

# Le Groupe des Difféotopies de Surface

Florian Deloup



## Table des matières

Chapitre 1. Introduction	5
1. Vue d'ensemble du cours	5
2. Surfaces et courbes	5
Chapitre 2. Généralités	7
1. Définitions	8
2. Exemples de groupes de difféotopies	10
3. Twist de Dehn	12
4. Intersections algébrique et géométrique	15
5. Un critère pour la minimalité : le critère du bigone	17
6. Génération par les twists de Dehn	21
Chapitre 3. Première approche du groupe de difféotopies d'une surface	25
1. Définitions	25
2. Exemples de groupes de difféotopies	26
3. Twist de Dehn	29
Chapitre 4. Intersections	33
1. Intersection algébrique	33
2. Intersection géométrique	33
3. Un critère pour la minimalité : le critère du bigone	34
Chapitre 5. Le groupe de tresses et ses avatars	39
1. Du point de vue algébrique	39
2. Du point de vue géométrique	39
3. Du point de vue du groupe de difféotopies du disque percé	43
4. Deux autres définitions	45
5. Le groupe des tresses pures et le groupe des difféotopies du disque troué	46
Chapitre 6. Génération par les twists de Dehn	51
1. Introduction	51
2. Quelques propriétés et relations des twists de Dehn	52
3. Le théorème de Dehn	53
Chapitre 7. Le théorème de Dehn-Baer-Nielsen	55
1. Énoncé du théorème	55
2. Les surfaces sont des espaces $K(G, 1)$	55
3. Une variante du groupe de difféotopies	57
4. Preuve de l'injectivité du théorème	58
5. Preuve de la surjectivité du théorème	60

Bibliographie

61

## CHAPITRE 1

# Introduction

### 1. Vue d'ensemble du cours

Ce cours est consacré à l'étude du groupe des difféotopies de surface. Étant donné une surface  $S$ , ce groupe est noté  $\mathfrak{M}(S)$ . Il est défini par

$$\mathfrak{M}(S) = \pi_0(\text{Diffeo}(S, \partial S)).$$

C'est le groupe des classes d'isotopies de difféomorphismes de  $S$  dont la restriction à  $\partial S$  est l'identité.

Ce groupe est étudié selon les aspects topologique (à quoi ressemblent les éléments de  $\mathfrak{M}(S)$ ? Quelles sont leurs propriétés? etc) et algébrique (quelle est la structure globale de  $\mathfrak{M}(S)$ ? Comment ce groupe est-il engendré (resp. présenté)? Quelles sont les propriétés algébriques de ce groupe?). Le groupe  $\mathfrak{M}(S)$  reflète évidemment la topologie des difféomorphismes en dimension 2. Sur le plan algébrique, il ressemble beaucoup au groupe linéaire, bien que sa linéarité n'ait été démontrée que dans quelques cas particuliers. Quoi qu'il en soit, l'analogie avec le groupe linéaire est fort utile.

L'élément le plus fondamental de  $\mathfrak{M}(S)$  est le twist de Dehn relatif à une courbe fermée simple. C'est un élément d'ordre infini dans  $\mathfrak{M}(S)$ . Un point important est qu'un nombre fini de twists de Dehn suffisent à engendrer  $\mathfrak{M}(S)$ .

### 2. Surfaces et courbes

Dans ce paragraphe, quelques éléments de base sur les surfaces et les courbes servant également à fixer les notations.

Une *surface* est une variété différentiable connexe de dimension 2. Une *courbe* sur une surface est une sous-variété de dimension 1.

Revêtements universels de surfaces : trois cas. Classification des surfaces.

Transversalité et variétés.

Un peu d'homotopie, d'homologie. Théorème de Jordan.

Théorème de Brouwer.



## CHAPITRE 2

### Généralités

Soit  $\Sigma$  une surface connexe avec ou sans bord, avec ou sans points distingués. Soit  $c$  une courbe fermée simple dans  $\Sigma$ . La surface *coupée suivant  $c$*  est notée  $\Sigma_c$  : c'est par définition une surface  $\Sigma_c$  munie d'un difféomorphisme  $h$  entre deux de ses composantes distinguées de bord tel que

1. Le quotient  $\Sigma/(x \sim h(x))$  est difféomorphe à  $\Sigma$  ;
2. L'image des composantes distinguées de bord par la projection quotient  $\Sigma_c \rightarrow \Sigma$  est  $c$ .

Cette surface  $\Sigma_c$  est donc difféomorphe à  $\Sigma \setminus V(c)$  où  $V(c)$  est un petit voisinage régulier de  $c$ .

Une courbe fermée simple  $c$  sur  $\Sigma$  est *séparante* si la surface  $\Sigma_c$  coupée suivant  $c$  n'est pas connexe. Elle est *non séparante* si  $\Sigma_c$  reste connexe. C'est un bon exercice de dessiner des courbes fermées simples séparantes sur une surface.

LEMME 2.1. *Si  $\Sigma$  est sans bord,  $c$  est séparante si et seulement si  $[c] = 0 \in H_1(\Sigma)$ .*

*Preuve.* Puisque  $c$  est séparante,  $c$  est le bord connexe d'une sous-surface de  $\Sigma$ . ■

LEMME 2.2. *Il existe un difféomorphisme préservant l'orientation de  $\Sigma$  envoyant une courbe fermée simple  $c$  sur une autre courbe fermée simple  $c'$  si et seulement si  $\Sigma_c$  et  $\Sigma_{c'}$  sont difféomorphes.*

*Preuve.* Soit  $f : \Sigma_c \rightarrow \Sigma_{c'}$  un difféomorphisme. Alors  $f$  induit un difféomorphisme  $\Sigma \rightarrow \Sigma$  envoyant  $c$  sur  $c'$ . On peut composer ensuite  $f$  par un difféomorphisme de  $\Sigma$  fixant globalement  $c'$  et renversant l'orientation si nécessaire (pour assurer que le difféomorphisme ainsi obtenu préserve bien l'orientation). Réciproquement, si  $f \in \text{Diffeo}(\Sigma)$  vérifie  $f(c) = c'$ , alors  $f$  induit par restriction un difféomorphisme  $\Sigma_c \rightarrow \Sigma_{c'}$ . ■

PROPOSITION 2.1. *Si  $c$  et  $c'$  sont deux courbes fermées simples non séparantes dans  $\Sigma$  alors il existe  $f \in \text{Diffeo}^+(\Sigma)$  tel que  $f(c) = c'$ .*

*Preuve.* On utilise le lemme précédent. Il suffit de voir que les surfaces coupées  $\Sigma_c$  et  $\Sigma_{c'}$  sont difféomorphes. Pour cela, on utilise la classification des surfaces connexes : par définition,  $\Sigma_c$  et  $\Sigma_{c'}$  sont connexes, conservent le même nombre de composantes connexes de bord, ont même caractéristique d'Euler. Si  $\Sigma$  a été munie de points distingués (ou ce qui revient au même, est percée de points), alors  $\Sigma_c$  et  $\Sigma_{c'}$  conservent ces points distingués. D'après la classification des surfaces,  $\Sigma_c$  et  $\Sigma_{c'}$

sont difféomorphes. Ainsi le lemme précédent s'applique.  $\blacksquare$

**PROPOSITION 2.2.** *Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux courbes fermées simples dans  $\Sigma$  s'intersectant transversalement en un unique point. Pour toute paire  $(c'_1, c'_2)$  de courbes fermées simples dans  $\Sigma$  s'intersectant transversalement en un unique point, il existe  $f \in \text{Diffeo}^+(\Sigma)$  tel que  $f(c_i) = c'_i$ ,  $i = 1, 2$ .*

Cette proposition est très utile car elle permet de transformer toute paire de courbes fermées simples s'intersectant transversalement une fois en une paire "standard" de courbes fermées simples s'intersectant transversalement une fois.

*Preuve.* La preuve est une nouvelle fois basée sur le découpage de surface. On commence par couper  $\Sigma$  suivant  $c_1$  : on obtient une surface  $\Sigma_{c_1}$  qui a deux composantes privilégiées de bord, correspondant aux deux "côtés" de  $c_1$  dans  $\Sigma$ . L'image de  $c_2$  dans  $\Sigma_{c_1}$  est maintenant un arc joignant l'une de ces composantes de bord à l'autre. Coupons  $\Sigma_{c_1}$  le long de  $c_2$  : on obtient une nouvelle surface  $(\Sigma_{c_1})_{c_2}$ . Cette surface a une composante de bord privilégiée qui se décompose naturellement en quatre arcs : deux proviennent de  $c_1$  et deux de  $c_2$ . La relation d'équivalence découlant de la définition d'une surface coupée le long d'une courbe identifie ces arcs de façon à retrouver la surface  $\Sigma$  avec ses courbes  $c_1$  et  $c_2$ .

Si maintenant  $c'_1$  et  $c'_2$  sont deux courbes ayant les mêmes propriétés, il y a de la même manière une surface coupée  $(\Sigma_{c'_1})_{c'_2}$ . Les surfaces  $(\Sigma_{c_1})_{c_2}$  et  $(\Sigma_{c'_1})_{c'_2}$  ont même invariants topologiques : même nombre de composantes connexes de bord, même caractéristique d'Euler et même points distingués. Elles sont donc difféomorphes par un difféomorphisme préservant les relations d'équivalence sur le bord. Un tel difféomorphisme induit un difféomorphisme envoyant  $\{c_1, c_2\}$  sur  $\{c'_1, c'_2\}$ .  $\blacksquare$

## 1. Définitions

Soit  $\Sigma = \Sigma_g$  une surface connexe compacte orientée de genre  $g$ . On munit  $\Sigma$  d'une structure de variété différentiable de dimension 2. L'ensemble  $\text{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$  des difféomorphismes  $\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  tels que  $\varphi|_{\partial\Sigma} = \text{id}_{\partial\Sigma}$  forme un groupe topologique pour la topologie compacte-ouverte (élément neutre =  $\text{Id}_\Sigma$ , produit = composition).

**DEFINITION 2.1.** Le *groupe des difféotopies* (*mapping class group* en anglais) de  $\Sigma_g$  est le groupe

$$(2.1) \quad \mathfrak{M}^\pm(\Sigma) = \text{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma) / \text{Iso}(\Sigma).$$

C'est le groupe des difféomorphismes  $\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  tels que  $\varphi|_{\partial\Sigma} = \text{id}_{\partial\Sigma}$ , considérés à isotopie (l'isotopie étant constamment l'identité sur le bord) près.

Quand  $\Sigma_g$  est orienté, on considère en général la version orientée

$$(2.2) \quad \mathfrak{M}(\Sigma_g) = \text{Diffeo}^+(\Sigma_g) / \text{ISO}(\Sigma_g)$$

qui est le sous-groupe des homéomorphismes  $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  préservant l'orientation considérés à isotopie près.

L'exercice suivant justifie la définition ci-dessus



EXERCICE 2.1. Vérifier que si deux difféomorphismes  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont isotopes et que  $\varphi_0$  préserve l'orientation, alors il en est de même de  $\varphi_1$ .

Il existe des difféomorphismes renversant l'orientation :

EXERCICE 2.2. Pour toute surface orientée  $\Sigma$ , il existe un difféomorphisme involutif renversant l'orientation de  $\Sigma$ .

*Preuve.* Toute surface orientée peut être plongée dans  $\mathbb{R}^3$  (exercice : le montrer<sup>1</sup>). De plus, on peut isotoper  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^3$  de sorte que la symétrie orthogonale par rapport à un plan  $P \subset \mathbb{R}^3$  laisse  $\Sigma$  globalement invariante. ■

Si la surface  $\Sigma$  a un bord  $\partial\Sigma$  non vide, on remarque que le difféomorphisme renversant l'orientation construit dans la preuve ci-dessus n'est pas l'identité sur le bord. En fait, on peut remarquer que c'est toujours le cas :

EXERCICE 2.3. Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  alors tout difféomorphisme  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tel que  $\varphi|_{\partial\Sigma} = \text{id}_{\partial\Sigma}$  préserve l'orientation de  $\Sigma$ . Il en résulte que

$$\partial\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{M}^\pm(\Sigma) = \mathfrak{M}(\Sigma).$$

Le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  est un sous-groupe (normal) d'indice 2 du premier. Nous avons donc une suite exacte scindée de groupes

$$1 \longrightarrow \mathfrak{M}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{M}^\pm(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

REMARQUE 2.1. Si l'on remplace  $\text{Diffeo}(M)$  par  $\text{Homeo}(M)$  dans la définition (où  $M$  est munie de sa structure de variété topologique seulement), on définit le groupe des homéotopies de  $M$ . Pour une variété générale  $M$ , ce groupe diffère du groupe des difféotopies. Dans ce cours, nous considérons uniquement des surfaces. Dans cette dimension (2), ces deux groupes coïncident :

THÉORÈME 2.1. *Tout homéomorphisme d'une surface  $\Sigma$  est isotope à un difféomorphisme.*

La démonstration de ce résultat repose sur le fait que toute surface est triangulable, de façon essentiellement unique (c'est-à-dire que deux triangulations admettent un raffinement commun). Pour ces faits, on pourra se reporter à [1] et à [7]. On pourrait d'ailleurs définir également le groupe des homéotopies linéaires par morceaux de  $\Sigma$  : on retrouverait essentiellement la même notion. On utilisera donc librement les catégories TOP et DIFF, groupe des homéotopies et groupe des difféotopies.

REMARQUE 2.2. Avec  $\text{Homeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$  muni de la topologie "compact-ouvert", alors un chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Homeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$  est la même chose qu'une isotopie entre  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$ . Même remarque avec  $\text{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$ . C'est pourquoi on peut définir aussi

$$\mathfrak{M}(\Sigma) = \pi_0(\text{Homeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma)) = \pi_0(\text{Diffeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma)).$$

<sup>1</sup>Exercice supplémentaire : le montrer sans utiliser la classification des surfaces.

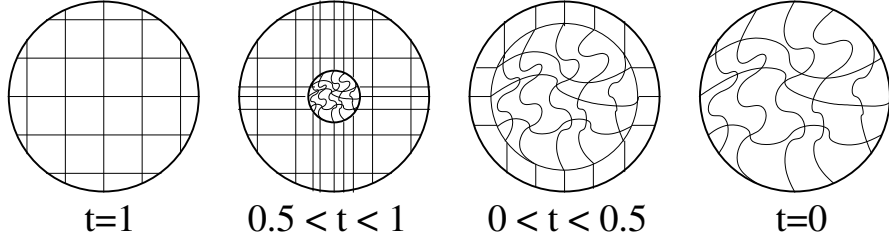


FIG. 2.1. Isotopie du truc d'Alexander. Les courbes sont les images des droites horizontales et verticales respectivement au cours de l'isotopie.

REMARQUE 2.3 (Variantes). Il arrive que l'on ait besoin d'autres versions du groupe des difféotopies en enrichissant un peu la surface en distinguant  $n$  points (ou trous) dans l'intérieur de  $\Sigma$ . On note alors  $\Sigma = \Sigma_{g,b,n}$  où  $g$  est le genre de  $\Sigma$ ,  $b = b_0(\partial\Sigma)$  est le nombre de composantes connexes (cercles) du bord de  $\Sigma$  et  $n$  le nombre de points distingués. Il résulte de la classification des surfaces qu'une telle surface est déterminée à difféomorphisme près par le triplet  $(g, b, n)$ . Le groupe de difféotopies de  $\Sigma_{g,b,n}$  est alors le groupe des classes d'isotopies de difféomorphismes de  $\Sigma$  qui sont l'identité sur le bord et qui préservent globalement l'ensemble des  $n$  points distingués dans  $\Sigma$ . Les cas particuliers les plus importants (qui seront vus dans ce cours) sont les suivants :

- $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,0,0})$  (le cas classique sans bord ni trou) ;
- $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0})$  (cas précédent avec un disque enlevé) ;
- $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,1,n})$  (disque avec  $n$  trous) : le groupe de tresses  $B_n$ .

## 2. Exemples de groupes de difféotopies

On calcule dans ce paragraphe les groupes de difféotopies dans les cas élémentaires du disque, de la sphère et du tore.

**2.1. Le truc d'Alexander, le disque et la sphère.** Le truc d'Alexander montre explicitement que  $\text{Homeo}(D^2, \partial D^2) = \text{Homeo}^+(D^2, \partial D^2)$  est contractile. Il est vrai en toute dimension  $n \geq 1$ .

LEMME 2.3 (Truc d'Alexander). *Soit  $f : D^n \rightarrow D^n$  un homéomorphisme tel que  $h|_{\partial D^n} = \text{Id}_{S^{n-1}}$ . Alors  $f$  est isotope à l'identité relativement au bord  $\partial D^n = S^{n-1}$ .*

Une isotopie est donnée explicitement par

$$F(x, t) = \begin{cases} t f(\frac{1}{t}x) & \text{if } 0 \leq \|x\| \leq t \\ x & \text{if } t \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 2.1.  $\mathfrak{M}(D^n) = \{1\}$ .

Remarquons que si  $f$  fixe l'origine ( $f(0) = 0$ ) alors l'isotopie  $F(-, t) = f_t$  du truc d'Alexander fixe l'origine pour tout  $0 \leq t \leq 1$ . Autrement dit,  $f$  est isotope à  $\text{Id}_{D^n}$  à travers des homéomorphismes fixant l'origine 0 de  $D^n$ . On en déduit

COROLLAIRE 2.2.  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,0,1}) = \mathfrak{M}(D^n \setminus \{0\}) = \{1\}$ .

REMARQUE 2.4. La démonstration du truc d'Alexander est dans la catégorie TOP. De même les corollaires ci-dessus.

PROPOSITION 2.3. *Le groupe  $\mathfrak{M}(S^2)$  est trivial.*

*Démonstration.*

Notons le cas particulier  $n = 1$  du lemme : le truc d'Alexander dit qu'un homéomorphisme  $S^1 \rightarrow S^1$  est isotope à l'identité.

A présent, soit  $f : S^2 \rightarrow S^2$  un homéomorphisme. Montrons que  $f$  est isotope à l'identité. Soit  $c = \{(x, y, 0) \in S^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  l'équateur de  $S^2$ . Alors  $f(c)$  est une courbe fermée simple dans  $S^2$ , isotope à  $c$ . On peut donc grâce à une isotopie préliminaire supposer que  $f(c) = c$ . D'après le truc d'Alexander pour  $n = 1$ , l'homéomorphisme  $f|_c : S^1 \rightarrow S^1$  est isotope à l'identité. Au moyen d'une nouvelle isotopie, on se ramène donc au cas où  $f$  est l'identité sur l'équateur. La sphère  $S^2$  est le recollement le long de l'équateur de deux disques (les hémisphères). Il suffit donc de montrer que la restriction de  $f$  à chacun de ces hémisphères est l'identité : c'est une application du truc d'Alexander pour  $n = 2$ . ■

REMARQUE 2.5. Il existe un argument dans la catégorie DIFF sans utiliser le truc d'Alexander.

**2.2. Le groupe de difféotopies du tore.** Le tore est l'exemple le plus simple de surface fermée dont le groupe de difféotopies est non trivial.

PROPOSITION 2.4. *Le groupe  $\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1)$  est isomorphe à  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* L'application

$$\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1) \rightarrow \mathrm{Aut}(\pi_1(S^1 \times S^1, \star)), [f] \mapsto f_*$$

est bien définie. Les courbes fermées simples  $\mu = \star \times S^1$  et  $\lambda = S^1 \times \star$  engendrent le groupe fondamental  $\pi_1(S^1 \times S^1, \star) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . En particulier, elles engendrent  $H_1(S^1 \times S^1)$  et  $\mathrm{Aut}(H_1(S^1 \times S^1)) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2)$ . En écrivant  $f_*$  dans la base  $([\lambda], [\mu])$  de  $H_1(S^1 \times S^1)$ , l'application ci-dessus induit une application

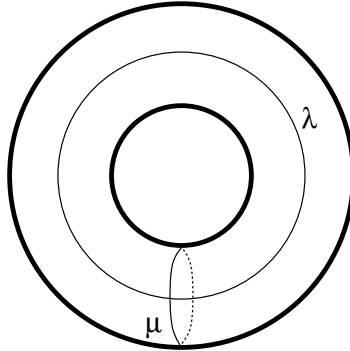
$$\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), [f] \mapsto \mathrm{Mat}_{([\lambda], [\mu])}(f_*).$$

Par functorialité de  $\pi_1$ , c'est un morphisme de groupes. Si  $f$  préserve l'orientation alors tout homéomorphisme isotope à  $f$  préserve l'orientation et  $\det(f_*) = +1$ .

Surjectivité : il est aisé (cf. Exercice 3.4 ci-dessous) d'engendrer  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  à l'aide des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Or chacune de ces matrices a une interprétation aisée à l'aide des twists de Dehn (relativement à  $\mu$  et  $\lambda$ ) et comme inversion  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, (x, y) \mapsto (y, x)$  respectivement. Alternativement : remarquer que  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  agit par homéomorphismes sur  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$ . Donc toute matrice de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  s'interprète *ipso facto* comme autohoméomorphisme du tore.



Injectivité : une démonstration est donnée au début du livre de D. Rolfsen. Soit  $f$  un homéomorphisme du tore tel que  $f_* = \text{id} \in \pi_1(S^1 \times S^1, \star)$ . Il s'agit alors de montrer que  $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  est homotopiquement trivial seulement si  $f$  est isotopiquement trivial. Ceci est vrai en fait pour tous les homéomorphismes de surface. ■

On en déduit facilement le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.3.** *Le groupe  $\mathfrak{M}(S^1 \times S^1)$  est isomorphe à  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ .*

**EXERCICE 2.4.** Soit  $\lambda$  et  $\mu$  les courbes représentant la longitude et le méridien d'un tore avec les orientations de la figure 2.2 (de sorte que  $\iota(\lambda, \mu) = +1$ ). Vérifier que  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  est engendré par  $\text{Mat}_{\lambda, \mu}((\tau_\lambda)_*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\text{Mat}_{\lambda, \mu}((\tau_{\mu})_*) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

### 3. Twist de Dehn

Nous allons à présent construire des éléments non triviaux de  $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$ . Nous commençons par une description d'un homéomorphisme d'un anneau, appelé une *volte* (*twist* en anglais).

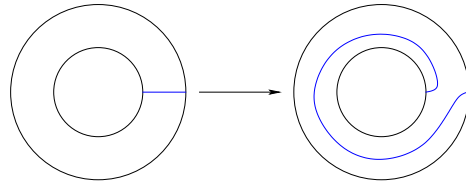
Soit  $A$  l'anneau dans  $\mathbb{C}$  défini par  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ . Le bord  $\partial A$  est constitué de deux cercles concentriques  $\partial_- A$  et  $\partial_+ A$  de centre 0 et de rayons  $r = 1$  et  $r = 2$  respectivement. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue croissante vérifiant  $f(r) = 0$  pour  $r \leq 1$ ,  $f(r) = 2\pi$  pour  $r \geq 2$ . La volte (ou le twist) de Dehn est l'homéomorphisme  $v : A \rightarrow A$  défini par

$$v(r e^{i\theta}) = r e^{i(\theta + f(r))}.$$

Si l'on choisit  $f$  lisse, alors le twist de Dehn est un difféomorphisme.

*Exercice.* A isotopie près fixant le bord  $\partial A$ , le twist de Dehn ne dépend pas de la fonction  $f$  choisie et est entièrement déterminé par la figure 3.2.

Remarquons que le twist de Dehn se prolonge en un homéomorphisme  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  en définissant  $v|_{\mathbb{C}-A} = \text{id}_{\mathbb{C}-A}$ . Soit maintenant  $j : A \rightarrow \Sigma_g$  un plongement préservant

FIG. 2.2. L'action de la volte de Dehn sur le segment radial  $[1, 2] \subset A$ .

l'orientation de l'anneau  $A$  dans une surface  $\Sigma_g$  quelconque. Ce plongement peut être vu comme le paramétrage d'un voisinage orientable  $j(A)$  d'une courbe fermée simple  $\gamma$  dans  $\Sigma_g$ . L'homéomorphisme  $t_\gamma = j \circ v \circ j^{-1} : j(A) \rightarrow j(A)$  se prolonge en un homéomorphisme encore noté  $t_\gamma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  par l'identité hors de  $j(A)$ . Cet homéomorphisme est déterminé à isotopie près préservant le bord éventuel de  $\Sigma_g$  par la classe d'isotopie de  $j$  laquelle est elle-même déterminée par la classe d'isotopie de  $j(c)$  de l'image de l'âme orientée  $c = \{|z| = 3/2\} \subset A$  de l'anneau  $A$ . Ainsi l'homéomorphisme  $t_\gamma$  est appelé *twist de Dehn* relativement à la courbe fermée simple  $\gamma \subset \Sigma_g$ .

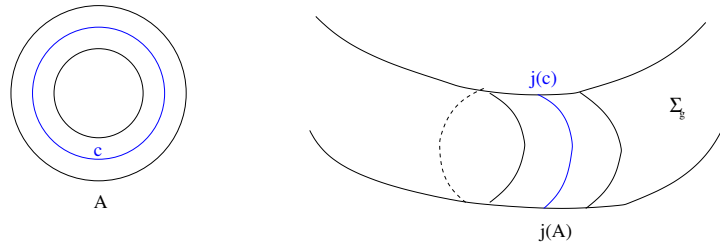


FIG. 2.3. Plongement d'un anneau dans une surface.

EXERCICE 2.5. Décrire les plongements possibles pour  $j$ . Combien y a-t-il de classes d'isotopie de  $j$ ? (Réponse : quatre). Combien y a-t-il de classes d'isotopie préservant l'orientation? (Réponse : deux).

On appelle aussi *twist de Dehn* la classe d'isotopie qu'il représente. Si  $\gamma$  borde un disque  $D \subset \Sigma_g$ , on peut supposer que  $\partial D = \partial_- A$  où  $A$  est un voisinage annulaire de  $\gamma$ . Il est alors aisé de voir que  $t_\gamma$  est isotope à l'identité (par exemple par une nouvelle application du truc d'Alexander). Il est donc suffisant de considérer les twists de Dehn relativement à des courbes fermées simples non triviales.

Voici quelques exercices pour se familiariser avec les twists de Dehn.

EXERCICE 2.6. Soit  $t_\gamma$  un twist de Dehn sur une surface  $\Sigma$  (avec ou sans bord, avec ou sans points distingués). Soit  $\alpha$  une courbe fermée simple sur  $\Sigma$ .

1. Si  $\alpha$  est isotope à  $\gamma$  dans  $\Sigma$ , alors  $t_\gamma(\alpha) = \alpha$ .
2. Si  $c$  intersecte transversalement  $\gamma$  en un point  $p$ , dessiner l'image  $t_\gamma(\alpha)$  au voisinage de  $p$ .
3. Comment dessiner  $t_\gamma(\alpha)$  si  $\alpha$  intersecte transversalement  $\gamma$  en un nombre fini de points  $p_1, \dots, p_n$ ?

*Solution.* 1) On peut isotoper  $\alpha$  de sorte que  $\alpha = \gamma$ . Pour 2) et 3), voir les Fig. 3.4 et 3.5. ■

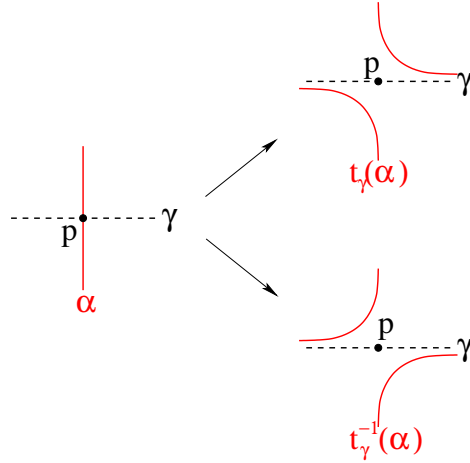


FIG. 2.4. dessin local de l'image d'une courbe fermée simple par un twist de Dehn : cas d'une intersection simple.

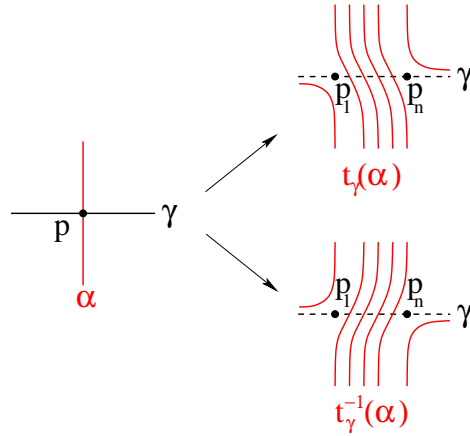


FIG. 2.5. dessin local de l'image d'une courbe fermée simple par un twist de Dehn : cas d'intersection multiple.

LEMME 2.4. *Soit  $\gamma$  l'âme de l'anneau  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ . Alors  $t_\gamma \neq 1$  dans  $\mathfrak{M}(A)$ .*

*Preuve.* Une manière simple de le voir est de regarder l'action induite en homologie (ou sur le groupe fondamental) de  $t_\gamma$ . On considère la courbe  $\alpha$  fermée simple dans  $A$  définie de la manière suivante :  $\alpha$  est constituée de la réunion du segment radial  $[1, 2]$  et de son image  $t([1, 2])$  (voir la Fig. 3.2). Choisissons une orientation de  $\alpha$  et le point  $z = 1$  comme point base. Clairement la classe d'homotopie de  $\alpha$  est non triviale et engendre  $\pi_1(A, z) \simeq \mathbb{Z}$ . Nous allons montrer que  $(t_\gamma)_*([\alpha]) \neq [\alpha]$ . Une

application de l'exercice 3.6 permet de déterminer  $t_\gamma([\alpha])$  à isotopie près. Voir Fig. 3.6.

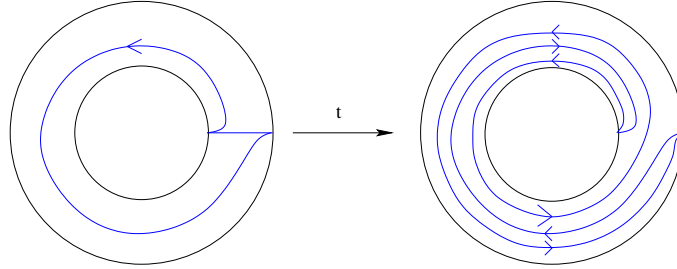


FIG. 2.6. L'action de  $t_\gamma$  sur la courbe  $c$ .

Il suffit ensuite de remarquer que  $t_\gamma(c)$  est homotope à  $c^2$ .

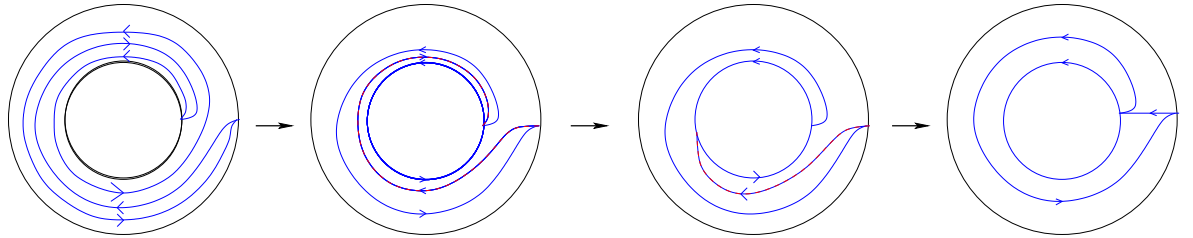


FIG. 2.7. Une homotopie entre  $t_\gamma(c)$  and  $c^2$ .

La Fig. 3.7 décrit une homotopie transformant  $t_\gamma(c)$  en (une courbe fermée simple homotope à)  $c^2$ . Comme  $\pi_1(A, z) \simeq \mathbb{Z}$  est infini cyclique engendré par  $[c]$ , il s'ensuit que  $[c]^2 \neq 1$ . On en conclut que  $t_\gamma \neq [\text{id}_A] = 1_{\mathfrak{M}(A)}$ . ■

EXERCICE 2.7. Compléter l'argument du lemme 3.2 et montrer que  $\mathfrak{M}(A)$  est engendré par  $t_\gamma$  et est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

Afin de décrire systématiquement l'action des twists de Dehn sur les courbes, il est utile d'introduire deux invariants. Ces deux invariants font intervenir l'intersection de courbes. C'est l'objet du paragraphe suivant.

#### 4. Intersections algébrique et géométrique

DEFINITION 2.2. Deux courbes fermées  $\alpha$  et  $\beta$  sont *en position générale* (ou *transverse*) sur une surface  $\Sigma$ , si pour tout point  $p \in \alpha \cap \beta$ ,  $T_p\alpha \oplus T_p\beta = T_p\Sigma$ . On note  $\alpha \pitchfork \beta$ .

LEMME 2.5. *Étant données deux courbes fermées  $\alpha$  et  $\beta$  en position générale sur une surface  $\Sigma$  compacte orientée, le nombre de points d'intersection  $\alpha \cap \beta$  est fini.*

On suppose à présent les hypothèses du lemme satisfaites. En chaque point d'intersection  $p \in \alpha \cap \beta$ , on définit un nombre d'intersection algébrique local par  $\varepsilon(p) = \pm 1$  selon que  $T_p\alpha \oplus T_p\beta$  ait la même orientation que  $T_p\Sigma$  ou non.

DEFINITION 2.3. La *forme d'intersection* d'une surface orientée  $\Sigma$  est la application biadditive antisymétrique  $H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par

$$(2.3) \quad \iota([\alpha], [\beta]) = [\alpha] \cdot [\beta] = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p) \in \mathbb{Z},$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux courbes fermées sur  $\Sigma$  représentant les classes  $[\alpha], [\beta] \in H_1(\Sigma)$  en position générale l'une par rapport à l'autre.

REMARQUE 2.6. On peut donner une définition purement homologique à l'aide de la dualité de Poincaré.

EXERCICE 2.8. Vérifier que la forme d'intersection est antisymétrique. [Vérifier que le nombre d'intersection local est lui-même antisymétrique en  $\alpha, \beta$ .]

REMARQUE 2.7. Si  $\Sigma$  n'est pas orientable, on peut encore définir une forme d'intersection  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . En fait, cette forme est le nombre d'intersection géométrique (introduit ci-dessous) modulo 2.

DEFINITION 2.4. Étant données deux courbes fermées simples  $\alpha, \beta$  sur  $\Sigma$ , on définit leur nombre d'intersection géométrique par

$$(2.4) \quad i(\alpha, \beta) = \min\{|\alpha' \cap \beta'| \mid \alpha' \text{ isotope à } \alpha, \beta' \text{ isotope à } \beta, \alpha' \cap \beta'\}.$$

En d'autres termes : on choisit deux courbes isotopes à  $\alpha$  et  $\beta$  qui sont transverses et qui minimisent le nombre de points d'intersection.

REMARQUE 2.8. Le nombre d'intersection géométrique est symétrique.

En vertu du fait que deux courbes sur une surface sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes, le nombre d'intersection géométrique est défini sur les classes d'homotopie libre (sans point base) : le nombre d'intersection induit donc une application symétrique  $\Omega(\Sigma) \times \Omega(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

EXERCICE 2.9. 1. Calculer  $i(\alpha, \alpha)$  et  $\iota([\alpha], [\alpha])$  pour une courbe fermée simple  $\alpha$ .

2. On suppose que  $\alpha$  sépare  $\Sigma$  en deux composantes connexes. Montrer que  $i(\alpha, \beta) = 0$  et que  $\iota(\alpha, \beta) = 0 \pmod{2}$  pour toute courbe fermée  $\beta$ .

Une observation fondamentale est que les difféomorphismes de surfaces préservent les nombres d'intersection :

LEMME 2.6. Soit  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  un difféomorphisme préservant l'orientation. Alors  $\varphi_* \iota = \iota$  et  $\varphi_* i = i$ .

*Preuve.* Il est clair que  $\varphi$  préserve l'intersection géométrique. La seconde égalité en résulte. Comme  $\varphi$  préserve l'orientation,  $\varepsilon_p(\alpha, \beta) = \varepsilon_{\varphi(p)}(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ . D'où le fait que  $\varphi$  préserve l'intersection algébrique. ■

Les nombres d'intersections sont donc des invariants du groupe des difféotopies de surfaces.



EXEMPLE 2.1. Calcul des intersections algébrique et géométrique des courbes fermées simples du tore. Le tore  $T^2 = S^1 \times S^1$  admet deux courbes fermées simples  $\alpha, \beta$  telles que  $\alpha \cdot \beta = +1$  dont les classes d'homotopie engendrent  $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  : le méridien et la longitude. Dans ce cas, l'isomorphisme est donné par  $\alpha \mapsto (1, 0)$  et  $\beta \mapsto (0, 1)$ . Montrer : une courbe simple sur le tore est fermée si et seulement si elle se relève en une droite d'équation  $px = qy$  de  $\mathbb{R}^2$  où  $p$  et  $q$  sont entiers (considérer un domaine fondamental de l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ ). En déduire que les courbes fermées simples du tore sont en correspondance bijective avec l'ensemble  $\{(p, q) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2 \mid (p, q) = 1\} \cup \{(0, 1), (1, 0)\}$ .

### 5. Un critère pour la minimalité : le critère du bigone

On donne ici un critère combinatoire pour déterminer si deux courbes fermées simples réalisent le nombre d'intersection géométrique. Ce critère est inclus pour deux raisons : 1) il est simple ; 2) il justifie a priori l'usage de dessins dans la preuve de certains résultats.

DEFINITION 2.5. Considérons deux courbes fermées simples  $\alpha$  et  $\beta$  sur une surface  $\Sigma$ . Un *bigone* est un disque fermé  $D \subset \Sigma$  dont le bord  $\partial D$  est la réunion de deux arcs  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  de  $\alpha$  et de  $\beta$  respectivement s'intersectant à leurs extrémités. Les courbes  $\alpha$  et  $\beta$  forment un *bigone* s'il existe un bigone satisfaisant à la condition ci-dessus.

PROPOSITION 2.5 (Le critère du bigone). *Deux courbes fermées simples sont en position minimale (réalisent le nombre d'intersection géométrique) si et seulement si elles ne forment aucun bigone.*

COROLLAIRE 2.4. *Deux courbes fermées simples s'intersectant transversalement exactement une fois sont en position minimale.*

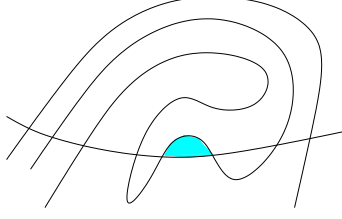
*Preuve.* L'existence d'un bigone implique aisément le fait que les courbes ne sont pas en position minimale : il existe une homotopie d'une des courbes qui diminue l'intersection géométrique des deux courbes de 2.

Montrons la réciproque. La preuve s'appuie sur un lemme :

LEMME 2.7. *Si deux courbes fermées simples transverses sur une surface ne forme pas de bigone alors dans le revêtement universel de  $S$ , deux relevés quelconques des courbes s'intersectent en au plus un point.*

*Preuve du Lemme.* Le cas où  $\Sigma$  est une sphère est aisé et est laissé en exercice. On suppose par la suite que le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  est  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  la projection correspondante. Supposons que les relevés  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  s'intersectent en deux points. Il y a donc un disque plongé  $D$  dans  $\tilde{\Sigma}$  bordé par un sous-arc de  $\tilde{\alpha}$  et un sous-arc de  $\tilde{\beta}$ .

Considérons l'intersection  $G = D \cap p^{-1}(\alpha \cup \beta)$  : c'est l'intersection de  $D$  avec tous les relevés de  $\alpha$  et de  $\beta$ . On peut décomposer  $G = S_G \cup (G - S_G)$  de la manière suivante :  $x \in S_G$  ssi  $x \in D \cap p^{-1}(\alpha) \cap p^{-1}(\beta)$ . Autrement dit,  $x \in S_G$  ssi  $x$  est un point d'intersection dans  $D$  de deux arcs appartenant à des relevés de  $\alpha$  et de  $\beta$ . L'ensemble  $S_G$  est fini : par compacité de  $D$  (disque fermé), si  $S_G$  était infini, il

FIG. 2.8. Un disque  $D'$  entre des relevés de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

posséderait un point d'accumulation. Or ceci contredit la transversalité de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Il en résulte qu'il existe un nombre fini d'arcs de  $p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)$  passant par un point  $x \in S_G$  (considérer l'intersection de ces arcs avec  $\partial D$  et  $D$ ).

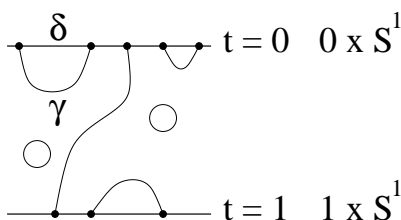
On pense à  $G$  comme à un graphe fini dont l'ensemble des sommets est  $S_G$ . On trouve alors un disque interne  $D' \subset D \subset \tilde{\Sigma}$  ayant la propriété suivante :  $D'$  borde un sous-arc de  $p^{-1}(\alpha)$  et un sous-arc de  $p^{-1}(\beta)$  et aucun arc de  $p^{-1}(\alpha \cup \beta)$  ne traverse l'intérieur de  $D'$ . Voir la figure 3.

Du fait des propriétés de  $D'$ ,  $p|_{\partial D'}$  est un plongement. On affirme qu'en fait,  $p|_{D'}$  est un plongement. Sinon on aurait deux points distincts  $x$  et  $y$  dans  $D'$  tels que  $p(x) = p(y)$ . Donc il existe un automorphisme  $\varphi$  du revêtement tel que  $\varphi(x) = y$ . Puisque  $\partial D'$  se plonge par la projection du revêtement,  $\partial D' \cap \varphi(\partial D')$  est ou bien vide ou bien égal à  $\partial D'$  entier (auquel cas  $\varphi$  est l'identité car le groupe des automorphismes du revêtement agit librement). L'image  $\varphi(D')$  est un disque plongé dans  $\mathbb{R}^2$ , n'intersectant pas  $\partial D'$  et contenant  $y = \varphi(x) \in D'$ . D'après le théorème de Jordan-Schönflies,  $\mathbb{R}^2 - \varphi(\partial D')$  possède deux composantes connexes, dont une est bornée qui est l'intérieur  $\text{Int}(\varphi(D'))$  du disque  $\varphi(D')$ . Cette composante doit donc contenir  $y = \varphi(x)$ . Si  $\varphi \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ , alors  $\varphi(\partial D') \cap \partial D' = \emptyset$ , donc le disque  $\varphi(D')$  soit contient  $D'$  soit est contenu dans  $D'$ . On en déduit donc dans tous les cas que  $\varphi^{\pm 1}(D') \subseteq D'$ . Le théorème de Brouwer (appliqué à  $\varphi^{\pm 1}$ ) assure alors que  $\varphi$  possède un point fixe. L'action étant libre, ceci implique que  $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ . Mais alors  $x = y$ , ce qui contredit notre hypothèse de départ. ■

*Fin de la preuve de la proposition du bigone* : supposons donc que  $\alpha$  et  $\beta$  ne soient pas en position minimale : il existe une homotopie  $(h_t)_{t \in I} : I \times S^1 \rightarrow \Sigma$  telle que  $h_0 = \alpha$  et  $|h_1 \cap \beta| < |\alpha \cap \beta|$ . On peut supposer sans perte de généralité que les courbes fermées simples  $\alpha$  et  $\beta$  sont en position générale et même que l'homotopie  $H : I \times S^1 \rightarrow \Sigma$ ,  $(t, s) \mapsto h_t(s)$  est transverse à  $\beta$ . Dans ce cas,  $H^{-1}(\beta)$  est une sous-variété de codimension 1 de  $I \times S^1$ . Une représentation schématique est donnée par la figure 4.2. Le bord de cette variété est

$$\partial H^{-1}(\beta) = (h_0(I) \cap \beta) \cup (h_1(I) \cap \beta) = (\alpha \cap \beta) \cup (h_1(I) \cap \beta).$$

Les composantes connexes forment donc des cobordismes entre ces points ; comme indiqué sur la figure 4.2, il y en a de quatre types différents : la composante sans bord, la composante reliant deux points distincts dans  $\alpha \cap \beta$ , la composante reliant deux points distincts dans  $h_1(I) \cap \beta$  et la composante reliant un point dans  $\alpha \cap \beta$  à un point dans  $h_1(I) \cap \beta$ . Comme  $|h_1 \cap \beta| < |\alpha \cap \beta|$ , il existe nécessairement une composante  $\gamma$  de  $H^{-1}(\beta)$  reliant deux points dans  $\alpha \cap \beta$ . Soit  $\gamma$  un arc dans  $0 \times S^1$

FIG. 2.9. Les différentes composantes de  $H^{-1}(\beta)$ .

reliant ces deux points. Alors (avec des orientations correctes) l'arc  $\gamma \star \delta^{-1}$  est un lacet parcourant une courbe fermée simple bordant un disque  $\Delta$  dans  $I \times S^1$ . L'image  $H(\gamma \star \delta^{-1})$  est une courbe fermée simple incluse dans  $\alpha \cup \beta \subset \Sigma$  homotopiquement triviale car l'application  $H \circ (\gamma \star \delta^{-1}) : S^1 \rightarrow \Sigma$  s'étend en une application continue  $H|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \Sigma$ . D'après la théorie des revêtements, cette courbe fermée simple se relève donc en une courbe fermée simple  $c$  dans le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ . Ce relevé  $c$  est constitué d'un arc qui est le relevé d'un arc de  $\alpha$  et d'un arc qui est le relevé d'un arc de  $\beta$ , donc ces relevés d'arcs s'intersectent deux fois. Le lemme 4.3 s'applique :  $\alpha$  et  $\beta$  forment un bigone. ■

*Remarque 1.* Pourquoi a-t-on besoin du lemme ? Le problème est que le disque bordé par la courbe fermée simple  $H(\gamma \star \delta^{-1})$  n'est pas nécessairement un bigone.

*Remarque 2.* Il existe d'autres preuves de la proposition du bigone : l'une utilise la géométrie de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  : voir le livre [4] de Farb et Margalit (en anglais) ou bien celui de Laudenbach, Fathi et Poenaru [5], plus ancien mais très clair et en français.

Nous donnons ci-dessous une autre preuve, élémentaire. Elle utilise les faits suivants :

- deux courbes fermées simples homotopes dans  $\Sigma$  sont en fait isotopes dans  $\Sigma$  (voir les articles d'Epstein [3] ou de Baer [2]).
- toute surface est triangulable (le cas compact est aisé : voir par exemple Alfors-Sario, §48 [1]).

On peut travailler dans la catégorie linéaire par morceaux. Les courbes fermées simples sont des courbes polygonales finies. Une triangulation  $(T, \tau)$  donnée de la surface  $\Sigma$  est dite *compatible* avec les courbes  $\alpha$  et  $\beta$  si celles-ci sont entièrement supportées par les arêtes de la triangulation. Une isotopie de la courbe  $\alpha$  est *simple* si elle affecte une unique simplexe (triangle) de la triangulation. Par exemple, les isotopies qui sont l'identité en-dehors des simplexes représentés par la figure 4.3 sont des isotopies simples. La figure indique l'isotopie dans le simplexe. Noter qu'après une isotopie  $h_t$ , même simple, la nouvelle courbe  $h_1(\alpha)$  n'est pas nécessairement compatible avec la triangulation de départ.

Une isotopie  $h_t$  de  $\alpha$  est *élémentaire* si elle est simple et si la triangulation reste compatible avec  $h_1(\alpha)$  et  $\beta$ . Dans la figure 4.4 sont représentées deux isotopies élémentaire. Les sous-arcs des courbes sont représentés en rouge pour  $\alpha$  et en bleu pour  $\beta$ . L'isotopie est l'identité en-dehors du simplexe de la figure. L'isotopie de type I modifie un sous-arc de la courbe  $\alpha$  qui est supporté par deux arêtes du

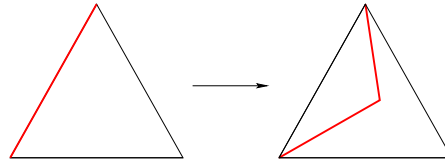


FIG. 2.10. Isotopies simples : elles n'affectent qu'un simplexe à la fois.

simplexe ; à la fin de l'isotopie le sous-arc est entièrement supporté par la troisième arête du simple. L'isotopie de type II est identique à l'isotopie de type I à cette différence près que la troisième arête du simplexe supporte un sous-arc de la courbe  $\beta$ . En particulier, à la fin de l'isotopie de type II, les courbes ne sont plus transverses (elles ont un sous-arc commun).

LEMME 2.8 (Classification des isotopies élémentaires). *Toute isotopie élémentaire est de la forme indiquée par la figure 4.4*

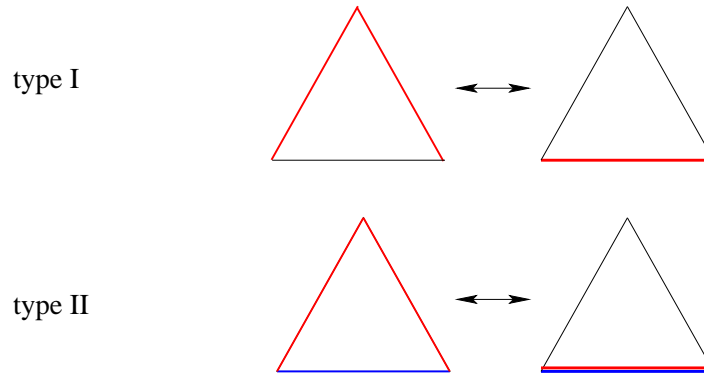


FIG. 2.11. Isotopies élémentaires : elles n'affectent qu'un simplexe à la fois et la triangulation reste compatible.

LEMME 2.9 (Décomposition des isotopies en isotopies élémentaires). *Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes fermées simples (polygonales finies). Soit  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie de  $\alpha$ . Il existe une triangulation de la surface  $\Sigma$  de telle sorte que chaque isotopie se décompose en une suite d'isotopies élémentaires.*

*Preuve du lemme.* Il suffit de subdiviser la triangulation. ■

Pour démontrer la proposition du bigone, on applique le lemme de décomposition des isotopies en isotopies élémentaires à une isotopie  $H$  diminuant le nombre d'intersection géométrique entre  $\alpha$  et  $\beta$  : l'isotopie  $H$  se décompose en une composition d'isotopies élémentaires :  $H = h_r \circ h_{r-1} \circ \dots \circ h_1$ . On applique ensuite le lemme de classification des isotopies élémentaires : comme le nombre d'intersection géométrique diminue, au moins une isotopie élémentaire  $h_i$  est du type II. Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $h_i$  soit de type II. Soit  $\Delta$  le simplexe correspondant à

l'isotopie  $h_i$ . Alors le bigone recherché est donné par  $D = (h_i \circ \dots \circ h_1)^{-1}(\Delta)$ . ■

*Remarque 3.* Il existe une version de la proposition du bigone pour les arcs (à extrémités fixées dans des points distingués de  $\Sigma$  ou dans le bord  $\partial\Sigma$ ). Dans ce cas, il est essentiel que les isotopies soient l'identité sur le bord.

## 6. Génération par les twists de Dehn

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  de difféotopies d'une surface  $\Sigma$  est engendré par les twists de Dehn autour de courbes fermées simples non séparantes; on précise ensuite qu'un nombre fini de tels twists est suffisant, ce qui montre que  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  est de type fini.

Ce fait a déjà été observé dans les cas suivants :  $\mathfrak{M}(S^1 \times S^1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  (engendré par les twists de Dehn autour du méridien et de la longitude respectivement) et  $\mathfrak{M}(S^1 \times I) = \mathbb{Z}$  (engendré par le twist de Dehn autour de l'âme de l'anneau).

Cependant, nous ne pouvons pas espérer que la technique utilisée dans le cas du tore par exemple fonctionne pour démontrer le cas général : en effet, dans le cas du tore  $S^1 \times S^1$  et de l'anneau, nous avons en réalité considéré l'application naturelle

$$\mathfrak{M}^\pm(\Sigma) \rightarrow \mathrm{Aut}(H_1(\Sigma; \mathbb{Z})), [f] \mapsto f_*$$

et nous avons montré que cette application est un isomorphisme pour  $\Sigma = S^1 \times S^1$  et  $\Sigma = S^1 \times I$ .

*Exercice.* Montrer que l'application ci-dessus  $[f] \mapsto f_*$  n'est *pas* surjective si le genre est plus grand que 1 ( $g \geq 2$ ) [On pourra utiliser le fait que  $f_*$  préserve la forme d'intersection algébrique]. Pour montrer qu'elle n'est *pas* injective, on peut procéder comme suit : considérer la figure ci-dessous représentant une surface  $\Sigma_2$  orientable de genre 2.

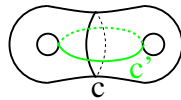


FIG. 2.12. Deux courbes fermées simples sur une surface orientable de genre 2.

Montrer que :

- (1)  $c$  est homologue à 0 :  $[c] = 0$  dans  $H_1(\Sigma_2)$ .
- (2) L'image  $\tau_c(c')$  de  $c'$  par le twist de Dehn autour de  $c$  est homologue à  $c'$  :  $[\tau_c(c')] = [c']$  dans  $H_1(\Sigma_2)$ .
- (3) L'image  $\tau_c(c')$  de  $c'$  par le twist de Dehn autour de  $c$  n'est pas isotope (resp. homotope) à  $c'$ .
- (4) En déduire que le noyau de l'application  $[f] \mapsto f_*$  est non trivial.

Commençons par décrire quelques propriétés des twists de Dehn. La première dit que le conjugué d'un twist de Dehn est un twist de Dehn :

LEMME 2.10 (Le conjugué d'un twist de Dehn). *Soit  $f \in \mathfrak{M}(\Sigma)$  et  $c$  (la classe d'isotopie d') une courbe fermée simple dans  $\Sigma$ . Alors*

$$(2.5) \quad f \circ \tau_c \circ f^{-1} = \tau_{f(c)}.$$

*Preuve.* Rappelons la définition du twist de Dehn :  $\tau_c = [t_c]$  pour une courbe fermée simple  $c$ . Soit

- $v$  notre volte originale (définie comme un difféomorphisme de la couronne  $A = \{z \in \mathbb{C}, 1 \leq |z| \leq 2\}$ ).
- $j : A \rightarrow \Sigma$  un plongement de  $A$  dans  $\Sigma$ .

Alors  $t_c$  est défini par  $j \circ v \circ j^{-1}$  sur  $j(A) \subseteq \Sigma$  et par l'identité ailleurs. Puisque  $f \circ j : A \rightarrow \Sigma$  est encore un plongement et que

$$f \circ t_c \circ f^{-1} = f \circ j \circ v \circ j^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ j) \circ v \circ (f \circ j)^{-1},$$

on en déduit que  $f \circ t_c \circ f^{-1} = t_{f(c)}$ . ■

COROLLAIRE 2.5. *Deux twists de Dehn relatifs à des courbes fermées simples non séparantes sont conjugués dans le groupe de difféotopie de  $\Sigma$ .*

*Preuve.* En effet, deux courbes fermées simples non séparantes se déduisent l'une de l'autre par un difféomorphisme  $f$  de la surface  $\Sigma$ . ■

COROLLAIRE 2.6. *Si  $f \in \text{Diffeo}_0(\Sigma)$  alors  $\tau_c = \tau_{f(c)}$  dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ .*

*Preuve.* Puisque  $f$  est isotope à l'identité,  $f = 1$  dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ . Le lemme précédent donne le résultat. ■

LEMME 2.11. *Soient  $c_1, c_2$  deux (classes d'isotopie de) courbes fermées simples sur  $\Sigma$  telles que  $i(c_1, c_2) = 1$ .*

- (1)  $\tau_{c_1} \circ \tau_{c_2}(c_1) = c_2$ .
- (2)  $\tau_{c_2} \circ \tau_{c_1}^2 \circ \tau_{c_2}(c_1) = c_1$  et  $\tau_{c_2} \circ \tau_{c_1}^2 \circ \tau_{c_2}$  est représenté par un difféomorphisme envoyant  $c_1$  sur  $c_1$  en renversant l'orientation de  $c_1$ .

*Preuve.* Quitte à conjuguer par un difféomorphisme et ensuite utiliser le lemme 6.1, il suffit de le voir pour deux courbes standard vérifiant les conditions de l'énoncé : le méridien et la longitude d'une même anse de la surface présentée comme sphère avec des anses. ■

Le lemme suivant montre que l'on peut plonger les groupes de tresses dans le groupe de difféotopies d'une surface.

LEMME 2.12. *Soient  $c_1, c_2$  deux courbes fermées simples dans  $\Sigma$ .*

- (1) *Si  $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ , alors  $\tau_{c_1} \tau_{c_2} = \tau_{c_2} \tau_{c_1}$ .*
- (2) *Si  $c_1 \pitchfork c_2 = \{p\}$  alors  $\tau_{c_1} \tau_{c_2} \tau_{c_1} = \tau_{c_2} \tau_{c_1} \tau_{c_2}$ .*

*Preuve.* (1) Pour  $f \in \text{Diffeo}(\Sigma)$  on note  $\text{Supp}(f) = \{x \in \Sigma, f(x) \neq x\}$  le support de  $f$ . Vu l'hypothèse,  $\tau_{c_1}$  et  $\tau_{c_2}$  sont représentés par des difféomorphismes ayant des supports disjoints. D'où le résultat.

(2) La relation est équivalente à

$$\tau_{c_2} \tau_{c_1} \tau_{c_2}^{-1} = \tau_{c_1}^{-1} \tau_{c_2} \tau_{c_1},$$

ce qui équivaut d'après le lemme 6.1 à

$$\tau_{\tau_{c_2}(c_1)} = \tau_{\tau_{c_1}^{-1}(c_2)}.$$

Il suffit donc de montrer que  $\tau_{c_2}(c_1) = \tau_{c_1}^{-1}(c_2)$ , ce qui équivaut à  $\tau_{c_1} \tau_{c_2}(c_1) = c_2$  : c'est le lemme 6.2. ■

LEMME 2.13. *Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux courbes fermées simples non séparantes sur  $\Sigma$  telles que  $i(c_1, c_2) = 0$ . Il existe un produit  $T$  de twists de Dehn relatifs à des courbes fermées simples non séparantes tel que  $T(c_1) = c_2$ .*

*Preuve.* Il existe une cfs  $c_3$  telle que  $i(c_1, c_3) = i(c_3, c_2) = 1$  (utiliser un difféomorphisme approprié de la surface). Donc  $c_3$  est non séparante. Alors

$$\tau_{c_3} \tau_{c_2} \tau_{c_1} \tau_{c_3}(c_1) = \tau_{c_3} \tau_{c_2}(c_3) = c_2$$

par deux applications du lemme 6.2. ■

LEMME 2.14. *On suppose que le genre  $g$  de  $\Sigma$  est supérieur ou égal à 2. Soient  $c, c'$  deux courbes fermées simples non séparantes. Il existe une suite de courbes fermées simples non séparantes  $c_0 = c, c_1, \dots, c_r = c'$  telles que  $i(c_k, c_{k+1}) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, r - 1$ .*

*Preuve.* Récurrence sur  $i(c, c') \in \mathbb{N}$ . Pour  $i(c, c') = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Pour  $i(c, c') = 1$ , on considère un voisinage  $V$  régulier de  $c \cup c'$  :  $V$  est un anneau (un voisinage régulier de  $c$ ) auquel on a rajouté une anse, c'est donc topologiquement un tore moins un disque. Puisque  $g \geq 2$ ,  $\partial V$  est une courbe fermée simple non séparante d'intersection nulle avec  $c_1$  et  $c_2$ . On fait ensuite l'hypothèse de récurrence que le résultat est vrai pour toute paire de courbes fermées simples dont l'intersection géométrique est strictement inférieure à  $i(c, c')$ . On cherche alors une courbe fermée simple non séparante  $\gamma$  telle que  $i(c, \gamma) < i(c, c')$  et  $i(\gamma, c') < i(c, c')$  de manière à pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence. On considère deux points d'intersection consécutifs quand on parcourt l'une des courbes, disons le long de  $c'$ . Il y a deux cas principaux à considérer selon que l'intersection algébrique locale est la même ou non aux deux points d'intersection. ■

THÉORÈME 2.2. *Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée connexe. Le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  est engendré par les twists de Dehn relatifs aux courbes fermées simples non séparantes.*

*Démonstration.* Le théorème est vrai pour le disque, le disque percé, la sphère (groupe de difféotopies trivial) et le tore (groupe de difféotopies engendré par les deux twists de Dehn relatifs à la longitude et au méridien respectivement).

PROPOSITION 2.6 (Dehn-Lickorish). *Soit  $\Sigma_g$  une surface compacte connexe sans bord. Le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$  est engendré par les twists de Dehn relatifs aux  $3g - 1$  cercles dessinés sur la figure 6.2.*

Une collection de courbes fermées simples deux à deux disjointes sur le bord d'un corps en anses  $U$  de genre  $g$  sera appelée *adaptée* à  $U$  si elle forme un système minimal de générateurs pour  $\pi_1(U)$ . Une collection adaptée a donc  $g$  éléments.

LEMME 2.15. *Pour étendre  $\sigma : \partial U \rightarrow \partial U'$  en un homéomorphisme  $U \rightarrow U'$ , il faut et il suffit que  $\sigma$  envoie une collection adaptée à  $U$  sur une collection adaptée à  $U'$ .*

La condition est nécessaire : si  $\sigma$  s'étend, il induit un isomorphisme  $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(U')$  et donc toute collection adaptée à  $U$  doit être envoyée sur une collection adaptée à  $U'$ .

La condition est suffisante : cela provient d'un résultat du à D.R. McMillan et à Z. Zieschang (et à O. Mitsuyuki dans le cas de surface non orientable)<sup>2</sup> :

PROPOSITION 2.7. *Soient deux collections de courbes fermées simples deux à deux disjointes sur le bord de corps en anses  $U, U'$  de genre  $g$  respectivement. Si les collections sont adaptées à  $U$  et à  $U'$  respectivement, alors il existe un homéomorphisme  $U \rightarrow U'$  envoyant les éléments d'une collection sur l'autre.*

*Démonstration.* Utiliser le théorème de Dehn-Lickorish ; les twists de Dehn relatifs à un méridien se prolongent. A compléter.

Remarquons que le lemme 2.15 admet la reformulation suivante :

LEMME 2.16. *L'homéomorphisme  $\sigma : \partial U \rightarrow \partial U'$  s'étend en un homéomorphisme  $U \rightarrow U'$  si et seulement si  $\sigma_*(\text{Ker } u_*) \subseteq \text{Ker } s_*$ .*

Or précisément cette condition est vérifiée puisque  $\sigma_* = a$  et que le diagramme ci-dessus est commutatif. Donc  $\sigma$  s'étend en un homéomorphisme  $U \rightarrow U'$  (induisant  $\alpha_1$ ). De même l'homéomorphisme  $\sigma$  s'étend un homéomorphisme  $V \rightarrow V'$  (induisant  $\alpha_2$ ). ■

---

<sup>2</sup>D. R. McMillan, *Homeomorphisms on a solid torus*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 386–390 ; H. Zieschang, *Über einfache Kurven auf Vollbrezeln*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (1962), 231–250 ; O. Mitsuyuki, *Homeomorphisms on a three-dimensional handle*, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), no. 4, 697–702.



## Première approche du groupe de difféotopies d'une surface

### 1. Définitions

Soit  $\Sigma = \Sigma_g$  une surface connexe compacte orientée de genre  $g$ . On munit  $\Sigma$  d'une structure de variété différentiable de dimension 2. L'ensemble  $\text{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$  des difféomorphismes  $\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  tels que  $\varphi|_{\partial\Sigma} = \text{id}_{\partial\Sigma}$  forme un groupe topologique pour la topologie compacte-ouverte (élément neutre =  $\text{Id}_{\Sigma}$ , produit = composition).

DEFINITION 3.1. Le *groupe des difféotopies* (*mapping class group* en anglais) de  $\Sigma_g$  est le groupe

$$(3.1) \quad \mathfrak{M}^{\pm}(\Sigma) = \text{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma) / \text{Iso}(\Sigma).$$

C'est le groupe des difféomorphismes  $\varphi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  tels que  $\varphi|_{\partial\Sigma} = \text{id}_{\partial\Sigma}$ , considérés à isotopie (l'isotopie étant constamment l'identité sur le bord) près.

Quand  $\Sigma_g$  est orienté, on considère en général la version orientée

$$(3.2) \quad \mathfrak{M}(\Sigma_g) = \text{Diffeo}^+(\Sigma_g) / \text{ISO}(\Sigma_g)$$

qui est le sous-groupe des homéomorphismes  $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  préservant l'orientation considérés à isotopie près.

L'exercice suivant justifie la définition ci-dessus

EXERCICE 3.1. Vérifier que si deux difféomorphismes  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont isotopes et que  $\varphi_0$  préserve l'orientation, alors il en est de même de  $\varphi_1$ .

Il existe des difféomorphismes renversant l'orientation :

EXERCICE 3.2. Pour toute surface orientée  $\Sigma$ , il existe un difféomorphisme involutif renversant l'orientation de  $\Sigma$ .

*Preuve.* Toute surface orientée peut être plongée dans  $\mathbb{R}^3$  (exercice : le montrer<sup>1</sup>). De plus, on peut isotoper  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^3$  de sorte que la symétrie orthogonale par rapport à un plan  $P \subset \mathbb{R}^3$  laisse  $\Sigma$  globalement invariante. ■

Si la surface  $\Sigma$  a un bord  $\partial\Sigma$  non vide, on remarque que le difféomorphisme renversant l'orientation construit dans la preuve ci-dessus n'est pas l'identité sur le bord. En fait, on peut remarquer que c'est toujours le cas :

<sup>1</sup>Exercice supplémentaire : le montrer sans utiliser la classification des surfaces.

EXERCICE 3.3. Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  alors tout difféomorphisme  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tel que  $\varphi|_{\partial\Sigma} = \text{id}_{\partial\Sigma}$  préserve l'orientation de  $\Sigma$ . Il en résulte que

$$\partial\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{M}^\pm(\Sigma) = \mathfrak{M}(\Sigma).$$

Le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  est un sous-groupe (normal) d'indice 2 du premier. Nous avons donc une suite exacte scindée de groupes

$$1 \longrightarrow \mathfrak{M}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{M}^\pm(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

REMARQUE 3.1. Si l'on remplace  $\text{Diffeo}(M)$  par  $\text{Homeo}(M)$  dans la définition (où  $M$  est munie de sa structure de variété topologique seulement), on définit le groupe des homéotopies de  $M$ . Pour une variété générale  $M$ , ce groupe diffère du groupe des difféotopies. Dans ce cours, nous considérons uniquement des surfaces. Dans cette dimension (2), ces deux groupes coïncident :

THÉORÈME 3.1. *Tout homéomorphisme d'une surface  $\Sigma$  est isotope à un difféomorphisme.*

La démonstration de ce résultat repose sur le fait que toute surface est triangulable, de façon essentiellement unique (c'est-à-dire que deux triangulations admettent un raffinement commun). Pour ces faits, on pourra se reporter à [1] et à [7]. On pourrait d'ailleurs définir également le groupe des homéotopies linéaires par morceaux de  $\Sigma$  : on retrouverait essentiellement la même notion. On utilisera donc librement les catégories TOP et DIFF, groupe des homéotopies et groupe des difféotopies.

REMARQUE 3.2. Avec  $\text{Homeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$  muni de la topologie "compact-ouvert", alors un chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Homeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$  est la même chose qu'une isotopie entre  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$ . Même remarque avec  $\text{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$ . C'est pourquoi on peut définir aussi

$$\mathfrak{M}(\Sigma) = \pi_0(\text{Homeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma)) = \pi_0(\text{Diffeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma)).$$

REMARQUE 3.3 (Variantes). Il arrive que l'on ait besoin d'autres versions du groupe des difféotopies en enrichissant un peu la surface en distinguant  $n$  points (ou trous) dans l'intérieur de  $\Sigma$ . On note alors  $\Sigma = \Sigma_{g,b,n}$  où  $g$  est le genre de  $\Sigma$ ,  $b = b_0(\partial\Sigma)$  est le nombre de composantes connexes (cercles) du bord de  $\Sigma$  et  $n$  le nombre de points distingués. Il résulte de la classification des surfaces qu'une telle surface est déterminée à difféomorphisme près par le triplet  $(g, b, n)$ . Le groupe de difféotopies de  $\Sigma_{g,b,n}$  est alors le groupe des classes d'isotopies de difféomorphismes de  $\Sigma$  qui sont l'identité sur le bord et qui préservent globalement l'ensemble des  $n$  points distingués dans  $\Sigma$ . Les cas particuliers les plus importants (qui seront vus dans ce cours) sont les suivants :

- $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,0,0})$  (le cas classique sans bord ni trou) ;
- $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0})$  (cas précédent avec un disque enlevé) ;
- $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,1,n})$  (disque avec  $n$  trous) : le groupe de tresses  $B_n$ .

## 2. Exemples de groupes de difféotopies

On calcule dans ce paragraphe les groupes de difféotopies dans les cas élémentaires du disque, de la sphère et du tore.

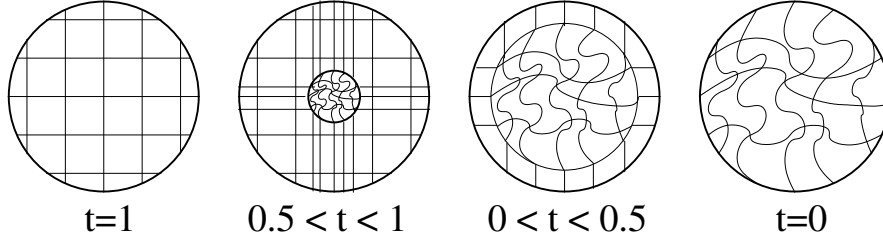


FIG. 3.1. Isotopie du truc d'Alexander. Les courbes sont les images des droites horizontales et verticales respectivement au cours de l'isotopie.

**2.1. Le truc d'Alexander, le disque et la sphère.** Le truc d'Alexander montre explicitement que  $\text{Homeo}(D^2, \partial D^2) = \text{Homeo}^+(D^2, \partial D^2)$  est contractile. Il est vrai en toute dimension  $n \geq 1$ .

LEMME 3.1 (Truc d'Alexander). *Soit  $f : D^n \rightarrow D^n$  un homéomorphisme tel que  $h|_{\partial D^n} = \text{Id}_{S^{n-1}}$ . Alors  $f$  est isotope à l'identité relativement au bord  $\partial D^n = S^{n-1}$ .*

Une isotopie est donnée explicitement par

$$F(x, t) = \begin{cases} t f(\frac{1}{t}x) & \text{if } 0 \leq \|x\| \leq t \\ x & \text{if } t \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 3.1.  $\mathfrak{M}(D^n) = \{1\}$ .

Remarquons que si  $f$  fixe l'origine ( $f(0) = 0$ ) alors l'isotopie  $F(-, t) = f_t$  du truc d'Alexander fixe l'origine pour tout  $0 \leq t \leq 1$ . Autrement dit,  $f$  est isotope à  $\text{Id}_{D^n}$  à travers des homéomorphismes fixant l'origine 0 de  $D^n$ . On en déduit

COROLLAIRE 3.2.  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,0,1}) = \mathfrak{M}(D^n \setminus \{0\}) = \{1\}$ .

REMARQUE 3.4. La démonstration du truc d'Alexander est dans la catégorie TOP. De même les corollaires ci-dessus.

PROPOSITION 3.1. *Le groupe  $\mathfrak{M}(S^2)$  est trivial.*

*Démonstration.*

Notons le cas particulier  $n = 1$  du lemme : le truc d'Alexander dit qu'un homéomorphisme  $S^1 \rightarrow S^1$  est isotope à l'identité.

A présent, soit  $f : S^2 \rightarrow S^2$  un homéomorphisme. Montrons que  $f$  est isotope à l'identité. Soit  $c = \{(x, y, 0) \in S^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  l'équateur de  $S^2$ . Alors  $f(c)$  est une courbe fermée simple dans  $S^2$ , isotope à  $c$ . On peut donc grâce à une isotopie préliminaire supposer que  $f(c) = c$ . D'après le truc d'Alexander pour  $n = 1$ , l'homéomorphisme  $f|_c : S^1 \rightarrow S^1$  est isotope à l'identité. Au moyen d'une nouvelle isotopie, on se ramène donc au cas où  $f$  est l'identité sur l'équateur. La sphère  $S^2$  est le recollement le long de l'équateur de deux disques (les hémisphères). Il suffit donc de montrer que la restriction de  $f$  à chacun de ces hémisphères est l'identité :

c'est une application du truc d'Alexander pour  $n = 2$ . ■

REMARQUE 3.5. Il existe un argument dans la catégorie DIFF sans utiliser le truc d'Alexander.

**2.2. Le groupe de difféotopies du tore.** Le tore est l'exemple le plus simple de surface fermée dont le groupe de difféotopies est non trivial.

PROPOSITION 3.2. *Le groupe  $\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1)$  est isomorphe à  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* L'application

$$\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1) \rightarrow \mathrm{Aut}(\pi_1(S^1 \times S^1, \star)), [f] \mapsto f_*$$

est bien définie. Les courbes fermées simples  $\mu = \star \times S^1$  et  $\lambda = S^1 \times \star$  engendrent le groupe fondamental  $\pi_1(S^1 \times S^1, \star) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . En particulier, elles engendrent  $H_1(S^1 \times S^1)$  et  $\mathrm{Aut}(H_1(S^1 \times S^1)) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2)$ . En écrivant  $f_*$  dans la base  $([\lambda], [\mu])$  de  $H_1(S^1 \times S^1)$ , l'application ci-dessus induit une application

$$\mathfrak{M}^\pm(S^1 \times S^1) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), [f] \mapsto \mathrm{Mat}_{([\lambda], [\mu])}(f_*).$$

Par functorialité de  $\pi_1$ , c'est un morphisme de groupes. Si  $f$  préserve l'orientation alors tout homéomorphisme isotope à  $f$  préserve l'orientation et  $\det(f_*) = +1$ .

Surjectivité : il est aisé (cf. Exercice 3.4 ci-dessous) d'engendrer  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  à l'aide des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

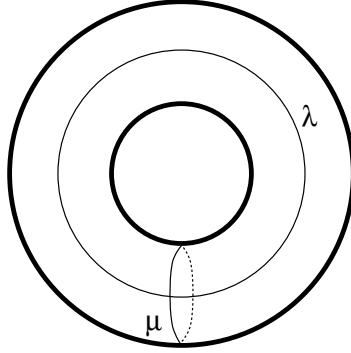
Or chacune de ces matrices a une interprétation aisée à l'aide des twists de Dehn (relativement à  $\mu$  et  $\lambda$ ) et comme inversion  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, (x, y) \mapsto (y, x)$  respectivement. Alternativement : remarquer que  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  agit par homéomorphismes sur  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$ . Donc toute matrice de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  s'interprète *ipso facto* comme autohoméomorphisme du tore.

Injectivité : une démonstration est donnée au début du livre de D. Rolfsen. Soit  $f$  un homéomorphisme du tore tel que  $f_* = \mathrm{id} \in \pi_1(S^1 \times S^1, \star)$ . Il s'agit alors de montrer que  $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  est homotopiquement trivial seulement si  $f$  est isotopiquement trivial. Ceci est vrai en fait pour tous les homéomorphismes de surface. ■

On en déduit facilement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.3. *Le groupe  $\mathfrak{M}(S^1 \times S^1)$  est isomorphe à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .*

EXERCICE 3.4. Soit  $\lambda$  et  $\mu$  les courbes représentant la longitude et le méridien d'un tore avec les orientations de la figure 2.2 (de sorte que  $\iota(\lambda, \mu) = +1$ ). Vérifier que  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  est engendré par  $\mathrm{Mat}_{\lambda, \mu}((\tau_\lambda)_*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathrm{Mat}_{\lambda, \mu}((\tau_{\mu})_*) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .



### 3. Twist de Dehn

Nous allons à présent construire des éléments non triviaux de  $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$ . Nous commençons par une description d'un homéomorphisme d'un anneau, appelé une *volte* (*twist* en anglais).

Soit  $A$  l'anneau dans  $\mathbb{C}$  défini par  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ . Le bord  $\partial A$  est constitué de deux cercles concentriques  $\partial_- A$  et  $\partial_+ A$  de centre 0 et de rayons  $r = 1$  et  $r = 2$  respectivement. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue croissante vérifiant  $f(r) = 0$  pour  $r \leq 1$ ,  $f(r) = 2\pi$  pour  $r \geq 2$ . La volte (ou le twist) de Dehn est l'homéomorphisme  $v : A \rightarrow A$  défini par

$$v(r e^{i\theta}) = r e^{i(\theta+f(r))}.$$

Si l'on choisit  $f$  lisse, alors le twist de Dehn est un difféomorphisme.

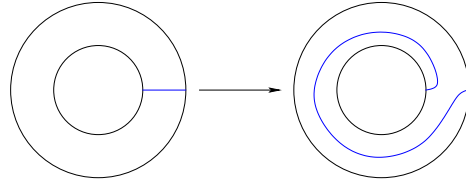


FIG. 3.2. L'action de la volte de Dehn sur le segment radial  $[1, 2] \subset A$ .

*Exercice.* A isotopie près fixant le bord  $\partial A$ , le twist de Dehn ne dépend pas de la fonction  $f$  choisie et est entièrement déterminé par la figure 3.2.

Remarquons que le twist de Dehn se prolonge en un homéomorphisme  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  en définissant  $v|_{\mathbb{C}-A} = \text{id}_{\mathbb{C}-A}$ . Soit maintenant  $j : A \rightarrow \Sigma_g$  un plongement préservant l'orientation de l'anneau  $A$  dans une surface  $\Sigma_g$  quelconque. Ce plongement peut être vu comme le paramétrage d'un voisinage orientable  $j(A)$  d'une courbe fermée simple  $\gamma$  dans  $\Sigma_g$ . L'homéomorphisme  $t_\gamma = j \circ v \circ j^{-1} : j(A) \rightarrow j(A)$  se prolonge en un homéomorphisme encore noté  $t_\gamma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  par l'identité hors de  $j(A)$ . Cet homéomorphisme est déterminé à isotopie près préservant le bord éventuel de  $\Sigma_g$  par la classe d'isotopie de  $j$  laquelle est elle-même déterminée par la classe d'isotopie de  $j(c)$  de l'image de l'âme orientée  $c = \{|z| = 3/2\} \subset A$  de l'anneau

A. Ainsi l'homéomorphisme  $t_\gamma$  est appelé *twist de Dehn* relativement à la courbe fermée simple  $\gamma \subset \Sigma_g$ .

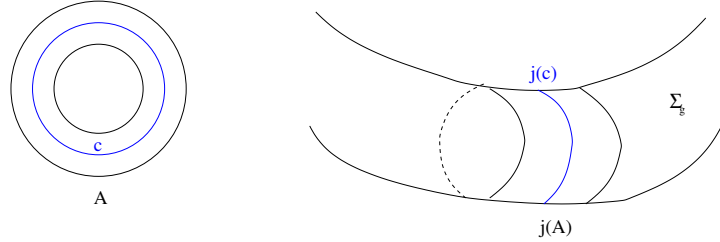


FIG. 3.3. Plongement d'un anneau dans une surface.

EXERCICE 3.5. Décrire les plongements possibles pour  $j$ . Combien y a-t-il de classes d'isotopie de  $j$ ? (Réponse : quatre). Combien y a-t-il de classes d'isotopie préservant l'orientation? (Réponse : deux).

On appelle aussi *twist de Dehn* la classe d'isotopie qu'il représente. Si  $\gamma$  borde un disque  $D \subset \Sigma_g$ , on peut supposer que  $\partial D = \partial_- A$  où  $A$  est un voisinage annulaire de  $\gamma$ . Il est alors aisé de voir que  $t_\gamma$  est isotope à l'identité (par exemple par une nouvelle application du truc d'Alexander). Il est donc suffisant de considérer les twists de Dehn relativement à des courbes fermées simples non triviales.

Voici quelques exercices pour se familiariser avec les twists de Dehn.

EXERCICE 3.6. Soit  $t_\gamma$  un twist de Dehn sur une surface  $\Sigma$  (avec ou sans bord, avec ou sans points distingués). Soit  $\alpha$  une courbe fermée simple sur  $\Sigma$ .

1. Si  $\alpha$  est isotope à  $\gamma$  dans  $\Sigma$ , alors  $t_\gamma(\alpha) = \alpha$ .
2. Si  $c$  intersecte transversalement  $\gamma$  en un point  $p$ , dessiner l'image  $t_\gamma(\alpha)$  au voisinage de  $p$ .
3. Comment dessiner  $t_\gamma(\alpha)$  si  $\alpha$  intersecte transversalement  $\gamma$  en un nombre fini de points  $p_1, \dots, p_n$ ?

*Solution.* 1) On peut isotoper  $\alpha$  de sorte que  $\alpha = \gamma$ . Pour 2) et 3), voir les Fig. 3.4 et 3.5. ■

LEMME 3.2. Soit  $\gamma$  l'âme de l'anneau  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ . Alors  $t_\gamma \neq 1$  dans  $\mathfrak{M}(A)$ .

*Preuve.* Une manière simple de le voir est de regarder l'action induite en homologie (ou sur le groupe fondamental) de  $t_\gamma$ . On considère la courbe  $\alpha$  fermée simple dans  $A$  définie de la manière suivante :  $\alpha$  est constituée de la réunion du segment radial  $[1, 2]$  et de son image  $t([1, 2])$  (voir la Fig. 3.2). Choisissons une orientation de  $\alpha$  et le point  $z = 1$  comme point base. Clairement la classe d'homotopie de  $\alpha$  est non triviale et engendre  $\pi_1(A, z) \simeq \mathbb{Z}$ . Nous allons montrer que  $(t_\gamma)_*([\alpha]) \neq [\alpha]$ . Une application de l'exercice 3.6 permet de déterminer  $t_\gamma([\alpha])$  à isotopie près. Voir Fig. 3.6.

Il suffit ensuite de remarquer que  $t_\gamma(c)$  est homotope à  $c^2$ .

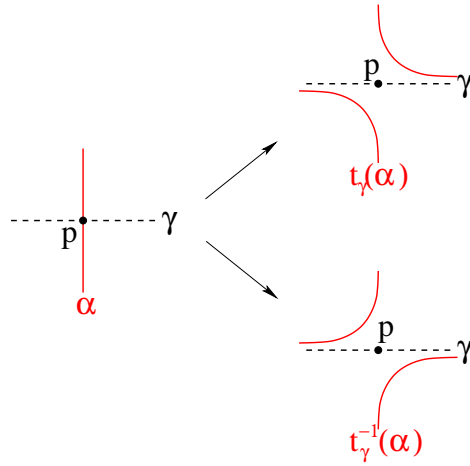


FIG. 3.4. dessin local de l'image d'une courbe fermée simple par un twist de Dehn : cas d'une intersection simple.

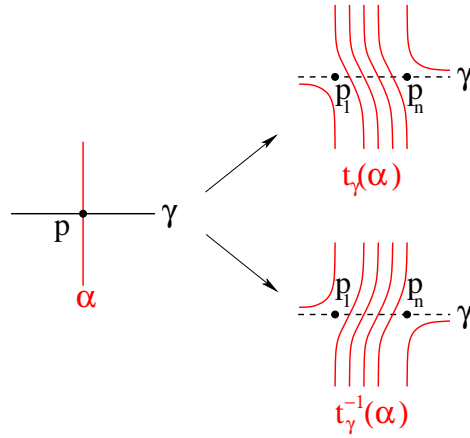


FIG. 3.5. dessin local de l'image d'une courbe fermée simple par un twist de Dehn : cas d'intersection multiple.

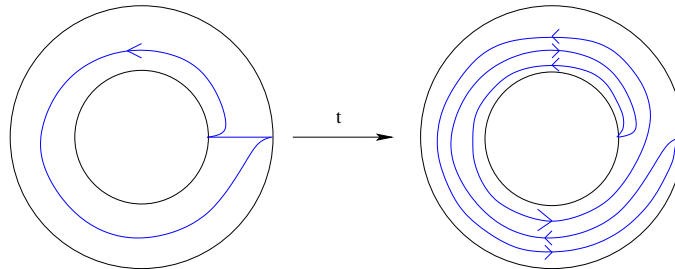
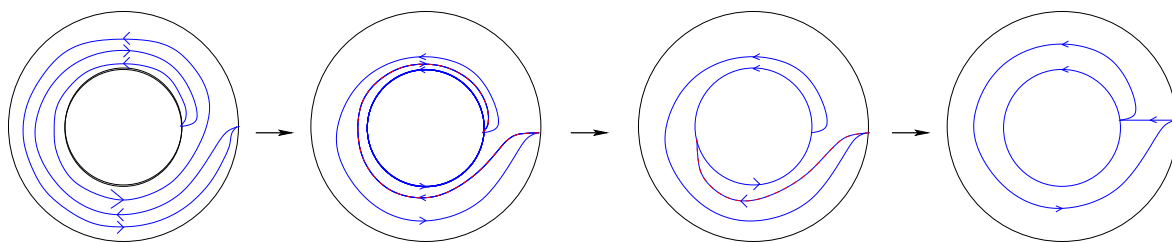


FIG. 3.6. L'action de  $t_\gamma$  sur la courbe  $c$ .

FIG. 3.7. Une homotopie entre  $t_\gamma(c)$  and  $c^2$ .

La Fig. 3.7 décrit une homotopie transformant  $t_\gamma(c)$  en (une courbe fermée simple homotope à)  $c^2$ . Comme  $\pi_1(A, z) \simeq \mathbb{Z}$  est infini cyclique engendré par  $[c]$ , il s'ensuit que  $[c]^2 \neq 1$ . On en conclut que  $t_\gamma \neq [\text{id}_A] = 1_{\mathfrak{M}(A)}$ . ■

EXERCICE 3.7. Compléter l'argument du lemme 3.2 et montrer que  $\mathfrak{M}(A)$  est engendré par  $t_\gamma$  et est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

Afin de décrire systématiquement l'action des twists de Dehn sur les courbes, il est utile d'introduire deux invariants. Ces deux invariants font intervenir l'intersection de courbes. C'est l'objet du paragraphe suivant.



## CHAPITRE 4

# Intersections

### 1. Intersection algébrique

DEFINITION 4.1. Deux courbes fermées  $\alpha$  et  $\beta$  sont *en position générale* (ou transverse) sur une surface  $\Sigma$ , si pour tout point  $p \in \alpha \cap \beta$ ,  $T_p\alpha \oplus T_p\beta = T_p\Sigma$ . On note  $\alpha \pitchfork \beta$ .

LEMME 4.1. *Étant données deux courbes fermées  $\alpha$  et  $\beta$  en position générale sur une surface  $\Sigma$  compacte orientée, le nombre de points d'intersection  $\alpha \cap \beta$  est fini.*

On suppose à présent les hypothèses du lemme satisfaites. En chaque point d'intersection  $p \in \alpha \cap \beta$ , on définit un nombre d'intersection algébrique local par  $\varepsilon(p) = \pm 1$  selon que  $T_p\alpha \oplus T_p\beta$  ait la même orientation que  $T_p\Sigma$  ou non.

DEFINITION 4.2. La *forme d'intersection* d'une surface orientée  $\Sigma$  est la application biadditive antisymétrique  $H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par

$$(4.1) \quad \iota([\alpha], [\beta]) = [\alpha] \cdot [\beta] = \sum_{p \in \alpha \pitchfork \beta} \varepsilon(p) \in \mathbb{Z},$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux courbes fermées sur  $\Sigma$  représentant les classes  $[\alpha], [\beta] \in H_1(\Sigma)$  en position générale l'une par rapport à l'autre.

REMARQUE 4.1. On peut donner une définition purement homologique à l'aide de la dualité de Poincaré.

EXERCICE 4.1. Vérifier que la forme d'intersection est antisymétrique. [Vérifier que le nombre d'intersection local est lui-même antisymétrique en  $\alpha, \beta$ .]

REMARQUE 4.2. Si  $\Sigma$  n'est pas orientable, on peut encore définir une forme d'intersection  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . En fait, cette forme est le nombre d'intersection géométrique (introduit ci-dessous) modulo 2.

### 2. Intersection géométrique

DEFINITION 4.3. Étant données deux courbes fermées simples  $\alpha, \beta$  sur  $\Sigma$ , on définit leur nombre d'intersection géométrique par

$$(4.2) \quad i(\alpha, \beta) = \min\{|\alpha' \cap \beta'| \mid \alpha' \text{ isotope à } \alpha, \beta' \text{ isotope à } \beta, \alpha' \pitchfork \beta'\}.$$

En d'autres termes : on choisit deux courbes isotopes à  $\alpha$  et  $\beta$  qui sont transverses et qui minimisent le nombre de points d'intersection.

REMARQUE 4.3. Le nombre d'intersection géométrique est symétrique.

En vertu du fait que deux courbes sur une surface sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes, le nombre d'intersection géométrique est défini sur les classes d'homotopie libre (sans point base) : le nombre d'intersection induit donc une application symétrique  $\Omega(\Sigma) \times \Omega(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

EXERCICE 4.2. 1. Calculer  $i(\alpha, \alpha)$  et  $\iota([\alpha], [\alpha])$  pour une courbe fermée simple  $\alpha$ .

2. On suppose que  $\alpha$  sépare  $\Sigma$  en deux composantes connexes. Montrer que  $i(\alpha, \beta) = 0$  et que  $\iota(\alpha, \beta) = 0 \pmod{2}$  pour toute courbe fermée  $\beta$ .

Une observation fondamentale est que les difféomorphismes de surfaces préservent les nombres d'intersection :

LEMME 4.2. *Soit  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  un difféomorphisme préservant l'orientation. Alors  $\varphi_* \iota = \iota$  et  $\varphi^* i = i$ .*

*Preuve.* Il est clair que  $\varphi$  préserve l'intersection géométrique. La seconde égalité en résulte. Comme  $\varphi$  préserve l'orientation,  $\varepsilon_p(\alpha, \beta) = \varepsilon_{\varphi(p)}(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ . D'où le fait que  $\varphi$  préserve l'intersection algébrique. ■

Les nombres d'intersections sont donc des invariants du groupe des difféotopies de surfaces.

EXEMPLE 4.1. Calcul des intersections algébrique et géométrique des courbes fermées simples du tore. Le tore  $T^2 = S^1 \times S^1$  admet deux courbes fermées simples  $\alpha, \beta$  telles que  $\alpha \cdot \beta = +1$  dont les classes d'homotopie engendrent  $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  : le méridien et la longitude. Dans ce cas, l'isomorphisme est donné par  $\alpha \mapsto (1, 0)$  et  $\beta \mapsto (0, 1)$ . Montrer : une courbe simple sur le tore est fermée si et seulement si elle se relève en une droite d'équation  $px = qy$  de  $\mathbb{R}^2$  où  $p$  et  $q$  sont entiers (considérer un domaine fondamental de l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ ). En déduire que les courbes fermées simples du tore sont en correspondance bijective avec l'ensemble  $\{(p, q) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2 \mid (p, q) = 1\} \cup \{(0, 1), (1, 0)\}$ .

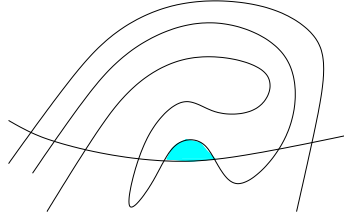
### 3. Un critère pour la minimalité : le critère du bigone

On donne ici un critère combinatoire pour déterminer si deux courbes fermées simples réalisent le nombre d'intersection géométrique. Ce critère est inclus pour deux raisons : 1) il est simple ; 2) il justifie a priori l'usage de dessins dans la preuve de certains résultats.

DEFINITION 4.4. Considérons deux courbes fermées simples  $\alpha$  et  $\beta$  sur une surface  $\Sigma$ . Un *bigone* est un disque fermé  $D \subset \Sigma$  dont le bord  $\partial D$  est la réunion de deux arcs  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  de  $\alpha$  et de  $\beta$  respectivement s'intersectant à leurs extrémités. Les courbes  $\alpha$  et  $\beta$  *forment un bigone* s'il existe un bigone satisfaisant à la condition ci-dessus.

PROPOSITION 4.1 (Le critère du bigone). *Deux courbes fermées simples sont en position minimale (réalisent le nombre d'intersection géométrique) si et seulement si elles ne forment aucun bigone.*

COROLLAIRE 4.1. *Deux courbes fermées simples s'intersectant transversalement exactement une fois sont en position minimale.*

FIG. 4.1. Un disque  $D'$  entre des relevés de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

*Preuve.* L'existence d'un bigone implique aisément le fait que les courbes ne sont pas en position minimale : il existe une homotopie d'une des courbes qui diminue l'intersection géométrique des deux courbes de 2.

Montrons la réciproque. La preuve s'appuie sur un lemme :

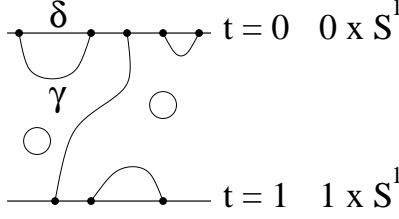
LEMME 4.3. *Si deux courbes fermées simples transverses sur une surface ne forme pas de bigone alors dans le revêtement universel de  $S$ , deux relevés quelconques des courbes s'intersectent en au plus un point.*

*Preuve du Lemme.* Le cas où  $\Sigma$  est une sphère est aisé et est laissé en exercice. On suppose par la suite que le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  est  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  la projection correspondante. Supposons que les relevés  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  s'intersectent en deux points. Il y a donc un disque plongé  $D$  dans  $\tilde{\Sigma}$  bordé par un sous-arc de  $\tilde{\alpha}$  et un sous-arc de  $\tilde{\beta}$ .

Considérons l'intersection  $G = D \cap p^{-1}(\alpha \cup \beta)$  : c'est l'intersection de  $D$  avec tous les relevés de  $\alpha$  et de  $\beta$ . On peut décomposer  $G = S_G \cup (G - S_G)$  de la manière suivante :  $x \in S_G$  ssi  $x \in D \cap p^{-1}(\alpha) \cap p^{-1}(\beta)$ . Autrement dit,  $x \in S_G$  ssi  $x$  est un point d'intersection dans  $D$  de deux arcs appartenant à des relevés de  $\alpha$  et de  $\beta$ . L'ensemble  $S_G$  est fini : par compacité de  $D$  (disque fermé), si  $S_G$  était infini, il posséderait un point d'accumulation. Or ceci contredit la transversalité de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Il en résulte qu'il existe un nombre fini d'arcs de  $p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)$  passant par un point  $x \in S_G$  (considérer l'intersection de ces arcs avec  $\partial D$  et  $D$ ).

On pense à  $G$  comme à un graphe fini dont l'ensemble des sommets est  $S_G$ . On trouve alors un disque interne  $D' \subset D \subset \tilde{\Sigma}$  ayant la propriété suivante :  $D'$  borde un sous-arc de  $p^{-1}(\alpha)$  et un sous-arc de  $p^{-1}(\beta)$  et aucun arc de  $p^{-1}(\alpha \cup \beta)$  ne traverse l'intérieur de  $D'$ . Voir la figure 3.

Du fait des propriétés de  $D'$ ,  $p|_{\partial D'}$  est un plongement. On affirme qu'en fait,  $p|_{D'}$  est un plongement. Sinon on aurait deux points distincts  $x$  et  $y$  dans  $D'$  tels que  $p(x) = p(y)$ . Donc il existe un automorphisme  $\varphi$  du revêtement tel que  $\varphi(x) = y$ . Puisque  $\partial D'$  se plonge par la projection du revêtement,  $\partial D' \cap \varphi(\partial D')$  est ou bien vide ou bien égal à  $\partial D'$  entier (auquel cas  $\varphi$  est l'identité car le groupe des automorphismes du revêtement agit librement). L'image  $\varphi(D')$  est un disque plongé dans  $\mathbb{R}^2$ , n'intersectant pas  $\partial D'$  et contenant  $y = \varphi(x) \in D'$ . D'après le théorème de Jordan-Schönflies,  $\mathbb{R}^2 - \varphi(\partial D')$  possède deux composantes connexes, dont une est bornée qui est l'intérieur  $\text{Int}(\varphi(D'))$  du disque  $\varphi(D')$ . Cette composante doit donc contenir  $y = \varphi(x)$ . Si  $\varphi \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ , alors  $\varphi(\partial D') \cap \partial D' = \emptyset$ , donc le disque  $\varphi(D')$  soit contient  $D'$  soit est contenu dans  $D'$ . On en déduit donc dans tous les cas

FIG. 4.2. Les différentes composantes de  $H^{-1}(\beta)$ .

que  $\varphi^{\pm 1}(D') \subseteq D'$ . Le théorème de Brouwer (appliqué à  $\varphi^{\pm 1}$ ) assure alors que  $\varphi$  possède un point fixe. L'action étant libre, ceci implique que  $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ . Mais alors  $x = y$ , ce qui contredit notre hypothèse de départ. ■

*Fin de la preuve de la proposition du bigone* : supposons donc que  $\alpha$  et  $\beta$  ne soient pas en position minimale : il existe une homotopie  $(h_t)_{t \in I} : I \times S^1 \rightarrow \Sigma$  telle que  $h_0 = \alpha$  et  $|h_1 \cap \beta| < |\alpha \cap \beta|$ . On peut supposer sans perte de généralité que les courbes fermées simples  $\alpha$  et  $\beta$  sont en position générale et même que l'homotopie  $H : I \times S^1 \rightarrow \Sigma$ ,  $(t, s) \mapsto h_t(s)$  est transverse à  $\beta$ . Dans ce cas,  $H^{-1}(\beta)$  est une sous-variété de codimension 1 de  $I \times S^1$ . Une représentation schématique est donnée par la figure 4.2. Le bord de cette variété est

$$\partial H^{-1}(\beta) = (h_0(I) \cap \beta) \cup (h_1(I) \cap \beta) = (\alpha \cap \beta) \cup (h_1(I) \cap \beta).$$

Les composantes connexes forment donc des cobordismes entre ces points ; comme indiqué sur la figure 4.2, il y en a de quatre types différents : la composante sans bord, la composante reliant deux points distincts dans  $\alpha \cap \beta$ , la composante reliant deux points distincts dans  $h_1(I) \cap \beta$  et la composante reliant un point dans  $\alpha \cap \beta$  à un point dans  $h_1(I) \cap \beta$ . Comme  $|h_1 \cap \beta| < |\alpha \cap \beta|$ , il existe nécessairement une composante  $\gamma$  de  $H^{-1}(\beta)$  reliant deux points dans  $\alpha \cap \beta$ . Soit  $\gamma$  un arc dans  $0 \times S^1$  reliant ces deux points. Alors (avec des orientations correctes) l'arc  $\gamma \star \delta^{-1}$  est un lacet parcourant une courbe fermée simple bordant un disque  $\Delta$  dans  $I \times S^1$ . L'image  $H(\gamma \star \delta^{-1})$  est une courbe fermée simple incluse dans  $\alpha \cup \beta \subset \Sigma$  homotopiquement triviale car l'application  $H \circ (\gamma \star \delta^{-1}) : S^1 \rightarrow \Sigma$  s'étend en une application continue  $H|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \Sigma$ . D'après la théorie des revêtements, cette courbe fermée simple se relève donc en une courbe fermée simple  $c$  dans le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ . Ce relevé  $c$  est constitué d'un arc qui est le relevé d'un arc de  $\alpha$  et d'un arc qui est le relevé d'un arc de  $\beta$ , donc ces relevés d'arcs s'intersectent deux fois. Le lemme 4.3 s'applique :  $\alpha$  et  $\beta$  forment un bigone. ■

*Remarque 1.* Pourquoi a-t-on besoin du lemme ? Le problème est que le disque bordé par la courbe fermée simple  $H(\gamma \star \delta^{-1})$  n'est pas nécessairement un bigone.

*Remarque 2.* Il existe d'autres preuves de la proposition du bigone : la plus économique utilise la géométrie de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  : voir le livre [4] de Farb et Margalit (en anglais). La démonstration ci-dessus suit les arguments du livre de Laudenbach, Fathi et Poenaru [5], plus ancien mais très clair et en français.

Nous donnons ci-dessous une autre preuve, élémentaire. Elle utilise les faits suivants :

- deux courbes fermées simples homotopes dans  $\Sigma$  sont en fait isotopes dans  $\Sigma$  (voir les articles d'Epstein [3] ou de Baer [2]).
- toute surface est triangulable (le cas compact est aisé : voir par exemple Alfors-Sario, §48 [1]).

On peut travailler dans la catégorie linéaire par morceaux. Les courbes fermées simples sont des courbes polygonales finies. Une triangulation  $(T, \tau)$  donnée de la surface  $\Sigma$  est dite *compatible* avec les courbes  $\alpha$  et  $\beta$  si celles-ci sont entièrement supportées par les arêtes de la triangulation. Une isotopie de la courbe  $\alpha$  est *simple* si elle affecte une unique simplexe (triangle) de la triangulation. Par exemple, les isotopies qui sont l'identité en-dehors des simplexes représentés par la figure 4.3 sont des isotopies simples. La figure indique l'isotopie dans le simplexe. Noter qu'après une isotopie  $h_t$ , même simple, la nouvelle courbe  $h_1(\alpha)$  n'est pas nécessairement compatible avec la triangulation de départ.

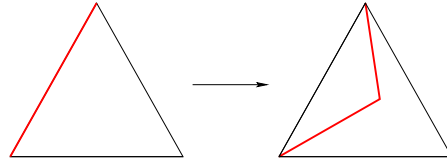


FIG. 4.3. Isotopies simples : elles n'affectent qu'un simplexe à la fois.

Une isotopie  $h_t$  de  $\alpha$  est *élémentaire* si elle est simple et si la triangulation reste compatible avec  $h_1(\alpha)$  et  $\beta$ . Dans la figure 4.4 sont représentées deux isotopies élémentaire. Les sous-arcs des courbes sont représentés en rouge pour  $\alpha$  et en bleu pour  $\beta$ . L'isotopie est l'identité en-dehors du simplexe de la figure. L'isotopie de type I modifie un sous-arc de la courbe  $\alpha$  qui est supporté par deux arêtes du simplexe ; à la fin de l'isotopie le sous-arc est entièrement supporté par la troisième arête du simplexe. L'isotopie de type II est identique à l'isotopie de type I à cette différence près que la troisième arête du simplexe supporte un sous-arc de la courbe  $\beta$ . En particulier, à la fin de l'isotopie de type II, les courbes ne sont plus transverses (elles ont un sous-arc commun).

LEMME 4.4 (Classification des isotopies élémentaires). *Toute isotopie élémentaire est de la forme indiquée par la figure 4.4*

LEMME 4.5 (Décomposition des isotopies en isotopies élémentaires). *Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes fermées simples (polygonales finies). Soit  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie de  $\alpha$ . Il existe une triangulation de la surface  $\Sigma$  de telle sorte que chaque isotopie se décompose en une suite d'isotopies élémentaires.*

*Preuve du lemme.* Il suffit de subdiviser la triangulation. ■

Pour démontrer la proposition du bigone, on applique le lemme de décomposition des isotopies en isotopies élémentaires à une isotopie  $H$  diminuant le nombre d'intersection géométrique entre  $\alpha$  et  $\beta$  : l'isotopie  $H$  se décompose en une composition d'isotopies élémentaires :  $H = h_r \circ h_{r-1} \circ \dots \circ h_1$ . On applique ensuite le

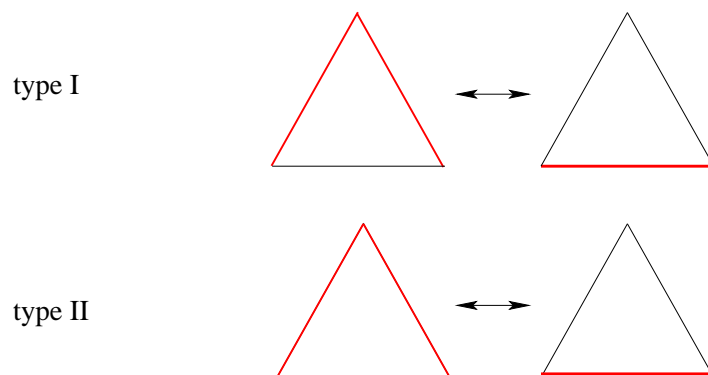


FIG. 4.4. Isotopies élémentaires : elles n'affectent qu'un simplexe à la fois et la triangulation reste compatible.

lemme de classification des isotopies élémentaires : comme le nombre d'intersection géométrique diminue, au moins une isotopie élémentaire  $h_i$  est du type II. Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $h_i$  soit de type II. Soit  $\Delta$  le simplexe correspondant à l'isotopie  $h_i$ . Alors le bigone recherché est donné par  $D = (h_i \circ \dots \circ h_1)^{-1}(\Delta)$ . ■

*Remarque 3.* Il existe une version de la proposition du bigone pour les arcs (à extrémités fixées dans des points distingués de  $\Sigma$  ou dans le bord  $\partial\Sigma$ ). Dans ce cas, il est essentiel que les isotopies soient l'identité sur le bord.

## Le groupe de tresses et ses avatars

Ce chapitre est consacré aux tresses. Le groupe de tresses est le groupe de difféotopies du disque percé d'un nombre fini de trous. Il a été introduit par E. Artin en 1925 et c'est depuis l'un des groupes les plus omniprésents en mathématiques. Il joue un rôle fondamental en topologie de petites dimensions (*2et3*) mais aussi en théorie des groupes (Théorie d'Artin-Tits). Le groupe des tresses apparaît notamment dans la théorie des représentations des groupes quantiques (Quasi-algèbres de Hopf), les techniques de monodromie en géométrie algébrique et est au cœur du programme de Drinfel'd d'approche du groupe  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ . Plus récemment, le groupe de tresses apparaît comme un ingrédient clé dans le programme de F. Cohen de calcul des groupes d'homotopie de sphères.

Nous considérons aussi le groupe de difféotopies du disque moins un nombre fini de disques qui lui est intimement lié ; ceci nous servira au moment de la démonstration du théorème d'engendrement du groupe de difféotopies d'une surface quelconque par les twists de Dehn.

Note : ce chapitre reprend les notes d'un cours sur le groupe de tresses que j'ai enseigné à l'institut Weizman à Rehovot, Israël. Il existe par ailleurs aujourd'hui un nombre raisonnable de livres très accessibles sur le groupe de tresses.

### 1. Du point de vue algébrique

Soit  $n \geq 1$ . Le groupe de tresses  $B_n$  est défini par  $n - 1$  générateurs  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  et les relations

- (Commutation) Si  $|i - j| > 1$ ,  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$
- (Artin) Pour  $1 \leq i \leq n - 2$ ,  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ .

Il est aisé de voir que  $B_1$  est trivial, que  $B_2 \simeq \mathbb{Z}$  et que tous les autres groupes de tresses sont non commutatifs. Ceci est bien sûr le tout début des propriétés algébriques du groupe de tresses.

### 2. Du point de vue géométrique

Soit  $D$  le disque unité de  $\mathbb{C}$ . On note  $D_n = \Sigma_{0,0,n}$  ce même disque avec  $n$  points fixés distingués (les piqûres). Une *tresse géométrique à  $n$  brins* est l'image d'un plongement  $b$  de  $n$  copies disjointes  $[0_1, 1_1], \dots, [0_n, 1_n]$  de l'intervalle unité  $[0, 1]$  dans le cylindre  $[0, 1] \times D$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $\{b(0_1), \dots, b(0_n)\}$  est l'ensemble des piqûres de  $D_n = 0 \times D$  et  $\{b(1_1), \dots, b(1_n)\}$  est l'ensemble des piqûres de  $D_n = 1 \times D$ .

(ii) Pour tout  $t \in [0_j, 1_j]$ ,  $b(t) \in \{t\} \times D$ .

L'image de chaque intervalle est un *brin* de la tresse. Deux tresses géométriques  $b, b'$  sont *isotopes* s'il existe une famille lisse de tresses géométriques  $(b_t)_{t \in [0,1]}$  telles que  $b_0 = b$  and  $b_1 = b'$ .

Les points importants à retenir : 1) Les extrémités sont fixées pendant toute l'isotopie ; 2) L'application  $t \mapsto b(t)_1$  is strictement croissante.

Deux observations faciles :

1. Une tresse géométrique induit une permutation des piqûres.
2. Des tresses géométriques isotopiques induisent la même permutation.

Une *tresse* est une classe d'isotopie de tresses géométriques.

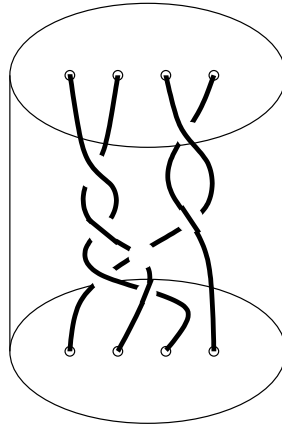


FIG. 5.1. Une tresse géométrique à quatre brins.

On ajoute une structure algébrique en observant que l'on peut concaténer les tresses (avec un nombre de brins fixé) :

- Etant donné deux tresses représentées par  $b, b'$ , on compose l'image de  $b$  dans le cylindre  $[0, 1/2] \times D$  et l'image de  $b'$  dans le cylindre  $[1/2, 1] \times D$  ; le résultat est une nouvelle tresse représentée par la tresse géométrique  $b \cdot b' = bb'$ .
- Il y a un élément trivial : il est représenté par la tresse dont les brins sont des segments verticaux sans enlacement entre eux.
- L'inverse d'une tresse est induit par la réflexion par rapport au disque  $\{1/2\} \times D$ .

On vérifie sans difficulté que la concaténation est associative au niveau des classes d'isotopie. On en déduit le

LEMME 5.1. *Les tresses à  $n$  brins forment un groupe  $\mathfrak{B}_n$ .*



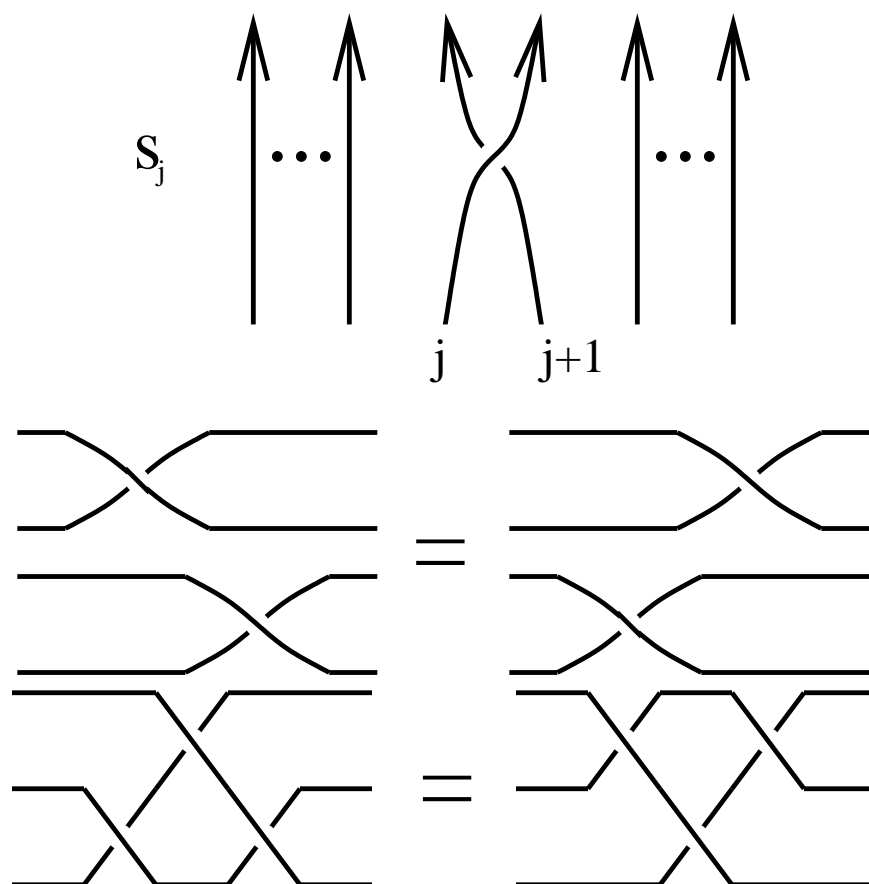


FIG. 5.2. Relations d'Artin sous forme géométrique

Il est aisé de voir que le groupe  $\mathfrak{B}_n$  des tresses à  $n$  brins est engendré par les  $n - 1$  tresses  $s_1, \dots, s_{n-1}$  suivantes : pour chaque  $1 \leq j \leq n - 1$ ,  $s_j$  est représentée par la tresse géométrique qui consiste en  $n - 2$  brins verticaux sans aucun enlacement avec les autres brins et le  $j$ -ème et le  $(j + 1)$ -ème brin s'enlacent exactement une fois. Il y a une convention bien connue à spécifier pour que ceci soit complètement bien défini. La permutation associée est la transposition  $(j, j + 1)$ .

**THÉORÈME 5.1.** *Les groupes  $B_n$  et  $\mathfrak{B}_n$  sont isomorphes.*

*Preuve.* Définissons un homomorphisme  $F(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \rightarrow \mathfrak{B}_n$  du groupe libre engendré par les  $\sigma_j$  envoyant  $\sigma_j$  sur  $s_j$ . On vérifie que les relations de commutation et d'Artin sous forme géométriques (voir Fig. 5.2). La relation  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  est la fameuse relation de Reidemeister en théorie des nœuds.

Par conséquent, l'application induit un morphisme de groupes  $B_n \rightarrow \mathfrak{B}_n$ .

Surjectivité : toute tresse géométrique se déforme en une tresse dont une projection sur un plan tangent au cylindre  $[0, 1] \times D$  a un nombre fini de croisements transverses (existence d'un *diagramme* de tresse). Ces croisements peuvent être ordonnés selon

un axe. Il est alors aisé d'écrire la tresse géométrique sous forme d'un produit de  $s_i^{\pm 1}$ .

Injectivité : il s'agit de voir que les deux types de relations suffisent à transformer tout diagramme de tresse en un autre s'ils représentent des tresses isotopes. Pour le voir, il est utile de considérer la catégorie Linéaire Par Morceaux. Première étape : toute isotopie se décompose en un produit d'isotopies affines élémentaires : de telles isotopies agissent comme l'identité sur la tresse, excepté sur un segment  $ab$  qui à la fin de l'isotopie est remplacé par un segment brisé  $ac \cup cb$ , en laissant fixes les extrémités du segment  $ab$  de départ. Deuxième étape : soit un triangle  $T \subset [0, 1] \times D$  générique (non aplati) tel que

1. L'intérieur de  $T$  est disjoint de la tresse  $t : \overset{\circ}{T} \cap t = \emptyset$  ;
2. Une arête  $ab$  de  $T$  supporte un arc de  $b : T \cap t = ab$  ;
3. À la fin de l'isotopie élémentaire, l'arc  $ab$  devient le segment brisé  $ac \cup cb$ .

Examinons l'image  $T' = a'b'c'$  de ce triangle dans le diagramme de la tresse après isotopie. Par définition, c'est l'image par une projection générique de  $T$  sur un plan tangent à  $[0, 1] \times D$ . Le segment  $a'b'$  est remplacé par le segment brisé  $a'c' \cup c'b'$ . Si  $T'$  est aplati ( $c' \in a'b'$ ), alors le diagramme de la tresse est inchangé et donc également est inchangée l'écriture de la tresse géométrique en les générateurs  $s_i$ . On peut donc supposer  $T'$  non aplati. S'il n'y a aucune intersection dans l'intérieur de  $T'$ , l'isotopie élémentaire se traduit dans le plan de projection par une isotopie du plan sans nouvelle intersection : cela ne modifie pas non plus l'écriture de la tresse géométrique en les générateurs  $s_i$ . On peut donc supposer que l'intersection est non vide : il existe (l'image d') un ou plusieurs arcs de la tresse à l'intérieur de  $T'$ . S'il existe des (images d') arcs s'intersectant en plus d'un point double dans l'intérieur de  $T'$ , alors on peut subdiviser davantage  $T$  et décomposer l'isotopie en isotopies élémentaires relatives aux triangles de la nouvelle subdivision. De manière plus générale, le même argument montre qu'il suffit de considérer le cas où le triangle  $T'$  intersecte de manière minimale le reste du diagramme de la tresse : en particulier, l'intersection avec l'intérieur de  $T'$  est connexe et consiste en un segment ou deux segments s'intersectant en un point double.

A symétrie près, il y a quatre type de configurations à considérer. Voir la figure 5.3. Remarquons que le type de croisement (l'information supplémentaire permettant de relever le diagramme de tresse en tresse) entre l'arc supplémentaire et le triangle  $T' = a'b'c'$  est constant : si l'arc passe au-dessus d'une arête du triangle, alors il passe au-dessus des autres. C'est une conséquence du fait que le triangle original  $T \subset [0, 1] \times D$  a son intérieur disjoint de la tresse  $t$ .

On peut alors facilement interpréter les isotopies élémentaires des configurations de la figure 5.3. Le type (1) est une isotopie du diagramme et ne modifie pas la combinatoire du diagramme : donc l'écriture de la tresse géométrique est inchangée. Le type (2) est une relation de la forme  $s_i \cdot s_i^{-1} = 1$  ou  $s_i^{-1} \cdot s_i = 1$ . Le type (3) est une relation d'Artin (passage d'un point triple) :  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ . Le type (4) se décompose en un produit de deux isotopies de type (2) et une isotopie de type (3). La figure 5.4 indique la subdivision en quatre triangles donnant les isotopies dans l'ordre suivant :

- L'isotopie du triangle  $a'uw$  qui transforme  $a'u$  et  $aw \cup wu$  : c'est une isotopie de type (2), soit une relation de la forme  $s_i \cdot s_i^{-1} = 1$  ou  $s_i^{-1} \cdot s_i = 1$ .

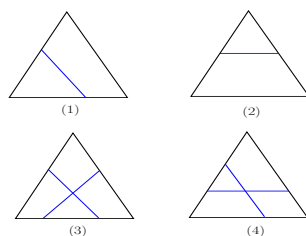


FIG. 5.3. Les configurations à considérer : le segment  $a'b'$  est l'arête horizontale du triangle. À la fin de l'isotopie élémentaire, il est transformé en le segment brisé  $a'c' \cup c'b'$  qui est la réunion des deux autres segments non horizontaux du triangle.

- L'isotopie du triangle  $ub'v$  transforme  $ub'$  en  $uv \cup vb'$  : c'est une isotopie de type (1), qui est une isotopie du diagramme, laissant l'écriture de la tresse géométrique inchangée.
- L'isotopie du triangle  $uvw$  transforme  $wu \cup uv$  en  $vw$  : c'est encore une isotopie de type (1).
- L'isotopie du triangle  $wb'c'$  transforme  $wb'$  en  $wc' \cup c'b'$  : c'est une isotopie de type (3).

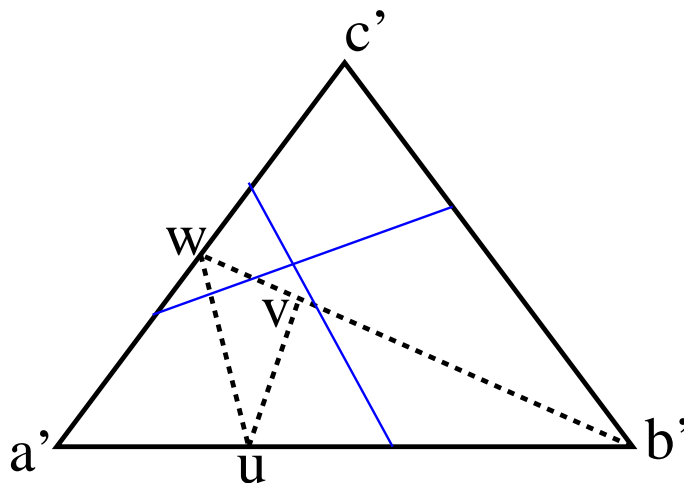


FIG. 5.4. Le type (4) se décompose en un produit d'isotopies déjà identifiées.

Ceci achève la preuve de l'injectivité, et ainsi celle du théorème 5.1. ■

### 3. Du point de vue du groupe de difféotopies du disque percé

Voici le troisième point de vue sur le groupe de tresses : c'est le groupe de difféotopies du disque  $D_n = \Sigma_{0,0,n}$ . Notons  $\mathcal{P} = \{z_1, \dots, z_n\}$  l'ensemble des piqûres de  $D_n$ .

THÉORÈME 5.2. *Les groupes  $\mathfrak{M}(D_n)$  et  $\mathfrak{B}_n$  sont isomorphes.*

*Preuve.* Un élément  $f \in \mathfrak{M}(D_n)$  est par définition représenté par un difféomorphisme  $\varphi : D_n \rightarrow D_n$ , préservant l'orientation de  $D_n$ , qui est l'identité sur le bord  $\partial D = S^1$  du disque et qui préserve l'ensemble  $\mathcal{P}$  des piqures (donc, dont la restriction à  $\mathcal{P}$  est une permutation). Oubliant cette dernière propriété, on peut regarder  $\varphi$  comme un difféomorphisme du disque. D'après le truc d'Alexander,  $\varphi$  est isotope à l'identité sur le disque. Soit  $(\varphi_t)_t$  l'isotopie connectant  $\varphi_1 = \varphi$  à  $\varphi_0 = \text{Id}_D$ . Considérons l'application

$$b_\varphi : [0, 1] \times \mathcal{P} \rightarrow [0, 1] \times D$$

définie par

$$b_\varphi(t, z) = (t, \varphi_t(z)), \quad z \in \mathcal{P}.$$

C'est un plongement de  $n$  segments dans le cylindre  $[0, 1] \times D$  satisfaisant les deux conditions de la définition d'une tresse géométrique. On définit ainsi une application

$$b : \mathfrak{M}(D_n) \rightarrow \mathfrak{B}_n, [\varphi] \mapsto [b_\varphi].$$

Il est évident que cette application est un homomorphisme de groupes pour les opérations de composition et de concaténation. Réciproquement, soit  $b \in \mathfrak{B}_n$  une tresse représentée par une tresse géométrique

$$\beta : [0, 1] \times \mathcal{P} \times [0, 1] \times D, (t, z) \mapsto \beta(t, z) = (t, \beta_t(z)).$$

Cette tresse se regarde comme le graphe du mouvement de  $n$  points distingués évoluant dans  $D$ . L'application correspondante

$$[0, 1] \times \mathcal{P} \rightarrow D, (t, z) \mapsto \beta_t(z)$$

est une isotopie de l'ensemble de ces points dans  $D$ . Comme cet ensemble est fini, il est compact. Par conséquent, cette isotopie s'étend en une isotopie ambiante

$$[0, 1] \times D \times D, (t, z) \mapsto \widetilde{\beta}_t(z)$$

telle que  $\widetilde{\beta}_t|_{\mathcal{P}} = \beta_t$  et  $\widetilde{\beta}_0 = \text{Id}_D$ . À l'instant  $t = 1$ ,  $\varphi = \widetilde{\beta}_1$  est un difféomorphisme du disque permutant les points distingués. Nous en déduisons une application

$$\mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{M}(D_n), [\beta] \mapsto [\widetilde{\beta}_1].$$

Il reste à vérifier que cette application est l'inverse de l'application définie plus haut.

■

On peut se demander quels sont les représentants des générateurs du groupe de tresse vu comme groupe de difféotopies de  $D_n$ . Chaque générateur  $\sigma_i$  est représenté par un difféomorphisme  $s_i$  dont le support est un disque percé de deux piqures. En regardant la démonstration du théorème précédent dans ce cas, on voit que  $s_i$  est un « demi-twist de Dehn ». Soit  $D_2 \subset \mathbb{C}$  le disque unité  $D$  percé des points  $z_1 = -1/4$  et  $z_2 = +1/4$ . On note  $A = \{z \in D_2 \mid 1/2 \leq z \leq 1\}$  (un anneau contenu dans  $D$  et contenant  $\partial D = S^1$  et ne contenant pas les piqures). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse monotone telle que  $f(r) = \pi$  pour  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $f(r) = 0$  pour  $r \geq 1$ . On définit le demi-twist de Dehn élémentaire de la manière suivante :

$$t(re^{i\theta}) = \begin{cases} re^{i(\theta+f(r))} & \text{si } 1/2 \leq z \leq 1 \\ -re^{i\theta} & \text{si } 0 \leq z \leq 1/2 \end{cases}$$

Remarquons que  $t|_{\partial D} = \text{id}_{\partial D} = \text{id}_{S^1}$ , de sorte que  $t$  se prolonge à l'identité en dehors de  $D$ . Par ailleurs  $t|_{\partial_+ A} = -\text{id}_{\partial_+ A} = \rho_{0,\pi}$ . On peut donc voir  $t$  comme la trace d'une isotopie entre l'identité sur un cercle et la rotation d'angle  $\pi$  sur un

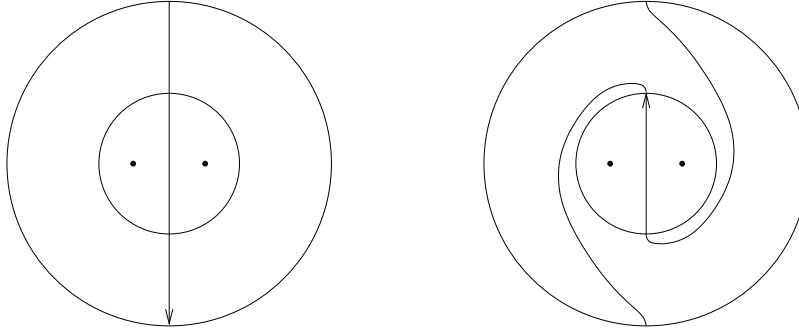


FIG. 5.5. Le demi-twist de Dehn élémentaire.

cercle. (Ces deux difféomorphismes préservent tous les deux l'orientation du cercle et sont clairement isotopes.)

Soit maintenant  $\Sigma$  une surface  $\Sigma$  ayant au moins deux points distingués  $p, q$ . Soit  $\alpha$  un arc simple dont les extrémités sont  $p$  et  $q$ . Soit  $j : D \rightarrow \Sigma$  un plongement (préservant l'orientation) tel que  $j([-1/4, +1/4]) = \alpha$ . Le *demi-twist*  $t_\alpha$  de Dehn relatif à  $\alpha$  est défini par

$$t_\alpha = j \circ t \circ j^{-1}$$

sur  $j(D) \subset \Sigma$  et prolongé en l'identité en-dehors de  $j(D)$ .

On vérifie que la classe dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  de  $t_\alpha$  ne dépend que de la classe d'isotopie de l'arc  $\alpha$  et non du plongement.

*Exercice.* Le carré d'un demi-twist de Dehn relatif à un arc  $\alpha$  est le twist de Dehn relatif au bord d'un petit voisinage de  $\alpha$  qui contient les extrémités de  $\alpha$ .

#### 4. Deux autres définitions

Le groupe de tresses peut être vu comme le groupe fondamental d'un espace de configurations. Soit  $M$  une variété. On définit l'espace de configurations de  $n$  points ordonnés de  $M$  comme étant

$$F_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_j \neq x_i, i \neq j\} = M^n \setminus \Delta_n$$

où  $\Delta_n \subset M^n$  est le discriminant constitué de la réunion des sous-ensembles  $x_i = x_j$  ( $i \neq j$ ). Cet espace de configuration n'a pas de structure de variété mais a une stratification naturelle. Le groupe symétrique  $S_n$  agit sur  $F_n(M)$  en permutant les points. L'espace des orbites  $C_n(M) = F_n(M)/S_n$  est l'espace des configurations de  $n$  points non-ordonnés de  $M$ .

THÉORÈME 5.3. *Pour tout  $n \geq 1$ ,*

$$\pi_1(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{B}_n.$$

Soit  $E_n \subset \mathbb{C}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes sans racines multiples et à coefficient dominant égal à 1. Cet ensemble hérite de la topologie de  $\mathbb{C}[X]$  (identifié à l'anneau des suites presque nulles à valeurs complexes ou à l'espace des fonctions polynômiales de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ ).

THÉORÈME 5.4. *Pour tout  $n \geq 1$ ,*

$$\pi_1(E_n) \simeq \mathfrak{B}_n.$$

Parmi les résultats les plus importants ces dernières années, la linéarité du groupe de tresses a été démontrée en 1999 par S. Bigelow. Ce résultat affirme qu'il existe une représentation linéaire fidèle  $B_n \rightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$  pour  $N$  assez grand. La question de la linéarité du groupe de difféotopies de surfaces plus générales (avec ou sans trous, avec ou sans piqûres) reste largement ouverte.

### 5. Le groupe des tresses pures et le groupe des difféotopies du disque troué

Il y a un morphisme surjectif  $B_n \rightarrow S_n$  qui envoie le  $i$ -ème générateur d'Artin,  $s_i$ , sur la transposition  $(i, i+1)$  qui échange  $i$  et  $i+1$ . C'est le morphisme déjà vu qui à une tresse associe la permutation qu'elle induit sur l'ensemble des  $n$  piqûres. Le noyau de ce morphisme est appelé le *groupe  $P_n$  des tresses pures*. Une tresse est donc pure si elle induit une permutation triviale.

*Exercice.* Soit  $1 \leq i < j \leq n-1$ . On note  $\sigma_{ij}$  la tresse définie par  $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}$ . Faire un dessin. Le groupe  $P_n$  est engendré par les  $\sigma_{ij}$ .

Le groupe des tresses pures est étroitement lié au groupe des difféotopies du disque troué (par des disques). Soit  $\Sigma_{0,n+1,0}$  le disque à  $n$  trous (= disque privé de  $n$  disques = sphère privée de  $n+1$  disques). On peut fixer des centres  $c_0 = 0, c_1, \dots, c_n \in \mathrm{Int}(D)$ . Soit  $\eta = \min\{|c_i - c_j| \mid 1 \leq i < j \leq n\} > 0$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on choisit des disques  $D(i)$  fermés centrés en les  $c_i$  de rayons  $r = \frac{\eta}{2}$ . Alors un modèle concret de  $\Sigma_{0,n+1,0}$  est  $\Sigma_{0,n+1,0} = D \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Int} D(i)$ .

Avant d'énoncer le lien exact entre les deux groupes, il est pratique de considérer l'effet au niveau du groupe de difféotopies de boucher une composante de bord par un disque percé d'une piqûre. Le résultat suivant est vrai pour toute surface ayant une composante de bord.

LEMME 5.2. *Soit  $\Sigma \subset \Sigma'$  deux surfaces connexes compactes orientées telle que  $\Sigma' \setminus \Sigma$  est un disque pointé  $D' = D \setminus \{p\}$ . L'inclusion  $i : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  induit un morphisme  $i_* : \mathfrak{M}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma')$  défini par  $i_*([\varphi]) = [\tilde{\varphi}]$  où  $\tilde{\varphi} : \Sigma' \rightarrow \Sigma'$  est l'extension (par l'identité sur  $D'$ ) du difféomorphisme  $\varphi$ . Alors*

$$\mathrm{Ker}(i_*) = \langle \tau_{\partial D'} \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

Ce lemme dit que les seuls éléments du noyau lorsque l'on bouche une composante de bord par un disque pointé sont les puissances du twist de Dehn relatif au bord de ce disque.

*Preuve.* En appliquant le truc d'Alexander à un disque pointé contenant  $D'$ , on voit  $\tau_{\partial D'}$  est représenté par un difféomorphisme isotope à l'identité dans  $\Sigma'$ . Donc  $\tau_{\partial D'} \in \mathrm{Ker} i_*$ .

Établissons la réciproque. Soit  $f \in \mathrm{Ker} i_*$ , représenté par un difféomorphisme  $\varphi$ . Dans  $\Sigma'$ ,  $\varphi$  est isotope à l'identité. En particulier, pour toute courbe fermée simple  $\alpha$ ,  $\varphi(\alpha)$  est isotope à  $\alpha$  dans  $\Sigma'$ . Par définition, le support de cette isotopie ne

contient pas  $p$  (le point distingué). On peut modifier légèrement cette isotopie de sorte que son support soit disjoint du disque  $D$  contenant  $p$ . Donc  $\varphi(\alpha)$  est encore isotope à  $\alpha$  dans  $\Sigma$ . Ainsi  $[\varphi]$  agit trivialement sur toute courbe fermée simple dans  $\Sigma$ . On peut montrer qu'on peut découper la surface à l'aide de courbes fermées simples de sorte que la surface privée de ces courbes est une réunion de disques, de disques pointés et d'anneaux. On peut aussi montrer  $\varphi$  préserve ces régions. Il en résulte que  $\varphi$  agit non trivialement uniquement sur l'anneau construit sur  $D$ . Comme  $\mathfrak{M}(A)$  est infini cyclique engendré par  $\tau_{\partial D}$ , on en déduit le résultat voulu. ■

THÉORÈME 5.5. *Soit  $n \geq 1$ . Il y a une suite exacte scindée*

$$0 \rightarrow \langle \tau_{\partial D(i)} \mid 1 \leq i \leq n \rangle \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0}) \rightarrow P_n \rightarrow 1$$

où  $\langle \tau_{\partial D(i)} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$  est un groupe abélien libre à  $n$  générateurs. En particulier, les groupes  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0})$  et  $P_n \times \mathbb{Z}^n$  sont isomorphes.

L'idée est similaire à la preuve du Théorème 5.2.

*Preuve.* Soit  $f \in \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0})$  représenté par un difféomorphisme  $\varphi : \Sigma_{0,n+1,0} \rightarrow \Sigma_{0,n+1,0}$  préservant l'orientation, vérifiant  $f|_{\partial \Sigma_{0,n+1,0}} = \text{id}_{\partial \Sigma_{0,n+1,0}}$ . Noter que  $\partial \Sigma_{0,n+1,0}$  est constitué de  $n+1$  composantes connexes : les  $\partial D(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $\partial D = S^1$ . Noter que  $\varphi$  se prolonge immédiatement en un difféomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $D$  sur  $D$  par l'identité sur chacun des disques  $D(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Par le truc d'Alexander,  $\tilde{\varphi}$  est isotope à l'identité du disque par une isotopie  $(\tilde{\varphi}_t)_t$  avec  $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\varphi}_0 = \text{id}_D$ . Considérons l'application

$$b_\varphi : [0, 1] \times \{c_1, \dots, c_n\} \rightarrow [0, 1] \times D$$

définie par

$$b_\varphi(t, c_i) = (t, \tilde{\varphi}_t(c_i)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

C'est une tresse géométrique. De plus,

$$\tilde{\varphi}_0(c_i) = c_i = \tilde{\varphi}(c_i) = \tilde{\varphi}_1(c_i)$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . C'est donc une tresse pure. On a donc défini une application

$$b : \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0}) \rightarrow P_n, f = [\varphi] \mapsto [b_\varphi]$$

qui est manifestement un homomorphisme de groupes.

Réciproquement, soit  $b \in P_n$  représentée par une tresse pure

$$\beta : [0, 1] \times \mathcal{P} \rightarrow [0, 1] \times D, (t, z) \mapsto (t, \beta_t(z)).$$

Cette tresse se regarde comme le graphe du mouvement de  $n$  points évoluant dans  $D$  et qui reviennent chacun à leur point de départ. L'application correspondante

$$[0, 1] \times \mathcal{P} \rightarrow D, (t, z) \mapsto \beta_t(z)$$

est une isotopie de ces points dans  $D$ . Comme dans la preuve du théorème 5.2, cette isotopie se prolonge en une isotopie ambiante

$$[0, 1] \times D \rightarrow [0, 1] \times D, (t, z) \mapsto \tilde{\beta}_t(z)$$

vérifiant

$$\tilde{\beta}_0 = \text{Id}_D, \quad \tilde{\beta}_t|_{\mathcal{P}} = \beta_t.$$

En particulier,  $\tilde{\beta}_1|_{\mathcal{P}} = \beta_1(\mathcal{P}) = \text{id}_{\mathcal{P}}$  puisque la tresse est pure. Donc  $\tilde{\beta}_1$  est un difféomorphisme préservant l'orientation et prélevant point par point les points distingués. Nous pouvons légèrement modifier l'isotopie de sorte que ce difféomorphisme  $\tilde{\beta}_1$  ait un support disjoint des disques  $D(i)$  centrés en les points de  $\mathcal{P}$ . Nous avons ainsi défini une application

$$a : P_n \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0}), [\beta] \mapsto [\tilde{\beta}_1].$$

Les constructions ci-dessus donnent immédiatement  $b \circ a = \text{id}_{P_n} : P_n \rightarrow P_n$ . En revanche, le morphisme  $b$  a un noyau non trivial. Ce morphisme factorise le morphisme d'inclusion  $i_* : \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0}) \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma_{0,0,n})$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0}) & \xrightarrow{b} & P_n \\ & \searrow i_* & \downarrow \\ & & B_n \end{array}$$

commutatif. Comme la flèche verticale est une inclusion,  $\text{Ker}(b) = \text{Ker}(i_*)$ . Par une application itérée du lemme précédent, on voit que  $\text{Ker}(b) = \langle \tau_{\partial D(i)} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ . Puisque ces twists de Dehn sont à supports deux à deux disjoints, ils commutent entre eux. Ce noyau est donc abélien libre de rang  $n$ . On a donc démontré la suite exacte de l'énoncé et l'identité  $b \circ a$  montre qu'elle est scindée. Donc  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0})$  est un produit semi-direct de  $\text{Ker}(b)$  et de  $P_n$ . En fait, les twists de Dehn  $\tau_{\partial D(i)}$  sont dans le *centre* de  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0})$  (voir le lemme ci-dessous). Par conséquent, l'application

$$\langle \tau_{\partial D(i)} \mid 1 \leq i \leq n \rangle \times P_n \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0}), (x, \beta) \mapsto (x, a(\beta))$$

est un isomorphisme de groupes (pour la structure de produit *direct* sur le groupe de départ). Le théorème est démontré. ■

Vérifions l'affirmation utilisée ci-dessus pour conclure.

LEMME 5.3. *Les twists de Dehn  $\tau_{\partial D(i)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont dans le centre de  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0})$ .*

*Preuve.* Soit  $f \in \mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0})$  représenté par un difféomorphisme  $\varphi : \Sigma_{0,n+1,0} \rightarrow \Sigma_{0,n+1,0}$  fixant point par point les composantes de bord. Il résulte du lemme 6.1 que

$$f \circ \tau_{\partial D(i)} \circ f^{-1} = \tau_{f(\partial D(i))} = \tau_{\partial D(i)}$$

puisque  $f|_{\partial D(i)} = \text{Id}_{\partial D(i)}$ . Donc  $f$  et  $\tau_{\partial D(i)}$  commutent. ■

*Remarque.* Dans le cours du lundi 29 novembre 2010, la preuve (compliquée) suivante a été donnée. On commence par remarquer que si l'on prolonge  $f$  en  $\tilde{f}$  à la surface  $\Sigma'$  obtenue en rebouchant le  $i$ -ème trou par un disque pointé (en prolongeant  $\varphi$  par l'identité sur le disque pointé), alors  $\tilde{f}$  et  $\tau_{\partial D(i)}$  commutent. (En effet,  $\tau_{\partial D(i)}$  devient trivial dans  $\mathfrak{M}(\Sigma')$ .) Par conséquent, le commutateur  $f \circ \tau \circ f^{-1} \circ \tau^{-1}$  est dans le noyau  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0}) \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma')$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$f \circ \tau \circ f^{-1} \circ \tau^{-1} = \tau^k.$$

Comme  $f$  est représenté par un difféomorphisme  $\varphi$  trivial sur  $\partial D(i)$ , on peut supposer que  $\varphi$  envoie un anneau  $A$  parallèle à  $\partial D(i)$  sur lui-même. On peut alors



considérer la restriction de  $f \circ \tau \circ f^{-1} \circ \tau^{-1}$  à  $A$  comme un élément de  $\mathfrak{M}(A)$ . Soit  $\alpha(t) = 1 - t \in [0, 1]$ . On sait (cf. exercice) que l'application

$$\rho : \mathfrak{M}(A) \rightarrow \mathbb{Z}, [\varphi] \mapsto [\alpha - f(\alpha)] \in H_1(A)$$

est un isomorphisme de groupes *abéliens*. Par conséquent,

$$\rho(f \circ \tau \circ f^{-1} \circ \tau^{-1}) = \rho(f) + \rho(\tau) - \rho(f) - \rho(\tau) = 0.$$

Il en résulte que  $k = 0$ . ■

*Exercice.* Montrer que le centre de  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,n+1,0})$  est exactement engendré par les twists de Dehn  $\tau_{\partial D(i)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .



## Génération par les twists de Dehn

### 1. Introduction

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  de difféotopies d'une surface  $\Sigma$  est engendré par les twists de Dehn autour de courbes fermées simples non séparantes ; on précise ensuite qu'un nombre fini de tels twists est suffisant, ce qui montre que  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  est de type fini.

Ce fait a déjà été observé dans les cas suivants :  $\mathfrak{M}(S^1 \times S^1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  (engendré par les twists de Dehn autour du méridien et de la longitude respectivement) et  $\mathfrak{M}(S^1 \times I) = \mathbb{Z}$  (engendré par le twist de Dehn autour de l'âme de l'anneau).

Cependant, nous ne pouvons pas espérer que la technique utilisée dans le cas du tore par exemple fonctionne pour démontrer le cas général : en effet, dans le cas du tore  $S^1 \times S^1$  et de l'anneau, nous avons en réalité considéré l'application naturelle

$$\mathfrak{M}^\pm(\Sigma) \rightarrow \mathrm{Aut}(H_1(\Sigma; \mathbb{Z})), [f] \mapsto f_*$$

et nous avons montré que cette application est un isomorphisme pour  $\Sigma = S^1 \times S^1$  et  $\Sigma = S^1 \times I$ .

*Exercice.* Montrer que l'application ci-dessus  $[f] \mapsto f_*$  n'est *pas* surjective si le genre est plus grand que 1 ( $g \geq 2$ ) [On pourra utiliser le fait que  $f_*$  préserve la forme d'intersection algébrique]. Pour montrer qu'elle n'est *pas* injective, on peut procéder comme suit : considérer la figure ci-dessous représentant une surface  $\Sigma_2$  orientable de genre 2.

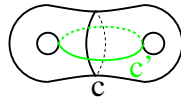


FIG. 6.1. Deux courbes fermées simples sur une surface orientable de genre 2.

Montrer que :

- (1)  $c$  est homologue à 0 :  $[c] = 0$  dans  $H_1(\Sigma_2)$ .
- (2) L'image  $\tau_c(c')$  de  $c'$  par le twist de Dehn autour de  $c$  est homologue à  $c'$  :  $[\tau_c(c')] = [c']$  dans  $H_1(\Sigma_2)$ .
- (3) L'image  $\tau_c(c')$  de  $c'$  par le twist de Dehn autour de  $c$  n'est pas isotope (resp. homotope) à  $c'$ .
- (4) En déduire que le noyau de l'application  $[f] \mapsto f_*$  est non trivial.

## 2. Quelques propriétés et relations des twists de Dehn

Commençons par décrire quelques propriétés des twists de Dehn. La première dit que le conjugué d'un twist de Dehn est un twist de Dehn :

LEMME 6.1 (Le conjugué d'un twist de Dehn). *Soit  $f \in \mathfrak{M}(\Sigma)$  et  $c$  (la classe d'isotopie d') une courbe fermée simple dans  $\Sigma$ . Alors*

$$(6.1) \quad f \circ \tau_c \circ f^{-1} = \tau_{f(c)}.$$

*Preuve.* Rappelons la définition du twist de Dehn :  $\tau_c = [t_c]$  pour une courbe fermée simple  $c$ . Soit

- $v$  notre volte originale (définie comme un difféomorphisme de la couronne  $A = \{z \in \mathbb{C}, 1 \leq |z| \leq 2\}$ ).
- $j : A \rightarrow \Sigma$  un plongement de  $A$  dans  $\Sigma$ .

Alors  $t_c$  est défini par  $j \circ v \circ j^{-1}$  sur  $j(A) \subseteq \Sigma$  et par l'identité ailleurs. Puisque  $f \circ j : A \rightarrow \Sigma$  est encore un plongement et que

$$f \circ t_c \circ f^{-1} = f \circ j \circ v \circ j^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ j) \circ v \circ (f \circ j)^{-1},$$

on en déduit que  $f \circ t_c \circ f^{-1} = t_{f(c)}$ . ■

COROLLAIRE 6.1. *Deux twists de Dehn relatifs à des courbes fermées simples non séparantes sont conjugués dans le groupe de difféotopie de  $\Sigma$ .*

*Preuve.* En effet, deux courbes fermées simples non séparantes se déduisent l'une de l'autre par un difféomorphisme  $f$  de la surface  $\Sigma$ . ■

COROLLAIRE 6.2. *Si  $f \in \text{Diffeo}_0(\Sigma)$  alors  $\tau_c = \tau_{f(c)}$  dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ .*

*Preuve.* Puisque  $f$  est isotope à l'identité,  $f = 1$  dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ . Le lemme précédent donne le résultat. ■

LEMME 6.2. *Soient  $c_1, c_2$  deux (classes d'isotopie de) courbes fermées simples sur  $\Sigma$  telles que  $i(c_1, c_2) = 1$ .*

- (1)  $\tau_{c_1} \circ \tau_{c_2}(c_1) = c_2$ .
- (2)  $\tau_{c_2} \circ \tau_{c_1}^2 \circ \tau_{c_2}(c_1) = c_1$  et  $\tau_{c_2} \circ \tau_{c_1}^2 \circ \tau_{c_2}$  est représenté par un difféomorphisme envoyant  $c_1$  sur  $c_1$  en renversant l'orientation de  $c_1$ .

*Preuve.* Quitte à conjuguer par un difféomorphisme et ensuite utiliser le lemme 6.1, il suffit de le voir pour deux courbes standard vérifiant les conditions de l'énoncé : le méridien et la longitude d'une même anse de la surface présentée comme sphère avec des anses. ■

Le lemme suivant montre que l'on peut plonger les groupes de tresses dans le groupe de difféotopies d'une surface.

LEMME 6.3. *Soient  $c_1, c_2$  deux courbes fermées simples dans  $\Sigma$ .*

- (1) *Si  $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ , alors  $\tau_{c_1} \tau_{c_2} = \tau_{c_2} \tau_{c_1}$ .*

(2) Si  $c_1 \pitchfork c_2 = \{p\}$  alors  $\tau_{c_1}\tau_{c_2}\tau_{c_1} = \tau_{c_2}\tau_{c_1}\tau_{c_2}$ .

*Preuve.* (1) Pour  $f \in \text{Diffeo}(\Sigma)$  on note  $\text{Supp}(f) = \{x \in \Sigma, f(x) \neq x\}$  le support de  $f$ . Vu l'hypothèse,  $\tau_{c_1}$  et  $\tau_{c_2}$  sont représentés par des difféomorphismes ayant des supports disjoints. D'où le résultat.

(2) La relation est équivalente à

$$\tau_{c_2}\tau_{c_1}\tau_{c_2}^{-1} = \tau_{c_1}^{-1}\tau_{c_2}\tau_{c_1},$$

ce qui équivaut d'après le lemme 6.1 à

$$\tau_{\tau_{c_2}(c_1)} = \tau_{\tau_{c_1}^{-1}(c_2)}.$$

Il suffit donc de montrer que  $\tau_{c_2}(c_1) = \tau_{c_1}^{-1}(c_2)$ , ce qui équivaut à  $\tau_{c_1}\tau_{c_2}(c_1) = c_2$  : c'est le lemme 6.2. ■

LEMME 6.4. Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux courbes fermées simples non séparantes sur  $\Sigma$  telles que  $i(c_1, c_2) = 0$ . Il existe un produit  $T$  de twists de Dehn relatifs à des courbes fermées simples non séparantes tel que  $T(c_1) = c_2$ .

*Preuve.* Il existe une cfs  $c_3$  telle que  $i(c_1, c_3) = i(c_3, c_2) = 1$  (utiliser un difféomorphisme approprié de la surface). Donc  $c_3$  est non séparante. Alors

$$\tau_{c_3}\tau_{c_2}\tau_{c_1}\tau_{c_3}(c_1) = \tau_{c_3}\tau_{c_2}(c_3) = c_2$$

par deux applications du lemme 6.2. ■

LEMME 6.5. On suppose que le genre  $g$  de  $\Sigma$  est supérieur ou égal à 2. Soient  $c, c'$  deux courbes fermées simples non séparantes. Il existe une suite de courbes fermées simples non séparantes  $c_0 = c, c_1, \dots, c_r = c'$  telles que  $i(c_k, c_{k+1}) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, r-1$ .

*Preuve.* Récurrence sur  $i(c, c') \in \mathbb{N}$ . Pour  $i(c, c') = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Pour  $i(c, c') = 1$ , on considère un voisinage  $V$  régulier de  $c \cup c'$  :  $V$  est un anneau (un voisinage régulier de  $c$ ) auquel on a rajouté une anse, c'est donc topologiquement un tore moins un disque. Puisque  $g \geq 2$ ,  $\partial V$  est une courbe fermée simple non séparante d'intersection nulle avec  $c_1$  et  $c_2$ . On fait ensuite l'hypothèse de récurrence que le résultat est vrai pour toute paire de courbes fermées simples dont l'intersection géométrique est strictement inférieure à  $i(c, c')$ . On cherche alors une courbe fermée simple non séparante  $\gamma$  telle que  $i(c, \gamma) < i(c, c')$  et  $i(\gamma, c') < i(c, c')$  de manière à pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence. On considère deux points d'intersection consécutifs quand on parcourt l'une des courbes, disons le long de  $c'$ . Il y a deux cas principaux à considérer selon que l'intersection algébrique locale est la même ou non aux deux points d'intersection. ■

### 3. Le théorème de Dehn

THÉORÈME 6.1. Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée connexe (sans piqûres). Le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  est engendré par les twists de Dehn relatifs aux courbes fermées simples non séparantes.

*Démonstration.* Le théorème est vrai pour le disque, le disque percé, la sphère (dans ces cas, le groupe de difféotopies est trivial), l'anneau (le groupe de difféotopies est  $\mathbb{Z}$  engendré par un twist de Dehn relatif à l'âme de  $A$ ) et le tore (le groupe de difféotopies est engendré par les deux twists de Dehn relatifs à la longitude et au méridien respectivement, cf. Exercice 3.4).

Le reste de la démonstration se fait par récurrence sur le genre  $g \geq 0$  et le nombre de composantes de bord  $b \geq 0$ .

PROPOSITION 6.1 (Dehn-Lickorish). *Soit  $\Sigma_g$  une surface compacte connexe sans bord. Le groupe  $\mathfrak{M}(\Sigma_g)$  est engendré par les twists de Dehn relatifs aux  $3g - 1$  cercles dessinés sur la figure 6.2.*

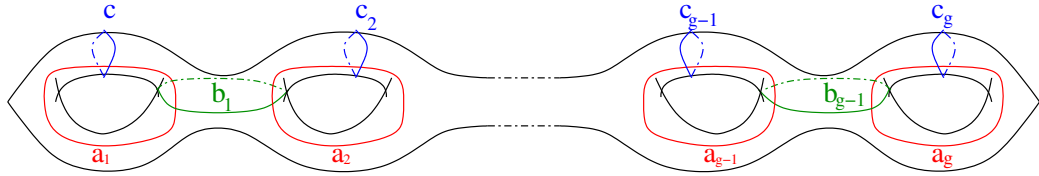


FIG. 6.2. Les  $3g - 1$  courbes fermées simples du théorème de Dehn-Lickorish.

## Le théorème de Dehn-Baer-Nielsen

### 1. Énoncé du théorème

Soit  $\Sigma_{g,1}$  une surface connexe compacte orientée de genre  $g$  avec une composante de bord. Fixons un point  $\star \in \partial\Sigma_{g,1}$ . Comme  $\Sigma_{g,1}$  se rétracte sur un bouquet de  $g$  cercles,  $\pi_1(\Sigma_{g,1})$  est un groupe libre  $F_{2g}$  à  $2g$  générateurs

$$F_{2g} = \pi_1(\Sigma_{g,1}) = \langle l_1, m_1, \dots, l_g, m_g \rangle.$$

Il est important de tenir compte du fait que cette identification comporte une information supplémentaire, le bord de  $\Sigma_{g,1}$  représente (pour une orientation des méridiens et longitudes) le produit des commutateurs

$$[\partial\Sigma_{g,1}] = [l_1, m_1] \cdots [l_g, m_g] \in F_{2g}.$$

Considérons maintenant  $[f] \in \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1})$ . Comme  $f|_{\partial\Sigma_{g,1}} = \text{Id}_{\partial\Sigma_{g,1}}$ ,  $f$  induit un automorphisme

$$f_{\#} : \pi_1(\Sigma_{g,1}, \star) \rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,1}, \star), \quad f_{\#}([\partial\Sigma_{g,1}]) = [\partial\Sigma_{g,1}].$$

Si l'on note  $\text{Aut}_{\partial}(F_{2g})$  le groupe des automorphismes de  $F_{2g}$  préservant l'élément  $[\partial\Sigma_{g,1}]$ , alors on dispose d'un morphisme de groupes

$$(7.1) \quad \varphi : \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \text{Aut}_{\partial}(F_{2g}), \quad [f] \mapsto f_{\#}.$$

Le premier théorème, dû à Dehn, Baer et Nielsen, affirme que ce morphisme est un isomorphisme.

**THÉORÈME 7.1.** *Le morphisme de groupes  $\varphi$  est un isomorphisme. En particulier,  $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1})$  se plonge dans le groupe  $\text{Aut}(F_{2g})$  des automorphismes du groupe libre  $F_{2g}$ .*

Un des intérêts de ce théorème est de réduire (théoriquement) l'étude de  $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1})$  à celle d'un certain sous-groupe du groupe libre et d'exploiter certaines propriétés du groupe libre  $F_{2g}$ .

Les sections suivantes sont consacrées à la démonstration de ce résultat.

### 2. Les surfaces sont des espaces $K(G, 1)$

On a déjà observé que  $\Sigma_{g,1}$  se déforme par rétractation sur un bouquet  $B$  de  $2g$  cercles. Le revêtement universel de  $B$  est un 1-complexe qui a le type d'homotopie d'un point. Il résulte de la théorie des revêtements que

$$\pi_k(\Sigma_{g,1}, \star) = \begin{cases} F_{2g} & \text{si } k = 1; \\ 1 & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Toute l'homotopie de  $\Sigma_{g,1}$  est déterminée par son 1-squelette. C'est ce qu'on appelle un espace  $K(G, 1)$  avec  $G = F_{2g} = \pi_1(\Sigma_{g,1})$ . Tous les espaces  $K(G, 1)$  ont leur type d'homotopie déterminés par  $G$ . Plus précisément, pour tout espace cellulaire  $X$  connexe par arcs, tout morphisme  $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(K(G, 1), x_0)$  est induit par une application  $(X, x) \rightarrow (K(G, 1), x_0)$  qui est unique à homotopie près fixant  $x$ . Autrement dit, le lemme suivant est vrai :

LEMME 7.1. *Soit  $Y$  un espace  $K(G, 1)$ . Soit  $[(X, x), (Y, y)]$  l'ensemble des classes d'homotopie d'applications entre espaces pointés  $(X, x)$  et  $(K(G, 1), y)$ . L'application*

$$[(X, x), (Y, y)] \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X, x), G), [g] \mapsto g_{\sharp}$$

*est une bijection.*

*Preuve.* On utilise une décomposition cellulaire de  $X$ . Supposons que  $X$  ait une seule 0-cellule, le point  $x \in X$ . À partir de  $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow G$ , on construit  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  tel que  $f_{\sharp} = \phi$ . On commence par  $f(x) = y$ . L'adhérence de chaque 1-cellule  $e^1$  de  $X$  est un cercle  $c^1$  passant par  $x$ , donc représente un élément  $[e^1] \in \pi_1(X, x)$ . On définit  $f(e^1)$  comme étant un représentant de la classe  $[\phi(e^1)] \in \pi_1(Y, y)$ . Notons que le groupe fondamental  $\pi_1(X^1, x)$  du 1-squelette de  $X^1$  est engendré par les classes  $c^1$  des adhérences des 1-cellules  $e^1$ . On a donc déjà construit  $f$  au niveau du 1-squelette.

Pour étendre  $f$  à une 2-cellule  $e^2$  qui est attachée par une application  $\alpha : S^1 \rightarrow X^1$ , il suffit que la composition  $f \circ \alpha$  soit homotopiquement triviale (pourquoi?). L'application de rattachement  $\alpha$  détermine un élément  $[\alpha] \in \pi_1(X^1, x)$  (à l'aide d'un chemin joignant un point  $\alpha(s_0)$  au point base  $x \in X^1$ ). Dire que  $f \circ \alpha$  est homotopiquement triviale est équivalent à  $f_{\sharp}([\alpha]) = 1$  dans  $\pi_1(Y, y)$ . Puisque l'on colle une 2-cellule à  $[\alpha]$ , la cellule  $e^2$  donne une homotopie entre  $[\alpha]$  (vu dans  $X^1 \subset X$ ) et un point dans  $(X, x_0)$ . Donc  $f_{\sharp}([\alpha]) = 1$  et  $f$  se prolonge sur  $e^2$ .

On continue ensuite par récurrence sur  $n$  à prolonger  $f$  aux cellules  $e^n$  de dimension  $n$  supérieure à 2. Pour cela, il suffit que la composition

$$S^{n-1} \xrightarrow{\alpha} X^{n-1} \xrightarrow{f} Y$$

soit homotope à une constante. La théorie des revêtements assure que cette application se relève en une application

$$S^{n-1} \rightarrow \tilde{Y}$$

sur le revêtement universel de  $Y$  qui a par hypothèse le type d'homotopie d'un point. Il en résulte que l'application ci-dessus est homotope à une (application) constante et donc  $f \circ \alpha$  aussi.

Pour voir l'unicité à homotopie près, on part de deux applications  $f_0, f_1 : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  induisant le même morphisme  $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ . Clairement leurs restrictions au 1-squelette sont homotopes via une homotopie fixant constamment  $x$  (sur  $y$ ). Il suffit de prolonger cette homotopie à  $X$  tout entier, donc de prolonger l'application déjà définie  $X^1 \times I \cup X \times \partial I \rightarrow Y$  aux cellules restantes  $e^n \times ]0, 1[$  de  $X \times I$ . Comme ces cellules ont dimension  $n + 1 > 2$ , on peut procéder comme précédemment.



Le cas où  $X$  a plusieurs 0-cellules (non utilisé dans ce cours) est laissé au lecteur.

■

### 3. Une variante du groupe de difféotopies

Nous aurons besoin de considérer un groupe légèrement différent mais fortement apparenté à notre groupe habituel  $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n})$ .

Soit  $\Sigma_{g,b,n}$  de genre  $g$  à  $b$  composantes de bord et  $n$  piqûres. Les classes d'isotopies de difféomorphismes positifs  $f : \Sigma_{g,b,n} \rightarrow \Sigma_{g,b,n}$  préservant ensemblistement les composantes de bord et les piqûres respectivement forment un groupe, noté  $P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n})$ . Ce groupe est distinct de  $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n})$  : on ne requiert pas que les difféomorphismes soient l'identité sur le bord ni que les classes d'isotopies (difféotopies) soient constamment l'identité sur le bord. Pour les distinguer, on appellera ces difféotopies les difféotopies *faibles*.

**LEMME 7.2.** *Soit  $\gamma$  une courbe fermée simple dans  $\Sigma_{g,b,n}$ . Alors  $\tau_\gamma = 1$  dans  $P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n})$  si et seulement si  $\gamma$  est homotope à un point ou une piqûre ou à une composante de bord.*

*Démonstration.* La seule différence à voir avec le groupe de difféotopies classiques est qu'un twist de Dehn relatif à une composante de bord est trivial. Vérifions le.

Soit  $\gamma$  homotope à une composante de bord  $C$  de  $\Sigma$ . On veut montrer qu'il existe une isotopie faible entre  $\tau_\gamma$  et l'identité. Il suffit de le vérifier pour le twist de Dehn  $v$  standard dans l'anneau

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\} \simeq I \times S^1$$

où l'on identifie l'une des composantes de bord  $\partial_+ A = \{z \in A \mid |z| = 2\}$  à  $C$  : si

$$v : re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta+2\pi(r-1))}$$

est le twist de Dehn alors

$$I \times A \rightarrow \times A, (t, re^{i\theta}) \mapsto v_t(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+2\pi(r-1)t)}$$

est une isotopie entre  $v_0 = \text{Id}$  et  $v_1 = v$ . On vérifie que cette isotopie n'est pas l'identité sur  $\partial_+ A$  : en effet,  $z \in \partial_+ A$  ssi  $|z| = 2$  et

$$v_t(2e^{i\theta}) = 2e^{i(\theta+2\pi t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

■

On dispose d'une application naturelle

$$w : \mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n}) \rightarrow P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n}),$$

qui à une classe d'isotopie (difféotopie) classique associe la classe d'isotopie faible. C'est manifestement un morphisme de groupes. Par ailleurs, on dispose d'un morphisme

$$\pi : P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n}) \rightarrow S_b$$

qui à une difféotopie associe la permutation qu'elle induit sur les  $b$  composantes de bord. Il est bien clair que la difféotopie classique (élément de  $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n})$  vu dans  $P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n})$ ) induit la permutation triviale. Réciproquement, supposons qu'une difféotopie faible induise l'identité comme permutation. Alors on peut la représenter par un difféomorphisme  $f$  qui fixe ensemblistement chaque composante de bord.

Mais dans ce cas  $f$  est faiblement isotope à un difféomorphisme  $\tilde{f}$  qui est l'identité sur chaque composante de bord ( $\simeq S^1$ ) : en effet,  $\mathfrak{M}(S^1) = 1$ . On relève ainsi  $[f]$  en une difféotopie classique  $[\tilde{f}] \in \mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n})$ . Par conséquent, toute difféotopie faible qui induit la permutation identique est l'image par  $w$  d'une difféotopie forte.

Considérons le noyau  $\text{Ker}(w)$ . Soit  $[f] \in \text{Ker}(w)$ . Alors  $f$  est isotope à l'identité de  $\Sigma_{g,b,n}$  via une isotopie

$$I \times \Sigma \rightarrow \Sigma, (t, x) \mapsto f_t(x),$$

telle que  $f_1 = f$ ,  $f_0 = \text{id}$  et  $f_t(\partial\Sigma) = \partial\Sigma$ . Cette isotopie se restreint au bord

$$B : I \times \partial\Sigma \rightarrow \partial\Sigma, (t, x) \mapsto f_t|_{\partial\Sigma}(x).$$

Notons  $C_i$  les composantes de  $\Sigma$ . Alors les composantes connexes de  $I \times \partial\Sigma$  sont  $I \times C_i$ . Donc  $B(I \times C_i) = I \times C_{\pi(i)}$  pour une permutation  $\pi$ . Or  $B|_{0 \times C_i} = f_0|_{\partial C_i} = \text{id}_{C_i}$ . Donc  $f_t$  laisse globalement invariant chacune des  $b$  composantes connexes  $C$  de  $\partial\Sigma$ . On peut donc considérer

$$[0, 1] \times C \rightarrow C, (t, x) \mapsto f_t(x)$$

pour chaque composante  $C \simeq S^1$ . A chaque  $t$  fixé,  $f_t|_C$  est un difféomorphisme positif de  $C$ . Par conséquent, on peut regarder  $(f_t|_C)_{t \in [0,1]}$  comme un lacet dans  $\text{Diff}^+(C)$  basé en  $\text{id}_C$  qui détermine un élément dans  $\pi_1(\text{Diff}^+(C), \text{id}_C)$ .

LEMME 7.3.  *$\text{Diff}^+(S^1)$  est homotopiquement équivalent à  $S^1$  et contient  $S^1$  comme rétracte par déformation.*

Il résulte du lemme que  $\pi_1(\text{Diff}^+(C), \text{id}) \simeq \pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ . Manifestement un générateur est induit par l'isotopie

$$I \times S^1 \rightarrow S^1, (t, z) \mapsto e^{2\pi it} \cdot z$$

(à chaque  $t$  fixé : rotation d'angle  $2\pi t$ ) qui tourne uniformément le cercle une fois autour de son centre. Si l'on prolonge cette isotopie sur un collier de  $S^1 \simeq C$ , on obtient un twist de Dehn usuel sur un anneau.

Par conséquent, chaque  $[(f_t|_C)_{t \in [0,1]}]$  est une puissance d'un twist de Dehn relatif à  $C$ .

En conclusion, on a établi la suite exacte

$$(7.2) \quad 1 \longrightarrow \langle \tau_{C_i} \mid 1 \leq i \leq b \rangle \longrightarrow \mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n}) \xrightarrow{w} P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,b,n}) \xrightarrow{\pi} S_b \longrightarrow 1$$

Le cas particulier  $b = 1$  joue un rôle particulier :

$$(7.3) \quad 1 \longrightarrow \langle \tau_{\partial\Sigma} \rangle \longrightarrow \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,n}) \xrightarrow{w} P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,n}) \longrightarrow 1$$

#### 4. Preuve de l'injectivité du théorème

D'après le Lemme 7.1, on dispose d'une bijection

$$[(X, x), (\Sigma_{g,1}, \star)] \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X, x), \pi_1(\Sigma_{g,1}, \star)), [g] \mapsto g_*$$

En particulier, on dispose d'une bijection

$$(7.4) \quad [(\Sigma_{g,1}, \star), (\Sigma_{g,1}, \star)] \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,1}, \star), \pi_1(\Sigma_{g,1}, \star))$$

qui est manifestement un isomorphisme de monoïdes (pour la composition). Cela ne nous donne pas encore tout à fait le résultat désiré : les automorphismes de  $\pi_1(\Sigma_{g,1})$  que nous étudions préservent le "bord"  $[\partial\Sigma_{g,1}]$ .

Montrons que  $\varphi : \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \text{Aut}_{\partial}(\pi)$  est injective. Soit  $[g] \in \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1})$  tel que  $g_{\#} = \text{id}_{\pi}$ . D'après l'isomorphisme (7.4),  $g$  est homotope à  $\text{id}_{\Sigma}$ . D'après le théorème de Baer, homotopie et isotopie coïncident en dimension 2. Donc il existe une isotopie  $g_t$  entre  $g_1 = g$  et  $g_0 = \text{id}_{\Sigma}$ . Par conséquent,  $[g] = 1$  dans  $P\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0})$ . Donc  $[g] \in \text{Ker}(w) = \langle \tau_{\partial\Sigma} \rangle$ . Donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\tau_{\partial\Sigma}^k = [g]$ . Il n'est cependant pas difficile de voir que  $\tau_{\partial\Sigma}$  agit sur  $\pi$  comme la conjugaison par  $[\partial\Sigma]$ . Voir Figure 7.1.

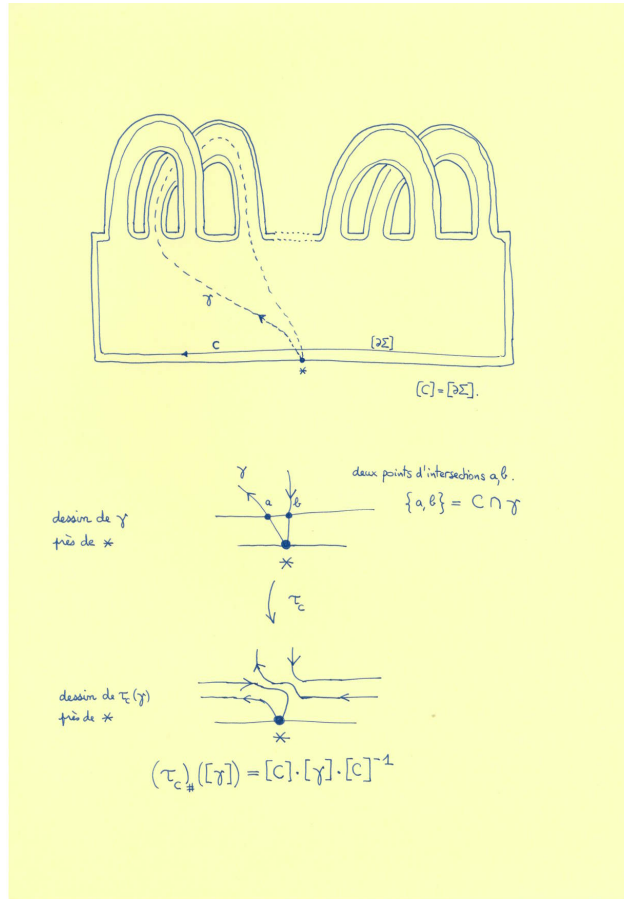


FIG. 7.1.  $\tau_{\Sigma}$  agit sur  $\pi$  comme la conjugaison par  $[\partial\Sigma]$

Par conséquent,  $k = 0$  et  $[g] = 1$  dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ . ■

### 5. Preuve de la surjectivité du théorème

Soit  $\psi \in \text{Aut}_{\partial}(\Sigma)$ . D'après la bijection

$$[(\Sigma_{g,1}, \star), (\Sigma_{g,1}, \star)] \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,1}, \star), \pi_1(\Sigma_{g,1}, \star)),$$

il existe une (unique) classe d'homotopie  $[f]$  telle que  $f_{\#} = \psi$ . Comme la bijection ci-dessus est un isomorphisme de monoïdes,  $f$  est une équivalence d'homotopie. De plus,  $f_{\#}([\partial\Sigma]) = [\partial\Sigma]$ . Par conséquent  $f$  préserve le bord  $\partial\Sigma$ , donc  $f|_{\partial\Sigma}$  est un homéomorphisme positif.

Notre objectif est de montrer que  $f$  est en fait homotope à un difféomorphisme de  $\Sigma$ . On peut commencer par modifier  $f$  dans sa classe d'homotopie de sorte que  $f$  soit une application de classe  $C^{\infty}$  et que  $f^{-1}(\Sigma) = \partial\Sigma$ .

Un pantalon est une sphère privée de trois disques. D'après la classification des surfaces, nous pouvons choisir un système de courbes fermées simples  $C_i$  qui découpent  $\Sigma$  en une réunion finie de pantalons. Quitte à homotoper  $f$  légèrement, on peut encore supposer que  $f$  est transverse à chaque  $C_i$ . Dans ce cas,  $T = f^{-1}(\cup_i C_i)$  est une sous-variété compacte de codimension 1 de  $\Sigma$  : c'est donc une réunion disjointe finie de cercles. Découpons  $\Sigma$  le long de  $T$  : on obtient une nouvelle surface  $\Sigma_T$ . Soit  $Q_1, \dots, Q_k$  ses composantes.

Le premier objectif est de modifier  $f$  par homotopie de sorte que les  $Q_i$  soient des pantalons et que  $f$  se restreigne à une application  $f_i : Q_i \rightarrow P_i$  qui est un difféomorphisme sur le bord.

Le second objectif est de modifier  $f_i$  par homotopie pour en faire un difféomorphisme.

## Bibliographie

- [1] Alfors-Sario, Riemann Surfaces, Princeton Univ. Press (1960).
- [2] R. Baer, *Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen*, Journal für Math. 159 : 101 — —116, 1928.
- [3] D. B. A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math., 115 : 83 — —107, 1966.
- [4] B. Farb, D. Margalit, A primer on mapping class groups, Princeton Univ. Press, 2010.
- [5] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poénaru, Travaux de Thurston sur les surfaces, volume 66 of Astérisque. Société Mathématique de France, Paris, 1979 (Séminaire Orsay).
- [6] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2000.
- [7] E. E. Moise, Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. Springer-Verlag, 1977.