

Quelques Aspects des Invariants de Variétés de Dimension 3

Florian Deloup

Table des matières

1	Isotopies et recollements	5
1.1	Recollements par homéomorphismes	5
1.2	Recollements par difféomorphismes	6
1.3	Extensions et recollements	9
2	Introduction	13
2.1	Exemples de variétés de dimension trois	13
2.1.1	Premiers exemples	13
2.1.2	Variétés de Seifert	18
2.1.3	Variétés hyperboliques	19
2.1.4	Variétés elliptiques	23
3	Quelques faits fondamentaux sur les 3-variétés	25
3.1	Triangulations	25
3.2	Scindements de Heegaard	26
3.3	Groupe des homéotopies de surfaces	28
3.4	Equivalence de scindements de Heegaard	33
3.5	Stabilisation des scindements de Heegaard	38
3.6	Le théorème de Reidemeister et de Singer	39
3.7	Chirurgie de Dehn	40
3.7.1	Définitions	40
3.7.2	Chirurgie entière et cobordismes	42
3.7.3	Le théorème de Kirby	46

4	Forme d'enlacement	49
4.1	Enlacement de cycles	49
4.2	Forme d'enlacement	51
4.3	Lien avec la forme d'intersection	52
5	Bibliographie	55
5.1	Généralités	55
5.2	3-variétés et invariants	55
5.3	Torsion de 3-variétés	56

Note préliminaire. Ce texte est constitué des notes du cours enseigné en 2010 ainsi que des exposés des étudiants suivant le cours. Ces notes traitent des techniques de chirurgie et des diagrammes de Heegaard de 3-variétés, montre comment calculer le groupe fondamental de 3-variétés, traite en détail l'enlacement des 3-variétés. La torsion de Reidemeister a également été abordée mais les notes n'ont pas été rédigées; seules les références bibliographiques ont été indiquées. Certains prérequis ont dû être retraités de façon assez détaillée en début de cours.

Chapitre 1

Isotopies et recollements

Ce chapitre est préliminaire et sert à fixer certaines idées qui serviront couramment par la suite.

1.1 Recollements par homéomorphismes

Soit M et N deux variétés topologiques de même dimension. Soit $h : \partial N \rightarrow \partial M$ un homéomorphisme. Soit \sim la relation d'équivalence engendrée par la relation $x \sim h(x)$, $x \in N$.

Proposition 1 *L'espace*

$$M \cup_h N = (M \amalg N) / \sim$$

est une variété topologique sans bord. Si de plus, M et N sont orientées et si h reverse l'orientation, alors $M \cup_h N$ est orientée.

Proposition 2 *Soit $X = M \cup_g N$ et $X' = M \cup_h N'$ deux recollements de variétés suivant des homéomorphismes $g : \partial N \rightarrow \partial M$ et $h : \partial N' \rightarrow \partial M$ respectivement. Supposons que l'homéomorphisme $h^{-1} \circ g : \partial N \rightarrow \partial N'$ s'étende en un homéomorphisme $F : N \rightarrow N'$. Alors les variétés $X = M \cup_g N$ et $X' = M \cup_h N'$ sont homéomorphes.*

Démonstration. On définit une application $f : M \amalg N \rightarrow M \amalg N'$ par $f|_M = \text{id}_M$ et $f|_N = F$. Par définition, cette application vérifie la condition de compatibilité

$$f|_{\partial N} = F|_{\partial N} = h^{-1} \circ g$$

nécessaire pour induire une application $\bar{f} : M \cup_g N \rightarrow M \cup_h N'$. L'application est un homéomorphisme. ■

Remarque. La proposition a un analogue dans la catégorie des difféomorphismes, voir la section suivante §1.2. Dans ce cas, il n'y a pas de structure différentiable canonique sur la variété recollée mais seulement une classe de structures différentiables.

Une *isotopie d'homéomorphismes* est une famille

$$(h_t)_{t \in [0,1]}$$

d'homéomorphismes telle que l'application $(t, x) \mapsto h_t(x)$ est continue.

Proposition 3 *Soit $X = M \cup_h N$ le recollement de deux variétés suivant un homéomorphisme $h : \partial N \rightarrow \partial M$. Alors X ne dépend à homéomorphisme près que de la classe d'isotopie $[h]$ de h .*

Remarque. Le cadre “naturel” de la proposition 3 est la catégorie des difféomorphismes. La démonstration consiste à approcher un homéomorphisme par un difféomorphisme et appliquer le résultat de la proposition 6.

1.2 Recollements par difféomorphismes

On considère les mêmes questions que dans la section précédente dans la catégorie des variétés différentiables et des difféomorphismes.

Soit M et N deux variétés différentiables de même dimension. Soit $h : N \rightarrow M$ un difféomorphisme. On peut se poser la question de savoir s'il est possible de donner une structure différentiable à la variété recollée $M \cup_h N$. La réponse est positive mais la structure différentiable dépend de l'extension locale du recollement. *Il n'y a donc pas de structure différentiable canonique de la variété recollée.* Cependant une autre extension locale donne lieu à un difféomorphisme entre les deux variétés recollées. Pour les détails, voir par exemple M. Hirsch, Differential Topology, §8 :2.

Proposition 4 *La variété $M \cup_h N$ possède une unique classe d'équivalence de structure différentiable.*

On fait l'abus classique de confondre la classe d'équivalence avec une structure différentiable donnée.

Proposition 5 *Soit $X = M \cup_g N$ et $X' = M \cup_h N'$ deux recollements de variétés suivant des difféomorphismes $g : \partial N \rightarrow \partial M$ et $h : \partial N' \rightarrow \partial M$ respectivement. Supposons que le difféomorphisme $h^{-1} \circ g : \partial N \rightarrow \partial N'$ s'étende en un*

difféomorphisme $F : N \rightarrow N'$. Alors les variétés $X = M \cup_g N$ et $X' = M \cup_h N'$ sont difféomorphes.

Esquisse de démonstration. La démonstration commence de la même manière que celle de la proposition 2. L'homéomorphisme \bar{f} obtenu dans la démonstration est alors différentiable séparément sur M et sur N . Il faut le lisser au voisinage de ∂N pour en faire un véritable difféomorphisme. On choisit un voisinage tubulaire de ∂N dans X et de $\partial N'$ dans X' respectivement. Ceci induit des colliers C_0, C_1 de ∂N dans M et N et des colliers C'_0, C'_1 de $\partial N'$ dans M et N' respectivement. Il faut alors comparer le collier de C'_1 dans N' avec $\bar{f}(C_1)$ qui est le collier induit de C_1 par $\bar{f}|_{C_1}$. D'après un résultat classique, on peut alors isotoper $\bar{f}|_N = F$ en un nouveau difféomorphisme compatible. ■

Une isotopie de difféomorphismes $M \rightarrow N$ est une famille

$$(h_t)_{t \in [0,1]}$$

de difféomorphismes $M \rightarrow N$ telle que l'application $(t, x) \mapsto h_t(x)$ est différentiable. Si $M = N$ et $h_0 = \text{id}_M$, on dit *isotopie de M* . L'ensemble des isotopies de M forme un groupe $\text{ISO}(M)$ qui agit naturellement sur le groupe $\text{DIFF}(M)$ des difféomorphismes de M : $h \cdot f = h_1 \circ f$, $h \in \text{ISO}(M)$, $f \in \text{DIFF}(M)$. Deux difféomorphismes $f, g \in \text{DIFF}(M)$ sont isotopes s'ils sont dans une même orbite.

Proposition 6 *Deux difféomorphismes $\partial N \rightarrow \partial M$ isotopes induisent des recollements difféomorphes. Autrement dit : le recollement de deux variétés différentiables M et N suivant un difféomorphisme $h : \partial N \rightarrow \partial M$ ne dépend que de la classe d'isotopie $[h]$ de h .*

Démonstration. Soit $h_0 = h$ et h_1 deux difféomorphismes entre les bords qui sont isotopes. Montrons que $X = M \cup_{h_0} N$ et $X' = M \cup_{h_1} N$ sont difféomorphes. Nous avons $h_1^{-1} \circ h_0$ isotopes à l'identité sur ∂N . Cette isotopie s'étend en une isotopie sur un collier $C \simeq \partial N \times I$ sur ∂N puis en une isotopie sur N qui donne un difféomorphisme de N qui est l'identité en-dehors de C . Donc $h_1^{-1} \circ h_0$ se prolonge en un difféomorphisme de N et on peut appliquer la proposition 5. ■

Corollaire 0.1 *Soit M une variété différentiable. Tout difféomorphisme $h : \partial M \rightarrow \partial M$ isotope à l'identité se prolonge en un difféomorphisme $M \rightarrow M$.*

L'analogie de ce résultat dans la catégorie TOP est également vrai.

Démonstration. La démonstration de la proposition précédente pour $M = N$ décrit l'extension recherchée. ■

Remarque. La réciproque de la proposition tombe en défaut en général. Un difféomorphisme $h : \partial M \rightarrow \partial M$ se prolongeant en un difféomorphisme $M \rightarrow M$, même s'il préserve l'orientation, n'est pas nécessairement isotope à l'identité.

Une notion voisine est celle de pseudo-isotopie. À titre de motivation, considérons un difféomorphisme $f : B^n \rightarrow B^n$ de la boule unité fermée de dimension n . Le lemme suivant est intuitivement évident.

Lemme 1 *Il existe une isotopie de $f : B^n \rightarrow B^n$ qui déforme f en un difféomorphisme $g : B^n \rightarrow B^n$ tel que g soit l'identité sur la boule fermée $B_{1/2}^n$ de rayon $1/2$.*

Considérons alors la restriction de g à la couronne $C^n = \overline{B^n} - B_{1/2}^n$. Cette couronne s'identifie au cylindre $S^{n-1} \times I$ par l'application

$$S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow C^n, (x, t) \mapsto \frac{1}{2}(t+1)x$$

qui est un difféomorphisme qui identifie $S^{n-1} \times 0$ à $\{x \in C^n \mid \|x\| = 1/2\}$. Sous cette identification, le difféomorphisme $g|_C$ s'identifie à un difféomorphisme $S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1} \times I$ vérifiant $g|_{S^{n-1} \times 0} = \text{id}_{S^{n-1}}$. Ce n'est pas *a priori* une isotopie de S^{n-1} car à $t \in I$ fixé, l'application g_t n'est pas nécessairement un difféomorphisme de S^{n-1} .

Une *pseudo-isotopie d'une variété différentiable* M est un difféomorphisme $F : M \times I \rightarrow F \times I$ tel que $F|_{M \times 0} = \text{Id}_M$.

L'ensemble des pseudo-isotopies de M forme un groupe $\text{PISO}(M)$ qui agit de façon naturelle sur le groupe $\text{Diff}(M)$ des difféomorphismes de $M = M \times 1$. Explicitement,

$$(F \cdot g)(x) = F(g(x), 1), \quad F \in \text{PISO}(M), \quad g \in \text{DIFF}(M) = \text{DIFF}(M \times 1), \quad x \in M.$$

Cette action étend l'action du groupe $\text{ISO}(M)$ des isotopies de M sur $\text{DIFF}(M)$. Ainsi deux difféomorphismes $f_0, f_1 : M \rightarrow M$ sont *pseudo-isotopes* s'il existe un difféomorphisme $F : M \times I \rightarrow F \times I$ tel que $F|_{M \times 0} = f_0$ and $F|_{M \times 1} = f_1$. Il est clair que toute isotopie $(f_t)_{t \in I}$ de difféomorphisme induit une pseudo-isotopie

$$F : M \times I \rightarrow M \times I, (x, t) \mapsto (f_t(x), t).$$

Une isotopie est une pseudo-isotopie qui "préserve" les difféomorphismes par "lignes de niveau" : pour tout $t \in I$, $F^{-1}(M \times \{t\})$ est un difféomorphisme de $M \times \{t\} = M$. On a donc l'inclusion

$$\text{PISO}(M) \subseteq \text{ISO}(M)$$

où $\text{ISO}(M)$ désigne le groupe des isotopies de M .

L'argument ci-dessus montre que tout difféomorphisme $B^n \rightarrow B^n$ est pseudo-isotope à l'identité.

La question de l'inclusion réciproque, de savoir quand deux difféomorphismes pseudo-isotopes sont en fait isotopes, est subtile. Dans le cas général, la réponse dépend bien sûr de la variété et n'est pas toujours positive. Citons à présent sans démonstration le théorème de J. Cerf qui donne un cas particulier important où la réponse est positive.

Proposition 7 (Théorème de Cerf) *Si M est une variété simplement connexe sans bord de dimension égale à ou plus grande que 5, alors le groupe $\text{PISO}(M)$ des pseudo-isotopies est connexe.*

Corollaire 0.2 Avec les hypothèses ci-dessus sur M ,

$$\pi_0(\text{DIFF}(M)) = \text{DIFF}(M)/\text{ISO}(M) = \text{DIFF}(M)/\text{PISO}(M).$$

Démonstration du corollaire. D'après le théorème de Cerf, $\text{PISO}(M)$ est connexe, donc les orbites dans $\text{DIFF}(M)$ sont aussi connexes. De plus elles contiennent les orbites de $\text{ISO}(M)$. Or ces orbites coïncident avec les composantes connexes de $\text{DIFF}(M)$ (puisque tout chemin continu dans $\text{DIFF}(M)$ peut être approché par un chemin différentiable dans $\text{DIFF}(M)$ qui est une isotopie). Donc les orbites de $\text{PISO}(M)$ sont exactement les orbites de $\text{ISO}(M)$. ■

Corollaire 0.3 Si $n \geq 6$, $\text{DIFF}(B^n)$ est connexe.

Démonstration du corollaire. On a vu un argument plus haut montrant que tout difféomorphisme $B^n \rightarrow B^n$ est pseudo-isotope à l'identité, donc isotope à l'identité. ■

1.3 Extensions et recollements

Dans cette section, nous considérons dans les catégories TOP et DIFF les recollements de boules.

Commençons par la question de l'extension d'un homéomorphisme de la sphère à la boule. La proposition suivante est attribuée à Alexander¹.

Proposition 8 (Extension radiale) Tout homéomorphisme $h : S^n \rightarrow S^n$ s'étend radialement en un homéomorphisme $\tilde{h} : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ par la formule

$$\tilde{h}(r, t) = r h(t), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad t \in S^n.$$

Démonstration. Clair d'après la formule. ■

Exercice. L'extension radiale est-elle un difféomorphisme si $h : S^n \rightarrow S^n$ est un difféomorphisme? [Considérer la différentiabilité de l'extension à l'origine de la boule B^{n+1} et conclure que l'extension à la boule privée de l'origine est un difféomorphisme sur son image mais en général non l'extension à la boule entière.] Construire des difféomorphismes $h : S^n \rightarrow S^n$ simples pour lesquels l'extension radiale sera un difféomorphisme.

Une conséquence de l'extension radiale est la propriété que le recollement de deux boules est toujours une sphère topologique.

¹Cette extension radiale est souvent appelée le truc d'Alexander (Alexander's trick) dans la littérature. Cependant, le théorème d'Alexander – qui est aussi parfois appelé le truc d'Alexander – est l'existence d'une isotopie linéaire par morceaux entre tout homéomorphisme de B^n laissant fixe point par point le bord S^{n-1} et l'identité de B^n . On l'utilisera plus loin.

Proposition 9 *Pour tout homéomorphisme $h : S^n \rightarrow S^n$, $B^n \cup_h B^{n+1} \simeq S^{n+1}$.*

Démonstration. Soit $X = B_1^n \cup_h B_2^n$. Il existe un homéomorphisme F envoyant la première copie de B^n sur l'hémisphère nord

$$B_N = \{x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \geq 0\} \subset S^n$$

(qui est bien une boule). En particulier, F envoie $\partial B^n = S^{n-1}$ sur l'équateur $E = \{x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ (qui est la sphère standard de dimension $n-1$). Par extension radiale, $F|_{\partial B^n}$ s'étend en un homéomorphisme $G : B_2^n \rightarrow B_S$ où B_2^n est la seconde copie de B^n et B_S est l'hémisphère sud de S^n . Il en résulte que l'application $H : X \rightarrow S^3$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in B_1^n; \\ G(x) & \text{si } x \in B_2^n. \end{cases}$$

est un homéomorphisme répondant à la question. ■

Au vu de ce résultat d'une part et de l'exercice ci-dessus d'autre part, on se demande si le résultat admet un analogue dans la catégorie DIFF. Est-ce qu'un difféomorphisme de la sphère S^n sur elle-même peut se prolonger en un difféomorphisme de la boule B^{n+1} ? En fait, il existe d'autres techniques que l'extension radiale (non différentiable en l'origine en général) pour un tel prolongement et la réponse à cette question est positive pour $n \leq 5$.

Théorème 1 *Soit $f : S^n \rightarrow S^n$ un difféomorphisme. Si $n \leq 5$ alors f se prolonge en un difféomorphisme $B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$.*

Quelques idées sur la démonstration. Considérons le cas $n = 1$: il s'agit donc d'étendre un difféomorphisme $f : S^1 \rightarrow S^1$ en un difféomorphisme $B^2 \rightarrow B^2$. Quitte à composer f par une réflexion orthogonale d'axe $(-\sqrt{-1}, \sqrt{-1})$, on peut supposer que f préserve l'orientation. Ensuite on relève f en un difféomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (car \mathbb{R} est le revêtement universel de S^1) préservant l'orientation. Alors $\frac{df}{dx}(x) > 0$. Étendons alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un difféomorphisme $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ par la formule

$$F(x, t) = (tf(x) + (1-t)x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1].$$

On reconnaît une homotopie "linéaire" entre f ($t = 1$) et l'identité ($t = 0$). Mais comme le jacobien de F en (x, t) est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t \frac{df}{dx}(x) + 1 - t & f(x) - t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = t \frac{df}{dt}(x) + 1 - t > 0,$$

pour $0 \leq t \leq 1$. L'application F est donc un difféomorphisme et en conséquence, l'application induite $\bar{F} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ aussi. Le S^1 original est identifié à $S^1 \times 1$. (Noter qu'à chaque t fixé, $\bar{F}(-, t)$ est un difféomorphisme de S^1 : nous avons donc construit en fait une *isotopie* de difféomorphismes entre Id_{S^1} et f .) Nous pouvons alors coller un disque B^2 à $S^1 \times [0, 1]$ le long de $S^1 \times 0$ et étendre \bar{F} en une application $\tilde{f} : S^1 \times [0, 1] \cup B^2 \rightarrow S^1 \times [0, 1] \cup B^2$ en définissant $\tilde{f}|_{B^2} = \text{id}_{B^2}$.

Cas $n = 2$. On peut aussi supposer que f préserve l'orientation. On peut isotoper f de sorte que f soit l'identité sur un voisinage du pôle nord de S^2 (ou même sur l'hémisphère nord). La projection stéréographique (qui est un difféomorphisme) envoie alors f sur un difféomorphisme g de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 qui est l'identité en dehors d'un compact. Il s'agit alors de montrer que g est isotope à l'identité (à travers des difféomorphismes qui sont l'identité en dehors d'un compact K fixé). Considérons les tangentes unités des images des droites horizontales $L_x = \{(x, t_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ par g . Ces vecteurs constituent un champ de vecteurs X non-singulier sur \mathbb{R}^2 qui est constant en dehors de K et qui est homotope à un champ constant relativement à $\mathbb{R}^2 - K$. (Le théorème de Poincaré-Bendixson enlève les obstructions à l'existence d'une telle homotopie.)

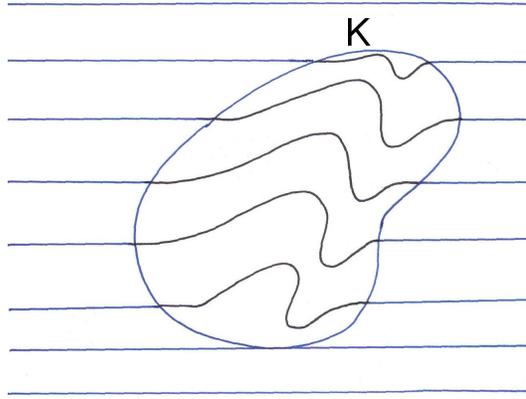


FIG. 1.1 – Les courbes intégrales du champ X .

Il en résulte en particulier que f est différentiablement isotope à l'identité de S^2 ⁽²⁾. On peut alors appliquer la même méthode que plus haut : on étend f à un difféomorphisme $S^2 \times I \rightarrow S^2 \times I$ puis on recolle une boule B^3 que l'on attache par l'identité à $S^2 \times 1$ (sur lequel le difféomorphisme est l'identité). On obtient ainsi un difféomorphisme $B^3 = S^2 \times I \cup B^2 \rightarrow S^2 \times I \cup B^2 = B^3$.

Cas $n = 3$. Dans les deux cas précédents, on a vu qu'une condition suffisante pour étendre f à la boule est que f soit isotope à l'identité. Un résultat de J. Cerf affirme qu'il en est bien ainsi : tout difféomorphisme $S^3 \rightarrow S^3$ préservant l'orientation est isotope à l'identité. La démonstration est considérablement plus sophistiquée : elle consiste à l'aide de la théorie de Morse à établir que le groupe des pseudo-isotopies est connexe.

²Un résultat plus fort de S. Smale affirme que l'espace des difféomorphismes $S^2 \rightarrow S^2$ préservant l'orientation possède le groupe $SO(3)$ des rotations comme rétracte par déformation.

Chapitre 2

Introduction

On propose d'abord un bref panorama des variétés de dimension trois et des questions anciennes et récentes sur le sujet. Au cours de ce panorama, plusieurs résultats classiques sont utilisés et rappelés et peuvent être revus et démontrés si nécessaire. On trouvera à cet effet en notes les références les plus utiles.

2.1 Exemples de variétés de dimension trois

Une variété de dimension trois ressemble localement à notre espace ambiant. Contrairement aux surfaces (variétés de dimension deux) fermées orientées que l'on peut plonger dans \mathbb{R}^3 , les variétés fermées de dimension trois, même orientées, ne se laissent pas si facilement visualiser. Par conséquent, on peut s'attendre à ce qu'elles ne se laissent non plus si facilement distinguer.

2.1.1 Premiers exemples

Exemple 0. L'exemple le plus simple de variété de dimension trois est probablement la boule unité fermée de \mathbb{R}^3 :

$$B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}.$$

C'est une variété de dimension trois dont le bord est la sphère

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$

En effet, la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|^2$$

est différentiable sur \mathbb{R}^3 et de rang égal à 1 en chaque point de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Il s'ensuit que $B^3 = f^{-1}([-\infty, 1])$ est une sous-variété à bord de dimension 3 de

\mathbb{R}^3 dont le bord est $f^{-1}(1) = S^2$. Que se passe-t-il si l'on recolle deux boules B^3 suivant un homéomorphisme de leurs bords ? On connaît le recollement où l'homéomorphisme de recollement est l'identité : c'est la sphère

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Algébriquement, la sphère se décompose sous la forme

$$S^3 = B_+^3 \cup B_-^3$$

où $B_\pm^3 = \{x \in S^3 \subset \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0 \text{ ou } \text{signe}(x_4) = \pm\}$ est l'hémisphère (nord ou sud) de S^3 et où l'intersection des deux hémisphères est l'équateur

$$B_+^3 \cap B_-^3 = E = \{x \in S^3 \subset \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\} = S^2.$$

En fait le recollement est toujours topologiquement la sphère S^3 .

Proposition 10 *Pour tout homéomorphisme $h : S^2 \rightarrow S^2$, $B^3 \cup_h B^3 \simeq S^3$.*

Cette proposition n'a rien de particulier à la dimension trois : nous avons vu que la proposition correspondante en dimension n est aussi vraie.

Proposition 11 *Pour tout homéomorphisme $h : S^n \rightarrow S^n$, $B^n \cup_h B^{n+1} \simeq S^{n+1}$.*

Exemple 1. La sphère de dimension trois que nous venons de voir, définie par

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\},$$

est notre première exemple de 3-variété sans bord. Cette définition utilise explicitement l'espace \mathbb{R}^4 muni de sa norme euclidienne. Alternativement, on peut décrire S^3 comme plongé dans C^2 :

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Une autre manière de procéder est de définir

$$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

au sens du compactifié d'Alexandrov. (Rappelons que la topologie est définie en prenant comme ouverts les ouverts usuels de \mathbb{R}^3 ainsi que les parties de la forme $U \cup \{\infty\}$ où U est un ouvert usuel de \mathbb{R}^3 dont le complémentaire est compact.) Dans les deux cas, on vérifie aisément la définition de variété en construisant explicitement un atlas : dans le premier cas, on peut définir des hémisphères ouverts

$$U_j^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_j > 0\}, U_j^- = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_j < 0\}$$

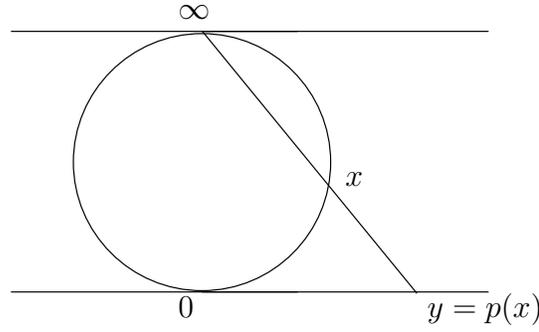
avec $1 \leq j \leq 3$, et des cartes

$$\varphi_j : U_j^+ \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi_j^\pm(x) = (x_1, \dots, \widehat{x}_j, x_4), \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Il est clair que φ_j envoie homéomorphiquement U_j sur la boule ouverte $B^3 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \|w\| < 1\}$. Dans le second cas, deux cartes suffisent :

$$U = \mathbb{R}^3, \quad V = (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \cup \{\infty\}$$

avec les applications $\text{id} : U = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $j : V \rightarrow \mathbb{R}^3, j(x) = x$ si $x \neq \infty, j(\infty) = 0$. La correspondance entre les deux constructions est donnée par la "projection stéréographique".



Exemple 3. L'espace topologique $\mathbb{R}P^3$. Un élément de $\mathbb{R}P^3$ est une classe d'équivalence $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ d'un quadriplet de nombres réels non tous nuls. La relation est $[x_0, x_1, x_2, x_3] = [\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3]$ pour tout $\lambda \neq 0$. La topologie est la topologie quotient. Un atlas $\{U_i, \varphi_i\}$ se définit de la manière suivante :

$$U_i = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_i \neq 0\}, \quad 0 \leq i \leq 3$$

et

$$\varphi_i([x_0, x_1, x_2, x_3]) = (x_0/x_i, \dots, \widehat{x_i/x_i}, \dots, x_3/x_i)$$

est la carte $U_i \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ pour $0 \leq i \leq 3$. On vérifie que les fonctions de transition sont lisses. Alternativement, on peut observer d'après la définition que l'application

$$S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3, \quad x \mapsto [x]$$

est un revêtement double et déduire de la structure de variété de S^3 celle de $\mathbb{R}P^3$.

Exemple 4. La sphère S^3 vue comme groupe de Lie $SU(2)$. On se souvient que $SU(2)$ désigne le groupe spécial unitaire de degré 2, i.e., le sous-groupe constitué des matrices 2×2 unitaires de déterminant 1. Un élément général de $SU(2)$ est une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ et } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

C'est précisément une représentation matricielle des quaternions de norme 1. En effet, comme algèbre sur \mathbb{R} ,

$$\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \mid ijk = i^2 = j^2 = k^2 = -1 \rangle.$$

Ainsi \mathbb{H} est isomorphe comme espace vectoriel à \mathbb{R}^4 mais possède une structure multiplicative distincte. Le corps \mathbb{R} se plonge dans \mathbb{H} comme $\mathbb{R} \cdot 1$; on peut aussi plonger \mathbb{R}^3 dans \mathbb{H} comme $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$. Il y a un morphisme d'algèbre

$$\mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C}), \quad a + bi + cj + dk \mapsto \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix}.$$

On est alors motivé à définir le conjugué d'un quaternion $q = a + bi + cj + dk$ comme $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. La norme d'un quaternion est alors $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$. On vérifie les identités $\|qr\| = \|q\| \cdot \|r\|$ et $q^{-1} = \|q\|^{-2}\bar{q}$ pour $q \neq 0$. En particulier, \mathbb{H} est un corps (non commutatif). On en déduit que la sphère unité de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$, a une structure de *groupe multiplicatif* et qu'elle s'identifie à $SU(2)$. Pour tout $s \in \mathbb{H} - \{0\}$, l'application

$$\rho_s : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad q \mapsto sqs^{-1}$$

laisse \mathbb{R}^3 invariant, $\rho_s|_{\mathbb{R}^3} \in SO(3)$ et $\rho_s = \rho_{s'}$ ssi s et s' sont \mathbb{R} -liés. On en déduit que l'application

$$S^3 \rightarrow SO(3), \quad s \mapsto \rho_s|_{\mathbb{R}^3}$$

est un morphisme surjectif de groupes dont le noyau est $\{\pm 1\}$. En particulier, $SO(3)$ s'identifie à $\mathbb{R}P^3$.

*Exemple 5. Espaces lenticulaires*¹. Soit p, q deux entiers relatifs non nuls. L'espace lenticulaire $L(p, q)$. Un élément de $L(p, q)$ est une classe d'équivalence sur $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Soit ω une racine primitive de l'unité d'ordre p . La relation d'équivalence est engendrée par $[z, w] = [\omega \cdot z, \omega^q \cdot w]$. La topologie est la topologie quotient. La structure de variété (topologique et aussi différentiable) de $L(p, q)$ résulte de ce que l'action du groupe engendré par ω (isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) sur S^3 est *proprement discontinue*. On dispose ainsi d'un revêtement $S^3 \rightarrow L(p, q)$ à p feuillets.

Exercice. Quel est le nombre *minimal* de cartes pour un atlas de $L(p, q)$? Est-ce un invariant topologique?

Exemple 6 ⁽²⁾. Le tore solide $T = S^1 \times B^2$ est une variété de dimension trois (produit) dont le bord est $\partial T = S^1 \times S^1$, c'est-à-dire le tore, surface compacte sans bord orientable de genre 1. On a rappelé plus haut que le recollement de deux boules selon leur bord est toujours une sphère S^3 . Qu'en est-il si l'on

¹Dale Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Revised Edition(1990), pp. 233–239.

²D. Rolfsen, *ibid.*, §§2D-2E, pp. 29-32 (la section contient quelques résultats utiles sur le tore et le tore solide).

recolle deux tores au lieu de deux boules? Soit T_1, T_2 deux tores solides et $h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$ un homéomorphisme. On considère

$$M = T_1 \cup_h T_2 = T_1 \cup T_2 / (x \sim h(x), x \in \partial T_2).$$

C'est une variété de dimension trois connexe sans bord orientable. Cette variété s'identifie à un espace lenticulaire. Elle ne dépend que de la classe d'homologie

$$h_*([\mu_2]) \in H_1(T_1) = \pi_1(T_1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

du méridien μ_2 de T_2 . Si l'on fixe des générateurs pour la longitude et le méridien, soit $l, m \in \pi_1(\partial T_1)$, alors

$$h_*([\mu_2]) = p m + q l, \quad (2.1)$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux.

Proposition 12 *La classe d'homéomorphisme de la variété recollée ne dépend que du rapport $r = p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Le cas où $r = \infty$ correspond à $q = \pm 1$ et $p = 0$ et la variété recollée dans ce cas est S^3 .*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'image d'un voisinage d'un méridien μ_2 détermine la classe d'homéomorphisme de M .

On commence par recoller le voisinage régulier d'un méridien μ_2 - c'est-à-dire un collier ou petit cylindre $C \simeq \mu_2 \times [-1, 1]$ centré sur μ_2 dans T_2 - à un collier C' sur $p l + q m$ dans T_1 . Puis il reste à recoller $T_2 - C$ à $T_1 - C'$ (dont le bord est bien topologiquement une sphère S^2). Or $T_2 - C$ est topologiquement une boule de dimension trois. Or tout homéomorphisme de la sphère S^2 sur S^2 se prolonge en un homéomorphisme de la boule B^3 sur B^3 (Prop. 8). Par la proposition d'unicité des recollements (Prop. 2), deux recollements quelconques sont difféomorphes.

Ainsi l'image du méridien μ_2 détermine la classe d'homéomorphisme de la variété M . D'après un résultat classique, toute courbe fermée simple homotope à $h(\mu_2)$ sur le tore surface lui est en fait isotope par une isotopie de h . Par conséquent, $h_*(\mu) \in \pi_1(\partial T_1, \star) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_1(\partial T_1)$ détermine la classe d'homéomorphisme de la variété M .

L'homéomorphisme h induit un automorphisme h_* du groupe fondamental, donc un automorphisme de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ que l'on peut identifier, en choisissant comme base les classes m, l , à une matrice dans $GL_2(\mathbb{Z})$. Cette matrice a donc un déterminant ± 1 , ce qui implique une relation de Bezout entre p et q : les entiers p et q sont donc premiers entre eux. ■

Exercice 2. Vérifier la dernière affirmation et calculer $\pi_1(L(p, q))$ en utilisant les deux définitions.

2.1.2 Variétés de Seifert

Les espaces lenticulaires font partie d'une classe plus importante : les variétés de Seifert³. Il y a plusieurs définitions équivalentes. Une *variété de Seifert* est une variété de dimension trois compacte qui admet un feuilletage par des cercles. On peut aussi la décrire comme une variété de dimension trois compacte qui est un fibré en cercles sur une "orbifold" de dimension 2. En particulier, tout fibré en cercles sur une surface compacte est une variété de Seifert.

Mapping torus

Le *mapping torus* M_f d'un homéomorphisme $f : X \rightarrow X$ est l'espace

$$M_f = (X \times [0, 1]) / (x, 0) \sim (f(x), 1).$$

L'application (projection quotient)

$$M_f \rightarrow [0, 1] / 0 \sim 1 = S^1, [x, t] \mapsto [t]$$

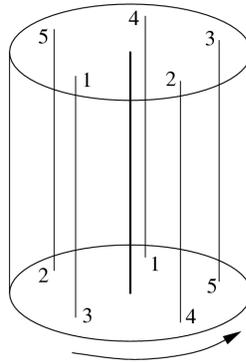
est un fibré sur S^1 dont la fibre est X .

Un exemple est celui où X est un disque $D = B^2$ et où f est un automorphisme du disque. En particulier, si f est une rotation du disque d'angle $\alpha = 2\pi b/a$ d'ordre $a > 0$ (avec a et b premiers entre eux), puisque f est isotope à l'identité sur le disque, on obtient un tore solide fibré en cercles⁴ : le *tore fibré de Seifert* appelé aussi *tore fibré standard*. Noter que l'automorphisme du disque est déterminé par le rapport $b/a \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\times$. Considérons les images d'un point $x \in D$ par f : si x est le centre O de D , alors x est un point fixe de f ; si x est distinct du centre, il y a exactement a images distinctes, à savoir $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{a-1}(x)$. Décrivons les cercles : un cercle est l'image de $O \times [0, 1]$ par la projection quotient ("la fibre centrale"). Les autres cercles sont chacun constitués par la réunion des images de a intervalles $f^k(x) \times [0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, a - 1$, par l'application quotient. Dans le cas où $b = 0$, alors la fibration est la fibration ordinaire induite par le produit $D \times S^1$.

La fibre centrale joue un rôle particulier dans le cas où $a > 1$: elle est dite *fibre exceptionnelle* (voir Fig. 2.1). Dans le cas où $a = 1$, la fibre est dite *ordinaire*.

³Quelques références utiles pour ce paragraphe : W. Jaco et P. Shalen, Seifert Fibered Spaces in Three Manifolds : Memoirs Series No. 220 (Memoirs of the American Mathematical Society ; v. 21, no. 220) ; P. P. Orlik, Seifert manifolds, Lecture notes in mathematics 291, Springer (1972). Une référence agréable est M. Brin, Notes on Seifert fibered spaces, (disponible sur la toile : <http://uk.arxiv.org/PScache/arxiv/pdf/0711/0711.1346v2.pdf>) ; Il y a aussi l'article original de H. Seifert, Topologie dreidimensionalen gefaserter Räume, Acta Math. 60 (1933) 147-238. Ce dernier a été traduit en anglais dans les années 1980.

⁴Non, ce n'est pas la fibre de la projection quotient du paragraphe précédent.

FIG. 2.1 – Le tore fibré de Seifert associé à $(a, b) = (5, 2)$.

Variété de Seifert

Une *variété de Seifert* est une variété de dimension trois munie d'une décomposition en union disjointe de fibres qui sont des cercles telle que chaque fibre possède un voisinage tubulaire qui est un tore fibré de Seifert standard (voir Fig. 2.2 (adaptée d'une présentation de W. Jaco)).

Une variété de Seifert compacte admet un nombre *fini* de fibres exceptionnelles⁵.

Exemple. Un espace lenticulaire est une variété de Seifert avec 0, 1 ou 2 fibres exceptionnelles selon le cas.

2.1.3 Variétés hyperboliques

Il y a beaucoup de définitions d'une variété hyperbolique. La plus concise est la suivante : une variété connexe différentiable riemannienne complète M^n est *hyperbolique* si toutes ses courbures sectionnelles sont constantes et égales à -1 . La métrique riemannienne sur M se relève en une métrique riemannienne sur le revêtement universel \tilde{M} de M qui est donc une variété hyperbolique simplement connexe. Une telle variété est unique à isométrie près et est en général notée \mathbb{H} : l'espace hyperbolique de dimension n . Une variété hyperbolique est donc un quotient de \mathbb{H} par un groupe G de transformations du revêtement. Ce groupe G est en fait un sous-groupe discret des isométries de \mathbb{H} . Si la variété est orientable, alors le sous-groupe G vit dans le sous-groupe d'indice 2 des isométries préservant l'orientation de \mathbb{H} . De plus, pour assurer que G agisse proprement discontinûment sur \mathbb{H} et que $M = \mathbb{H}/G$ soit bien une variété, on requiert que G

⁵Preuve abrégée : dans chaque tore solide fibré de Seifert, tout point qui n'est pas dans la fibre centrale admet un voisinage tubulaire qui est un tore solide dont la fibration en cercles est ordinaire - induite par le produit. Les fibres exceptionnelles sont donc isolées, donc en nombre fini du fait de la compacité.

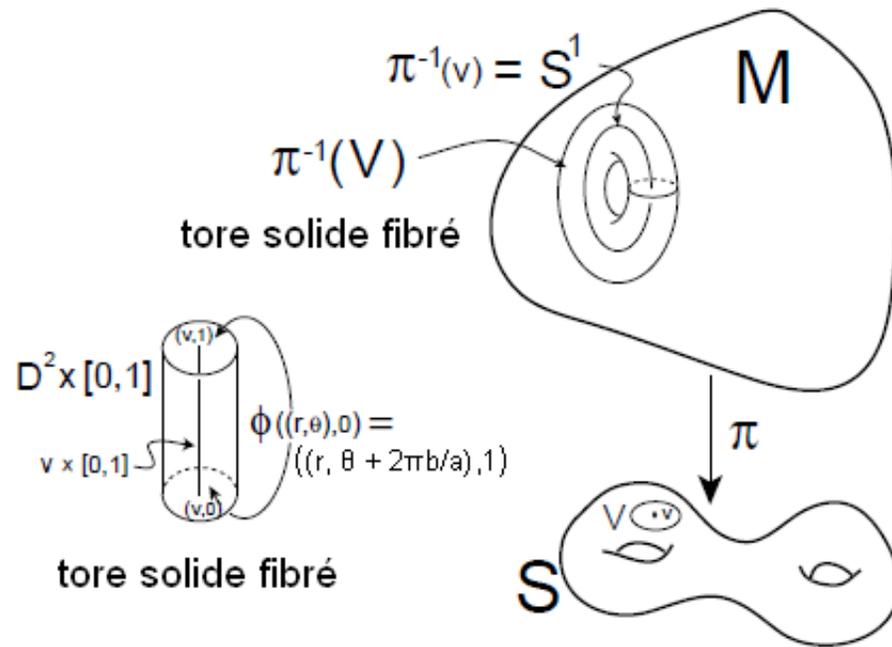


FIG. 2.2 – Présentation schématique d'une variété de Seifert.

soit sans torsion. On peut ainsi produire beaucoup de variétés hyperboliques.

Il existe plusieurs modèles pour \mathbb{H} : le modèle quadrique, le modèle de Lie, le modèle du disque de Poincaré, le modèle du demi-espace supérieur (aussi dû à Poincaré). Pour notre brève présentation, nous utilisons dans ce qui suit principalement le modèle quadrique et les modèles du demi-espace et du disque.

Modèle quadrique. Soit Q la forme quadratique $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$, $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Cette forme quadratique induit une métrique pseudo-riemannienne

$$g = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2$$

sur \mathbb{R}^{n+1} . On regarde alors l'hyperboloïde

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Q(x) = -1\} = X_+ \cup X_-$$

avec $X_{\pm} = \{x \in X \mid \text{signe}(x_{n+1}) = \pm\}$. Si l'on considère la restriction de g à X_+ , alors la métrique est vraiment riemannienne (définie positive). On vérifie que les courbures sectionnelles sont constantes et négatives. Comme visiblement X_+ est simplement connexe (homéomorphe à \mathbb{R}^n), on en déduit que c'est un modèle pour \mathbb{H} .

Modèle du demi-espace supérieur. Soit

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Cette métrique est de courbures sectionnelles constantes négatives et donc \mathcal{H} est un modèle pour \mathbb{H} .

Modèle du disque. Le modèle du disque est la boule unité $D = B^n$ de \mathbb{R}^n munie de la métrique

$$ds^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - (dx_1^2 + \dots + dx_n^2))^2}.$$

On regarde ces modèles plus précisément d'abord pour $n = 2$ puis pour $n = 3$.

En dimension $n = 2$, nous disposons d'une belle description des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ avec la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur \mathbb{H} de la manière suivante : un

élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ admet un représentant $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ qui agit sur $z \in \mathbb{H}^2$ par la formule

$$\gamma \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Cette action est transitive. De plus, elle préserve la métrique ds^2 . Réciproquement, on montre que toute isométrie préservant l'orientation de \mathbb{H}^2 est une homographie⁶ dont les coefficients sont réels. Par conséquent, l'application

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$$

est un isomorphisme. Ainsi l'étude des surfaces hyperboliques est dans une certaine mesure ramenée à l'étude des sous-groupes discrets sans torsion de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Dans ce cas, cette classe coïncide avec celle des *groupes fuchsien*s⁷.

Examinons la dimension $n = 3$. Dans ce cas également, on dispose d'une belle description des isométries de l'espace hyperboliques \mathbb{H}^3 . De façon analogue à ce qui précède, on peut réécrire

$$\mathcal{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}.$$

On peut identifier la sphère de Riemann $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ à la “sphère à l'infini” de \mathcal{H}^3 (qui est le bord $\partial\mathbb{H}$ de la boule unité dans ce modèle). L'action de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$ sur \mathcal{H}^3 induit une action de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$ sur $\mathbb{C}P^1$ par transformations conformes. Par ailleurs, l'analyse complexe montre que le groupe des transformations conformes de $\mathbb{C}P^1$ s'identifie à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ qui agit par homographies (par la même formule que précédemment). On obtient de cette manière un homomorphisme $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ qui est en fait un isomorphisme. Une manière élégante de le voir est d'étendre les homographies définies sur $\mathbb{C}P^1$ à \mathcal{H}^3 de la façon suivante : on plonge \mathbb{C} dans \mathcal{H}^3 comme le plan $t = 0$. On regarde chaque cercle dans le plan \mathbb{C} comme l'équateur d'une sphère dans \mathcal{H}^3 et chaque droite dans le plan \mathbb{C} comme la trace de l'intersection d'un plan vertical dans \mathcal{H}^3 . Chaque homographie se décompose comme le produit d'au plus quatre réflexions par rapport à des droites ou des cercles. On peut donc étendre sans ambiguïté une homographie en une transformation de \mathcal{H}^3 (qui laisse globalement invariant \mathbb{C}) : il suffit d'étendre chaque réflexion par rapport à un cercle (resp. à une droite) en une réflexion par rapport à la sphère correspondante (resp. au plan correspondant). C'est l'extension de Poincaré. Cette extension est une isométrie de \mathcal{H}^3 préservant l'orientation. On obtient de cette manière un homomorphisme

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3).$$

⁶caveat : dans la littérature, particulièrement anglo-saxonne, on trouve aussi le terme : transformation de Moebius.

⁷Un exemple classique est le *groupe modulaire* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Cependant, le quotient $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas compact car $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ contient des matrices unipotentes non triviales comme $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Le domaine fondamental contient alors au moins une bande vertical allant “à l'infini”. La surface quotient a alors un bout cylindrique.

C'est l'inverse de l'homomorphisme défini plus haut. Cet isomorphisme ramène, dans une large mesure, l'étude des variétés hyperboliques de dimension 3 à l'étude des sous-groupes sans torsion de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

2.1.4 Variétés elliptiques

Ce sont les variétés que l'on obtient en quotientant S^3 par un sous-groupe de $\mathrm{SO}(4)$. Les lenticulaires font partie des variétés elliptiques.

Chapitre 3

Quelques faits fondamentaux sur les 3-variétés

Dans cette section, nous décrivons des présentations combinatoires des variétés de dimension trois.

3.1 Triangulations

Une façon de présenter des 3-variétés compactes consiste à les trianguler, i.e. à les présenter comme le résultat d'un nombre fini de recollements de tétraèdres le long de leurs faces suivant des homéomorphismes affines. Formellement, une triangulation (finie) d'une variété M est la donnée d'un complexe simplicial (fini) K et d'un homéomorphisme $\tau : |K| \rightarrow M$.

Proposition 13 (Existence de triangulation en dimension 3, 1952) *Toute 3-variété topologique compacte admet une triangulation finie.*

La question générale de la triangulation d'une variété *topologique* de dimension supérieure à trois est délicate et encore ouverte aujourd'hui. La question de la triangulation d'une variété différentiable est un peu plus simple :

Proposition 14 (Cairns, Whitehead, 1940) *Toute variété différentiable compacte admet une triangulation finie.*

Un second résultat, du à Edwin Moise, affirme que toute triangulation de 3-variétés topologiques est essentiellement unique :

Proposition 15 (Hauptvermutung en dimension 3) *Deux triangulations de 3-variétés (K_0, τ_0) et (K_1, τ_1) admettent des subdivisions $K'_0 \leq K_0$ et $K'_1 \leq K_1$ simplicialement isomorphes par un isomorphisme simplicial¹ $f : K'_0 \rightarrow K'_1$ dont la réalisation $|f| : |K'_0| \rightarrow |K'_1|$ est homotope à $\tau_1^{-1} \circ \tau_0$.*

La structure PL (linéaire par morceaux) d'une 3-variété topologique est unique. Les invariants PL de 3-variétés donnent donc des invariants topologiques. Le terme "Hauptvermutung" désigne la conjecture générale que des complexes simpliciaux homéomorphes ont des subdivisions isomorphes. Cette conjecture est fautive en général (pour les complexes simpliciaux de dimension ≥ 3 et même pour les variétés topologiques de dimension ≥ 3). Certaines variétés (topologiques) de dimension 4 ne sont pas homéomorphes à des complexes simpliciaux. En revanche, la Hauptvermutung est vraie pour les variétés *différentiables*.

De façon pratique, on retiendra que la Hauptvermutung est vraie en dimensions deux et trois aussi bien pour la catégorie DIFF (où elle est vraie en général) que la catégorie TOP (ce qui est spécifique aux dimensions ≤ 3). Ceci permet d'utiliser librement *en dimension trois* des arguments topologiques, différentiels ou linéaires par morceaux.

3.2 Scindements de Heegaard

Les scindements de Heegaard constituent une présentation combinatoire des variétés de dimension trois.

Un *corps en anses de genre g* est une variété de dimension trois compacte obtenue en attachant g anses à une boule B^3 . Un corps en anses de genre g a un bord qui est une surface compacte de genre g . Deux corps en anses sont homéomorphes si et seulement si leurs bords sont homéomorphes si et seulement s'ils ont même genre et s'ils sont tous les deux soit orientables soit non orientables.

Soit M une 3-variété compacte. Un *scindement de Heegaard* de M en genre g est la donnée de deux corps en anses de même genre g , A et B , tels que $M = A \cup B$ et $A \cap B = \partial A = \partial B$. Si M est orientée, alors les corps en anses sont orientées et on demande alors $A \cap B = \partial A = -\partial B$.

Exemple. L'exemple le plus simple est la sphère $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ vue comme réunion des deux hémisphères $H_0^+ = \{(x_1, \dots, x_4) \in S^3 \mid x_4 \geq 0\}$ et $H_0^- = \{(x_1, \dots, x_4) \in S^3 \mid x_4 \leq 0\}$. Chaque hémisphère est topologiquement une boule de dimension trois, c'est-à-dire un corps en anses de genre 0. C'est donc

¹Rappelons que $f : K \rightarrow L$ est un isomorphisme simplicial si f est une application bijective préservant les relations d'incidence.

Exemple. La sphère S^3 , vue cette fois dans C^2 , fournit également un exemple important de scindement de Heegaard en genre 1. En effet $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ s'écrit comme réunion des tores solides $H_1^+ = \{(z, w) \in S^3 \mid |z| \leq |w|\}$ et de $H_1^- = \{(z, w) \in S^3 \mid |z| \geq |w|\}$ dont l'intersection $H_1^+ \cap H_1^- = \{(z, w) \in S^3 \mid |z| = |w|\}$ est un tore surface.

Exemple. Il résulte des exemples précédents et des résultats du chapitre 1 que les espaces lenticulaires admettent des scindements de Heegaard de genre 1.

Proposition 16 *Toute 3-variété compacte admet un scindement de Heegaard.*

Démonstration. Une première démonstration utilise l'existence d'une triangulation K de M . On considère alors deux graphes plongés dans M : le 1-squelette de la triangulation K et le 1-squelette de la décomposition cellulaire duale à K . En épaississant convenablement ces deux graphes (les sommets du graphes sont épaissis en des boules et les arêtes en des anses connectant les boules), on obtient deux 3-variétés qu'on identifie à des corps en anses de même genre.

Une seconde démonstration utilise l'existence et les propriétés des fonctions de Morse. Une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ détermine une structure en anses de M . Or un scindement de Heegaard est une décomposition particulière en anses de M . Notons

$$M_a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$$

la variété de "sous-niveau". La théorie générale pour une variété M^n et une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ affirme le résultat suivant : le franchissement de la valeur critique c_i correspondant à l'indice i d'un unique point critique p_i s'accompagne de l'attachement à $M_{c_i-\epsilon}$ (la variété de sous-niveau avant le franchissement de la valeur critique) d'une i -anse $B^i \times B^{n-i}$. De façon plus précise,

$$M_{c_i+\epsilon} \simeq M_{c_i-\epsilon} \cup_{\phi} B^i \times B^{n-i}$$

où $\phi : \partial B^i \times B^{n-i} \rightarrow \partial M_{c_i-\epsilon}$ est une application d'attachement. Dans le cas général, le franchissement de la valeur critique c_i nécessite l'attachement d'autant d'anses que de points critiques dans $f^{-1}(c_i)$.

Revenons au cas particulier d'une 3-variété compacte (sans bord). Il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auto-indexée, c'est-à-dire telle que les points critiques d'indice i sont dans $f^{-1}(i)$. Comme f est de dimension 3, l'indice varie de $i = 0$ (minimum) à $i = 3$ (maximum). Ainsi le franchissement de la valeur critique correspondant à l'indice 0 s'accompagne de l'attachement à M_0 (qui est un point critique en lequel le minimum est atteint) d'une 0-anse $B^0 \times B^3 = B^3$, c'est-à-dire d'une boule de dimension 3. Donc $M_{0+\epsilon} \simeq B^3$. La valeur critique suivante $t = 1$ correspond à l'indice $i = 1$. Son franchissement s'accompagne pour la variété de sous-niveau de l'attachement à $M_{1-\epsilon}$ de g 1-anses où g est le nombre de points critiques d'indice 1. Ainsi $M_{1+\epsilon}$ est précisément un corps en

anses de genre g . Comme l'intervalle $[1 + \epsilon, 3/2]$ ne contient pas de valeur critique, $M_{1+\epsilon} \simeq M_{3/2}$. Il est aisé de remarquer, par symétrie, que l'autre moitié, la variété de "sur-niveau" $f^{-1}([3/2, 3])$ est aussi un corps en anses de genre g . Comme $3/2$ est une valeur régulière, l'intersection $f^{-1}(3/2)$ des deux corps en anses de genre g est une sous-variété close de M de codimension 1, c'est-à-dire une surface S compacte sans bord. Le genre de S est égal au nombre de points critiques d'indice 1 de f (qui est égal au nombre de points critiques d'indice 2 de f). On a donc obtenu un scindement de Heegaard de M . ■

On a ainsi un invariant numérique de 3-variétés : le *genre* $g(M) \in \mathbb{N}$ d'une 3-variété M est le genre minimal d'un scindement de Heegaard de M .

Exemple. La sphère S^3 est l'unique 3-variété sans bord de genre 0. Tous les lenticulaires qui ne sont pas S^3 ont genre 1.

Il peut être utile de fixer un corps en anses H_g de genre g de référence. On dispose alors également d'une surface Σ_g compacte de genre g de référence : $\Sigma_g = \partial H_g$. Dans cette présentation, un scindement de Heegaard de M est la donnée d'un entier g et d'un homéomorphisme $\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ (renversant l'orientation si M est orientée) de recollement, de sorte que $M = H_g \cup_\varphi H_g$. Alternativement, on peut présenter un scindement de Heegaard de M comme la donnée d'un entier g et d'un homéomorphisme $\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ (préservant l'orientation si M est orientée) de recollement, de sorte que $M = H_g \cup_\varphi -H_g$ où $-H_g$ désigne H_g munie de l'orientation opposée.

3.3 Groupe des homéotopies de surfaces

Les remarques du paragraphe précédent constituent une motivation importante pour introduire le *groupe des homéotopies* (*mapping class group* en anglais) d'une surface Σ_g :

$$\mathfrak{M}^\pm(\Sigma_g) = \text{Homeo}(\Sigma_g)/\text{ISO}(\Sigma_g). \quad (3.1)$$

C'est le groupe des homéomorphismes $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ considérés à isotopie près. Quand Σ_g est orienté, on considère en général la version orientée

$$\mathfrak{M}^\pm(\Sigma_g) = \text{Homeo}^+(\Sigma_g)/\text{ISO}(\Sigma_g) \quad (3.2)$$

qui est le sous-groupe des homéomorphismes $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ préservant l'orientation considérés à isotopie près. C'est un sous-groupe (normal) d'indice 2 du premier (parfois appelé *groupe étendu des homéotopies*).

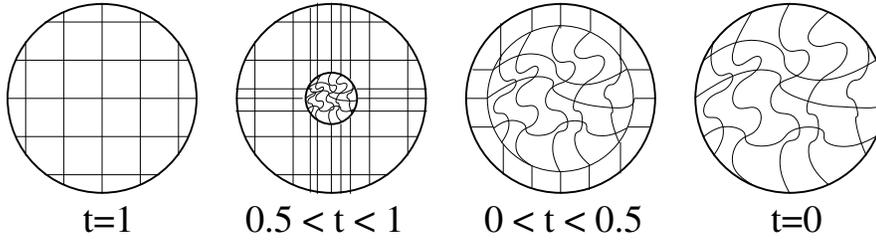


FIG. 3.1 – Isotopie du truc d'Alexander. Les courbes sont les images des droites horizontales et verticales respectivement au cours de l'isotopie.

Exercice. Il n'y a pas de différence essentielle si au lieu des classes d'isotopies (continues) d'homéomorphismes de surfaces, nous considérons les classes d'isotopies (différentiables) de difféomorphismes de surfaces. Pourquoi ?

Calculons ces groupes dans les cas élémentaires où $M = S^2$ et $M = S^1 \times S^1$.

Proposition 17 *The group $\mathfrak{M}(S^2)$ is trivial.*

Démonstration. Nous avons déjà démontré ce résultat dans la catégorie DIFF : quand nous avons montré l'extension différentiable des difféomorphismes de S^2 à la boule (Chap. 1, Th. 1), nous avons en fait montré que tout difféomorphisme $S^2 \rightarrow S^2$ est isotope à l'identité. D'après l'exercice ci-dessus, c'est suffisant.

Donnons un argument dans le cadre TOP. Nous avons démontré un résultat a priori un peu plus faible, à savoir que tout homéomorphisme $S^2 \rightarrow S^2$ préservant l'orientation s'étend en un homéomorphisme $B^3 \rightarrow B^3$.

Lemme 2 (Truc d'Alexander) *Soit $f : B^n \rightarrow B^n$ un homéomorphisme tel que $h|_{\partial B^n} = \text{Id}_{S^{n-1}}$. Alors f est isotope à l'identité relativement au bord $\partial B^n = S^{n-1}$.*

Une isotopie est donnée explicitement par

$$F(x, t) = \begin{cases} t f(\frac{1}{t}x) & \text{if } 0 \leq \|x\| \leq t \\ x & \text{if } t \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Notons le cas particulier $n = 1$: le truc d'Alexander dit qu'un homéomorphisme $S^1 \rightarrow S^1$ est isotope à l'identité.

A présent, soit $f : S^2 \rightarrow S^2$ un homéomorphisme. Montrons que f est isotope à l'identité. Soit $c = \{(x, y, 0) \in S^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ l'équateur de S^2 . Alors $f(c)$ est une courbe fermée simple dans S^2 , isotope à c . On peut donc grâce à une isotopie préliminaire supposer que $f(c) = c$. D'après le truc d'Alexander pour $n = 1$, l'homéomorphisme $f|_c : S^1 \rightarrow S^1$ est isotope à l'identité. Au

moyen d'une nouvelle isotopie, on se ramène donc au cas où f est l'identité sur l'équateur. La sphère S^2 est le recollement le long de l'équateur de deux disques (les hémisphères). Il suffit donc de montrer que la restriction de f à chacun de ces hémisphères est l'identité : c'est une application du truc d'Alexander pour $n = 2$. ■

En particulier, nous retrouvons le fait que la classe d'homéomorphisme du recollement de deux 3-variétés par un homéomorphisme $f : S^2 \rightarrow S^2$ est indépendant du choix de f . Soit M et N deux 3-variétés compactes. La *somme connexe* $M \# N$ est le recollement de $M - B$ et de $N - B'$ où B et B' sont des boules de dimension trois dans $\text{int}(M)$ et $\text{int}(N)$ respectivement, par un homéomorphisme $f : \partial B' \rightarrow \partial B$.

Proposition 18 *La somme connexe est indépendante du choix des boules et de l'homéomorphisme de recollement.*

Démonstration. On vient de voir que le recollement ne dépend pas du recollement. Il reste à voir qu'il ne dépend pas du choix des boules. Etant données deux boules B et B_1 dans l'intérieur de M , il existe une isotopie de l'identité envoyant B sur B_1 . On dispose d'un résultat analogue pour N . ■

Proposition 19 *Le groupe $\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1)$ est isomorphe à $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. L'application

$$\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(S^1 \times S^1, \star)), [f] \mapsto f_*$$

est bien définie. Les courbes fermées simples $\mu = \star \times S^1$ et $\lambda = S^1 \times \star$ engendrent le groupe fondamental $\pi_1(S^1 \times S^1, \star) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Aussi $\text{Aut}(\pi_1(S^1 \times S^1, \star)) = \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2)$. En écrivant f_* dans la base $([\mu], [\lambda])$, l'application ci-dessus induit une application

$$\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}), [f] \mapsto \text{Mat}_{([\mu], [\lambda])}(f_*).$$

Par fonctorialité de π_1 , c'est un morphisme de groupes. Si f préserve l'orientation alors tout homéomorphisme isotope à f préserve l'orientation et $\det(f_*) = +1$.

Surjectivité : il est aisé d'engendrer $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ à l'aide des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Or chacune de ces matrices a une interprétation aisée à l'aide des twists de Dehn (relativement à μ et λ) et comme inversion $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, (x, y) \mapsto (y, x)$ respectivement. Alternativement : remarquer que $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ agit par homéomorphismes

sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$. Donc toute matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ s'interprète *ipso facto* comme autohoméomorphisme du tore.

Injectivité : une démonstration est donnée au début du livre de D. Rolfsen. Soit f un homéomorphisme du tore tel que $f_* = \text{id} \in \pi_1(S^1 \times S^1, \star)$. Il s'agit alors de montrer que $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ est homotopiquement trivial seulement si f est isotopiquement trivial. Ceci est vrai en fait pour tous les autohoméomorphismes de surface. ■

On en déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 1.1 *Le groupe $\mathfrak{M}(S^1 \times S^1)$ est isomorphe à $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Nous avons déjà vu quelques exemples d'éléments non triviaux dans le groupe d'homéotopies. Nous avons vu que tout homéomorphisme du disque qui est l'identité sur le bord est isotope à l'identité. Les preuves que nous avons vu utilisent la contractibilité du disque.

Nous allons à présent décrire des éléments non triviaux de $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$. Nous commençons par une description d'un homéomorphisme d'un anneau, appelé une *volte* (*twist* en anglais).

Soit A l'anneau dans \mathbb{C} défini par $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$. Le bord ∂A est constitué de deux cercles concentriques $\partial_- A$ et $\partial_+ A$ de centre 0 et de rayons $r = 1$ et $r = 2$ respectivement. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante vérifiant $f(r) = 0$ pour $r \leq 1$, $f(r) = 2\pi$ pour $r \geq 2$. La volte (ou le twist) de Dehn est l'homéomorphisme $v : A \rightarrow A$ défini par

$$v(r e^{i\theta}) = r e^{i(\theta+f(r))}.$$

Si l'on choisit f lisse, alors le twist de Dehn est un difféomorphisme.

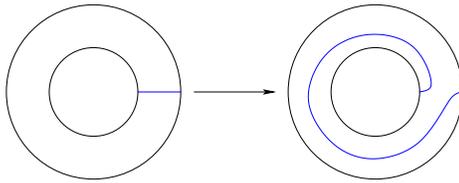


FIG. 3.2 – L'action de la volte de Dehn sur le segment radial $[1, 2] \subset A$.

Exercice. A isotopie près fixant le bord ∂A , le twist de Dehn ne dépend pas de la fonction f choisie et est entièrement déterminé par la figure 3.2.

Remarquons que le twist de Dehn se prolonge en un homéomorphisme $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en définissant $v|_{\mathbb{C}-A} = \text{id}_{\mathbb{C}-A}$. Soit maintenant $j : A \rightarrow \Sigma_g$ un plongement

préservant l'orientation de l'anneau A dans une surface Σ_g quelconque. Ce plongement peut être vu comme le paramétrage d'un voisinage orientable $j(A)$ d'une courbe fermée simple γ dans Σ_g . L'homéomorphisme $t_\gamma = j \circ \nu \circ j^{-1} : j(A) \rightarrow j(A)$ se prolonge en un homéomorphisme encore noté $t_\gamma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ par l'identité hors de $j(A)$. Cet homéomorphisme est déterminé à isotopie près préservant le bord éventuel de Σ_g par la classe d'isotopie de j laquelle est elle-même déterminée par la classe d'isotopie de $j(c)$ de l'image de l'âme orientée $c = \{|z| = 3/2\} \subset A$ de l'anneau A . Ainsi l'homéomorphisme t_γ est appelé *twist de Dehn* relativement à la courbe fermée simple $\gamma \subset \Sigma_g$.

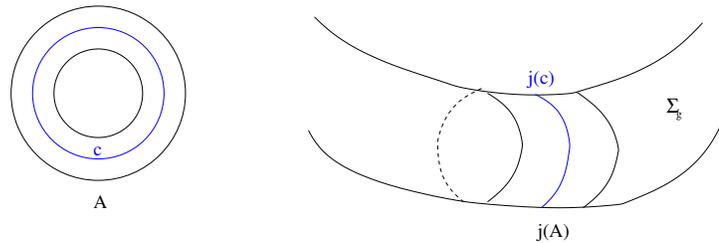


FIG. 3.3 – Plongement d'un anneau dans une surface.

Exercice. Décrire les plongements possibles pour j . Combien y a-t-il de classes d'isotopie de j ? (Réponse : quatre). Combien y a-t-il de classes d'isotopie préservant l'orientation? (Réponse : deux).

On appelle aussi *twist de Dehn* la classe d'isotopie qu'il représente. Si γ borde un disque $D \subset \Sigma_g$, on peut supposer que $\partial D = \partial A$ où A est un voisinage annulaire de γ . Il est alors aisé de voir que t_γ est isotope à l'identité. Il est donc suffisant de considérer les twists de Dehn relativement à des courbes fermées simples non triviales.

Proposition 20 (Dehn-Lickorish) Soit Σ_g une surface compacte connexe sans bord. Le groupe $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$ est engendré par les twists de Dehn relatifs aux $3g - 1$ cercles dessinés sur la figure 3.4.

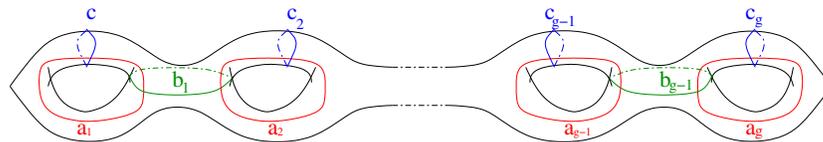


FIG. 3.4 – Les $3g - 1$ courbes fermées simples du théorème de Dehn-Lickorish.

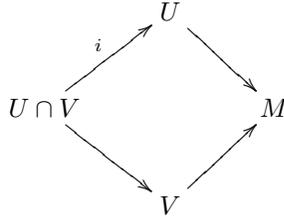
3.4 Equivalence de scindements de Heegaard

Un *diagramme de Heegaard* d'une variété compacte M de dimension trois est la donnée d'un corps en anses U de genre g et de g courbes fermées simples $c_1, \dots, c_g \in \partial U$ deux à deux disjointes et qui coupent ∂U en une sphère à $2n$ trous.

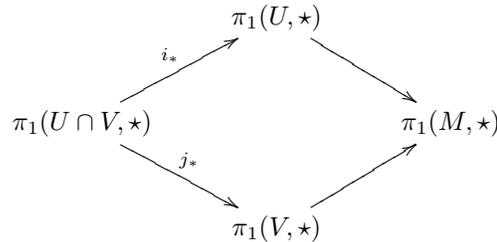
Un scindement de Heegaard permet de construire un diagramme de Heegaard : soit $M = U \cup V$ un scindement de Heegaard. On prend une collection de g disques topologiques orientés D_1, \dots, D_g dans V deux à deux disjointes qui coupent V en une boule topologique B^3 . Alors $(U, \partial D_1, \dots, \partial D_n)$ est un diagramme de Heegaard.

Réciproquement, étant donné un diagramme de Heegaard (U, c_1, \dots, c_n) , on reconstitue la 3-variété de la manière suivante : pour chaque $1 \leq i \leq g$, on attache une 1-anse $B^1 \times B^2$ à U en identifiant $B^1 \times \partial B^2$ à un voisinage de c_i dans ∂U . La 3-variété M_0 que l'on obtient possède un bord qui est une sphère de dimension deux. Pour finir, on attache une copie de B^3 à M_0 en identifiant ∂B^3 et ∂M_0 . Il résulte des propositions de recollement que la variété M obtenue est unique à homéomorphisme près. On en déduit un scindement de Heegaard puisque $U = \overline{M - V}$.

Un scindement de Heegaard $M = U \cup V$ (ou un diagramme de Heegaard) permet de calculer le groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M . Le diagramme commutatif d'inclusions



induit par fonctorialité du π_1 un diagramme commutatif de groupes :



(Ici, \star désigne un point quelconque fixé sur la surface $U \cap V$.) Ce diagramme présente $\pi_1(M, \star)$ comme le *produit amalgamé* de $\pi_1(U, \star)$ et de $\pi_1(V, \star)$ sur

$\pi_1(U \cap V, \star)$ (théorème de Van Kampen). Remarquons qu'un corps en anses de genre g se rétracte sur un bouquet de g cercles. En particulier $\pi_1(U, \star)$ est un groupe libre à g générateurs x_1, \dots, x_g qui sont représentés par les longitudes de U . De même, $\pi_1(V, \star)$ est un groupe libre à g générateurs y_1, \dots, y_g . Le groupe $\pi_1(U \cap V, \star)$ est le groupe fondamental d'une surface fermée de genre g . Si cette surface est orientable, il admet une présentation avec $2g$ générateurs $w_1, \dots, w_g, w'_1, \dots, w'_g$ et une unique relation $[w_1, w'_1][w_2, w'_2] \cdots [w_g, w'_g] = 1$. Chaque générateur w_i est représenté par un méridien de la surface (le bord du disque co-âme de la i -ème anse attachée à la boule si l'on pense à la surface comme le bord d'un corps en anses de genre g orientable); chaque générateur w'_i est représenté par une longitude de la surface. Cette longitude est une courbe fermée simple dont l'intersection avec le i -ème méridien est $+1$.

Le groupe $\pi_1(M, \star)$ admet alors la présentation suivante :

$$\pi_1(M, \star) = \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \mid i_*(w_i) = j_*(w_i), i_*(w'_i) = j_*(w'_i), 1 \leq i \leq g \rangle.$$

Dans cette présentation, nous avons fait jouer aux deux corps en anses U et V des rôles symétriques. En pratique, il est souvent utile d'utiliser la remarque plus haut permettant de reconstruire M à l'aide d'un diagramme de Heegaard (U, c_1, \dots, c_g) . On a alors $1 = [c_i] = j_*(w_i)$ dans $\pi_1(V, \star)$ et $[c_i]$ est un mot en les x_1, \dots, x_g dans $\pi_1(U, \star)$. La présentation consiste alors en le système de générateurs x_1, \dots, x_g avec les relations consistant à "tuer" les mots r_i qui sont les $[c_i]$ écrits avec les générateurs x_1, \dots, x_g :

$$\pi_1(M, \star) = \pi_1(M_0, \star) = \langle x_1, \dots, x_g \mid r_1, \dots, r_g \rangle.$$

Soit $M = U \cup V$ et $M' = U' \cup V'$ deux scindements de Heegaard de deux variétés de dimension trois homéomorphes. On dit que ces deux scindements sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme $f : M \rightarrow M'$ préservant la structure des scindements, c'est-à-dire tel que $f(U) = U'$ et $f(V) = V'$. L'homéomorphisme f est alors appelé une *équivalence* de scindements de Heegaard.

Proposition 21 *Deux scindements de Heegaard $M = H_g \cup_{\varphi} H_g$ et $M' = H_g \cup_{\varphi'} H_g$ sont équivalents si et seulement s'il existe deux homéomorphismes $\psi, \chi : H_g \rightarrow H_g$ vérifiant la condition :*

$$\chi \circ \varphi|_{\partial H_g} = \varphi' \circ \psi|_{\partial H_g}.$$

Démonstration. C'est la condition de compatibilité pour recoller deux homéomorphismes. Voir la figure 3.4. ■

La notion de scindement de Heegaard, ainsi que l'application du foncteur $\pi_1(\cdot, \star)$ suggère une version de cette notion pour les groupes. Définissons un *scindement*

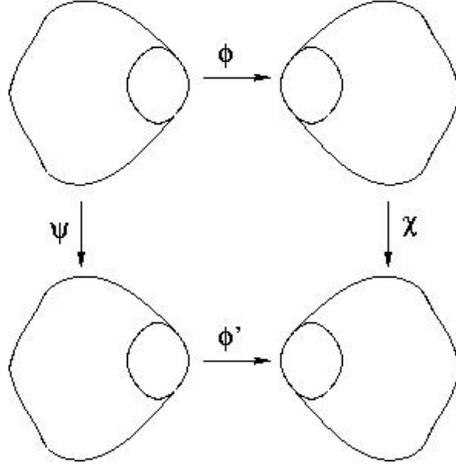


FIG. 3.5 – Recollement de deux homéomorphismes.

de groupe dans $H \times H$ comme un morphisme $G \rightarrow H \times H$, $x \mapsto (\varphi(x), \psi(x))$ de groupes. On vient de voir qu'un scindement de Heegaard induit un scindement du groupe fondamental d'une surface compacte de genre g . Les remarques suivantes ainsi que le résultat de la proposition 22 ci-dessous visent à préciser en quel sens un scindement de Heegaard est déterminé par le scindement du groupe fondamental. Disons que deux scindements de groupes $G \rightarrow H \times H$ et $G' \rightarrow H' \times H'$ sont équivalents s'il existe des isomorphismes $\gamma : G \rightarrow G'$ et $\eta, \eta' : H \rightarrow H'$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \times H \\ \downarrow \gamma & & \eta \times \eta' \downarrow \\ G' & \longrightarrow & H' \times H'. \end{array}$$

Remarquons qu'une équivalence de scindements de Heegaard induit aussi une équivalence de scindements de groupes. En effet, si $M = U \cup V$ et $M' = U' \cup V'$ sont deux scindements équivalents via un homéomorphisme $f : M \rightarrow M'$ alors on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, \star) & \longrightarrow & \pi_1(U, \star) \times \pi_1(V, \star) \\ (f|_{U \cap V})_* \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow (f|_U)_* \times (f|_V)_* \\ \pi_1(U' \cap V', \star) & \longrightarrow & \pi_1(U', \star) \times \pi_1(V', \star). \end{array}$$

Appelons groupe d'une surface S le groupe fondamental de S (relativement à un point base fixé).

Proposition 22 (W. Jaco) *Il y a une correspondance bijective entre les classes d'équivalences de scindements de Heegaard de genre g et les classes d'équivalence de scindements de groupe de surface dans le produit direct de groupes libres $F_g \times F_g$ de rang g .*

*Idées sur la démonstration*². La démonstration consiste en deux étapes (indépendantes). Une étape consiste à montrer la réalisation : tout scindement $\pi_1(S, \star) \rightarrow F_g \times F_g, x \mapsto (\alpha(x), \beta(x))$ est induit (à équivalence près) par un scindement de Heegaard. Pour cela, on commence par réaliser F_g comme le groupe fondamental d'un bouquet de g cercles en un point x_0 . On prend deux copies $(X, x_0), (X', x'_0)$ de ce bouquet. Les applications α, β sont induites par des applications $a : (S, \star) \rightarrow (X, x_0)$ et $b : (X, \star) \rightarrow (X', x'_0)$. On peut alors construire une application a' homotope à a (sans bouger le point base \star) dont le "mapping cylinder" $C(a')$ est un corps en anses de genre g . De même pour b . On en déduit un scindement de Heegaard induisant une équivalence avec le scindement initial de $\pi_1(S, \star)$.

La seconde étape consiste à montrer que si deux scindements de Heegaard induisent des scindements de groupes équivalents, alors les scindements de Heegaard sont eux-mêmes équivalents. On est donc amenés à considérer un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S, \star) & \xrightarrow{u_*, v_*} & \pi_1(U, \star) \times \pi_1(V, \star) \\ \simeq \downarrow a & & \simeq \downarrow a_1 \times a_2 \\ \pi_1(S', \star) & \xrightarrow{s_*, t_*} & \pi_1(U', \star) \times \pi_1(V', \star). \end{array}$$

où S et S' désignent les surfaces $U \cap V$ et $U' \cap V'$ et les applications $a : \pi_1(S, \star) \rightarrow \pi_1(S', \star)$, $a_1 : \pi_1(U, \star) \rightarrow \pi_1(U', \star)$ et $a_2 : \pi_1(V, \star) \rightarrow \pi_1(V', \star)$ sont des isomorphismes de groupes. La théorie de Nielsen³ assure qu'il existe un homéomorphisme $\sigma : (S, \star) \rightarrow (S', \star)$ tel que $\sigma_* = a$. Il reste à étendre σ en un homéomorphisme $U \rightarrow U'$ et en un homéomorphisme $V \rightarrow V'$.

Une collection de courbes fermées simples deux à deux disjointes sur le bord d'un corps en anses U de genre g sera appelée *adaptée* à U si elle forme un système minimal de générateurs pour $\pi_1(U)$. Une collection adaptée a donc g éléments.

Lemme 3 *Pour étendre $\sigma : \partial U \rightarrow \partial U'$ en un homéomorphisme $U \rightarrow U'$, il faut et il suffit que σ envoie une collection adaptée à U sur une collection adaptée à U' .*

²W. Jaco, *Heegaard splittings and splitting homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969) pp. 365–379. W. Jaco considère le cas orientable seulement.

³J. Nielsen, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. 50 (1927) : Satz 11, p. 266.

La condition est nécessaire : si σ s'étend, il induit un isomorphisme $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(U')$ et donc toute collection adaptée à U doit être envoyée sur une collection adaptée à U' .

La condition est suffisante : cela provient d'un résultat du à D.R. McMillan et à Z. Zieschang (et à O. Mitsuyuki dans le cas de surface non orientable)⁴ :

Proposition 23 *Soient deux collections de courbes fermées simples deux à deux disjointes sur le bord de corps en anses U, U' de genre g respectivement. Si les collections sont adaptées à U et à U' respectivement, alors il existe un homéomorphisme $U \rightarrow U'$ envoyant les éléments d'une collection sur l'autre.*

Démonstration. Utiliser le théorème de Dehn-Lickorish ; les twists de Dehn relatifs à un méridien se prolongent. A compléter.

Remarquons que le lemme 3 admet la reformulation suivante :

Lemme 4 *L'homéomorphisme $\sigma : \partial U \rightarrow \partial U'$ s'étend en un homéomorphisme $U \rightarrow U'$ si et seulement si $\sigma_*(\text{Ker } u_*) \subseteq \text{Ker } s_*$.*

Or précisément cette condition est vérifiée puisque $\sigma_* = a$ et que le diagramme ci-dessus est commutatif. Donc σ s'étend en un homéomorphisme $U \rightarrow U'$ (induisant α_1). De même l'homéomorphisme σ s'étend un homéomorphisme $V \rightarrow V'$ (induisant α_2). ■

Bien que la proposition 22 réduise la classification des scindements de Heegaard à équivalence près à un problème de groupe fondamental, la réalisation géométrique d'une présentation abstraite de groupe comme groupe fondamental calculé à partir d'un scindement de Heegaard⁵ est une question difficile : les présentations ne se réalisent pas toutes géométriquement. Par exemple, M. Boileau et H. Zieschang ont montré qu'il existe des variétés de Seifert dont le groupe fondamental a un système minimal de deux générateurs alors que leur genre (et donc le rang de toute présentation géométriquement réalisée) est au moins égal à trois.

Donnons à présent une autre description des classes d'équivalence de scindements de Heegaard explicitement fondée sur le groupe des homéotopies de surface.

Soit H_g un corps en anses de référence de genre g . Son bord Σ_g est une surface compacte connexe de genre g .

⁴D. R. McMillan, *Homeomorphisms on a solid torus*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 386–390 ; H. Zieschang, *Über einfache Kurven auf Vollbrezeln*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (1962), 231–250 ; O. Mitsuyuki, *Homeomorphisms on a three-dimensional handle*, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), no. 4, 697–702.

⁵comme nous l'avons vu plus haut.

Lemme 5 Soit $\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ un homéomorphisme prolongeable en un homéomorphisme $H_g \rightarrow H_g$ du corps en anses. Si un homéomorphisme $\psi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ est isotope à φ , alors ψ est lui aussi prolongeable en un homéomorphisme $H_g \rightarrow H_g$.

Démonstration. La composition $h_0^{-1} \circ h_1 : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ est isotope à l'identité. Il en résulte (Corollaire 0.1) que $h_0^{-1} \circ h_1$ se prolonge en un homéomorphisme $\widetilde{h_0^{-1} \circ h_1} : H_g \rightarrow H_g$. Comme h_0 est déjà prolongeable en un homéomorphisme $\widetilde{h_0} : H_g \rightarrow H_g$, il en résulte que h_1 se prolonge aussi en l'homéomorphisme $H_g \rightarrow H_g$ défini par

$$\widetilde{h_1} = \widetilde{h_0} \circ \widetilde{h_0^{-1} \circ h_1}.$$

■

Considérons le groupe $E_g^\pm \subseteq \mathfrak{M}(\Sigma_g)$ des classes d'isotopies d'homéomorphismes $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ se prolongeant en un homéomorphisme $H_g \rightarrow H_g$ du corps en anses. Dans le cas important où Σ_g est orientable, on considère le sous-groupe E_g d'indice deux défini par $E_g = E_g^\pm \cap \mathfrak{M}(\Sigma_g)$.

Exercice. Les groupes E_g et E_g^\pm sont des sous-groupes non normaux de $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$ et $\mathfrak{M}^\pm(\Sigma_g)$ respectivement.

Le groupe $E_g \times E_g$ agit sur le groupe des homéotopies $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$:

$$(\varphi, \psi) \cdot f = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}, \quad \varphi, \psi \in E_g, \quad f \in \mathfrak{M}(\Sigma_g).$$

La même formule définit une action de $E_g^\pm \times E_g^\pm$ sur le groupe des homéotopies étendu $\mathfrak{M}^\pm(\Sigma_g)$.

Proposition 24 *L'ensemble des classes d'équivalence de scindements de Heegaard de genre g est en correspondance bijective avec l'ensemble des orbites de l'action de $E_g^\pm \times E_g^\pm$ sur $\mathfrak{M}^{pm}(\Sigma_g)$.*

On a un résultat analogue dans le cas des scindements de Heegaard de genre g orientables.

3.5 Stabilisation des scindements de Heegaard

Il existe une deuxième opération sur les scindements de Heegaard qui laisse invariant la classe d'homéomorphisme de la 3-variété : la stabilisation (ainsi que son inverse, la déstabilisation, quand elle est possible).

Soit $M = U \cup V$ un scindement de Heegaard avec $S = U \cap V$ de genre g . Soit α un arc proprement plongé dans V parallèle à un arc β dans S , c'est-à-dire

qu'il existe un disque D plongé dans V dont le bord ∂D est l'union des arcs α et de β . Formons une 1-anse dans U dont l'âme α' soit parallèle à α et dont les disques extrémités soient dans $\partial U = \partial V$: enlevons-le de V ; cela a pour effet de créer une 1-anse à U (dont l'âme est α') et simultanément de créer une 1-anse à V (dont la co-âme est un disque D rétréci). Le résultat est donc un nouveau scindement de Heegaard $M = U' \cup V'$ de genre $g+1$. Cette opération est appelée la *stabilisation*.

La stabilisation est indépendante du choix de l'anse ajoutée au sens où tout autre choix produit un scindement de Heegaard isotope (et donc équivalent). En particulier, la stabilisation ne modifie pas la classe d'homéomorphisme de la 3-variété.

Une autre façon de voir la stabilisation utilise le scindement de Heegaard de $S^3 = H_1^+ \cup H_1^-$ de genre 1 que nous avons vu. Soit $T = H_1^+ \cap H_1^-$ le tore surface de scindement.

Exercice. Soit $M = U \cup V$ un scindement de Heegaard de genre g . Montrer que la stabilisation de ce scindement est équivalente à la somme connexe $M \# S^3 = (U \# H_1^+) \cup (V \# H_1^-)$. En particulier, la surface de scindement est $S' = S \# T$.

On peut toujours effectuer une stabilisation. En revanche, l'opération inverse est appelée *déstabilisation* n'est pas toujours possible. Par exemple, il est bien sûr impossible de déstabiliser le scindement de genre 0 de la sphère. Il est donc impossible de déstabiliser le scindement de genre 1 d'un espace lenticulaire $L(p, q) \neq S^3$ puisque $g(L(p, q)) = 1$.

La proposition suivante permet de détecter quand la déstabilisation est possible.

Proposition 25 *Un scindement de Heegaard $M = U \cup V$ peut être déstabilisé si et seulement s'il existe des disques proprement plongés $D \subset U$ et $D' \subset V$ tels que $|\partial D \cap \partial D'| = 1$.*

Démonstration. Exercice. ■

3.6 Le théorème de Reidemeister et de Singer

Nous avons vu que les opérations d'équivalence et de stabilisation n'affecte pas la 3-variété. La question naturelle est la question de la réciproque. Disons que deux scindements de Heegaard d'une 3-variété (compacte, sans bord) sont *stablement équivalents* s'il existe un nombre fini de stabilisations sur l'un et l'autre après lesquelles les deux scindements sont équivalents.

Proposition 26 (K. Reidemeister, J. Singer) *Deux scindements de Heegaard d'une 3-variété M compacte sans bord sont stablement équivalents.*

Une conséquence fondamentale de ce résultat est que pour définir un invariant topologique de 3-variété, il faut et il suffit de définir un invariant sur les classes d'équivalence stable de scindements de Heegaard.

3.7 Chirurgie de Dehn

3.7.1 Définitions

Nous décrivons une autre présentation combinatoire des 3-variétés, la chirurgie de Dehn. La chirurgie est un cas particulier de recollement de variétés qui se prête bien à une description combinatoire. Elle a partie liée à la théorie des nœuds et aux scindements de Heegaard et nous décrivons partiellement une relation entre les deux.

On se donne les objets suivants :

- (1) une 3-variété connexe (compacte).
- (2) un entrelacs $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ dans M (i.e. l'image d'un plongement d'une union disjointe de n cercles dans M).
- (3) un ensemble de n voisinages tubulaires $N_i \simeq S^1 \times B_i^2$ (deux à deux disjoints, dans l'intérieur de M) pour chaque composante L_i de l'entrelacs.
- (4) un entrelacs $J = J_1 \cup \dots \cup J_n$ dans $\coprod_i \partial N_i$ tel que $J_i \subset \partial \partial N_i$ pour chaque $1 \leq i \leq n$.
- (5) un homéomorphisme de recollement $h : \coprod_i S^1 \times \partial B_i^2 \rightarrow \coprod_i \partial N_i$ tel que $h(\star \times \partial B_i^2) = J_i$.

On forme la variété

$$M' = \left(M - \coprod_i \text{Int } N_i \right) \cup_h \left(\coprod_i S^1 \times B^2 \right).$$

C'est la variété obtenue en enlevant les voisinages tubulaires des composantes de l'entrelacs L et en recollant n tores solides en identifiant leurs bords respectifs aux bords des voisinages tubulaires N_i suivant l'homéomorphisme h . La variété M' est obtenue par *chirurgie de Dehn sur M* le long de l'entrelacs L avec les instructions de chirurgie (4) et (5).

Exercice. M' ne dépend pas, à homéomorphisme près, du choix de h envoyant $\star \times \partial B_i^2$ sur J_i . En fait, M' ne dépend que des classes d'isotopie de J_i dans ∂N_i .

Le cas particulier important est celui où $M = S^3$: chirurgie sur S^3 . Dans ce cas, soit N un voisinage tubulaire d'un nœud K dans S^3 et notons $X = \overline{S^3 - N}$.

Alors un argument basé sur Mayer-Vietoris⁶ pour le triplet (S^3, X, N) montre que

$$H_i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 1; \\ 0 & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

Remarque. Le même argument marche pour le complémentaire d'un noeud dans une variété M qui a même homologie entière que la sphère S^3 .

Remarque. Bien que l'homologie de X coïncide avec celle d'un tore solide, il n'est pas vrai en général que X est topologiquement un tore solide. En général, X n'a même pas le type d'homotopie d'un tore solide. Ceci se voit avec le groupe fondamental de X qui en général n'est pas abélien. C'est tout le sujet des groupes classiques de noeuds...

Un *méridien* du noeud K est une courbe fermée simple sur $\partial N = \partial X$ représentant un générateur de $H_1(X)$. On peut montrer qu'à isotopie près, il existe une seule courbe fermée simple $l \subset \partial X$ telle que m et l engendrent $H_1(\partial X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et telle que $[l] = 0$ dans $H_1(X)$. C'est la *longitude* canonique de K . (Si le noeud K se trouve dans une variété quelconque, la propriété précédente n'est plus vérifiée en général : on peut cependant définir *une* longitude par la même propriété homologique.)

Une chirurgie est dite *entière* si chaque courbe de chirurgie J_i est homologue sur le voisinage ∂N_i à la somme algébrique d'un méridien et d'une longitude. Si la variété ambiante est S^3 ou une sphère d'homologie entière, alors la classe d'homologie de J dans $H_1(\partial N_i)$ s'écrit

$$[J_i] = p [m] + q [l], \quad p, q \in \mathbb{Z} \text{ premiers entre eux.}$$

L'homologie de J_i est indépendante de l'orientation de L_i .

Le même argument employé pour démontrer la proposition 12 montre que le rapport $r = p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ est suffisant pour déterminer la chirurgie. Le cas $r = \infty$ correspond à $q = 0$ et $p = \pm 1$. La chirurgie est entière si et seulement si $q = \pm 1$.

Exemple. Le cas où le complémentaire d'un voisinage d'un noeud est encore un tore solide est exactement celui considéré au chapitre 2, §2.1.1 : il correspond aussi aux scindements de Heegaard de genre 1. Les variétés obtenues sont donc les lenticulaires.

Cependant, il existe des chirurgies sur un seul noeud, même dans la sphère S^3 , qui ne produiront pas de lenticulaires. Un tel noeud K aura nécessairement la propriété que le complémentaire d'un voisinage de K dans S^3 ne sera pas un tore solide.

⁶L'argument est immédiat pour $i = 0, 1$; il est un peu plus long pour $i \geq 2$.

3.7.2 Chirurgie entière et cobordismes

Théorème 2 (Lickorish-Wallace) *Toute variété fermée M de dimension trois s'obtient par chirurgie entière sur un entrelacs $L \subset S^3$. De plus on peut imposer que les composantes L_i de l'entrelacs soient individuellement non nouées (sont individuellement des noeuds triviaux).*

Démonstration. La démonstration suit l'idée originale de Lickorish basée sur les scindements de Heegaard et l'engendrement du groupe des homéotopies d'une surface par les twists de Dehn.

Le lemme suivant est le coeur de l'argument :

Lemme 6 *Soit H, H' des corps en anses de genre g et $f : \partial H \rightarrow \partial H'$ un homéomorphisme. Il existe un nombre fini de tores solides $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ dans $\text{Int}(H)$ et $\Omega'_1, \dots, \Omega'_r$ dans $\text{Int}(H')$ tels que f se prolonge en un homéomorphisme $H - \text{Int}(\Omega_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega_r) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega'_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega'_r)$.*

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $H = H'$ (quitte à composer par un homéomorphisme). Si f est isotope à l'identité, nous savons déjà (Cor. 0.1) que f s'étend en un homéomorphisme $H \rightarrow H$. D'après la proposition 20, il suffit de considérer le cas où f est un produit de twists de Dehn :

Considérons d'abord le cas où $f = \tau_c$ est un seul twist de Dehn relatif à une courbe fermée simple $c \subset \partial H$. Nous savons que τ_c est l'identité en dehors d'un voisinage annulaire A de c . En-dessous d'un collier $K \simeq A \times I$, on creuse un tunnel Ω dans l'intérieur de H : c'est topologiquement un tore solide. Voir la figure 3.6. Le collier K s'identifie à $A \times I$, donc on peut étendre τ_c à K en définissant :

$$\tilde{\tau}_c(a, t) = (\tau_c(a), t), \quad (a, t) \in A \times I.$$

Nous prolongeons ensuite $\tilde{\tau}_c$ à $H - \text{Int}(\Omega)$ par l'identité en dehors de K . Nous obtenons ainsi un homéomorphisme $\tilde{\tau}_c : H - \text{Int}(\Omega) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega)$.

Considérons à présent le cas général : $f = \tau_r \circ \tau_{r-1} \circ \dots \circ \tau_1$ où chaque twist est relatif à une courbe fermée simple $c_i \subset \partial H$. D'après ce qui précède, nous disposons d'un homéomorphisme $\tilde{\tau}_1 : H - \text{Int}(\Omega_1) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega_1)$. Nous pouvons procéder de même avec le second twist de Dehn et trouver un homéomorphisme $\tilde{\tau}_2 : H - \text{Int}(\Omega_2) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega_2)$. En creusant plus profondément le tunnel Ω_2 , nous pouvons supposer que les deux tunnels Ω_1 et Ω_2 sont disjoints et que $\tilde{\tau}_1$ est l'identité sur Ω_2 . Voir Fig. 3.7.

Notons que le tunnel Ω_1 est transformé par l'homéomorphisme τ_2 en un tunnel (tore solide) $\Omega'_1 = \tau_2(\Omega_1)$ parallèle à la courbe $\tau_2(c_1)$.

Ainsi on peut étendre le produit $\tau_2 \circ \tau_1$ de deux twists de Dehn en un homéomorphisme

$$\widetilde{\tau_2 \circ \tau_1} : H - \text{Int}(\Omega_1) \cup \text{Int}(\Omega_2) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega'_1) \cup \text{Int}(\Omega_2).$$

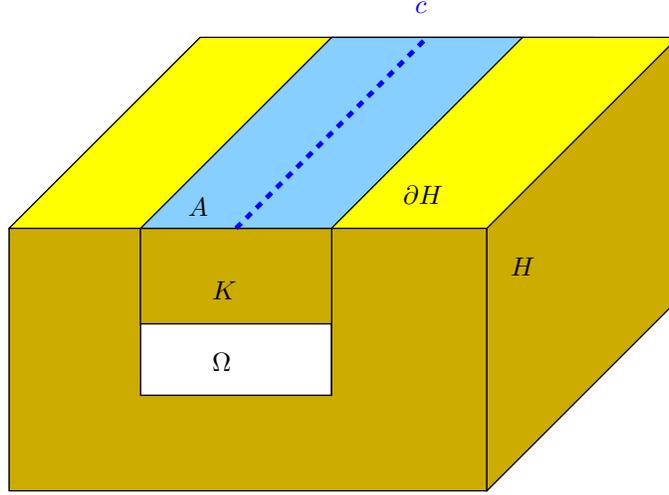


FIG. 3.6 – Comment creuser un tunnel pour étendre un twist de Dehn.

Par récurrence sur le nombre r de twists de Dehn, nous construisons une collection de tunnels (topologiquement des tores solides) $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ deux à deux disjoints et des prolongements (homéomorphismes) $\tilde{\tau}_i : H - \text{Int}(\Omega_i) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega_i)$ vérifiant $\tilde{\tau}_i|_{\Omega_j} = \text{Id}_{\Omega_j}$ pour $1 \leq i < j$. Définissons $\tilde{f} = \tilde{\tau}_r \circ \dots \circ \tilde{\tau}_1$ sur $H - \text{Int}(\Omega_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega_r)$. Pour écrire explicitement l'image, soit $\Omega'_r = \Omega_r$, $\Omega'_i = \tilde{\tau}_r \circ \dots \circ \tilde{\tau}_{i+1}(\Omega_i)$, $1 \leq i < r$. Alors

$$\tilde{f} : H - \text{Int}(\Omega_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega_r) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega'_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega'_r)$$

est l'homéomorphisme désiré.

Exercice. Le lemme peut se reformuler de la manière suivante : soient $\varphi_1, \varphi_2 : \partial H \rightarrow \partial H'$ deux homéomorphismes entre des surfaces de genre g . Supposons que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau_c$ où τ_c est un twist de Dehn relatif à une courbe fermée simple $c \subset \partial H$. Alors la variété $M_2 = H' \cup_{\varphi_2} H$ s'obtient à partir de la variété $M_1 = H' \cup_{\varphi_1} H$ par une chirurgie entière sur un nœud $K \subset M_1$ isotope à l'image de la courbe c .

Complétons à présent la démonstration de la proposition. On présente M et S^3 comme des scindements de Heegaard de même genre :

$$M = H \cup_{\varphi} H, \quad S^3 = H \cup_{\psi} H.$$

Le lemme assure que l'homéomorphisme $\varphi^{-1} \circ \psi : \partial H \rightarrow \partial H$ se prolonge en un homéomorphisme $H - \text{Int}(\Omega_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega_r) \rightarrow H - \text{Int}(\Omega'_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega'_r)$. Il est alors aisé de prolonger cet homéomorphisme en un homéomorphisme

$$h : S^3 - \text{Int}(\Omega_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega_r) \rightarrow M - \text{Int}(\Omega'_1) \cup \dots \cup \text{Int}(\Omega'_r).$$

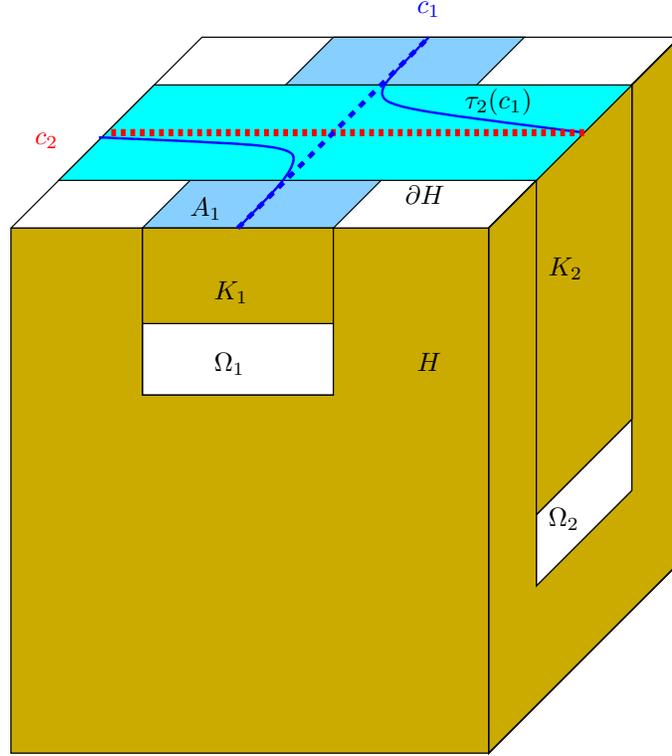


FIG. 3.7 – Un deuxième tunnel.

Clairement h envoie $\partial\Omega_i$ sur $\partial\Omega'_i$. Par conséquent, M est le résultat d'une chirurgie de Dehn sur S^3 sur les tores solides $\Omega_1, \dots, \Omega_r$. ■

Rappelons que la chirurgie entière sur un noeud (resp. un entrelacs) de S^3 ne dépend pas seulement du noeud (resp. de l'entrelacs) mais aussi du choix d'une longitude sur le bord d'un voisinage tubulaire du noeud (de chaque composante de l'entrelacs).

On appelle *parallélisation* d'un entrelacs L le choix d'une (classe d'isotopie de) longitude pour chaque composante de L ⁽⁷⁾. Soit L un entrelacs parallélisé. Par définition de la chirurgie entière, la longitude correspondante s'écrit dans $H_1(\partial N(K))$: $\ell = \pm n\mu + \lambda$ où μ désigne le méridien du tore $\partial N(K)$ et λ sa lon-

⁷Au sens strict, une parallélisation d'un entrelacs L est le choix d'une trivialisatoin $TM|_L \simeq L \times \mathbb{R}^3$ du fibré tangent de la variété ambiante restreinte à L . Cependant, le choix d'une longitude est essentiellement équivalent à une section non nulle du fibré $s : L \rightarrow TM|_L$. Pour chaque $x \in L$, on peut alors considérer une base orthonormale $e_2(x), e_3(x)$ de $s(x)^\perp$ de sorte que l'application $x \mapsto (s(x), e_2(x), e_3(x))$ fournit une trivialisatoin du fibré unitaire tangent restreint à L .

gitude standard. Conformément à nos notations précédentes, la parallélisation d'un noeud est déterminée par l'entier $n \in \mathbb{Z}$.

Notons pour finir qu'il est souvent bien utile de considérer un noeud parallélisé comme un anneau plongé, à savoir l'anneau déterminé par K et ℓ .

Un *cobordisme* (de dimension 4) entre deux 3-variétés M et N est une variété X de dimension 4 telle que $\partial X = M \amalg N$. Le cobordisme est orienté si X est orienté et si $\partial X = M \amalg -N$. Si N est vide, on dit que X est *cobordant à zéro*. Un exemple de 3-cobordisme est le cylindre $X = M \times [0, 1]$ où M est une variété sans bord de dimension trois.

Il y a un rapport très important entre chirurgie entière et cobordisme.

Soit M une 3-variété connexe et $K \subset M$ un noeud parallélisé dans M . Notons ℓ la longitude correspondante sur le bord $\partial N(K)$ d'un voisinage tubulaire $N(K)$ de K . Notons $\chi(M, K)$ le résultat de la chirurgie sur K .

Considérons un homéomorphisme $h : \partial D^2 \times D^2 \rightarrow N(K)$ tel que $h(S^1 \times 0) = K$ et $h(S^1 \times \star) = \ell$, paramétrant le tore solide $N(K)$ et la parallélisation de K . Formons alors la variété obtenue en recollant une 2-anse $D^2 \times D^2$ à $M \times [0, 1]$ en identifiant une partie du bord de la 2-anse, à savoir $\partial D^2 \times D^2$, avec $N(K)$ au moyen de h :

$$X = M \times [0, 1] \cup_h D^2 \times D^2.$$

Il est aisé de voir que X est un cobordisme entre $M \times 0$ (inchangé par le recollement) et une nouvelle 3-variété.

Proposition 27 *X est un cobordisme entre $M \times 0$ et $\chi(M, K)$.*

Corollaire 2.1 *Toute variété N connexe fermée orientable est le bord d'une variété de dimension quatre qui a le type d'homotopie d'un bouquet de 2-sphères (en particulier qui est simplement connexe).*

Démonstration. On a déjà vu que $N = \chi(S^3, L)$ pour un entrelacs parallélisé $L \subset S^3$ (Th. 2). Répétons la construction précédente en partant de $M = S^3$: la proposition précédente fournit un cobordisme X entre $S^3 \times 0 = S^3$ et $\chi(S^3, L)$ pour un certain entrelacs parallélisé L . Si l'on recolle à S^3 une boule B^4 le long de son bord, on obtient que $\chi(S^3, L)$ borde une 4-variété $X' = X \cup B^4$. Cette dernière s'obtient comme $S^3 \times [0, 1] \cup B^4 \simeq B^4$ à laquelle on a recollé un certain nombre de 2-anses $D^2 \times D^2$. ■

Exercice. Compléter la démonstration ci-dessus : construire les 2-sphères à partir des 2-anses.

3.7.3 Le théorème de Kirby

De la même manière que le théorème de Reidemeister-Singer donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux scindements de Heegaard représentent la même 3-variété, il existe un résultat donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux entrelacs dans S^3 présentent la même 3-variété : c'est le théorème de Kirby (1977).

Commençons par présenter deux opérations sur un entrelacs parallélisé L dans S^3 .

Opération K1 : ajout d'un noeud trivial avec parallélisation ± 1 . L'opération consiste à ajouter, dans une boule disjointe de l'entrelacs L , une composante triviale dont la parallélisation est ± 1 .

Opération K2 : somme connexe en bande. Cette opération requiert que l'entrelacs possède au moins deux composantes et ne modifie pas le nombre de composantes. Considérons donc deux composantes A_1 et A_2 de l'entrelacs L . Ces composantes sont parallélisées donc nous les considérons comme des anneaux plongés. Choisissons un anneau plongé A , arbitraire, joignant les anneaux L_1 et L_2 respectivement. Voir la figure . La surface $S = L_1 \cup A \cup L_2$ est un disque (plongé) avec deux trous dont le bord consiste en trois cercles C_1, C_2 et C dont C_1 et C_2 correspondent à un des bords de A_1 et de A_2 respectivement. Considérons des colliers de ces cercles plongés (relativement à S) : on obtient trois anneaux plongés \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 et $A_{\#}$ respectivement. Par définition, l'opération K2 consiste à remplacer l'entrelacs $L = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ par l'entrelacs $L' = A_{\#} \cup \tilde{A}_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$.

Proposition 28 *Ces deux opérations ne modifient pas le résultat de la chirurgie (à homéomorphisme près).*

Démonstration. Nous allons utiliser à plusieurs reprises l'observation suivante : si L est un entrelacs dans une variété M qui se décompose $L = L' \cup L''$ en deux sous-entrelacs alors

$$\chi(M, L) = \chi(\chi(M, L'), L'') = \chi(\chi(M, L''), L'). \quad (3.3)$$

Dans la première égalité, on considère L'' comme l'entrelacs L'' après que la chirurgie sur L' a été effectuée, c'est-à-dire que l'on regarde l'entrelacs L'' dans la nouvelle variété $\chi(M, L')$. De même dans la seconde égalité, on regarde L' comme dans un entrelacs dans la nouvelle variété $\chi(M, L'')$ après que la chirurgie sur L'' dans M a été effectuée. Ceci est toujours possible puisque les composantes sont deux à deux disjointes.

Invariance par l'opération K1 : notons U le noeud trivial muni de sa parallélisation ± 1 . D'après la remarque précédente,

$$\chi(S^3, L \amalg U) = \chi(\chi(S^3, U), L).$$

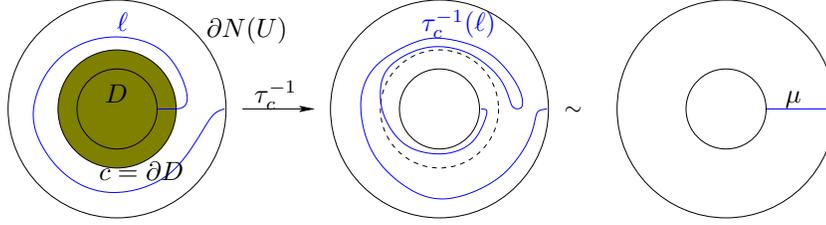


FIG. 3.8 – Le disque D et le twist de Dehn relatif à ∂D envoyant le parallèle ℓ sur le méridien.

De plus ici, L est séparé de U par une 2-sphère donc nous avons

$$\chi(\chi(S^3, U), L) = \chi(S^3, U) \# \chi(S^3, L).$$

Il est donc suffisant de montrer le résultat suivant :

Proposition 29 $\chi(S^3, U) = S^3$.

Exercice. C'est un bon exercice (essentiellement un cas particulier de l'exercice ci-dessus permettant de traduire la chirurgie en scindement de Heegaard). Considérons un voisinage tubulaire $N(U)$ de U . C'est un tore solide non noué dans S^3 . La parallélisation de U est donnée par un parallèle $\ell \subset \partial N(U)$ qui est la composition d'une longitude canonique l de $\partial N(U)$ et d'un méridien de $\partial N(U)$. Soit D un disque dans $S^3 - \text{Int}(N(U))$ tel que $c = \partial D$ soit isotope à l dans $\partial N(U)$. Un tel disque D existe car le noeud U est trivial et donc borde un disque ; le disque D est isotope à ce disque en le poussant le long de la direction radiale à l'anneau déterminé par U et la longitude canonique l : on peut prendre D comme le disque bordé par l dans $S^3 - \text{Int}(N(U))$.

Considérons alors le twist de Dehn $\tau_c^{\pm 1}$ relatif à la courbe c . D'un côté, ce twist de Dehn peut être vu comme un homéomorphisme de $\partial N(U)$ et on vérifie aisément que $\tau_c^{\pm 1}(\ell) = \mu$, i.e. τ_c envoie le parallèle de U sur un méridien de $\partial N(U)$. Voir la figure. D'un autre côté, ce twist de Dehn τ_c peut être vu comme le twist de Dehn agissant sur $\partial N(U) = \partial(S^3 - \text{Int}(N(U)))$: dans ce cas, c n'est autre qu'un méridien du tore solide $S^3 - \text{Int}(N(U))$ complémentaire à $N(U)$. Nous avons déjà observé qu'un twist de Dehn sur un méridien d'un tore surface s'étend en un homéomorphisme du tore solide entier. Donc τ_c s'étend en un homéomorphisme $\widetilde{\tau}_c^{\pm 1} : S^3 - \text{Int}(N(U)) \rightarrow S^3 - \text{Int}(N(U))$. Ainsi si $h : S^1 \times \partial D^2 \rightarrow \partial N(U)$ désigne l'homéomorphisme uniquement déterminé à isotopie près par $h(\star \times \partial D^2) = \ell$, nous avons

$$\begin{aligned} \chi(S^3, U) &= S^3 - \text{Int}(N(U)) \cup_h S^1 \times D^2 \\ &= \widetilde{\tau}_c^{\pm 1}(S^3 - \text{Int}(N(U)) \cup_{\tau_c^{\pm 1} \circ h} S^1 \times D^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S^3 - \text{Int}(N(U)) \cup_{\tau_c^{\pm 1} \circ h} S^1 \times D^2 \\
&= S^3.
\end{aligned}$$

En effet, le tore solide retiré à S^3 est réenvoyé de façon identique par $\tau_c^{\pm 1} \circ h$ (méridien sur méridien). Ceci achève de démontrer l'affirmation et donc l'invariance de la chirurgie par le mouvement K1.

Invariance par le mouvement K2. Soit $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ l'entrelacs parallélisé dans S^3 . Soit $L' = L_{\#} \cup L'_2 \cup \dots \cup L_n$ l'entrelacs parallélisé après l'opération K2. Nous devons montrer que $\chi(S^3, L') = \chi(S^3, L)$. Il est suffisant de montrer que $\chi(S^3, L_{\#} \cup L'_2) = \chi(S^3, L_1 \cup L_2)$. Nous avons la suite d'identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\chi(S^3, L_{\#} \cup L'_2) &= \chi(\chi(S^3, L'_2), L_{\#}) \\
&\simeq \chi(\chi(S^3, L_2), L_{\#}) \\
&\simeq \chi(\chi(S^3, L_2), L_1) \\
&= \chi(S^3, L_1 \cup L_2).
\end{aligned}$$

La première égalité est une application de la remarque préliminaire ci-dessus. La seconde égalité est une conséquence du fait que L_2 et L'_2 sont isotopes (comme noeuds parallélisés dans S^3). La troisième égalité résulte de ce que $L_{\#}$ et L_1 deviennent isotopes une fois la chirurgie sur L_2 effectuée : en effet, une fois la chirurgie sur L_2 effectuée, le parallèle de L_2 borde un disque dans la nouvelle variété $\chi(S^3, L_2)$; il suffit alors d'isotoper l'anneau L_1 le long de ce disque pour obtenir $L_{\#}$. La dernière égalité est une nouvelle application de la remarque préliminaire. Ceci achève la démonstration de l'invariance de la chirurgie par le mouvement K2 et de la proposition. ■

Nous venons de voir l'invariance de la chirurgie par les mouvements de Kirby K1 et K2. Par ailleurs, nous savons que la chirurgie est aussi invariante par isotopie de l'entrelacs parallélisé. Le théorème de Kirby affirme que la réciproque est vraie.

Théorème 3 (Kirby) *Soient L et L' deux entrelacs parallélisés dans S^3 . Les variétés $\chi(S^3, L)$ et $\chi(S^3, L')$ sont homéomorphes si et seulement s'il existe une suite d'isotopies et d'opérations K1, K2 ainsi que leurs inverses transformant l'entrelacs L en l'entrelacs L' .*

La démonstration originale du théorème de Kirby utilise la théorie de Cerf, une sorte de théorie de Morse à paramètre, et est considérée comme difficile. D'autres démonstrations ont été proposées depuis, notamment en utilisant le théorème de Reidemeister-Singer et la relation entre chirurgie et scindement de Heegaard. Notons par ailleurs que la terminologie courante "mouvements de Kirby" est postérieure à leur découverte. D'autres mouvements équivalents à la relation d'équivalence engendrée par l'isotopie et les mouvements K1 et K2 sont par ailleurs connus (mouvements de Fenn-Rourke, slam-dunk, etc).

Chapitre 4

Forme d'enlacement

4.1 Enlacement de cycles

Soient J et K deux noeuds orientés disjoints dans S^3 orienté. L'enlacement $\text{lk}(J, K)$ de J et de K est défini de la façon suivante. Le noeud J , vu comme 1-cycle, borde une 2-chaîne C (qu'on peut prendre lisse) puisque $H_1(S^3) = 0$. Moyennant une hypothèse de transversalité toujours réalisable, l'intersection de C et de K est un ensemble fini de points. L'enlacement de J et de K compte ces points de manière algébrique : chaque point $p \in C \cap K$ est muni d'un signe $\varepsilon(p)$ positif ou négatif selon que l'orientation de la somme (directe du fait de la transversalité) $T_p C \oplus T_p K = S^3$ coïncide ou non avec l'orientation fixée de S^3 .

$$\text{lk}(J, K) = C \cdot K = \sum_{p \in C \cap K} \varepsilon(p) \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

Lemme 7 *L'enlacement de deux noeuds (ou de deux cycles) est bien défini.*

Démonstration. Soit C' une autre 2-chaîne lisse transverse telle que $\partial C' = J$. Alors $C' - C$ est une 2-chaîne vérifiant $\partial(C' - C) = 0$: c'est donc un 2-cycle dans S^3 . Comme $H_2(S^3) = 0$, $C' - C$ est un cycle homologue à 0. Or l'intersection algébrique de cycles représente un produit en homologie (ou un cup produit en cohomologie) : $C' \cdot K - C \cdot K = (C' - C) \cdot K = [C' - C] \cdot [K] = 0$. En effet, le produit $H_2(S^3) \times H_1(S^3) \rightarrow \mathbb{Z}$ est nul. ■

Cette définition n'utilise que le fait que $H_1(S^3) = 0$. Elle se généralise donc aux noeuds dans toute 3-variété M telle que $H_1(M) = 0$ (*sphère d'homologie entière*).

Lemme 8 *L'enlacement est symétrique : $\text{lk}(J, K) = \text{lk}(K, J)$.*

Démonstration. On choisit une 2-chaîne D lisse dans S^3 et transverse à C telle que $\partial D = K$. Par transversalité, nous avons $C \cdot D = 0$ (car C et D sont deux chaînes - de dimension 2 - s'intersectant dans S^3 de dimension 3). Donc

$$0 = \partial(C \cdot D) = \partial C \cdot D - C \cdot \partial D = x \cdot D - C \cdot y = \text{lk}(J, K) - \text{lk}(K, J).$$

C'est le résultat voulu. ■

La formule utilisée plus haut est le pendant de la formule sur les cochaînes :

$$\delta(\phi \cup \psi) = \delta\phi \cup \psi + (-1)^{\dim \phi} \phi \cup \delta\psi.$$

Plus de détails nécessiteraient ici d'expliquer en détail la relation entre intersection et cup produit¹, ce qui justifierait d'ailleurs d'utiliser la définition cohomologique plutôt qu'homologique.

Soient J et K deux nœuds orientés disjoints dans une variété orientée connexe M . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. J et K représentent des éléments de torsion dans $H_1(M)$.
2. Il existe $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $n [J] = p [K] = 0$.
3. $[J] = [K] = 0$ dans $H_1(M; \mathbb{Q})$.

(Les assertions 1 et 2 sont la définition et l'assertion 3 résulte du fait que $H_1(M; \mathbb{Q}) = H_1(M) \otimes \mathbb{Q}$ et que tout groupe de torsion tensorisé par \mathbb{Q} est nul.) Supposons l'une de ces conditions vérifiée. On peut encore définir un enlacement de J et de K , cette fois à valeurs rationnelles, de la manière suivante. Un multiple de J borde une 2-chaîne : $\partial C = n J$. On peut choisir cette 2-chaîne de sorte qu'elle intersecte transversalement K . On définit :

$$\text{lk}_M(J, K) = \frac{C \cdot K}{n} \in \mathbb{Q}. \quad (4.2)$$

Lemme 9 *L'enlacement rationnel (4.2) est bien défini.*

Démonstration. Soit C' une autre 2-chaîne lisse transverse à K telle que $\partial C' = n J$. Alors $C' - C$ est une 2-chaîne telle que $\partial(C' - C) = 0$. C'est donc un 2-cycle dans M . L'intersection $(C' - C) \cdot K$ s'interprète donc à travers le produit en homologie (ou cup produit en cohomologie) :

$$H_2(M) \times H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x \cdot y = (\text{PD}(x) \cup \text{PD}(y))[M].$$

(On a noté PD l'isomorphisme de dualité de Poincaré.) Nous avons donc

$$(C' - C) \cdot K = [C' - C] \cdot [K].$$

¹On pourra consulter, pour un début de réponse, la note <http://math.berkeley.edu/hutching/teach/215b-2005/cup.pdf>
Une réponse plus complète et accessible se trouve dans le livre de G. Bredon, *Geometric Topology*, GTM, Springer, Chap. VI.

Or $[K]$ est de torsion, donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p[K] = 0$ dans $H_1(M)$. Donc $0 = [C' - C] \cdot p[K] = p[C' - C] \cdot [K] \in \mathbb{Z}$. Donc $[C' - C] \cdot [K] = 0$. C'est le résultat voulu. ■

Remarque. Il est en général nécessaire que les deux cycles J et K représentent des éléments de torsion pour que la définition soit cohérente. Cependant si $H_2(M)$ est de torsion (par exemple trivial)², alors on peut encore définir un enlacement de deux cycles dont au moins est de torsion. C'est le cas de $M = D^2 \times S^1$ (un tore solide), $J = \partial D^2 \times \star$ un méridien de M et $K = 0 \times S^1$ l'âme du tore. L'enlacement de J et K est bien défini et est égal à ± 1 .

4.2 Forme d'enlacement

Soit M une 3-variété compacte orientée et sans bord. On construit une forme bilinéaire sur $\text{Tors } H_1(M)$ de la manière suivante :

$$\lambda_M([x], [y]) = \text{lk}(x, y) \bmod 1, \quad x, y \in \text{Tors } H_1(M).$$

La réduction mod 1 est nécessaire pour que la définition soit cohérente sur les classes d'homologie (et pas seulement sur les cycles) :

Lemme 10 *La définition ci-dessus ne dépend pas du choix des représentants x et y dans les classes d'homologie de $[x]$ et de $[y]$.*

Démonstration. Soient $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $n[x] = p[y] = 0$. Il existe donc des 2-chaînes C et D dans M telles que $nC = \partial C$ et $pD = \partial D$. Choisissons un cycle x' homologue à x : il existe donc une 2-chaîne U telle que $\partial U = x' - x$ et une 2-chaîne C' telle que $\partial C' = nx'$. Nous avons donc

$$\partial(C' - C) = nx' - nC = n(x' - x) = n\partial U = \partial(nU).$$

Par conséquent $\partial(C' - C - nU) = 0$ et $C' - C - nU$ est un 2-cycle dans M . Donc

$$\frac{(C' - C) \cdot y}{n} - U \cdot y = (C' - C - nU) \cdot y = [C' - C - nU] \cdot [y] = 0$$

car $[y]$ est de torsion (même argument que dans la démonstration du lemme précédent). Il en résulte que

$$\text{lk}(x', y) - \text{lk}(x, y) = \frac{C' \cdot y}{n} - \frac{C \cdot y}{n} = \frac{(C' - C) \cdot y}{n} = U \cdot y \in \mathbb{Z},$$

donc $\text{lk}(x', y) - \text{lk}(x, y) = 0 \bmod 1$. La définition ne dépend donc pas du choix du cycle représentant la première classe. On en déduit alors, par symétrie, que

$$\text{lk}(x, y') - \text{lk}(x, y) = \text{lk}(y', x) - \text{lk}(y, x) = 0.$$

²Cette hypothèse assure, dans la démonstration du lemme ci-dessus, que $[C' - C] \cdot [K] = 0$ (même pour $[K]$ sans torsion).

C'est le résultat voulu. ■

Ceci définit la *forme d'enlacement* de M :

$$\lambda_M : \text{Tors } H_1(M) \times \text{Tors } H_1(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Elle est symétrique, bilinéaire au sens habituel.

La forme d'enlacement admet une interprétation purement homologique. Par dualité de Poincaré restreinte à la torsion et le théorème des coefficients universels, $\text{Tors } H_1(M) \simeq \text{Tors } H^2(M) \simeq \text{Hom}(\text{Tors } H_1(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cet isomorphisme est l'adjoint de la forme d'enlacement, ce qui montre que l'enlacement est non-singulier.

Une autre définition est donnée par le Bockstein en cohomologie. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^1(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots$$

où β désigne l'homomorphisme de Bockstein. L'enlacement est alors défini sur $\text{Tors } H^2(M; \mathbb{Z})$ par

$$\lambda(\beta x, \beta y) = (\beta x \cup y)([M]) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

4.3 Lien avec la forme d'intersection

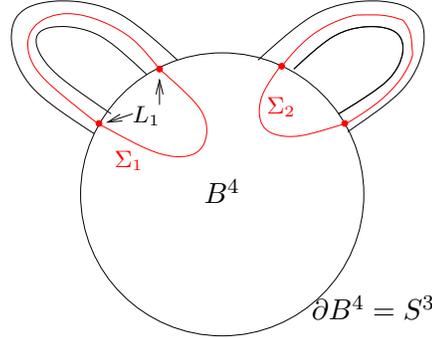
Soit X une 4-variété compacte orientée. Le second groupe d'homologie supporte une forme d'intersection

$$H^2(X) \times H^2(X, \partial X) \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (x \cup y)([X, \partial X]) \in \mathbb{Z}.$$

Lemme 11 *Supposons que $H_1(X) = 0$. Alors $H^2(X)$ et $H^2(X, \partial X)$ sont sans torsion et de même rang.*

Démonstration. Nous avons $H^2(X) = \text{Hom}(H_2(X), \mathbb{Z})$ d'après les coefficients universels, ce qui donne le résultat pour $H^2(X)$. De même pour $H^2(X, \partial X)$ qui a même rang que $H_2(X)$ qui a même rang que $H^2(X)$ (par les coefficients universels). ■

Dans le reste de cette section, on suppose l'hypothèse du lemme vérifiée. Dans ce cas, les groupes $H^2(X)$ et $H^2(X, \partial X)$ sont des groupes abéliens libres; il résulte alors de la dualité de Poincaré que la forme d'intersection plus haut est nonsingulière (ses adjoints sont des isomorphismes).

FIG. 4.1 – La décomposition de X en 2-anses

Considérons à présent une forme d'intersection liée à celle ci-dessus. Soit $j^* : H^2(X, \partial X) \rightarrow H^2(X)$ l'homomorphisme naturel de la suite exacte en cohomologie associée à $(X, \partial X)$. On définit une forme d'intersection notée ι_X :

$$H^2(X, \partial X) \times H^2(X, \partial X) \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (x \cup j^*(y))([X, \partial X]).$$

Cette forme est symétrique. Comme elle se factorise à travers la précédente, son adjoint est injectif : elle est donc non dégénérée.

Exercice. La forme d'intersection ι_X est nonsingulière si $\partial X = \emptyset$.

Solution. La forme est nonsingulière si et seulement si j^* est bijective. Ceci est le cas ssi les morphismes $i^* : H^2(X) \rightarrow H^2(\partial X)$ et $\delta : H^1(\partial X) \rightarrow H^2(X, \partial X)$ sont nuls. D'où le résultat. ■

Nous avons vu un cas spécial où X vérifie l'hypothèse du lemme ci-dessus : le cas où X est construite à partir de B^4 en recollant un nombre fini de 2-anses $B^2 \times B^2$. C'est le cas où $\partial X = \chi(S^3, L)$ est le résultat d'une chirurgie entière sur L dans $S^3 = \partial B^4$. Voir le corollaire 2.1.

En fait, nous pouvons décrire complètement la forme d'intersection ι_X dans ce cas.

Lemme 12 *Le groupe abélien $H_2(X)$ est librement engendré par les 2-sphères $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$; de plus, dans la base $[\Sigma_1], \dots, [\Sigma_n]$, la forme d'enlacement ι_X est représentée par la matrice d'enlacement M_L .*

Lien avec la matrice d'intersection (en chirurgie).

Correspondance du discriminant.

Théorème 4 *La correspondance $L \rightarrow G(L)$ est surjective.*

Corollaire 4.1 *Tout enlacement algébrique nonsingulier est réalisé comme l'enlacement d'une variété de dimension trois.*

Démonstration. Soit G un enlacement algébrique nonsingulier. D'après le théorème, il existe un réseau L dont il est la forme discriminant. Réalisons ce réseau comme le réseau d'intersection $H_2(X)$ d'une 4-variété X compacte décomposée en 2-anses. En particulier, le réseau est engendré par les classes représentées par les 2-sphères provenant (en partie) des 2-anses. Alors ∂X est une 3-variété sans bord dont l'enlacement, d'après le théorème, est $-G$.

Chapitre 5

Bibliographie

Seuls sont cités les ouvrages (ou les références) utilisés ou consultés pour la préparation du cours.

5.1 Généralités

1. Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Grad. Text Math. 33, Springer, 4ème édition, 1991 : une référence excellente et très accessible.
2. Allen Hatcher, *Algebraic Topology* (disponible sur la toile) : une référence excellente pour les idées de base sur le groupe fondamental et l'homologie ; très accessible.
3. Glen Bredon, *Topology and Geometry*, Grad. Text. Math., Springer : là aussi une référence excellente et très accessible. Se complémente très avantageusement avec les deux références précédentes.

5.2 3-variétés et invariants

1. Anatoli T. Fomenko et Sergei V. Matveev, *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*, Kluwer Academic Publishers, Math. Appl., 1991 : Un livre extrêmement utile pour développer les idées et les intuitions en petites dimensions. Chapitre très utile sur le groupe de difféotopies (mapping class group) et les scindements de Heegaard.
2. John Hempel, *3-Manifolds*, Ann. Math. Studies 86, Princeton U. Press, 1976 : Les résultats géométriques exposés ont été amplement généralisés depuis, mais reste une source intéressante pour la géométrie élémentaire des 3-variétés. Comporte une preuve claire du théorème de décomposition de Kneser (non abordée dans ce cours) et un chapitre sur les scindements de Heegaard.

3. Dale Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, deuxième édition, 1990 : Reste un classique sur la théorie des nœuds. Voir en particulier le chapitre 9 sur le lien entre 3-variétés et entrelacs pour la chirurgie.
4. Robert Gompf et András Stipsicz *4-manifolds and Kirby calculus*, Grad. Stud. Math. 20, Amer. Math. Soc. , 1996 : bien que centré sur les variétés (lisses et topologiques) de dimension 4 et le calcul de Kirby, le livre contient beaucoup de résultat sur la chirurgie des 3-variétés et les invariants de 3-variétés, dont l'enlacement.

5.3 Torsion de 3-variétés

1. John W. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. 72, 1966, 358–426 : excellent article panoramique sur la torsion, écrit dans un style d'une très grande clarté.
2. Vladimir Turaev, *Torsion invariants of 3-manifolds*, Distinguished Chair Lectures, Calgary 2001 : il s'agit de notes prises par John Bryden, Florian Deloup et Peter Zvengrowski de six conférences introductives de V. Turaev sur la torsion à l'université de Calgary en 2001. Très accessible, sans le détail de toutes les démonstrations.
3. Vladimir Turaev, *Introduction to Combinatorial Torsion*, Lectures in Math., Birkhäuser, 2001 (notes prises par Felix Schlenk) : la référence d'introduction à la fois détaillée et accessible.
4. Vladimir Turaev, *Torsion of 3-manifolds*, Birkhäuser, 2002 : pour aller plus loin dans les propriétés spécifiques de la torsion en dimension 3.