(\nu) \in L^1(\mathbb{R})$,

$\overline{\mathscr{F}}(g')(t) = -2\,\mathrm{j}\pi\,t\,(\overline{\mathscr{F}}g)(t)$ lorsque les fonctions $g(\nu)$, $g'(\nu) \in L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 3 :

$f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow > \overline{\mathscr{F}}(\widehat{f}) = f$

Preuve :

(sous les hypothèses, forcément vérifiées à posteriori, f continue et bornée par M)

1. Tout d'abord pour tout $\alpha > 0$, on a la formule d'échange

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha\, x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha\, x) e^{-2\mathrm{j}\pi\, t\, x}\, g(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\mathrm{j}\pi\,\frac{t\,y}{\alpha}}\, g(t)\,\frac{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y}{\alpha}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\mathrm{j}\pi\, u\, y}\, g(\alpha\, u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u)\, g(\alpha\, u)\,\mathrm{d}u$$

2. Nous aurons besoin de $\widehat{e^{-\omega|t|}}(\nu) = \dfrac{\omega}{\omega^2 + 4\pi^2\nu^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{\omega^2+4\pi^2\nu^2}\,\mathrm{d}\nu = 1$ (calculs élémentaires, voir TD).
3. Maintenant posons $g(x) = e^{-\omega|x|}$ dans 1. et faisons tendre α vers 0. Alors :
   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha\, x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x \to f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$ ceci car :
   – la continuité de f en 0 implique $f(\alpha\, x)\,\widehat{g}(x) \to f(0)\, g(x)$
   – on a la majoration $|f(\alpha\, x)\widehat{g}(x)| \le M\,\widehat{g}(x)$ ($\omega > 0$) où $\widehat{g}$ indépendante de α est intégrable,

   on applique alors le théorème de la convergence dominée (fin des prérequis).

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(u)\, g(\alpha u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(u)\, e^{-\omega|\alpha\, u|}\,\mathrm{d}u \to \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(u)\,\mathrm{d}u = \overline{\mathscr{F}}(\widehat{f})(0)$ ceci car :
   – $\widehat{f}(u)e^{-\omega|\alpha\, u|} \to \widehat{f}(u)$
   – $|\widehat{f}(u)e^{-\omega|\alpha\, u|}| \le |\widehat{f}(u)|$ fonction intégrable par hypothèse et indépendante de α et il suffit d'appliquer à nouveau le théorème de la convergence dominée.

   De 3a et 3b résulte :

$$f(0) = \overline{\mathscr{F}}(\widehat{f})(0)$$

4. Enfin appliquons 3. à la fonction translatée $f(x) = U_{-x}f(0)$ (qui satisfait aux mêmes hypothèses que f), on a

$$f(x) = U_{-x}f(0) = \overline{\mathscr{F}}(\widehat{U_{-x}f})(0) = \overline{\mathscr{F}}(e^{2\mathrm{j}\pi x\nu}\widehat{f})(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi x\nu}\widehat{f}(\nu)d\nu = \overline{\mathscr{F}}(\widehat{f})(x)$$

Énonçons une version simple de la formule d'échange montrée dans la partie 1. de la preuve précédente (la preuve pour la version avec $\overline{\mathscr{F}}$ est la même) :

Lemme 4 :

Pour deux signaux f, g intégrables, on a les relations

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)\,\widehat{g}(\nu)\,\mathrm{d}\nu\,;\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\mathscr{F}} f(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)\,\overline{\mathscr{F}}\, g(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

Remarquons que les intégrales de ce lemme convergent. Vérifions le pour la première par exemple : comme f est intégrable sa transformée de Fourier est bornée, c'est-à-dire $|\widehat{f}(t)| \le M$, une constante positive, et comme $|g(t)|$ est intégrable la fonction $|\widehat{f}(t)\, g(t)| \le M|g(t)|$ est aussi intégrable.

On en déduit le résultat important suivant :

Théorème 4 :

(conservation de l'énergie) Soient un signal f tel que f et $\widehat{f}$ soient intégrables. Alors on a la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Preuve :

Soient f,g deux signaux tels que $f,g,\widehat{g}$ soient intégrables. Appliquons la formule d'échange :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{f}}(\nu)\,\widehat{g}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathscr{F}}(\overline{f})(\nu)\,\widehat{g}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(t)\,\overline{\mathscr{F}}(\widehat{g})(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

La relation $\overline{\widehat{f}} = \overline{\mathscr{F}}(\overline{f})$ est immédiate (voir TD). Le résultat s'en déduit en posant $g = f$.

2.5 Théorème d'échantillonnage de Shannon.

La formule qui suit permet de déterminer exactement un signal dont le spectre (continu) des fréquences est nul pour $\nu \geq \lambda_c$ (fréquence de coupure) en partant d'un échantillonnage de pas $\frac{1}{2\lambda_c}$. Pour l'établir on utilise simultanément coefficients de Fourier et transformée de Fourier.

Théorème 5 :

(Formule de Shannon). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un signal tel que la transformée de Fourier $\widehat{f}(\nu)$ soit nulle en dehors de l'intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$. Alors on a la formule de Shannon :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2\lambda_c}\right) \frac{\sin\left(2\pi\lambda_c\left(t - \frac{k}{2\lambda_c}\right)\right)}{2\pi\lambda_c\left(t - \frac{k}{2\lambda_c}\right)}.$$

Preuve :

Nous allons prouver cette formule en 5 étapes.

1. Les coefficients de Fourier de la fonction périodique g de période $2\lambda_c$ telle que $g(\nu) = \widehat{f}(\nu)$ sur l'intervalle $\nu \in (-\lambda_c,\lambda_c)$ (et prolongée par périodicité) sont donnés par

$$c_k(g) = \frac{1}{2\lambda_c}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} e^{-2\mathrm{j}\pi\frac{\nu}{2\lambda_c}k}\,g(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\lambda_c}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\frac{\nu}{2\lambda_c}k}\,\widehat{f}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\lambda_c}\overline{\mathscr{F}}\,\widehat{f}\left(-\frac{k}{2\lambda_c}\right) = \frac{1}{2\lambda_c}f\left(-\frac{k}{2\lambda_c}\right)$$

2. Les coefficients de Fourier de la fonction h périodique de période $2\lambda_c$ telle que $h(\nu) = e^{2\mathrm{j}\pi t\nu}$ sur l'intervalle $\nu \in (-\lambda_c,\lambda_c)$ (et prolongée par périodicité). vérifient :
   - pour $t \neq \frac{k}{2\lambda_c}$:

$$\begin{aligned} c_k(h) &= \frac{1}{2\lambda_c}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} e^{-2\mathrm{j}\pi\frac{\nu}{2\lambda_c}k}e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\lambda_c}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} e^{2\mathrm{j}\pi\nu\left(t-\frac{k}{2\lambda_c}\right)}\,\mathrm{d}\nu \\ &= \frac{1}{2\lambda_c}\left[\frac{e^{2\mathrm{j}\pi\nu\left(t-\frac{k}{2\lambda_c}\right)}}{2\mathrm{j}\pi\nu\left(t-\frac{k}{2\lambda_c}\right)}\right]_{-\lambda_c}^{+\lambda_c} = \frac{\sin\left[2\pi\lambda_c\left(t-\frac{k}{2\lambda_c}\right)\right]}{2\pi\lambda_c\left(t-\frac{k}{2\lambda_c}\right)} \end{aligned}$$

   - pour $t = \frac{k}{2\lambda_c}$:

$$c_k(h) = \frac{1}{2\lambda_c}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} e^{2\mathrm{j}\pi\nu(\frac{k}{2\lambda_c}-\frac{k}{2\lambda_c})}\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\lambda_c}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c}\mathrm{d}\nu = 1.$$

3. g et h déterminent f par la relation suivante :

$$f(t) = \overline{\mathscr{F}}\,\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\,\widehat{f}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} h(\nu)\,g(\nu)\,\mathrm{d}\nu = 2\lambda_c\,c_0(hg).$$

4. Les coefficients de Fourier du produit gh où g,h sont périodiques de période T, sont donnés par $c_n(gh) =$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k}(g)\, c_n(h)$. En effet, dans le produit

$$g(x)\,h(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g)\, e^{\mathrm{j}\, k\omega x} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c_\ell(h)\, e^{\mathrm{j}\,\ell\,\omega\, x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g\,h) e^{\mathrm{j}\, n\omega\, x}$$

le coefficient de $e^{\mathrm{j}\, n\omega\, x}$ est $\sum_{k+\ell=n} c_k(g)\, c_\ell(h)$. Comme une série de Fourier détermine ses coefficients, on a

$$c_n(g\,h) = \sum_{k+\ell=n} c_k(g)\, c_\ell(h) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g)\, c_{n-k}(h).$$

5. On en déduit la formule de Shannon

$$f(t) = 2\,\lambda_c\, c_0(h\,g) = 2\,\lambda_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(h)\, c_{-n}(g) = 2\,\lambda_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,\lambda_c}\, f\left(\frac{n}{2\,\lambda_c}\right) \frac{\sin\left[2\pi\,\lambda_c\left(t-\frac{n}{2\lambda_c}\right)\right]}{2\pi\,\lambda_c\left(t-\frac{n}{2\lambda_c}\right)}$$

En simplifiant par $2\,\lambda_c$ on obtient la formule cherchée.

2.6 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$. Représentation temporelle d'un filtre.

Motivation :

Considérons le système $g' + a\,g = f$ (avec $a > 0$) en régime permanent. La fonction de transfert $H(\nu) = \dfrac{1}{2\mathrm{j}\pi\,\nu + a} = \widehat{h}(\nu)$ est la transformée de Fourier de $h(t) = u\,e^{-a\,t}$. La sortie g correspondant à l'entrée f vérifie $\widehat{g} = \widehat{h}\,\widehat{f}$. Nous allons introduire la convolution des fonctions $(h,f) \mapsto (h\star f)$ qui satisfait $\widehat{(h\star f)} = \widehat{h}\,\widehat{f}$. La sortie g sera alors donnée par

$$g = h \star f$$

C'est la représentation du filtre dans le domaine temporel.

Nous admettrons la convergence de l'intégrale généralisée dans la définition suivante :

Définition 6 :

Pour $f,h \in L^1(\mathbb{R})$ l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,h(x-y)\,\mathrm{d}y$$

CV et définie une fonction intégrable $x \mapsto f\star h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,h(x-y)\,\mathrm{d}y$ appelée convolution des fonctions intégrables f et h.

Proposition 13 :

Pour $f,h \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\widehat{(h\star f)} = \widehat{h}\,\widehat{f}$.

Preuve :

On a :

$$\widehat{(h\star f)}(\nu) = \widehat{(h\star f)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\, x\,\nu}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,h(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\, y\,\nu} e^{-2\mathrm{j}\pi(x-y)\,\nu} f(y)\,h(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\, y\,\nu} f(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\,(x-y)\,\nu}\, h(x-y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \overset{z=x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\, y\,\nu} f(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\, z\,\nu}\, h(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi y\nu} f(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi z\nu} h(z)\,\mathrm{d}z\right) = \widehat{h}\,\widehat{f}$$

Exercice 7 :

On considère la fonction $\chi(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$ et 0 sinon. Calculer :

$$\chi \star \chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(s)\chi(t-s)ds$$

En déduire $\mathscr{F}\left(\frac{\sin^2(2\pi t)}{\pi^2 t^2}\right)(\nu)$

Réponse :

On vérifie facilement que $\chi(s)\,\chi(t-s) = 1$ pour $-1 \leq s \leq 1$ et $t-1 \leq s \leq t+1$. Alors :

- pour $|t| \geq 2$, $\chi(s)\,\chi(t-s) = 0$ donc $\chi \star \chi(t) = 0$,
- pour $-2 \leq t \leq 0$, $\chi(s)\,\chi(t-s) = 1$ pour $-1 \leq s \leq t+1$, donc $\chi \star \chi(t) = t+2$,
- pour $0 \leq x \leq 2$, $\chi(s)\,\chi(t-s) = 1$ pour $t-1 \leq s \leq 1$, donc $\chi \star \chi(t) = 2-t$.

D'autre part comme $\widehat{\chi}(\nu) = \frac{\sin(2\pi\nu)}{\pi\nu}$ on a $\widehat{\chi \star \chi}(\nu) = \frac{\sin^2(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$.

Alors, on a

$$\mathscr{F}\left(\frac{\sin^2(2\pi t)}{\pi^2 t^2}\right)(\nu) = \overline{\mathscr{F}}\left(\frac{\sin^2(2\pi t)}{\pi^2 t^2}\right)(-\nu) = \chi \star \chi(-\nu) = \chi \star \chi(\nu).$$

Pour $f, g, h \in L^1\mathbb{R}$ la convolution vérifie (pour les définitions de U_a et de H_a voir la proposition 10 :

Proposition 14 :

1. Commutativité $f \star g = g \star f$,
2. Associativité $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$,
3. $(U_a f) \star g = U_a(g \star f)$,
4. $(H_a f) \star g = H_a(g \star f)$,
5. si de plus f est dérivable et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star g$ est dérivable et $(f \star g)' = f' \star g$.

Preuve :

Exercices faciles de changement de variables. Vérifions la propriété 5. :

$$(f \star g)'(x) = \frac{d}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x-y)\,\mathrm{d}y = f' \star g(x)$$

Application 3 :

Représentation temporelle d'un filtre.

Reprenons l'exemple du filtre $g' + a\,g = f$ avec $a > 0$. Nous avons vu que la fonction de transfert de ce filtre était $H(\nu) = \frac{1}{a+2j\pi\nu}$. On montre facilement (exercice) que

$$\mathscr{F}(u(t)\,e^{-at})(\nu) = \frac{1}{a+2j\pi\nu} = H(\nu)$$

Notons $h(t) = u(t)\,e^{-at}$. La représentation fréquentielle

$$\mathscr{F}g(\nu) = H(\nu)\mathscr{F}f(\nu) = \mathscr{F}h(\nu)\mathscr{F}f(\nu) = \mathscr{F}(h \star f)(\nu)$$

donne par Fourier réciproque la représentation temporelle

$$g = h \star f.$$

Chapitre 3

Transformée de Laplace

3.1 Motivation et existence.

Comme nous l'avons défini dans le chapitre précédent, la transformée de Fourier permet de traiter des signaux intégrables c'est-à-dire des signaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tels que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Lorsqu'on se restreint au domaine $t > 0$ il est possible de définir une transformée très proche de la transformée de Fourier mais qui peut traiter tous les signaux de croissance sous-exponentielle en particulier des signaux qui ont une croissance polynômiale lorsque $t \to +\infty$. Par exemple l'échelon unité n'est pas intégrable, on ne peut donc pas parler de sa transformée de Fourier (dans le sens du chapitre précédent), mais on montrera plus bas qu'il a une transformée de Laplace qui est la fonction $\frac{1}{p}$.

Les signaux f pour lesquels nous allons définir une transformée de Laplace sont représentés par des fonctions définies pour $t > 0$ sous-exponentielles et pour simplifier on supposera que ces signaux admettent une limite à droite $f(0^+)$ en 0.

Définition 7 :

Une fonction $f : (0, +\infty)$ est sous-exponentielle s'il existe $t_0 > 0$, $A \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geq t_0$ on ait $|f(t)| \leq Ae^{at}$. On dira simplement que f ne croît pas plus vite que e^{at}.

Théorème 6 :

Soit $f : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ qui ne croît pas plus vite que e^{at}. La transformée de Laplace de f est la fonction $p \to \mathscr{L}f(p)$ de la variable complexe p définie par l'intégrale généralisée

$$\mathscr{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tp} f(t) dt$$

Cette intégrale converge pour $\Re p > -a$.

La fonction $p \to \mathscr{L}f(p)$ est dérivable (donc continue) pour $\Re p > -a$. La dérivée est

$$(\mathscr{L}f)'(p) = \mathscr{L}(-tf)(p).$$

Preuve :

1. Convergence : $|e^{-tp} f(t)| \leq e^{-bt}|f(t)| \leq A\,e^{(a-b)\,t}$ pour $\Re p \geq b > a$ et pour $t \geq t_0$. Comme $a - b < 0$ l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} A\,e^{(a-b)\,t}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\int_0^{+\infty} |e^{-tp}\,f(t)|\,\mathrm{d}t$ également, c'est-à-dire que l'intégrale généralisée définissant la transformée de Laplace converge absolument.
2. Dérivée.
   - Calculs formels $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathscr{L}f(p) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial e^{-tp} f(t)}{\partial p}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-tp}(-t\,f(t))\,\mathrm{d}t$
   - Justifications : le théorème de la convergence dominée, dont on reprend les notations, donne la dérivabilité :

on a le droit de dériver sous le signe $\int$ car, pour $\Re p \geq b > a$,

$$\left|\frac{\partial e^{-tp} f(t)}{\partial p}\right| = \left|e^{-tp}\, t f(t)\right| \leq e^{-at}\left(e^{(a-b)t}\, t\right)\left|f(t)\right| \leq A e^{(a-b)t} t = g(t)$$

fonction positive indépendante de p et intégrable (le vérifier) d'où la dérivabilité pour $\Re p \geq b$ et ceci pour tout $b > a$.

Premiers calculs :

1. $\mathscr{L} u(p) = \dfrac{1}{p}$; $\mathscr{L}(t\, u)(p) = \dfrac{1}{p^2}$ $\mathscr{L}(t^n\, u)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ $(\Re p > 0)$
2. $\mathscr{L}(u\, e^{\alpha t})(p) = \dfrac{1}{p-\alpha}$ $(\Re p > \Re \alpha)$
3. $\mathscr{L}(u \sin(\alpha t))(p) = \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$; $\mathscr{L}(u \cos(\alpha t))(p) = \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$ $(\Re p > 0)$
4. $\mathscr{L}(u \sinh(\alpha t))(p) = \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$; $\mathscr{L}(u \cosh(\alpha t))(p) = \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$ $(\Re p > |\alpha|)$

Commentaire :

Classiquement on appelle abscisse de sommabilité le nombre réel

$$a_f = \inf\left\{a \in \mathbb{R} \;:\; \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty\right\}.$$

Pour $a > a_f$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\, \mathrm{d}t$ converge et donc l'intégrale généralisée définissant la transformée de Laplace $\mathscr{L} f(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tp} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument pour $\Re p \geq a > a_f$.

Nous avons le critère suivant de majoration de l'abscisse de sommabilité :
supposons qu'il existe $t_0 > 0$ $A \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geq t_0$ on ait $|f(t)| \leq A e^{kt}$ alors $a_f \leq k$.

Un signal $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ vérifiant ce critère de majoration est donc sous-exponentiel. Pour simplifier nous avons choisi de définir la transformée de Laplace seulement pour les signaux sous-exponentiels propriété que vérifie tous les signaux qui nous intéressent.

Vérifions le critère de majoration.

Preuve :

Soit $a > k$. Alors $e^{-at}|f(t)| \leq A e^{(k-a)t}$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} A e^{(k-a)t}\, \mathrm{d}t < +\infty$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty$ et donc $a_f \leq a$. Ceci étant vrai pour tout $a > k$, on déduit $a_f \leq k$.

Commentaire :

L'expression de $\mathscr{L} f(p)$ par la formule intégrale est valable pour $\Re p > a_f$ donc $\mathscr{L} f(p)$ est définie (et continue et dérivable) pour $\Re p > a_f$. En général, pour $\Re p = a_f$ la transformée de Laplace peut ne pas être définie, par exemple l'intégrale généralisée définissant $\mathscr{L}(u)(p) = \dfrac{1}{p}$ ne converge pas pour tout p tel que $\Re p \leq 0$.

Mais comme on le voit sur les exemples ci-dessus $\mathscr{L} f$ peut être prolongée dans un domaine beaucoup plus grand : $\mathbb{C}$ moins quelques points. Par exemple, on a $a_u = 0$, où est l'échelon unité, alors que $\mathscr{L}(u)(p) = \dfrac{1}{p}$

3.2 Dérivation. Conditions aux limites.

Proposition 15 :

1. $\mathscr{L}$ est linéaire, c'est-à-dire que pour tout λ, $\mu \in \mathbb{C}$ et tout f, g on a la relation $\mathscr{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{L} f + \mu \mathscr{L} g$ qui a un sens pour $\Re p$ assez grand pour que les trois transformées de Fourier soient définies simultanément $(a_{\lambda f + \mu g} \leq \sup(a_f, a_g))$

2. $\mathscr{L}f(p-a) = \mathscr{L}(e^{at}f)(p)$, $a \in \mathbb{C}$
3. $\mathscr{L}(u(t-a)f(t-a))(p) = e^{-ap}\mathscr{L}f(p)$ $(a \geq 0)$
4. $\mathscr{L}(f(\alpha t))(p) = \dfrac{1}{\alpha}\mathscr{L}\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$ $(\alpha > 0)$.

Preuve :

Donnons par exemple, la preuve de la troisième relation :

$$\mathscr{L}[u(t-a)f(t)](p)\mathscr{L}(u(t-a)f(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tp}\,u(t-a)f(t-a)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^{+\infty} e^{-tp} f(t-a)\,\mathrm{d}t \overset{s=t-a}{=} e^{-ap}\int_0^{+\infty} e^{-sp} f(s)\,\mathrm{d}s = e^{-ap}\mathscr{L}f(p)$$

Théorème 7 :

Supposons f dérivable et f, f' sous-exponentielles. On a

$$\mathscr{L}(f')(p) = p\mathscr{L}f(p) - f(0)$$

pour $\Re p > k$ où k vérifie : il existe une constante A telle que $|f(t)| \leq Ae^{kt}$ et $|f'(t)| \leq Ae^{kt}$.

Preuve :

Supposons $\Re p > k$, on a :

$$\mathscr{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tp} f'(t)\,\mathrm{d}t = \left[e^{-tp}f(t)\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-tp} f(t)\,\mathrm{d}t = p\mathscr{L}f(p) - f(0)$$

pour $\Re p > k$ car alors $\lim\limits_{t\to+\infty} |e^{-tp}f(t)| = 0$.

Application 4 :

Fonction de transfert. On prend toujours l'exemple du filtre RC d'entrée $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ et de sortie $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ régi par l'équation différentielle $g' + ag = f$ avec $\Re a > 0$. On s'intéresse aux entrées et sorties causales nulles à l'origine. Prenons la transformée de Laplace des deux membres

$$\mathscr{L}(g' + ag)(p) = (p+a)\mathscr{L}g(p) = \mathscr{L}f(p)$$

d'où la fonction de transfert complexe

$$H(p) = \frac{\mathscr{L}g(p)}{\mathscr{L}f(p)} = \frac{1}{p+a}$$

Terminons ce paragraphe par le théorème des valeurs initiales et finales.

Théorème 8 :

On pose $s = \Re p$.

1. $\lim\limits_{s\to+\infty} \mathscr{L}f(s) = 0$
2. $\lim\limits_{s\to+\infty} s\mathscr{L}f(s) = f(0^+)$ lorsque ces limites existent (valeur initiale)
3. $\lim\limits_{s\to0^+} s\mathscr{L}f(s) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ lorsque ces limites existent (valeur finale).

Preuve :

1. On pose $0 < s = \Re p$ et on considère $\alpha > 0$ et $a_f < s_1 < s$. On a les majorations suivantes :

$$|\mathscr{L}f(p)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} e^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{+\infty} e^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_0^{\alpha} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-(s-s_1)\,t}\,e^{-s_1\,t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\alpha} |f(t)|\,dt + e^{-(s-s_1)\,\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-s_1\,t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Maintenant soit $\varepsilon > 0$.

On fixe $\alpha > 0$ assez petit pour que $\displaystyle\int_0^{\alpha} |f(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $M = \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-s_1\,t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$. On choisit ensuite $S > s_1$ assez grand pour que $M\,e^{-(S-s_1)\,\alpha} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour $s \geq S$, les majorations précédentes impliquent :

$$|\mathscr{L} f(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M\,e^{-(s-s_1)\,\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{2} + M\,e^{-(S-s_1)\,\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui montre $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \mathscr{L} f(s) = 0$.

2. Faisons l'hypothèse supplémentaire que f est dérivable et satisfait aux conditions du théorème 2. Alors 2) résulte de 1), car
$$0 = \lim_{s\to+\infty} \mathscr{L} f'(s) = \lim_{s\to+\infty} s\mathscr{L} f(s) - f(0)$$

3. Faisons l'hypothèse supplémentaire $|f(t)| \leq M$ sur $[0,+\infty)$. On se ramène à une limite nulle en $+\infty$ en posant $g(t) = f(t) - \ell$ où $\ell = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$. On a alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$ et $|g(t)| \leq M + |\ell| = N$.

   Par changement de variables ($u = t\,s; \mathrm{d}u = s\,\mathrm{d}t$) et pour tout $\alpha > 0$ on a :
$$s\mathscr{L} g(s) = \int_0^{+\infty} s\,e^{-t\,s}\,g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,g\left(\frac{u}{s}\right)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\alpha} e^{-u}\,g\left(\frac{u}{s}\right)\,\mathrm{d}u + \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u}\,g\left(\frac{u}{s}\right)\,\mathrm{d}u$$

   Donnons nous $\varepsilon > 0$. Pour $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2\,N}$, on a la majoration de la première intégrale
$$\left|\int_0^{\alpha} e^{-u}\,g\left(\frac{u}{s}\right)\,\mathrm{d}u\right| \leq \alpha\,N \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Pour majorer la seconde prenons $s_0 > 0$ assez petit de telle sorte que pour $t \geq \dfrac{\alpha}{s_0}$ (donc t est grand) on ait $|g(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. C'est possible car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

   On a $u \geq \alpha$, donc pour tout $0 < s < s_0$, on a $\dfrac{u}{s} \geq \dfrac{\alpha}{s_0}$, donc $\left|g(\frac{u}{s})\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et par conséquent
$$\left|\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u}\,g(\frac{u}{s})\,\mathrm{d}u\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   En résumé, pour $s \leq s_0$, $|s\mathscr{L} g(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui montre $s\mathscr{L} g(s) \to 0$ lorsque $s \to 0^+$.

   Comme $\mathscr{L} g(s) = \mathscr{L} f(s) - \dfrac{\ell}{s}$, on a $s\mathscr{L} g(s) + \ell = s\mathscr{L} f(s) \to \ell$ lorsque $s \to 0^+$.

Exemple 7 :

Calculons $\mathscr{L}\left(u\,\dfrac{\sin t}{t}\right)$. On a

$$\mathscr{L}\left(u\,\frac{t\sin t}{t}\right)(s) = \mathscr{L}\,(u\sin t)\,(s) = \frac{1}{s^2+1} = -\mathscr{L}\left(u\,\frac{\sin t}{t}\right)'(s)$$

et donc par intégration
$$\mathscr{L}\left(u\,\frac{\sin t}{t}\right) = -\arctan(s) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

Déterminons la constante d'intégration de deux manières. Nous allons utiliser le théorème 8.

Commençons par remarquer que dans ce cas la partie 3, valeur finale, du théorème 8, est toujours vérifié :

$$\lim_{s\to 0^+} s\,(-\arctan(s) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}) = 0 = \lim_{t\to+\infty}\left(u\,\frac{\sin t}{t}\right)$$

La partie 1 du théorème 8 donne $C^{te} = \frac{\pi}{2}$. En effet

$$\lim_{s\to 0^+}(-\arctan(s) + C^{te}) = 0$$

La relation de la valeur initiale, théorème 8 partie 2, nous donne la condition nécessaire suivante :

$$\lim_{s\to+\infty} s(-\arctan(s) + C^{te}) = 1 = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

n'est possible que si $\lim_{s\to+\infty}(-\arctan(s) + C^{te}) = 0$, ce qui impose la seule valeur possible $C^{te} = \lim_{s\to+\infty}\arctan(s) = \frac{\pi}{2}$.

Montrons que pour cette valeur la relation de la valeur initiale est bien vérifiée. Posons $u = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$, alors $u \to 0$ lorsque $s \to +\infty$. Comme $\frac{u}{\tan u} \to 1$ lorsque $u \to 0$, on déduit

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(s)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right)} = 1$$

ce qui avec la relation

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right) = \frac{1}{\tan(\arctan(s))} = \frac{1}{s}$$

implique $\lim_{s\to+\infty} s\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right) = 1$

3.3 Relation avec la Transformée de Fourier Inversion de la transformée de Laplace

3.3.1 Inversion de la transformée de Laplace à l'aide de Fourier

Théorème 9 :

On considère une fonction $f : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\,dt < +\infty$ (ce qui implique que $a \geq a_f$ abscisse de sommabilité). On prolonge f par 0 pour $t < 0$ et on note encore f ce prolongement (c'est-à-dire que $f(t) = u(t)\,f(t)$). Alors pour tout $b \geq a$, on a la relation entre Fourier et Laplace :

- $\mathscr{L}f(p) \overset{p=b+2j\pi\nu}{=} \mathscr{F}(e^{-bt}f)(\nu)$

  Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathscr{L}f(b+2j\pi\nu)|\,d\nu < +\infty$ alors on a la formule d'inversion de la transformée de Laplace
- $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(b+jy)}\mathscr{L}f(b+jy)\,dy = \frac{1}{2j\pi}\oint_{\Re p=b} e^{tp}\mathscr{L}f(p)\,dp$

  où l'intégrale curviligne $\oint_{\Re p=b} e^{tp}\mathscr{L}f(p)\,dp$ signifie par définition intégrer la fonction $e^{tp}\mathscr{L}f(p)$ le long de la droite $\Re p = b$. On peut paramétrer cette droite par $-\infty < y < +\infty$ en posant $p = b + 2j\pi y$ d'où $dp = 2\pi j\,dy$ (puisque b est constant $db = 0$) et on retrouve la première intégrale.

Preuve :

- $\mathscr{L}f(b+2j\pi\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-t(2j\pi\nu)}\,e^{-bt}\,f(t)\,dt = (\widehat{u\,e^{-bt}f})(\nu)$
- comme $u\,e^{-bt}f$ et $(\widehat{u\,e^{-bt}f})(\nu) = \mathscr{L}f(b+2j\pi\nu)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ on peut appliquer Fourier réciproque ce qui donne :

$$e^{-bt}f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(2j\pi\nu)}(\widehat{e^{-bt}f})(\nu)\,d\nu \overset{y=2\pi\nu}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(jy)}\mathscr{L}f(b+jy)\,dy \overset{p=jy}{=} \frac{e^{-bt}}{2j\pi}\oint_{\Re p=a} e^{tp}\mathscr{L}f(p)\,dp$$

Exemple 8 :

Soit $f(t) = t\,u(t)$. On a $\mathscr{L}f(p) = \dfrac{1}{p^2}$. Prenons $a = b = 1$ dans le théorème 9. On a :/

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t\,\mathrm{d}t < +\infty$ et on vérifie :

$$\mathscr{F}(e^{-t}\,t\,u(t))(\nu) = \mathscr{L}f(1+2\mathrm{j}\pi\nu) = \frac{1}{(1+2\mathrm{j}\pi\nu)^2} \in L^1(\mathbb{R}_\nu).$$

La formule d'inversion s'applique donc ici et s'écrit :

$$t u(t) = \frac{1}{2\mathrm{j}\pi}\oint_{\Re p=1} e^{tp}\frac{1}{p^2}\,\mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(1+2\mathrm{j}\pi\nu)}\frac{1}{(1+2\mathrm{j}\pi\nu)^2}\,\mathrm{d}\nu$$

3.3.2 Inversion de la transformée de Laplace en utilisant la décomposition en éléments simples.

Montrons la méthode sur un exemple :

Exemple 9 :

Calculons Laplace inverse de $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$. On décompose F en éléments simples

$$F(p) = \frac{-1}{(p-1)} + \frac{1}{(p-2)}$$

puis on utilise $\dfrac{1}{p-1} = \mathscr{L}(u\,e^t)(p)$ et $\dfrac{1}{p-2} = \mathscr{L}(u\,e^{2t})(p)$. Il en résulte

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \mathscr{L}(u(t)(-e^t + e^{2t}))(p)$$

Application 5 :

Résolution d'un équation différentielle linéaire.

Résolvons dans le domaine $t \geq 0$ l'équation $y" + 2y' + y = u$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. Notons $Y(p) = \mathscr{L}y(p)$. On a : $\mathscr{L}y'(p) = p\,Y(p) - y(0)$ et $\mathscr{L}y"(p) = p\,\mathscr{L}y'(p) - y'(0) = p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$. Donc

$$\mathscr{L}(y"+2y'+y)(p) = \mathscr{L}(y"+2y'+y)(p) = \mathscr{L}y"(p) + 2\mathscr{L}y'(p) + \mathscr{L}y(p) = p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + 2(p\,Y(p) - y(0)) + Y(p)$$

$$= (p^2+2p+1)\,Y(p) - (p+2)\,y(0) + y'(0) = (p^2+2p+1)\,Y(p) = \mathscr{L}\varepsilon(p) = \frac{1}{p}$$

En décomposant en éléments simples on obtient

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2+2p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}$$

D'où $y(t) = u(t)\,(1 - e^{-t} - t\,e^{-t})$. Remarquons qu'on a bien $y(0) = 0 = y'(0)$.

3.4 Convolution des signaux causaux et représentation temporelle d'un filtre causal.

En prolongeant par 0 du coté $t<0$ les signaux f définis sur le domaine $t \geq 0$ peuvent être considérés comme des signaux uf où u est l'échelon unité. La convolution introduite lors de la transformée de Fourier induit

$$(uh \star uf)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(s)\,h(s)\,u(t-s)\,f(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t h(s)\,f(t-s)\,\mathrm{d}s$$

Cette convolution vérifie évidemment les mêmes propriétés qui se montrent de la même manière que pour Fourier. En particulier, montrons :

Proposition 16 :

$$\mathscr{L}(uh \star uf)(p) = \mathscr{L}(uh)(p)\mathscr{L}(uf)(p)$$

Preuve :

Notons Δ le domaine $0 \leq s \leq t$, $0 \leq t < +\infty$ et D le domaine $0 \leq u$; $0 \leq v$. On passe de Δ à D par le changement de variables $u = t-s$; $v = s$.

On a

$$\mathscr{L}(uh \star uf)(p) = \mathscr{L}(\varepsilon h \star \varepsilon f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tp}\left(\int_0^t h(s)\,f(t-s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \int\int_\Delta e^{-tp} h(s)\,f(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\int_\Delta e^{-sp} h(s)\,e^{-(t-s)p}\,f(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \overset{u=t-s\,;\,v=s}{=} \int\int_D e^{-vp}\,h(v)\,e^{-up}\,f(u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-vp}\,h(v)\,\mathrm{d}v \int_0^{+\infty} e^{-up}\,f(u)\,\mathrm{d}u = \mathscr{L}(\varepsilon h)(p)\mathscr{L}(\varepsilon f)(p)$$

Dans la quatrième égalité on utilise la relation entre les aires infinitésimales $\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = ds(\mathrm{d}t + \mathrm{d}s) = \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, l'aire du losange de coté $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}t + \mathrm{d}s$ étant égale à l'aire du carré de coté $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}t$ (en particulier on retrouve $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s = 0$).

Application 6 :

Reprenons l'exemple du filtre RC, $g' + ag = f$ dont nous avons vu que la fonction de transfert est $\dfrac{1}{p+a} = \mathscr{L}(ue^{-at}) = \mathscr{L}(h(t))$. On en déduit la représentation temporelle de ce filtre

$$g(t) = (ue^{-at} \star f)(t) = \int_0^t f(s)\,e^{-a(t-s)}\,\mathrm{d}s$$

3.5 Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac, calcul symbolique.

Nous venons de voir la représentation temporelle d'un filtre la réponse est donnée par la convolution de l'excitation par une fonction h dont la transformée de Fourier est la fonction de transfert du filtre. Nous allons interpréter la fonction h comme une réponse à une exitation particulière l'impulsion de Dirac.

Définition 8 :

Une suite de fonctions continues $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une suite régularisante si pour tout entier n on a

1. $u_n \geq 0$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$
3. $u_n(t) = 0$ pour $t \leq 0$ ou $t \geq \alpha_n$ et la suite $\alpha_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

D'habitude on suppose les u_n indéfiniement dérivables mais ici la continuité suffit.

Les suites régularisantes vérifient

Proposition 17 :

1. Pour tout signal continu intégrable f et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n \star f)(t) \to f(t)$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Pour tout $\Re p$ assez grand la suite $\mathscr{L} u_n(p) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Preuve :

1. On a :
$$|(u_n \star f)(t) - f(t)| = \left| \int_0^{\alpha_n} u_n(s)\,(f(t-s) - f(t))\,\mathrm{d}s \right| \le \sup_s |f(t-s) - f(t)| \int_0^{\alpha_n} u_n(s)\,\mathrm{d}s.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Le signal f étant continu en t il existe un $\alpha > 0$ assez petit tel que $\sup_s |f(t-s) - f(t)| \le \varepsilon$ dès que $0 \le s \le \alpha$. Il en résulte que pour n assez grand pour que $\alpha_n \le \alpha$ on a $|(u_n \star f)(t) - f(t)| \le \varepsilon$.
2. se montre de la même manière car
$$(1 - \mathscr{L} u_n)(p) = \int_0^{\alpha_n} u_n(t)\,(1 - e^{-tp})\,\mathrm{d}t$$
et on utilise la continuité de la fonction e^{-tp} en $t = 0$.

Définition 9 :

On appelle impulsion de Dirac $\delta(t) = \lim_{n \to +\infty} u_n(t)$. Ce n'est pas une fonction et cette définition a le sens suivant : pour tout signal intégrable f on pose les relations

$\delta(t) \star f = \lim_{n \to +\infty} u_n \star f = f$

$\mathscr{L}\delta(t) = \lim_{n \to +\infty} \mathscr{L} u_n = 1$

On note $\delta(t-a) = \delta_a$ le signal translaté $\lim u_n(t-a)$.

Pour $a > 0$, il est naturel de poser :

$\delta_a = U_a(\delta)(t)$ où $(U_a f)t) = f(t-a)$ et $\delta_a \star f = U_a(\delta) \star f = U_a f$

$\mathscr{L}\delta_a(p) = e^{-pa}$;

Le signal $\delta(t)$ apparaît naturellement lorsqu'on dérive un signal qui présente un saut.

Proposition 18 :

Désignons par $u(t)$ le signal échelon unité, c'est-à-dire $u(t) = 1$ pour $t > 0$ et 0 sinon. On a :

$$u'(t-a) = \delta(t-a).$$

Preuve :

Vérifions la cohérence avec ce qui précède dans le cas $a = 0$. Commençons par remarquer que pour tout signal continu causal f, on a

$$(u \star f)'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(s)\,u(t-s)\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(t) = (\delta(t) \star f)(t)$$

Les relations $(u \star f)'(t) = (\delta(t) \star f)(t) = (u' \star f)(t)$ conduisent à poser $u'(t) = \delta(t)$.

3.6 Application aux filtres

3.6.1 Réponse impulsionnelle, réponse indicielle

Définition 10 :

- On appelle réponse impulsionnelle d'un système la réponse à l'impulsion de Dirac.
- La réponse indicielle est la réponse à l'échelon unité.

Exemple 10 :

Considérons le système $g' + a\,g = f$. La fonction de transfert du système $g' + a\,g = f$ est $H(p) = \dfrac{1}{p+a}$ qui est la transformée de Laplace de $h(t) = u(t)\,e^{-a\,t}$ (voir application 6. On vérifie que pour $t \neq 0$ la fonction h est dérivable et vérifie $h'(t) + a\,h(t) = 0$. La fonction h présente un saut d'amplitude 1 en 0 et donc h' est le signal $-a\,u(t)\,e^{-a\,t} + \delta(t)$ et par conséquent $h' + a\,h = \delta(t)$ et h est la réponse impulsionnelle de ce système.

Le signal $h(t)$ est la dérivée de la fonction continue $g(t) = -\dfrac{u(t)}{a}(e^{-a\,t} - 1)$. On vérifie que $g'(t) + a\,g(t) = 0$ pour $t < 0$ et $g'(t) + a\,g(t) = 1$ pour $t > 0$ et donc g est la réponse indicielle

Exemple 11 :

La fonction de transfert du filtre $g'' - 3\,g' + 2\,g = f$ est $F(p) = \dfrac{1}{p^2 - 3\,p + 2} = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$. La réponse impulsionnelle de ce filtre est $h(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)(t) = u(t)(-e^{t} + e^{2\,t})$ (voir l'exemple 9).

On a les relations suivantes

Proposition 19 :

Etant donné un système en régime permanent représentable par un produit de convolution, c'est-à-dire que la sortie g s'obtient en convolant l'entrée f par une fonction intégrable h : $g = h \star f$. Alors

- $H(p) = \mathscr{L}h(p)$ est la fonction de transfert du système,
- h est la réponse impulsionnelle,
- la dérivée au sens des signaux de la réponse indicielle est la réponse impulsionnelle.

Preuve :

La relation $g = h \star f$ donne $\mathscr{L}g = \mathscr{L}h\,\mathscr{L}f$ donc la fonction de transfert vérifie $H = \dfrac{\mathscr{L}g}{\mathscr{L}f} = \mathscr{L}h$.
Prenons $f(t) = \delta(t)$, alors $g = h \star \delta = h$. Soit $g = h \star u$ la réponse indicielle. Alors $g' = h \star u' = h \star \delta = h$.

3.6.2 Retour sur la fonction de transfert.

Commençons par calculer la transformée de Laplace de la dérivée (au sens des signaux) d'un signal causal.

Nous avons posé $\mathscr{L}(\delta)(p) = 1$. La dérivée $(u\,f)'$ au sens des signaux d'un signal causal $u\,f$ vérifie $u\,f' + \delta\,f(0)$. On en déduit que

$$\mathscr{L}((u\,f)')(p) = \mathscr{L}(u\,f' + \delta\,f(0)) = p\mathscr{L}(u\,f)(p) - f(0) + f(0)\mathscr{L}(\delta)(p) = p\mathscr{L}(u\,f)(p)$$

La transformée de Laplace de la dérivée au sens des signaux s'obtient en multipliant par p la transformée de Laplace.

Application 7 :

En utilisant la formule précédente, la fonction de transfert du filtre de type RC $g' + a\,g = f$ s'obtient sans aucune considération sur les conditions initiales (voir application 4)

$$\mathscr{L}(g' + a\,g) = \mathscr{L}f \Longrightarrow (p+a)\mathscr{L}g = \mathscr{L}f \Longrightarrow H(p) = \frac{1}{p+a}$$

Chapitre 4

Énergie, approximation quadratique des signaux périodiques, espaces de Hilbert

4.1 Introduction et rappels mathématiques.

Dans ce chapitre nous allons poser le cadre mathématique convenable pour étudier les signaux d'énergie finie.

1. Nous voulons que deux signaux f, g soient proches si l'énergie de leur différence $\mathscr{E}(f-g)$ est petite.

   Pour cela remarquons que l'énergie est le carré d'une longueur. Plus précisément

   L'énergie d'un signal $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est par définition

   $$\mathscr{E}(f) = C \int_{t \in I} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

   où C est une constante positive de normalisation. Par exemple pour l'espace des signaux périodiques de période T on définit l'énergie sur une période par

   $$\mathscr{E}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

   Pour les signaux $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ quelconques on définit

   $$\mathscr{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

   Pour fixer les idées considérons les signaux périodiques de période T. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Pour

   $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k(f)\, e^{\mathrm{j}\, k \omega\, t}$$

   la formule de conservation de l'énergie donne

   $$\mathscr{E}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_k|^2$$

   Cette relation ressemble à la norme euclidienne habituelle (appelée souvent hermitienne lorsqu'on travaille avec des nombres complexes, voir les sous-sections 2 et 3 ci-dessous). Dans la suite nous allons donner un sens précis aux phrases suivantes

   – les signaux élémentaires $e^{\mathrm{j}\, k\omega\, t}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ forment une base e_k orthonormale de l'espace des signaux périodiques,

   – les coefficients de Fourier $c_k(f)$ sont les composantes du signal f dans cette base,

   – l'énergie $\mathscr{E}(f)$ du signal f est le « carré de la longueur » de f, c'est-à-dire que les signaux périodique f seront munis, de la norme hermitienne

$$||f|| = \sqrt{\mathscr{E}(f)}.$$

Dans les 2 sous-sections suivantes, nous allons rappeler ces notions dans le cadre le plus élémentaire.

2. Norme et produit scalaire euclidiens. Commençons par le cadre réel. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on définit le produit scalaire des vecteurs $V = (x,y,z)$ et $V' = (x',y',z')$ par

$$< V,V' >= x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

La norme euclidiennne d'un vecteur V est

$$||V|| = \sqrt{< V,V >}$$

et on a l'inégalité

$$| < V,V' > | \leq ||V||\ ||V'||$$

Ce produit scalaire vérifie les propriétés

(i) $< V,V' >=< V',V >$ (symétrie)

(ii) $< a\,V_1 + b\,V_2, a'\,V_1' + b'\,V_2' >= a\,a' < V_1,V_1' > + a\,b' < V_1,V_2' > + a'\,b < V_1',V_2 > + b\,b' < V_2,V_2' >$
où a, b, a', $b' \in \mathbb{R}$ (bilinéarité)

(iii) $< V,V > \geq 0$ et $< V,V >= 0 \Longrightarrow V = 0$

La norme vérifie les 3 propriétés bien connues suivantes (faire un dessin) :

$$||V|| = 0 \Longrightarrow V = 0\ ;\ ||V + W|| \leq ||V|| + ||W||\ ;\ ||aV|| = |a|\ ||V|| \tag{4.1}$$

Elle permet de définir la notion de limite dans $\mathbb{R}^3$ (approximation)

$$V_n \to V \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} ||V - V_n|| \to 0$$

Le vecteur V est orthogonal à V', on note $V \perp V'$, si $< V,V' >= 0$. Dans ce cas on a le théorème de Pythagore

$$||V + V'||^2 = ||V||^2 + ||V'||^2$$

Une base e_1,e_2,e_3 de $\mathbb{R}^3$ est orthonormale lorsqu'on a les relations $< e_1,e_2 >=< e_2,e_3 >=< e_1,e_3 >= 0$ et $||e_1|| = ||e_2|| = ||e_3|| = 1$. La base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$(1,0,0)\ ;\ (0,1,0)\ ;\ (0,0,1)$$

est une base orthonormale. Le produit scalaire et la norme euclidienne s'expriment de la même manière à partir des coordonnées dans toute base orthonormale.

3. Norme et produit scalaire hermitiens. Lorsqu'on passe à l'espace complexe $\mathbb{C}^3$, on modifie le produit scalaire en posant, pour les vecteurs $U = (u,v,w)$ et $U' = (u',v',w')$ de $\mathbb{C}^3$

$$< U,U' >= \bar{u}u' + \bar{v}\,v' + \bar{w}\,w'$$

et la formule donnant la norme (qu'on appellera hermitienne) reste (en utilisant $\bar{u}\,u = |u|^2;\ldots$)

$$||U|| = \sqrt{< U,U >} = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 + |w|^2}$$

Cette norme vérifie les trois relations 4.1. Ce produit scalaire complexe vérifie

(j) $< U,U' >= \overline{< U',U >}$,

(jj) $< U, p_1\,U_1' + p_2\,U_2' >= p_1 < U,U_1' > + p_2 < U,U_2' >$ où $p_1,p_2 \in \mathbb{C}$ (linéarité par rapport au deuxième argument),

(jjj) $< U,U > \geq 0$ et $< U,U >= 0 \Longrightarrow U = 0$.

En particulier (j) et (jj) impliquent l'antilinéarité par rapport au premier argument :

$$< p_1 U_1 + p_2 U_2, U' >= \overline{p_1} < U_1, U' > + \overline{p_2} < U_2, U' > .$$

Comme dans le cadre réel on dira que deux vecteurs U, U' sont orthogonaux si

$$< U, U' >= 0$$

et nous avons toujours le théorème de Pythagore

$$||U + U'||^2 = ||U||^2 + ||U'||^2$$

4. Maintenant retournons aux signaux périodiques. Nous définirons sur ces signaux le produit scalaire hermitien

$$< f, g >= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Alors l'énergie $\mathscr{E}(f) =< f, f >$, que nous noterons aussi $||f||^2$ est le carré d'une norme. Nous montrerons plus loin que pour ce produit scalaire les signaux élémentaires forment une base hermitienne, (orthonormale) et que dans cette base le produit scalaire de $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k(f)\, e^{\mathrm{j} k\omega t}$ et de $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k(g)\, e^{\mathrm{j} k\omega t}$ est $< f, g >= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{c_k(f)}\, c_k(g)$.

Terminons ce paragraphe introductif par la liste des espaces de signaux d'énergie finie que nous utiliserons et que nous préciserons dans la suite.

- $\mathbb{C}^n$, nombre fini de fréquences, correspond à une bande passante,
- $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{C = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,:\, \forall n, c_n \in \mathbb{C}, ||C||^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty\}$ correspond à un spectre discret de fréquences. C'est dans cet espace que vivent les coefficients de Fourier $c_k(f)$ d'un signal périodique f d'énergie finie,
- $L^2_P(0,T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, f,\ f(t+T) = f(t),\ ||f||^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, \mathrm{d}t < +\infty\}$ espace des signaux périodiques de période fondamentale T,
- $L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, ||f||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t < +\infty\}$, espace des signaux quelconques d'énergie finie.

4.2 Partie algébrique : espaces préhilbertiens, inégalité de Bessel

L'objectif de cette section est de montrer l'inégalité de Bessel (théorème 10 ci-dessous) qui compare dans le cadre des signaux l'énergie d'un signal et l'énergie de son spectre (corollaire à la fin de la section). Nous verrons que c'est en fait une égalité dans la section suivante.

Les espaces que nous venons de définir ci-dessus rentrent dans un cadre algébrique commun que nous allons définir maintenant.

Définition 11 :

Un espace préhilbertien H est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire, $(x, y) \mapsto < x, y >: H \times H \to \mathbb{C}$ vérifiant

- pour tout x l'application $y \mapsto < x, y >$ est linéaire
  (ce qui signifie que pour a, $b \in \mathbb{C}$ et y_1, $y_2 \in H$ on a $< x, a\, y_1 + y_2 >= a < x, y_1 > + b < x, y_2 >$)
- $< y, x >= \overline{< x, y >}$,
  (ce qui implique que pour a, $b \in \mathbb{C}$ et x_1, $x_2 \in H$ on a $< a\, x_1 + b\, x_2, y >= \overline{a} < x_1, y > + \overline{b} < x_2, y >$)
- pour tout $x \in H$, le carré scalaire est positif, $< x, x >\geq 0$, et s'il est nul, $< x, x >= 0$, alors $x = 0$.
  On note $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

Exemple 12 :

1. Le produit scalaire « hermitien » sur $\mathbb{C}^n$
$$<(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)>=\sum_{k=0}^{k=n}\overline{x_k}\,y_k.$$
2. Le produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ (on admet la convergence)
$$<(c_n)_{n\in\mathbb{Z}},(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}>=\sum_{-\infty}^{+\infty}\overline{c_n}\,d_n.$$
3. Le produit scalaire pour $L_P^2(0,T)$ (on admet la convergence)
$$<f,g>=\frac{1}{T}\int_0^T\overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$$
4. Le produit scalaire pour $L^2(\mathbb{R})$ (on admet la convergence)
$$<f,g>=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$$

La proposition suivante montre que $||x||=\sqrt{<x,x>}$ vérifie les conditions d'une norme, en particulier cela nous permettra de traduire la phrase « x est proche de y » par une estimation du nombre positif $||x-y||$.

Proposition 20 :

1. On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$|<x,y>|\leq ||x||\,||y||$$
2. $||x||=\sqrt{<x,x>}$ est une norme, c'est-à-dire que pour tout $x,\ y\in H$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, les trois propriétés suivantes sont vérifiées :
$$||x||=0\Longrightarrow x=0\ ;\ ||\lambda\,x||=|\lambda|\,||x||\ ;\ ||x+y||\leq||x||+||y||.$$

Preuve :

Commençons par vérifier les deux premières relations de la partie 2.

$||x||^2=<x,x>=0\Longrightarrow x=0$ fait partie des hypothèses sur le produit scalaire.

$||\lambda\,x||^2=<\lambda\,x,\lambda\,x>=\overline{\lambda}\,\lambda\,<x,x>=|\lambda|^2\,||x||^2$.

Montrons la troisième.

1. Soit $t\in\mathbb{R}$ un paramètre. Pour tout x,y le trinôme du second degré à coefficients réels
$$0\leq<x+t\,y,x+t\,y>=||x||^2+2\,t\,\Re(<x,y>)+t^2\,||y||^2$$
est toujours positif donc $\Delta=4\,((\Re<x,y>)^2-||x||^2||y||^2)\leq 0$.
Soit $u=\dfrac{<x,y>}{|<x,y>|}$. C'est un nombre complexe tel que $|u|=1$ qui vérifie
$$<u\,x,y>=\overline{u}\,<x,y>=\frac{\overline{<x,y>}\,<x,y>}{|<x,y>|}=|<x,y>|$$
Remplaçons x par ux dans Δ on obtient la relation cherchée, en effet
$$(\Re<u\,x,y>)^2-||u\,x||^2\,||y||^2=|<x,y>|^2-|u|^2\,||x||^2||y||^2=|<x,y>|^2-||x||^2\,||y||^2\leq 0.$$

2. On montre la troisième relation de 2) en utilisant 1) de la manière suivante

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= < x+y, x+y >= ||x||^2 + ||y||^2 + < x,y > + < y,x > \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,|< x,y >| \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,||x||\,||y|| = (||x|| + ||y||)^2\end{aligned}$$

Définition 12 :

Soit H un espace préhilbertien.

1. Soit $x, y \in H$. On dit que x et y sont orthogonaux, et on note $x \perp y$ si $< x,y >= 0$. Deux parties $A, B \subset H$ sont dites orthogonales si pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \perp b$. On note $A^\perp$ l'ensemble des $x \in H$ orthogonaux à tous les éléments de A ($A^\perp$ est orthogonal à A et c'est la plus grande partie de H orthogonale à A).
2. Soit $(e_k)_{k\in I}$ un système (non fini à priori) d'éléments de H. Ce système est dit orthonormal si pour tout $k, \ell \in I$, on a $< e_k, e_\ell >= 0$ si $k \neq \ell$ et $||e_k||^2 =< e_k, e_k >= 1$.

Exemple 13 :

1. Pour le produit scalaire euclidien la base canonique de $\mathbb{C}^n$

$$(e_1 = (1,0\cdots,0), \cdots, e_i = (0,\cdots,1,\cdots,0), \cdots, e_n = (0,\cdots,1))$$

   est un système orthonormal.
2. Pour $k \in \mathbb{Z} = I$ soit $e_k \in l^2\mathbb{Z}$ la suite $(e_k)_\ell = 0$ si $\ell \neq k$ et $(e_k)_k = 1$.

$$e_k = (\ldots,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,\ldots)$$

   Le système (e_k) où k varie dans $\mathbb{Z}$ est orthonormal dans $l^2\mathbb{Z}$.
3. Le système $(e_k = e^{k\mathrm{j}\omega t})_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormal dans $L^2(0,T)$ (le vérifier en exercice).

Proposition 21 :

1. Si x et y sont orthogonaux on a la relation de Pythagore $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormal et $x = \sum_{\text{finie}} \lambda_i\, e_i$ et $y = \sum_{\text{finie}} \mu_i\, e_i$ des combinaisons linéaires finies d'éléments de ce système. Alors $\lambda_i =< e_i, x >$ (appelées composantes de x dans ce système), $< x,y >= \sum_{\text{finie}} \overline{\lambda_i}\, \mu_i$ et $||x||^2 = \sum_{\text{finie}} |\lambda_i|^2$.
3. Un système orthonormal est algébriquement libre, c'est-à-dire que $\sum_{\text{finie}} \lambda_i\, e_i = 0 \Longrightarrow \forall i, \lambda_i = 0$

Preuve :

1 et 2 exercices. 3, pour tout $i \in I$, on a $0 =< e_i, x >= \lambda_i$.

Soit $S = (e_i)_{i\in I}$ un système orthonormal dans H préhilbertien. On dit que $E \subset H$ est engendré par S si tout vecteur de E est combinaison linéaire finie d'éléments de S (E est le sous espace de base S).

Théorème 10 :

On se donne un espace préhilbertien H, un vecteur $x \in H$ et un système orthonormal fini $S = (e_i)_{1\leq i\leq N}$.
On note E le sous-espace engendré par S. On a $E^\perp = S^\perp$.
Pour tout i on pose $\lambda_i =< e_i, x >$, et $y = \sum_1^N \lambda_i e_i$. On a

1. L'inégalité de Bessel : $\sum_{1\leq i\leq N} |\lambda_i|^2 \leq ||x||^2$.

2. y est le point de E le plus proche de X : pour tout $z \in E$ on a $||x-z|| \geq ||x-y||$. On dit que y est la meilleure approximation quadratique de x dans E.

Preuve :

1. Donnons d'abord l'idée (faire un dessin en représentant E par un plan) : y est la projection orthogonale de x sur E. Le triangle de cotés x, y et $x-y$ est rectangle en l'extrémité de y, donc le carré de la longueur de l'hypothénuse x, c'est-à-dire $||x||^2$, est supérieure au carré de la longueur du coté y c'est-à-dire $\sum_{1\leq i\leq N} |\lambda_i|^2$ d'où 1.

   Maintenant montrons analytiquement 1. On a $(x-y) \perp E$. En effet pour tout i on a les relations $< e_i, x-y >=< e_i, x > - < e_i, y >= \lambda_i - \lambda_i = 0$. Donc $x-y \perp y$ car $y \in E$. Alors d'après Pythagore

$$||x||^2 = ||(x-y)+y||^2 = ||x-y||^2 + ||y||^2 \geq ||y||^2 = \sum_{1\leq i\leq N} |\lambda_i|^2$$

2. Pour tout $z \in E$, on a $y - z \in E$, donc d'après Pythagore,

$$||x-z||^2 = ||(x-y)+(y-z)||^2 = ||(x-y||^2 + ||y-z||^2 \geq ||x-y||^2$$

Corollaire :

Meilleure approximation quadratique des signaux périodiques.

1. Dans $L^2_P(0,T)$ le système de signaux élémentaires $e^{k\mathrm{j}\omega t}$ (où $\omega = 2\pi/T$) forment un système orthonormal.
2. Les coefficients de Fourier d'un signal périodique f

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-k\mathrm{j}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t =< e^{k\mathrm{j}\omega t}, f >$$

   sont les composantes de ce signal dans ce système.
3. Parmi les signaux $\sum_{-N}^{N} c_k e^{k\mathrm{j}\omega t}$ de fréquences inférieures à $\frac{N}{T}$ (plage de sensibilité d'un appareil), le signal $g = \sum_{-N}^{N} c_n(f) e^{n\mathrm{j}\omega t}$ est le signal le « plus proche en énergie » de f ($\mathscr{E}(f-g)$ est minimum).
4. De plus l'inégalité de Bessel donne

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2 = \mathscr{E}(f)$$

4.3 Partie analyse : espaces de Hilbert, égalité de Bessel.

Pour nous l'égalité de Bessel aura la signification suivante ; lorsqu'un spectre de fréquences à une énergie finie alors c'est le spectre de fréquence d'un signal de même énergie.

Définition 13 :

Soit H un espace préhilbertien et $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x_k$ une série d'éléments de H. On dit que cette série converge vers $S \in H$ si

$$||S - \sum_{k=P}^{k=Q} x_k|| \to 0 \text{ lorsque } P \to -\infty \,,\, Q \to +\infty$$

Lorsque H est un espace de fonctions on appelle cette convergence la convergence en moyenne quadratique.

Exemple 14 :

La série de Fourier de la fonction paire $f(t) = |\sin t|$ périodique de période 2π est

$$|\sin t| = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(n\,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{\cos(2\,p\,\pi)}{4\,p^2-1}$$

La série $\sum_{p\geq 1} \frac{\cos(2\,p\,\pi)}{4\,p^2-1}$ converge normalement : pour tout $p \geq 1$ on a $\left|\frac{\cos(2\,p\,\pi)}{4p^2-1}\right| \leq \frac{1}{4\,p^2-1}$ et donc la série convergente $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{4\,p^2-1}$ est une série majorante.

Montrons que la série de Fourier converge en moyenne quadratique. Soit $\alpha > 0$. Pour N assez grand le reste de la série vérifie :

$$\left|\left(|\sin t| - \sum_0^N a_n \cos(n\,t)\right)\right| = \left|\sum_{2p>N} \frac{\cos(2p\pi)}{4p^2-1}\right| \leq \sum_{2p>N} \frac{1}{4p^2-1} \leq \sqrt{\alpha}$$

ce qui implique en élevant au carré puis en intégrant

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(|\sin t| - \sum_0^N a_n \cos(n\,t)\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \left|\left(|\sin t| - \sum_0^N a_n \cos(n\,t)\right)\right|^2 \leq \alpha$$

d'où la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier dans $L^2_P(0,T)$.

Commentaire :

On montre exactement de la même manière le résultat général suivant : la convergence normale d'une série de Fourier entraîne sa convergence en moyenne quadratique.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, $| < -,- > | \leq || - || \, || - ||$, implique le résultat suivant.

Proposition 22 :

On peut permuter $\sum$ infinie et $< , >$, plus précisément

$$< \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n, \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} y_p >= \sum_{n,p=-\infty}^{n,p=+\infty} < x_n, y_p > .$$

En particulier

$$< \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n, y >= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} < x_n, y > .$$

Commentaire :

L'inégalité de Bessel est vraie même si le système orthonormal S n'est pas fini. Par exemple soit $x \in H$ et E engendré par $S = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Appliquons le théorème 10, dont on reprend les notations, au sous-espace E_N engendré par $S_N = (e_n)_{-N\leq n\leq N}$. L'inégalité de Bessel donne

$$\sum_{-N\leq n\leq N} |\lambda_n|^2 \leq ||x||^2.$$

Faisons tendre $N \to +\infty$, on obtient

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} |\lambda_n|^2 \leq ||x||^2.$$

Pour avoir la propriété spectre d'énergie finie implique la convergence, c'est-à-dire

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_k|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{k\mathrm{j}\omega t} \quad \text{CV}$$

nous allons introduire une hypothèse supplémentaire.

Définition 14 :

Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien dans lequel la propriété suivante est vérifiée :

pour tout système orthonormal $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et pour toute suite $(c_k)_{n\in Z}$ de nombres complexes telle que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty$, alors la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e_k$ converge dans H.

Exemple 15 :

Les mêmes qu'au paragraphe précédent (admis)

Définition 15 :

$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne si
- c'est un système orthonormal.
- l'orthogonal $((e_k)_{k\in\mathbb{Z}})^{\perp} = 0$.

Exemple 16 :

Les mêmes qu'au paragraphe précédent. En particulier le système $e_k = e^{k\mathrm{j}\omega t}$ est une base hilbertienne de $L^2_P(0,T)$. (admis)

Théorème 11 :

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert H. Alors :
1. Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x_k e_k$ où $x_k =< e_k, x >$.
2. Pour tout $x, y \in H$, on a $< x, y >= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{x_k} y_k$ et l'égalité de Bessel :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |x_k|^2 = ||x||^2$$

Preuve :

1. On peut appliquer à la série $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x_k e_k$ l'inégalité de Bessel (voir commentaire précédent), $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |x_k|^2 \leq ||x|| < +\infty$ donc (prop.6) il existe $y \in H$ tel que $y = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x_k e_k$. Comme pour tout k, $< e_k, x - y >= x_k - x_k = 0$ on déduit $x = y$.
2. résulte immédiatement de la proposition 4 en appliquant les relations satisfaites par le produit scalaire entre les vecteurs d'une base hilbertienne.

4.4 Application : convergence en moyenne quadratique des signaux périodiques.

L'espace des signaux périodiques d'énergie finie a servi constamment d'exemple dans les sections précédentes. L'objet de cette section est simplement de rassembler les résultats concernant ces signaux.

Définition 16 :

1. Les signaux périodiques d'énergie finie, de période T forment un espace de Hilbert noté

$$L^2_P(0,T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ periodique}, \mathcal{E}(f) = ||f||^2 = \frac{1}{T}\int_0^T ||f(t)||^2 \mathrm{d}t < +\infty\}$$

avec le produit scalaire $< f, g >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$. On a $||f||^2 =< f, f >$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz $| < f, g > | \leq ||f|| \, ||g||$ s'écrit

$$\left| \int_0^T \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t \right|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t \int_0^T |g(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

2. Les coefficients de Fourier des signaux périodiques d'énergie finie, de période T forment un espace de Hilbert noté

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = C = (c_k)_{k\in,\mathbb{Z}} \ : \ \mathcal{E}(C) = ||C||^2 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_k|^2 < +\infty$$

avec le produit scalaire $<(c_k),(d_k)>=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \overline{c_k} d_k$. On a $<(c_k),(c_k)>=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_k|^2$.

Proposition 23 :

Le système $(e^{kj\omega t})_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\omega = 2\pi/T)$ est orthonormal dans $L^2_P(0,T)$. C'est une base hilbertienne de $L^2_P(0,T)$.

Les coefficients de Fourier de $f \in L^2_P(0,T)$ sont les composantes de f dans cette base

$$c_k(f) = < e^{k\mathrm{j}\omega t}, f > = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-k\mathrm{j}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 12 :

Pour tout signal périodique d'énergie finie $f \in L^2_p(0,T)$, on a :

$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{n\mathrm{j}\omega t}$, la série de Fourier converge en moyenne quadratique

Si la plage de sensibilité d'un appareil correspond à l'espace E engendré par les signaux $(e^{k\mathrm{j}\omega t})_{-N\le k\le N}$, le signal de E le plus proche en énergie de f est $g = \sum_{-N}^{N} c_n(f)\, e^{n\mathrm{j}\omega t}$. Ce signal est la meilleure approximation quadratique du signal f.

De plus ce signal vérifie (inégalité de Bessel)

$$\mathscr{E}(g) = ||g||^2 = \sum_{-N}^{+N} |c_n(f)|^2 \le ||f||^2 = \mathscr{E}(f)$$

L'énergie de f est égale à l'énergie de son spectre de fréquences (égalité de Bessel ou conservation de l'énergie)

$$\mathscr{E}(f) = ||f||^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n>0} a_n(f)^2 + b_n(f)^2.$$

Commentaire :

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'énergie du signal f (ou de son spectre de fréquences) est finie
2. la série de Fourier CV vers f en moyenne quadratique.

Exemple 17 :

la série de Fourier du signal périodique du créneau de période 2π tel que $f(t) = 1$ pour $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ et $f(t) = 0$ pour $-\pi < t < -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ est

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{p\ge 0} (-1)^p \frac{\sin((2p+1)\,t)}{(p+1)}$$

On est assuré de sa CV en moyenne quadratique vers f car $(f) = \frac{1}{2} < +\infty$.

$$\mathscr{E}(f) = \frac{1}{2} = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n>0} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p\ge 0}\frac{1}{(p+1)^2}$$

Remarquons que le comportement des coefficients de Fourier en $\frac{1}{n}$ nécessitait l'utilisation de résultats sophistiqués d'analyse pour parler de sa convergence, alors que la série donnant l'énergie « est en $\frac{1}{n^2}$ », donc converge, d'où la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier.

4.5 Application aux filtres périodiques.

Soit le filtre RC : $g' + a\,g = f$. L'entrée $f(t) = e^{k\mathrm{j}\omega t}$ donne une sortie $g(t) = H(k)\,e^{k\mathrm{j}\omega t}$ où $n \to H(k)$ est la fonction de transfert, ici $H(k) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,k\omega + a}$.

La série numérique $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |H(k)|^2$ converge, donc d'après la proposition 2, la série $h = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} H(k)\,e^{k\mathrm{j}\omega t}$ converge en moyenne quadratique dans $L^2_p(0,T)$ vers une fonction $h \in L^2_p(0,T)$ pour laquelle $c_k(h) = H(k)$. On appelle h la réponse impulsionnelle de ce filtre.

Chapitre 5

Approximation quadratique des signaux de carrés intégrables

5.1 Introduction et espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrables.

Dans ce chapitre nous considérons des signaux d'énergie finie représentés par les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. L'énergie d'un tel signal est

$$\mathscr{E}(f) = ||f||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

L'énergie étant finie l'intégrale converge, on dit que la fonction f est de carré intégrable.

Le spectre en fréquences ν d'un signal est donné par sa transformée de Fourier qui, pour les fonctions f intégrables, est déterminée par la formule

$$\mathscr{F}(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t) \,\mathrm{d}t$$

Rappelons qu'une fonction f est intégrable si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$$

La formule donnant la transformée de Fourier n'a de sens à priori que pour de telles fonctions.

Pour les signaux d'énergie finie, on se heurte au problème suivant : l'énergie peut être finie, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty$$

converge, sans que la fonction f soit intégrable, Par exemple le signal $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est d'énergie finie mais n'est pas intégrable (exercice).

Donc la question qui nous préoccupe est de définir le spectre de fréquences d'un signal d'énergie finie ou, dans un autre langage, définir la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable.

On rencontre le même problème pour construire un signal à partir d'un spectre g de fréquences : il faut appliquer la transformée de Fourier réciproque

$$\overline{\mathscr{F}}(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t} g(\nu) \,\mathrm{d}\nu$$

dont l'existence, tout comme Fourier direct, suppose que le spectre de fréquences $\nu \mapsto g(\nu)$ soit intégrable.

On ne peut négliger ce problème qui se rencontre déjà au niveau d'un filtre de type RC

$$g' + a g = f$$

En effet la fonction de transfert $H(\nu) = \dfrac{1}{2\mathrm{j}\pi\nu + a}$ n'est pas intégrable mais est d'énergie finie (exercice). La réponse impulsionnelle h qui représente le filtre RC par la convolution,

$$g = h \star f$$

devrait pouvoir être écrite

$$\overline{\mathscr{F}} H = h.$$

Pour définir la transformée de Fourier des signaux d'énergie finie (ou des fonctions de carré intégrable) on procède de la manière suivante.

On considère un sous-espace S de signaux φ qui soient à la fois intégrables et de carré intégrable, et qui soient assez nombreux pour que pour tout signal de carré intégrable f on puisse trouver une suite $\varphi_n \in S$ telle que l'énergie $\mathscr{E}(f - \varphi_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, c'est-à-dire que les φ_n approximent f en énergie. On pose alors (nous le justifierons)

$$\mathscr{F} f = \lim \mathscr{F} \varphi_n$$

Cette limite étant prise au sens de l'énergie c'est-à-dire que $\mathscr{E}(\mathscr{F} f - \mathscr{F} \varphi_n) \to 0$.

On résout ainsi le problème fondamental de la reconstitution du signal à partir de son spectre de fréquences. Ce spectre est donné par la transformée de Fourier et la reconstitution est obtenue en appliquant Fourier inverse. Le problème de la reconstitution est donc équivalent au problème de la réciprocité de Fourier. Nous avons vu que pour les signaux intégrables, cette réciprocité n'était pas assuré de manière satisfaisante, la transformée de Fourier du créneau par exemple, n'est pas intégrable. Nous montrerons que la réciprocité de Fourier est toujours assurée dans le cas des signaux à énergie finie.

Rappelons que l'espace des fonctions de carré intégrables est l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \; : \; (f) = |f|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty\}$$

avec le produit scalaire

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}\, g(t) \,\mathrm{d}t < +\infty$$

La relation de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}\, g(t) \,\mathrm{d}t \right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)$$

5.2 Espace S des fonctions indéfiniement différentiables à décroissance rapide.

Regardons les propriétés que doivent satisfaire les signaux de S.

Nous voulons pouvoir dériver à tous les ordres donc on prendra S formé de fonctions indéfiniment dérivables.

On exige la réciprocité de Fourier au niveau de S. Or Fourier échange croissance à l'infini et dérivabilité, en effet

- $f, tf, \ldots, t^k f$ intégrables impliquent $\mathscr{F} f$ k-fois dérivable,
- f k-fois dérivable et $f, f', \ldots, f^{(k)}$ intégrables impliquent $\mathscr{F} f(\nu) \leq \dfrac{M}{\nu^k}$ où M est une constante.

Pour que S formé de fonctions indéfiniement dérivables soit stable par Fourier, c'est-à-dire $\mathscr{F} S \subset S$, il faut donc de plus que les fonctions de S décroissent rapidement à l'infini. Plus précisément

Définition 17 :

On note S l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ indéfiniment dérivables telles que pour tous entiers p, q la fonction $t^p \varphi^{(q)}(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'il existe une constante $M_{p,q}$ ne dépendant que de φ, p et q telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $|t^p \varphi^{(q)}(t)| \leq M_{p,q}$.

Les fonctions de S vérifient les propriétés suivantes.

Proposition 24 :

Soit φ une fonction de S. Alors

1. φ est intégrable et de carré intégrable,
2. pour tous entiers positifs p, q la fonction $t^p\,\varphi^{(q)}$ est dans S.

Preuve :

1. φ étant continu le seul problème est la convergence à l'infini. Or l'inégalité $|\varphi(t)| \leq \dfrac{M_{2,0}}{t^2}$ assure la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t$
2. Soit $\psi = t^p\,\varphi^{(q)}$. Montrons $\psi \in S$. Soient des entiers positifs r,s, alors $t^r\,\psi^{(s)} = \sum_k C_k\, t^{r+k}\,\varphi^{(q+s-k)}$ où C_j sont des constantes positives. Cette somme finie est bornée, car, du fait des propriétés de majorations vérifiées par φ et ses dérivées chaque terme de cette somme est borné, $C_k\,|t^{r+k}\,\varphi^{(q+s-k)}| \leq C_k\,M_{r+k,q+s-k}$.

Il résulte de cette proposition que toute fonction de S est d'énergie finie, c'est-à-dire que $S \subset L^2(\mathbb{R})$. En particulier on peut considérer le produit scalaire $<\varphi,\psi>$ et la norme quadratique $||\varphi||$ de fonctions $\varphi,\psi \in S$.

Théorème 13 :

Fourier induit un isomorphisme $\mathcal{F} : S \to S$ (l'isomorphisme réciproque est $\overline{\mathcal{F}}$). Cet isomorphisme vérifie

$$<\mathcal{F}\varphi,\mathcal{F}\psi> = <\varphi,\psi>\,;\,||\mathcal{F}\varphi|| = ||\varphi||.$$

Preuve :

Soit $\varphi \in S$. Montrons que $\mathcal{F}\varphi \in S$, c'est-à-dire que pour tous entiers p,q la fonction $\nu^p\,(\mathcal{F}\varphi)^{(q)}(\nu)$ est bornée. Pour cela il nous suffit de vérifier que c'est une transformée de Fourier, en effet rappelons que pour toute fonction intégrable f, on a $|\mathcal{F}f(\nu)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t = M < +\infty$. Rappelons les formules

$(\mathcal{F}\varphi)^{(k)} = \mathcal{F}((-2\mathrm{j}\pi\,t)^k\,\varphi)$,

$(2\mathrm{j}\pi\,\nu)^k\,\mathcal{F}\varphi(\nu) = \mathcal{F}(\varphi^{(k)})(\nu)$.

Alors :

$$\nu^p\,(\mathcal{F}\varphi)^{(q)}(\nu) = \nu^p\mathcal{F}((-2\mathrm{j}\pi\,t)^q\,\varphi)(\nu) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{(2\mathrm{j}\pi)^p}\,\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[(-2\mathrm{j}\pi\,t)^q\,\varphi\right]\right)(\nu)$$

De même on a $\overline{\mathcal{F}}\varphi \in S$. Comme les fonctions de S sont intégrables la réciprocité de Fourier s'applique et $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$ induisent des isomorphismes réciproques $S \to S$.

Il reste à montrer que $\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire (la relation sur la norme s'en déduit immédiatement). Pour cela posons $\eta = \mathcal{F}\,\psi$. Alors

$$\begin{aligned}
<\mathcal{F}\varphi,\mathcal{F}\psi>. &= <\mathcal{F}\varphi,\eta> = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}\varphi(\nu)}\,\eta(\nu)\,\mathrm{d}\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\,\overline{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t\right)\eta(\nu)\,\mathrm{d}\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi(t)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{j}\pi\nu t}\,\eta(\nu)\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi(t)}\,\overline{\mathcal{F}}\eta(t)\,\mathrm{d}t \\
&= <\varphi,\overline{\mathcal{F}}\eta> = <\varphi,\psi>
\end{aligned}$$

5.3 Fourier d'une fonction de carré intégrable. Conservation de l'énergie.

Nous admettrons que toute fonction d'énergie finie f est limite en moyenne quadratique d'un suite de fonctions de $\varphi_n \in S$ c'est-à-dire que lorsque $n \to +\infty$,

$$\|f - \varphi_n\| \to 0$$

Pour pouvoir définir

$$\mathscr{F} f = \lim \mathscr{F} \varphi_n$$

Il nous faut montrer

Proposition 25 :

La suite $\mathscr{F}\varphi_n$ admet une limite dans $L^2(\mathbb{R})$. Cette limite est indépendante de la suite $\varphi_n \to f$ en moyenne quadratique.

Preuve :

La suite $\mathscr{F}\varphi_n$ est une suite de Cauchy dans le Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. En effet, la suite φ_n est une suite de $L^2(\mathbb{R})$ admettant une limite (à savoir f) et toute suite admettant une limite est une suite de Cauchy. Montrons le. Soit deux entiers p, q. Alors $\|\varphi_p - \varphi_q\| \leq \|\varphi_p - f\| + \|f - \varphi_q\| \leq u$ dès que $p,\ q \geq N$ où N est assez grand pour que $n \geq n$ implique que $\|\varphi_n - f\| \leq \frac{u}{2}$. Pour $p,\ q \geq N$, on a alors $\|\mathscr{F}\varphi_p - \mathscr{F}\varphi_q\| \leq u$ ce qui montre bien que la suite $\mathscr{F}\varphi_n$ est une suite de Cauchy. Comme $L^2(\mathbb{R})$ est un Hilbert cette suite converge vers $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Cette limite g est indépendante de la suite φ_n tendant vers f. En effet soit $\psi_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\|f - \psi_n\| \to 0$, alors $\|\mathscr{F}\varphi_n - \mathscr{F}\psi_n\| = \|\varphi_n - \psi_n\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|f - \psi_n\| \to 0$, et donc les suites $\mathscr{F}\varphi_n$ et $\mathscr{F}\psi_n$ ont la même limite g.

Définition 18 :

La transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$ est la limite en moyenne quadratique des transformée de Fourier $\mathscr{F}\varphi_n$ de toute suite de fonctions $\varphi_n \in S$ convergeant vers f. On note $\mathscr{F} f$ cette transformée de Fourier.

Théorème 14 :

Fourier induit un isomorphisme $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Cet isomorphisme vérifie

$$< \mathscr{F} f, \mathscr{F} g > = < f, g > ; \|\mathscr{F} f| = |f|.$$

On appelle cette dernière relation l'égalité de Fourier-Plancherel. C'est la relation de conservation de l'énergie.

Considérons une fonction f intégrable et d'énergie finie. Nous avons deux définitions possible de la transformée de Fourier de f

– comme fonction intégrable $\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t$
– comme fonction d'énergie finie $\mathscr{F} f = \lim \widehat{\varphi_n}$.

Pour la proposition ci-dessous et sa preuve nous appliquerons la convention ci-dessus, c'est-à-dire que nous réserverons la notation $\widehat{f}$ pour la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable, donc donnée par une intégrale et la notation $\mathscr{F} f$ pour la transformée de Fourier d'une fonction d'énergie finie donc donnée par la limite $\lim \widehat{\varphi_n}$ pour $\varphi_n \to f$.

Proposition 26 :

Soit une fonction f intégrable et d'énergie finie. Alors pour toute suite φ_n d'éléments de S convergeant en moyenne quadratique vers f, on a

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{F} f = \lim \widehat{\varphi_n}$$

c'est-à-dire que les deux définitions possible de la transformée de Fourier de f coïncident.

La proposition 3 est évidente pour $f = \varphi \in S$. En effet il suffit de prendre la suite constante $\varphi_n = \varphi$. Pour montrer le cas général on utilise la proposition suivante.

Proposition 27 :

Soient f,g des fonctions d'énergie finie. Alors les fonctions

$$\nu \mapsto \mathscr{F} f(\nu)\, g(\nu)\ ;\ t \mapsto f(t)\, \mathscr{F} g(t)$$

sont intégrables et on a la formule d'échange

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F} f(\nu)\, g(\nu)\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathscr{F} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Commençons par montrer la proposition 27.

Preuve :

Soit $\varphi_n \to f$ et $\psi_n \to g$. Comme φ_n et ψ_n sont intégrables on a la formule d'échange classique $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}\varphi_n(\nu)\, \psi_n(\nu)\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\, \mathscr{F}\psi_n(t)\, \mathrm{d}t$. En utilisant le produit scalaire cette relation s'écrit $<\overline{\mathscr{F}\varphi_n}, \psi_n> = <\overline{\varphi_n}, \mathscr{F}\psi_n>$. Faisons tendre $n \to +\infty$. A la limite on obtient $<\overline{\mathscr{F} f}, g> = <\overline{f}, \mathscr{F} g>$ ce qui est exactement la formule d'échange cherchée.

Maintenant prouvons la proposition 26.

Preuve :

Soit $\psi \in S$. D'après la proposition 27, on a

$$\int \psi \widehat{f} = \int \widehat{\psi}\, f = \int \mathscr{F}\psi\, f = \int \psi\, \mathscr{F} f$$

La première égalité est la formule d'échange classique, la deuxième égalité vient de la relation $\widehat{\ } = \mathscr{F}$ dans S, la troisième est donnée par la proposition 4. Les fonctions $\widehat{f}(\nu)$ et $\mathscr{F} f(\nu)$ vérifient donc : pour toute fonction ψ de S on a l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\nu)\, \widehat{f}(\nu)\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\nu)\, \mathscr{F} f(\nu)\, \mathrm{d}\nu \tag{5.1}$$

Ceci implique $\widehat{f}(\nu) = \mathscr{F} f(\nu)$. En effet supposons qu'il existe un petit intervalle sur lequel ces fonctions différent. Prenons une fonction de S, $\varphi > 0$ à l'intérieur de cet intervalle et nulle en dehors de cet intervalle. Les fonctions $\varphi \widehat{f}(\nu)$ et $\varphi \mathscr{F} f(\nu)$ sont toutes deux dans $L^2(\mathbb{R})$ et pour tout $\psi \in S$, la relation (5.1) donne (en remplaçant ψ par $\psi\varphi$) les relations $<\overline{\psi\varphi}, \widehat{f}> = <\overline{\psi}, \varphi\widehat{f}> = <\overline{\psi\varphi}, \mathscr{F} f> = <\overline{\psi}, \varphi\mathscr{F} f>$. En remplaçant ψ par une suite ψ_n tendant vers $\overline{g} \in L^2(\mathbb{R})$ on en déduit que pour tout $g \in L^2(\mathbb{R})$ on a l'égalité $<g, \varphi\widehat{f}> = <g, \varphi\mathscr{F} f>$. Cette dernière relation implique $\varphi\widehat{f} = \varphi\mathscr{F} f$ (voir les propriétés du produit scalaire).

Corollaire :

(calcul de $\mathscr{F} f$ par limite de formules intégrales).

1. Soit f_n une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable convergeant en moyenne quadratique vers f de carré intégrable (c'est-à-dire que $\|f - f_n\| \to 0$) alors les fonctions

$$\nu \mapsto \mathscr{F} f_n(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f_n(t)\, \mathrm{d}t$$

   convergent vers $\mathscr{F} f$ en moyenne quadratique. On a le même résultat pour $\overline{\mathscr{F}}$.

2. Soit f de carré intégrable et soit $a > 0$. Alors $\mathscr{F} f$ est imite en moyenne quadratique de la suite de fonctions

$$\nu \mapsto \int_{-na}^{na} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Preuve :

1. La relation $\|f - f_n\| \to 0$ implique $\|\mathscr{F} f - \mathscr{F} f_n\| \to 0$, c'est-à-dire que $\mathscr{F} f_n \to \mathscr{F} f$ en moyenne quadratique.
2. Notons f_n la fonction définie par $f_n(t) = f(t)$ si $-na \leq t \leq na$ et $f_n(t) = 0$ sinon. La fonction f_n est intégrable. En effet, notons $\chi \in L^2(\mathbb{R})$ la fonction porte telle que $\chi(t) = 1$ si $-n\,a \leq t \leq n\,a$ et $\chi(t) = 0$ sinon et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = <\chi, |f|> \leq \|\chi\|\,\|f\| = 2\,n\,a\|f\| < +\infty.$$

   De plus $\|f - f_n\|^2 = \int_{|t|\geq n\,a} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \to 0$ puisque, f étant de carré intégrable, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ converge. Alors la partie 1) donne le résultat car $\mathscr{F} f_n(\nu) = \int_{-n\,a}^{n\,a} e^{-2\mathrm{j}\pi\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t$ puisque f_n est intégrable.