Licence L3 MPC – Mathématiques – Université Paul Sabatier 2012
Indications et réponses aux exercices sur les séries de Fourier 2

Exercice 1.

2. $a_0(f) = 2\pi^2/3$; $a_n(f) = 4/n^2$ (faire deux intégrations par parties) ; $b_n(f) = -\frac{4\pi}{n}$ (idem).

3. En tout point $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

4. Comme f est C^1 par morceaux, nous avons

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\Big).$$

En faisant $x = 0$,

$$\frac{(2\pi)^2 + 0^2}{2} = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2},$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour calculer l'autre somme, on évalue en $x = \pi$.

5. Utiliser la formule de Parseval. On trouve

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour la seconde somme, on écrit

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \sum_{p\geq 1}\frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Donc

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{2^4}\frac{\pi^4}{90} + \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4}.$$

On en conclut

$$\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercice 2. On remarque que dans l'identité à démontrer, la série de Fourier ne comporte que des terms “impairs”. D'où l'idée de considérer une fonction impaire construite à partir de cos. Considérons ainsi la fonction définie par $f(t) = \cos(t)$ pour $0 < t < \pi$ et prolongée par imparité sur $[-\pi, 0]$ puis par 2-périodicité sur $\mathbb{R}$. Cette fonction g étant impaire, $a_n(g) = 0$ pour tout n. Puis on calcule

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{t=-\pi}^{t=+\pi} g(t)\sin(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t)\sin(nt)\ dt = \frac{2n(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}$$

On en déduit

$$b_{2n}(g) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}, \quad b_{2n+1}(g) = 0.$$

Comme sur l'intervalle $0 < t < \pi$, la fonction g est de classe C^1, la série de Fourier converge et l'identité demandée s'ensuit.

Exercice 3. Non la fonction f n'est pas C^1 par morceaux car

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} = +\infty.$$

La série de Fourier converge sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 4. La fonction f est C^1 par morceaux (discontinue en les points de $2\pi\mathbb{Z}$) et est impaire. Il reste donc à calculer les b_n (au moyen d'une intégration par parties). On trouve

$$b_n(f) = \frac{1}{n}, \ n > 0.$$

Donc $Sf(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n}$.

Soit $\tau_a f$ la fonction définie par $\tau_a f(t) = f(t+a)$. Ainsi $g(t) = \tau_{+1} f - \tau_{-1} f$. On sait que $c_n(\tau_a f) = \exp(ina) \cdot c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier,

$$c_n(g) = c_n(\tau_1 f) - c_n(\tau_{-1} f) = \exp(+in)c_n(f) - \exp(-in)c_n(f) = 2i\sin(n) \ c_n(f).$$

D'après le calcul précédent,

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) = \frac{1}{2}(0 - i\frac{1}{n}) = -\frac{i}{2n}.$$

Donc

$$c_n(g) = \frac{\sin n}{n}.$$

On en déduit que g est paire et que

$$Sg(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}-\{0\}} \frac{\sin n}{n} e^{int} = \sum_{n\geq 1} \frac{2\sin n}{n} \cos(nt).$$

2. Nous avons tout d'abord

$$f(1) = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}, \tag{1}$$

puisque f est continue en 1 et de classe C^1 par morceaux. Ensuite, appliquons la formule de Parseval à la série de Fourier de g. Nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \ dt = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{4\sin^2 n}{n^2}.$$

Il reste à calculer l'intégrale. Pour cela, il faut expliciter g sur un intervalle de longueur 2π. On trouve

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2\pi - 1; \\ -1+\pi & \text{si } 2\pi - 1 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

On déduit que

$$||g||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \ dt = \frac{1}{2\pi}(2\pi(\pi-1)) = \pi - 1.$$

Comparant à l'identité (1), on conclut que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi-1}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}.$$

Exercice 5. L'hypothèse implique la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier de f et de f'. De plus, nous avons la relation

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f'), \quad \forall n \neq 0.$$

Par conséquent,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|}|c_n(f')| \leq |c_n(f')| \ \ \forall n \neq 0.$$

De plus

$$|c_0(f)| = 0 \leq |c_n(f')|.$$

Nous déduisons alors de la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \ dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \ dt.$$

Il y a égalité si et seulement si toutes les inégalités sont des égalités (pourquoi ? Les termes des séries sont tous positifs). Donc $|c_n(f)|^2 = n^2 \ |c_n(f)|^2$ pour tout $n \neq 0$. Donc $c_n(f) = 0$ pour tout $n \neq 0$. Puisque f est C^1, sa série de Fourier converge uniformément vers f. Donc $f(t) = a\exp(it) + b\exp(-it)$. Réciproquement toute fonction de cette forme vérifie bien le cas d'égalité.

Exercice 6. 1. Le théorème de Parseval affirme la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. Par conséquent, son terme général tend vers 0, ce qui implique le résultat demandé.

2. En intégrant successivement par parties (récurrence sur k), on trouve

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)}).$$

3. Supposons f de classe C^k. Donc $f^{(k)}$ est continue 2π-périodique et sa série de Fourier converge en moyenne quadratique, i.e., $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f^{(k)})|^2$ converge. Donc son terme général converge vers 0. Donc $c_n(f^{(k)})$ converge vers 0. Par conséquent,

$$|n^k c_n(f)| = |c_n(f^{(k)})| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. (a) $Sf(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque

$$|c_n| \leq \frac{M}{1+n^2}$$

(pour une certaine constante M) qui est le terme général d'une série convergente.

(b) La question précédente implique que Sf converge vers une fonction continue (convergene uniforme + terme général continu). Plus généralement, l'hypothèse implique

$$|n^k c_n(f)| \leq \frac{M_k}{n^2+1}$$

pour une certaine constante M_k. Donc toutes les séries dérivées terme à terme de Sf convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ et que Sf définit une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(c) Comme Sf est une série trigonométrique convergeant uniformément, ses coefficients de Fourier sont les coefficients de Fourier de f : $c_n(Sf) = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(d) On a vu que l'application $f \mapsto \widehat{f} = c_\bullet(f)$ est injective sur l'espace des fonctions continues 2π-périodiques. Donc $Sf = f$.

5. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique est de classe C^∞ si et seulement si $c_n(f) = o(1/n^k)$ pour tout $k \geq 0$.

Exercice 7.

2. On trouve $a_n(f) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$ et $b_n(f) = 0$ (f est paire). Donc

$$Sf(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos(nt).$$