SUITES DE NOMBRES RÉELS

Ahmed Zeriahi

November 9, 2007

Le but de cette partie est de présenter une étude rigoureuse des suites de nombres réels. On insistera notamment sur la notion de convergence et son utilisation en Analyse réelle comme moyen d'approcher par exemple certains nombres irrationnels par des nombres rationnels. On donnera ensuite quelques exemples pour illustrer la méthode d'itération successive en montrant comment les suites convergentes peuvent être utilisées pour approcher les nombres réels solutions de certaines équations non linéaires.

1 Introduction aux nombres réels

La construction des nombres réels ne fait pas partie du programme de cette première période, mais elle est essentielle d'un point de vue conceptuel puisque toute l'Analyse mathématique est fondée sur l'existence et les propriétés du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Néanmoins, il nous a semblé utile d'essayer de donner au lecteur curieux et intéréssé une idée même vague de ce que sont les nombres réels sans pour autant l'encombrer avec des considérations trop techniques.

Les nombres réels sont connus et utilisés dans les calculs depuis fort longtemps. La découverte du premier nombre irrationnel $\sqrt{2}$ date probablement de l'époque de Pythagore (VI^e siècle av. J.C.). Mais il a fallu attendre la fin du XIX^e siècle pour que les mathématiciens comme Peano, Dedekind et Cantor notamment aboutissent par une démarche rigoureuse à la première construction du corps des nombres réels.

On a d'abord défini les nombres entiers naturels de manière axiomatique (Peano) puis à partir des nombres entiers naturels, on a construit successivement les nombres entiers relatifs, les nombres rationnels et enfin les nombres réels et les nombres complexes. Il aura donc fallu attendre environ 25 siècles pour que l'on aboutisse à la belle chaine d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Parmi ces inclusions c'est bien entendu l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui est la plus mystérieuse et la plus délicate. C'est celle-là que nous allons tenter d'explorer dans cette première section.

Avertissement : Seul le contenu du paragraphes 1.3 de cette section 1 est *obligatoire* et doit être compris du lecteur étudiant. Cependant il lui est conseillé de lire les autres paragraphes au gré de sa curiosité et de son besoin de d'approfondissement.

1.1 Insuffisance du corps des nombres rationnels (*facultatif*)

Nous supposerons connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de deux opérations internes, l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\cdot$ ayant les propriétés habituelles et d'une relation d'ordre total compatible avec les opérations internes aynat la propriété fondamentale que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On en déduit immédiatement par symétrisation de l'addition l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers rationnels (ou relatifs) qui contient $\mathbb{N}$.

Rapellons que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est muni de deux opérations internes, l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\cdot$ qui possèdent un certain nombre de propriétés bien connues que nous ne rappelons pas ici mais qui se résument en disant que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un *anneau commutatif intègre.*

De plus il existe une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}$, notée $\leq$, compatible avec cette structure qui prolonge l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ et qui possède la propriété fondamentale suivante : *toute partie non vide et minorée (resp. majorée) de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit (resp. plus grand) élément.*

Cependant si $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ l'équation $q \cdot x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, à moins que $q = 1$. Autrement dit il n'y a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$.

Une construction classique très fréquente en mathématiques, appellée le *passage au quotient*, permet de pallier à cet inconvénient en construisant un "ensemble plus gros" ayant la même structure que $\mathbb{Z}$ et dans lequel l'inverse d'un élément non nul existe.

Nous ne donnerons pas cette construction ici mais rappelons qu'un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ est une fraction $x = p/q$ représentée par un couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ avec la relation d'equivalence suivante: deux couples $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^\star$ et $(p', q') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^\star$ représentent le même nombre rationnel s'ils définissent la même fraction i.e. $pq' = p'q$.

Il résulte des propriétés arithmétiques de $\mathbb{Z}$ que tout nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ admet une représentation unique sous la forme $x = p/q$ où p, q sont des entiers tels que $q \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ et p et q sont premiers entre eux.

Les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{Z}$ s'étendent naturellement à $\mathbb{Q}$ de sorte que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

De plus la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ s'étend naturellement à l'ensemble $\mathbb{Q}$ et en fait un corps commutatif totalement ordonné.

Parmi les nombres rationnels il y a les nombres décimaux qui s'écrivent sous la forme $n10^m$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

La relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ possède une propriété simple mais importante que nous nous allons rappelé.

Proposition 1.1 *(Propriété d'Archimède)*
Soit $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ avec $a > 0$. Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $Na > b$.

Démonstration : En effet si $b \leq 0$ la propriété est trivialement vraie avec $N = 1$.

Supposons que $b > 0$. Alors la relation $Na > b$ s'écrit $N > ba^{-1}$. Comme $ba^{-1} \in \mathbb{Q}$ et que $ba^{-1} > 0$, il sécrit $ba^{-1} = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et l'entier $N := p + 1$ vérifie l'inégalité $N > p \geq p/q$. ▶
Cette propriété signifie que dans $\mathbb{Q}$ il y a des nombres rationnels aussi petit que l'on veut. On dit que $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ est un *corps* (commutatif) archimédien.

On s'est apperçu assez tôt que pour les besoins de la géométrie classique par exemple, le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est insuffisant. Il lui manque certains nombres réels dits *irrationnels* dont les plus célèbres sont $\sqrt{2}$ et π; en fait il est plein de "trous", en un sens que nous allons tenter d'expliquer.

Donnons un premier exemple simple qui illustre ce phénomène. On sait depuis Pythagore (plus de 500 ans avant J.C.) que la longueur de l'hypothénuse d'un triange rectangle dont les côtés mesurent une unité de longueur est une grandeur numérique ℓ (mesurée avec la même unité) vérifiant l'équation $\ell^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. ce nombre est facile à construire à la règle et au compact et pourtant nous allons démontrer qu'un tel nombre n'est pas rationnel.

Proposition 1.2 *Il n'existe pas de nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$.*

Démonstration : Pour démontrer cette propriété, on raisonne par l'absurde en supposant le contraire pour aboutir à une contradiction. En effet supposons qu'il existe un nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$. Comme $(-x)^2 = 2$, on peut supposer $x > 0$. Ecrivons $x = p/q$ sous forme irréductible, où p, q sont des entiers positifs non nuls et premiers entre eux tels que $x^2 = 2$. Alors $p^2 = 2q^2$, ce qui veut dire que p^2 est entier pair. Cela implique que p est pair, en effet le carré d'un nombre entier impair $n = 2k + 1$ est un nombre entier impair puisque $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k + 2) + 1$ est impair. Par conséquent, il existe un entier p' tel que $p = 2p'$. Il en résulte que $q^2 = 2p'^2$, ce qui implique de la même façon que q est pair. Ainsi p et q sont pairs donc divisibles par 2 et donc la fraction p/q n'est pas irréductible, ce qui est une contradiction. ▶

En fait le raisonnement précédent peut se généraliser en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique (Théorème d'Euclide) pour démontrer que si $m \in \mathbb{N}$ est un nombre entier naturel qui n'est pas le carré d'un autre entier (e.g. un nombre premier) alors l'équation $x^2 = m$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

En conclusion, on peut dire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des des nombres rationnels possède des "trous" et ne suffit pas pour traiter des problèmes simples de géométrie classique. En fait il est plein de trous et c'est en ce sens que l'on dira que le corps des rationnels est *incomplet*.

1.2 Les nombres irrationnels existent réellement (*facultatif*)

Nous avons vu au paragraphe précédent que le corps des rationnels est incomplet en ce sens qu'il lui manque beaucoup d'éléments.

En effet nous avons démontré qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est égal à 2. Autrement dit la *grandeur réelle constructible* ℓ dont le carré est 2 n'est pas un nombre rationnel. Il est bien connu des lycéens que la spyrale de Pythagore permet de construire à la règle et au compact toutes les grandeurs réelles dont le carré est un entier donné $m \in \mathbb{N}^*$.

Mais alors est-il possible de donner des valeurs rationnelles ou décimales approchées de ces grandeurs (lorsqu'elles ne sont pas entières) avec une précision donnée ?

C'est précisémment ce que nous allons voir. Nous allons donner un procédé assez simple permettant par exemple de construire des nombres rationnels (et même décimaux) dont le carré est arbitrairement voisin de 2 par défaut et des nombres rationnels (décimaux) dont le carré est arbitrairement voisin de 2 par excès. Ces nombres décimaux seront appelés respectivement des *approximants décimaux par défaut* et des *approximants décimaux par excès* de la grandeur réelle ℓ. C'est dans ce sens là que $\sqrt{2}$ existe!

Nous allons appliquer le *procédé de dichotomie* pour démontrer cette propriété. Ce procédé s'applique de la même façon pour obtenir des approximants décimaux de $\sqrt{m}$ lorque m n'est pas le carré d'un entier.

En effet observons d'abord que si $a, b \in \mathbb{Q}$ sont des nombres rationnels (décimaux), la moyenne arithmétique $r = (a + b)/2 \in \mathbb{Q}$ est un nombre rationnel (décimal) vérifiant $a < r < b$.

Choisissons deux nombres rationnels (décimaux) $a_0, b_0 \in \mathbb{Q}^+$ tels $a_0^2 < 2 < b_0^2$. Le nombre a_0 (resp. b_0) peut être considéré comme un premier approximant rationnel (décimal) par défaut (resp. par excès) de la grandeur géométrique ℓ solution de l'équation $x^2 = 2$.

Considérons ensuite le nombre rationnel (décimal) $m_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ est représenté géométriquement par le milieu du segment $[a_0, b_0]$. Alors, puisque l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, il n'y a que deux cas possibles.
- Ou bien $m_0^2 < 2$ dans ce cas on pose $a_1 := m_0$ et $b_1 := b_0$.
- Ou bien $m_0^2 > 2$, auquel cas on pose $a_1 := a_0$ et $b_1 := m_0$.

Dans tous les cas on obtient un nouveau couple (a_1, b_1) de nombres rationnels ((décimaux)) positifs vérifiant $a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$, $a_1^2 < 2 < b_1^2$ et tels que $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$.

On obtient ainsi un nouvel approximant rationnel (décimal) par défaut a_1 de la grandeur ℓ tel que a_1^2 soit une valeur approchée par défaut de 2 et un nouvel approximant rationnel par excès b_1 de la grandeur ℓ tel que b_1^2 soit une valeur approchée par excès de 2 vérifiant $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$, ce qui implique que l'une au moins des deux valeurs décimales approchées obtenues est plus précise que chacune des deux valeurs approchées précédentes.

En itérant ce procédé de dichotomie n fois, on construit successivement des approximants rationnels (décimaux) par défaut $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$ et des approximants rationnels (décimaux) par excès $b_0 \geq b_1 \geq \ldots \geq b_n > \sqrt{2}$ de la même grandeur ℓ tels que au rang n on ait $a_n^2 < 2 < b_n^2$ et l'écart entre les deux approximants est donné par $e_n := b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Grâce à la propriété d'Archimède de $\mathbb{Q}$, étant donné $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon$; il suffit pour cela de prendre $n > (b_0 - a_0)/\varepsilon$ puisque $2^n > n$. Ainsi a_n et b_n sont des approximants rationnels (décimaux) qui donnent des valeurs rationelles (décimales) approchées à $\varepsilon-$près par défaut et par excès respectivement de la grandeur ℓ.

En conclusion, d'un point de vue géométrique il existe bien une grandeur réelle mais non rationnelle ℓ dont le carré est 2. Cette grandeur peut être approchée par des nombres rationnels aussi bien par défaut que par excès avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée à l'avance. Cette grandeur sera représentée par un nombre réel irrationnel élément d'un nouvel ensemble que nous allons définir maintenant.

On voit ainsi que pour appréhender l'éventuelle solution de l'équation $x^2 = 2$, du point de vue des nombres rationnels, on est naturellement conduit à considérer les ensembles suivants: $D := \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q}^+ ; r^2 \leq 2\}$ et $E := \{r \in \mathbb{Q}^+ ; r^2 > 2\}$, où $\mathbb{Q}^-$ et $\mathbb{Q}^+$ désignent l'ensemble des nombres rationnels négatifs et positifs respectivement.

On observe alors que le couple (D, E) possède les propriétés remarquables suivantes:
(C.1) Les ensembles D et E forment une partition de $\mathbb{Q}$.
(C.2) Pour tout $(a, b) \in D \times E$, on a $a < b$.
(C.3) Pour tout entier $n \geq 1$, il existe $(a, b) \in D \times E$ tel que $0 < b - a \leq 1/n$.
Les deux premières propriétés expriment l'idée intuitive que tous les approximants rationnels possibles du "futur nombre irrationnel" positif solution de l'équation $x^2 = 2$, se répartissent en deux ensembles disjoints: l'ensemble D des approximants rationnels par défaut de ce "futur nombre irrationnel" positif et l'ensemble E de ses approximants rationnels par excès.
La propriété $(C.3)$ se traduit en disant que les deux parties D et E sont *adjacentes* et exprime qu'idéalement le meilleur des "approximants rationnels" par défaut tend à coïncider avec le meilleur des "approximants rationnels" par excès et que leur valeur idéale commune est le nombre réel qui manque entre tous les rationnels dont le carré est moins que 2 et ceux dont le carré est plus que 2. Enfin un trou comblé !

Observons qu'une des conséquences de la construction précédente est que dans l'ensemble totalement ordonné des nombres rationnels il n'y a pas de plus grand approximant rationnel par défaut ni de plus petit approximant rationnel par excès. C'est précisément ce genre de lacune qui fait de $\mathbb{Q}$ un corps totalement ordonné "incomplet". Dans ce cas précis c'est le "nombre idéal" représenté par cette "coupure" (D, E) qui représentera dans l'ensemble des coupures la solution, notée $\sqrt{2}$ de l'équation $x^2 = 2$.

Il existe une construction de $\mathbb{R}$ basée sur la notion de "coupure" due à Dedekind. Par définition, une *coupure de* $\mathbb{Q}$ est un couple $c = (D, E)$ de parties de $\mathbb{Q}$ vérifiant les trois propriétés (C.1), (C.2) et (C.3) ci-dessus.
On peut démontrer grâce au principe de dichotomie que la propriété (C3) est une conséquence des deux autres propriétés.

On désignera par $\mathcal{C}$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$. L'ensemble D possède la propriété suivante: si $d \in D$ alors $\{x \in \mathbb{Q}; x \leq d\} \subset D$. On dira que D est une section commençante: c'est la section commençante de la coupure $c = (D, E)$. L'ensemble E possède la propriété duale suivante: si $e \in E$, $\{y \in \mathbb{Q}; y \geq e\} \subset E$. On dira que E est une section finissante: c'est la section finissante de la coupure c.

Ainsi une coupure est un couple (A, B) de parties de $\mathbb{Q}$ formant une partition de $\mathbb{Q}$ en deux *parties adjacentes* telles que A soit une section commençante, B une section finissante dans Q.

C'est ainsi que par définition $\sqrt{2}$ est la coupure (D_0, E_0), où $D_0 := \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q}^+; r^2 \leq 2\}$ et $E_0 := \{r \in \mathbb{Q}^+; r^2 > 2\}$.

Observer que dans cet exemple D_0 est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'a pas de plus grand élément et que E_0 est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Q}$ qui n'a pas de plus petit élément.

Tout nombre rationnel $s \in \mathbb{Q}$ définit de façon naturelle une coupure de $\mathbb{Q}$ à savoir la coupure $\mathbf{s} := (s^-, s^+)$, où $s^- := \{r \in \mathbb{Q}; r \leq s\}$ et $s^+ := \{r \in \mathbb{Q}; r > s\}$.

Observer que dans ce cas la partie s^- possède un plus grand élément qui est précisément s alors que la partie s^+ n'a pas de plus petit élément.

En fait une coupure $c = (A, B)$ de $\mathbb{Q}$ est entièrement déterminée par l'une de ses deux sections A ou B puisqu'elles sont complémentaires l'une de l'autre dans $\mathbb{Q}$ i.e. $A = \overline{B}$ en notant $\overline{B}$ le compl'ementaire de B dans $\mathbb{Q}$. On peut donc définir une *coupure* de $\mathbb{Q}$ comme une section finissante ouverte de $\mathbb{Q}$ i.e. une partie $B \subset \mathbb{Q}$ telle que $B \neq \emptyset$ et $B \neq \mathbb{Q}$, n'ayant pas de plus petit élément et vérifiant la propriété suivante

$$\forall b \in B, \forall x \in \mathbb{Q}, b \leq x \Longrightarrow x \in B.$$

Il en résulte que sa partie complémentaire $\overline{B}$ est une section commençante et que les deux parties $(\overline{B}, B)$ sont adjacentes i.e. $\forall a \in \overline{B},\ \forall b \in B, a < b$.

On désignera par $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$. Une coupure $B \in \mathcal{C}$ sera dite *rationnelle* si par définition sa partie complémentaire $\overline{B}$ a un plus grand élément $s = \max \overline{B}$. Dans ce cas on a $B = s^+$ et $\overline{B} = s^-$. Il en résulte que l'application

$$\iota : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui à un nombre rationnel $s \in \mathbb{Q}$ associe la section finissante ouverte qu'il définit $\iota(s) := s^+ = \{x \in \mathbb{Q}; x > s\}$ est une application injective qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous ensemble $\iota(\mathbb{Q})$ de $\mathcal{C}$. Une coupure $B \in \mathcal{C}$ sera dite *irrationnelle* si par définition sa section complémentaire $\overline{B}$ n'a pas de plus grand élément. C'est ainsi que la coupure $\sqrt{2}$ est irrationnelle.

Il est est facile de définir une relation d'ordre sur $\mathcal{C}$. Si $B, B' \in \mathcal{C}$, on dira que $B \leq B'$ si et seulement si $B' \subset B$ ou encore en terme de sections commençantes $\overline{B} \subset \overline{B'}$. Il est évident que cette relation est une relation d'ordre sur $\mathcal{C}$ qui prolonge celle de $\mathbb{Q}$ modulo l'indentification entre les nombres rationnels et les coupures rationnelles qu'ils définissent. On démontrer sans trop de difficultées que $\mathcal{C}$ muni de la relation d'ordre ainsi définie est ensemble totalement ordonné, archimédien dans lequel toute partie non vide et minorée de $\mathcal{C}$ admet une borne inférieure. L'objectif est donc en partie atteint.

Il résulte de cette définition qu'un nombre réel x est une coupure de $\mathbb{Q}$ représentée par la section finissante ouverte formée de tous les nombres rationnels strictement plus grand que x et dont x est la borne inférieure. Par passage au complémentaire on obtient la section commençante dont x est la borne supérieure. Celle-ci a un plus grand élément (qui sera égal à x) si et seulement si x est rationnel.

Cette construction permet de façon naturelle de représenter géométriquement l'ensemble des nombres réels par les points d'une droite orientée sur laquelle on a choisi une origine représentant le nombre réel 0 et un sens positif représentant la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La propriété (C3) exprime alors la propriété de "continuité" de l'ensemble des nombres réels à l'image des points d'une droite.

Observons également que la propriété $(C3)$ exprime comme nous le verrons que tout nombre réel c peut être approché, aussi bien par défaut que par excès, par des nombres rationnels avec une erreur aussi petite que l'on veut.

La partie la plus délicate et la plus technique de cette construction est celle qui consiste à munir $\mathcal{C}$ d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$ compatibles avec la relation d'ordre ci-dessus de telle sorte que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ soit un corps commutatif dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps i.e. ι est un homomorphisqme de corps.

On peut démontrer que cela est possible, mais nous ommettrons tous ces détails qui ne seront pas utiles dans la suite et nous admettrons le théorème suivant dont les termes seront expliqués en détail au paragraphe suivant.

Theorem 1.3 *(Théorème de Dedekind). L'ensemble $\mathcal{C}$ des coupures de $\mathbb{Q}$ au sens de Dedekind peut être muni d'une structure de corps commutatif archimédien complet.*

Ce nouvel ensemble $\mathcal{C}$ muni de sa structure de corps commutatif, totalement ordonné, archimédien "complet" sera noté $\mathbb{R}$ et appelé le *corps de nombres réels.*

1.3 Le corps des nombres réels (*obligatoire*)

En fait dans la pratique , la façon dont on a défini l'ensemble des nombres réels importe peu. Ce qui est important et doit être connu ce sont les propriétés du corps des nombres réels et cette idée intuitive qu'il s'obtient à partir de $\mathbb{Q}$ en bouchant tous les trous (certains étant plus faciles à boucher comme $\sqrt{2}$ que d'autres comme e et π).

Autant il est facile de comprendre le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ en termes de coupure, autant il est vain d'essayer de chercher à quelle coupure correspond le nombre réel π. En fait, nous verrons que tout nombre réel admet un décimal illimité, ce qui est une façon plus naturelle et plus pratique de présenter les nombres réels : c'est ainsi que $\sqrt{2} = 1,414213562\cdots$, $e = 2,718281828\cdots$ et $\pi = 3,141592654\cdots$. La construction des nombres réels basée sur les développements décimaux illimités, quoique naturelle, n'en est pas moin délicate et techniquement sophistiquée (voir l'ouvrage de référence Cours de Mathématiques L1 tout en un).

Il en résulte que l'ensemble ordonné $\mathbb{R}$ obtenu ainsi peut être représenté géométriquement par une droite orientée munie d'une origine O symbolisant le nombre réel 0. Chaque nombre réel x est alors représenté par un point unique M de la droite de telle sorte que si $x > 0$ (resp. $x < 0$) le segment OM soit orienté positivement (resp. négativement) et sa longueur soit égale à x (resp. $-x$). Il en résulte que l'ensemble $\mathbb{R}$ est d'une certaine façon "continu" (sans trou) à l'image de la droite qui le représente géométriquement. Cette propriété se traduit par le fait que l'ensemble $\mathbb{R}$ est *complet* comme cela sera expliqué ci-dessous.

Nous admettrons dans ce cours qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ muni de deux opérations internes l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ et d'une relation d'ordre total notée $\leq$ qui étendent les opérations internes et la relation d'ordre correspondantes sur $\mathbb{Q}$ de telle sorte que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ soit un *corps commutatif archimédien complet* dans le sens où les propriétés suivantes sont satisfaites.

Propriété 1 : L'addition $+$ sur $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes:
(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$,
(*associativité* de l'addition).
(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = 0 + x = x$,
(existence de l'*élément neutre* pour l'addition).
(3) pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathbb{R}$ unique tel que $x + x' = x' + x = 0$,
Ce nombre réel est unique, on le note $x' = -x$ et on l'applelle l'*opposé* de x.
(4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x$, (*commutativité* de l'addition).

Ces 4 propriétés se résument en disant que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un *groupe abelien* (ou commutatif).

Propriété 2 : La multiplication (ou produit) notée $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes:

(5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
(*associativité* de la multiplication),
(6) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x$,
(existence de l'*élément unité*),
(7) tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ admet un *inverse* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$,
(8) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
(*distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition),
(9) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x$,
(*commutativité* de la multiplication)

Les propriétés 1 à 9 se résument en disant que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un *corps commutatif.*

Nous allons maintenant décrire les propriétés de la relation d'ordre $\leq$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et sa compatibilité avec les opérations algébriques.

Propriété 3 : La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes:
(10) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$,
($\leq$ est une *relation d'ordre total*).
(11) Pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ on a $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$,
(*compatibilité de l'addition* avec la relation d'odre).
(12) Pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^+$ on a $x \leq y \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$,
(*compatibilité de la multiplication* avec la relation d'odre).
(13) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$ il existe un entier $N > 1$ tel que $N \cdot y > x$ (*Propriété d'Archimède*).

Les propriétés de (1) à (13) se résument en disant que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ est un *corps commutatif archimedien.*

Pour énoncer la dernière propriété qui exprime que $\mathbb{R}$ est complet ("sans trous") et qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, rappelons quelques définitions supplémentaires.

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite *minorée* (resp. *majorée*) si par définition il existe un nombre réel $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, on $m \leq a$ (resp. $a \leq m$). Un tel nombre réel est appelé *un minorant* (resp. un *majorant*) de A.

Il faut observer que si m est un minorant (resp. majorant) de A, alors tout nombre réel $m' < m$ (resp. $m' > m$ est encore un minorant (resp. majorant) de A. Si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on appelle alors la *borne inférieure* de A dans $\mathbb{R}$ le nombre réel le plus grand parmi tous les minorants de A, lorsqu'il existe. On le note $\inf A$.

On définit de façon analogue la *borne supérieure* d'une partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$ comme le nombre réel le plus petit de tous les majorants de A, lorsqu'il existe.

Propriété 4 : (*Propriété de la borne supérieure*).
(14) Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Cette propriété est remarquable et loin d'être évidente. Elle affirme que si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel $S \in \mathbb{R}$ tel que l'ensemble des majorants de A soit un intervalle fermé de la forme $[S, +\infty[$. C'est ce nombre réel S qui est le plus petit des majorants de A et que l'on appelle la borne supérieure de A. Il en résulte que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On résume les propriétés (1) à (14) en disant que $(\mathbb{R}, +, \cdot; \leq)$ est un corps commutatif archimédien *complet.*

C'est précisément la propriété de la borne supérieure qui manque à $\mathbb{Q}$ puisque nous avons déja observé que l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{Q}^+; x^2 \leq 2$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ qui ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Ce manque traduit d'une manière plus précise le fait déja observé lors de l'application du procédé de dichotomie, qu'il n'y a pas de meilleur approximant rationnel par défaut de la solution de l'équation $x^2 = 2$.

Dans la suite nous aurons besoin de la caractérisation suivante de la borne supérieure.

Caractérisation de la borne supérieure:

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, alors le nombre réel $\sup A$ est caractérisé par les conditions suivantes: $S = \sup A$ si et seulement si

(i) Pour tout $x \in A, x \leq S$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $S - \varepsilon < a \leq S$.

La propriété (i) traduit le fait que S est un majorant de A et la propriété (ii) traduit le fait que tout nombre réel $S'(= S - \varepsilon) < S$ n'est pas un majorant de A autrement dit que S est le plus petit des majorants de A.

On démontre qu'un tel corps est unique à isomorphisme près. On ne s'attachera donc pas à une construction précise du corps des nombres réels mais plutôt à ses propriétés telles qu'elles sont énoncées ci-dessus.

Nous allons maintenant introduire quelques notions qui résultent de ces propriétés et qui seront utiles dans la suite.

Valeur absolue sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de x comme étant le plus grand des deux nombres réels x et $-x$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

ce qui signifie que $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$ de sorte que $|x|$ est toujours un nombre réel positif.

Voici les propriétés essentielles de la valeur absolue :

(V_1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(V_2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$,

(*inégalité triangulaire*)

(V_3) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Ces propriétés permettent d'exprimer la notion de voisinage et de proximité dans $\mathbb{R}$. En effet soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé et $\varepsilon > 0$ un nombre réel positif donné. Alors, un nombre réel variable x vérifie $|x - a| < \varepsilon$ si et seulement si x vérifie la double inégalité $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Autrement dit x est à une distance de de a au plus égale à ε. L'ensemble ainsi obtenu

$$I(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,$$

est appelé l'intervalle ouvert de centre a et de rayon ε. On peut aussi considérer l'intervalle fermé de centre de centre a et de rayon ε défini comme suit

$$\overline{I}(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Partie entière d'un nombre réel :

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$. Par conséquent l'ensemble des entiers $p \leq x$ est majoré par N, il admet donc un plus grand élément noté $[x]$. Par définition $[x]$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant les inégalités $n \leq x < n+1$. Le nombre entier $[x]$ est appelé la *partie entière* de x.

Voici une propriété importante qui est une conséquence facile de la construction de $\mathbb{R}$.

Theorem 1.4 *Pour tous nombres réels a, b tels que $a < b$, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$.*

On exprime cette propriété en disant que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Démonstration : On cherche deux nombres entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < p/q < b$ i.e. $qa < p < qb$. Pour ce faire, on commence par choisir, grâce à la propriété d'Archimède, il existe un entier $q > 1$ tel que $q(b - a) > 1$. Alors l'entier $p := [qa] + 1$ vérifie $qa < [qa] + 1 \leq qa + 1 < qb$ et donc $qa < p < qb$ de sorte que le nombre rationnel p/q convient.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ possède la même propriété.

Corollary 1.5 *Pour tous nombres réels a, b tels que $a < b$, il existe un nombre irrationnel $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.*

Démonstration : En effet d'après le théorème précédent, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a/\sqrt{2} < r < b/\sqrt{2}$, autrement dit $a < r\sqrt{2} < b$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on en déduit que $r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ce qui prouve la propriété voulue.▶

Par définition de $\mathbb{Q}$, il est possible de "dénombrer" les nombres rationnels i.e. d'associer à chaque rationnel un nombre entier naturel (un numéro en quelque sorte) de façon biunivoque ou en d'autres termes d'établir l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. On dira que $\mathbb{Q}$ est *dénombrable*. Par contre on démontra que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable i.e. que si on essayait de quelque manière que ce soit d'attribuer un "numéro différent" à chaque nombre réel, après épuisement de tous les entiers, on en oublierait forcément au moins un (voir exercices). Il en résulte que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable, ce qui en d'autres termes signifie qu'il y a plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.

1.4 A la rencontre de $\sqrt{2}$ (*facultatif*)

La construction des nombres réels est essentielle d'un point de vue théorique mais elle ne permet pas dans la pratique de faire des calculs aisés sur les nombres réels ou de les comparer, notamment lorsqu'ils sont irrationnels. Pour manipuler les nombres réels et faire des calculs numériques utilisables dans les applications, nous devons nous contenter le plus souvent de les *approcher* par des nombres rationnels (ou décimaux) avec une précision aussi grande que l'on veut i.e. une erreur aussi petite que l'on veut.

Comme nous l'avons déjà observé au paragraphe précédent, le problème géométrique le plus simple conduit à la résolution de l'équation algébrique non linéaire la plus simple $x^2 = 2$.

Nous avons déjà observé que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais qu'elle a une solution unique dans $\mathbb{R}^+$ notée $\sqrt{2}$.

Nous avons déjà montré sur cet exemple simple comment, grâce au procédé de dichotomie, on peut déterminer dans la pratique une valeur approchée rationnelle (et même décimale) de $\sqrt{2}$ avec une précision donnée à l'avance.

Mettons en pratique cette idée pour montrer comment les "suites convergentes" apparaissent de manière naturelle pour fournir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ avec une estimation précise de l'erreur d'approximation; la notion de *convergence de suites* étant la formalisation mathématique de l'idée intuitive d'approximation.

En effet, considérons par exemple $a_0 := 1,4$ et $b_0 := 1,5$ qui sont des valeurs approchés décimales par défaut et par excès de $\sqrt{2}$, puisque $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$. On a alors $a_0 \in \mathbb{Q}^+, b_0 \in \mathbb{Q}$ et $a_0 < \sqrt{2} < b_0$.

On a vu qu'au bout de n itérations, l'erreur par défaut ou par excès est dominée par $(b_0 - a_0) \cdot 2^{-n} = 10^{-1} \cdot 2^{-n}$. Si l'on souhaite déterminer une valeur approchée décimale de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par exemple (i.e. avec deux décimales exactes), il suffit de choisir n tel que $10^{-1} \cdot 2^{-n} \leq 10^{-3}$; il suffit de prendre $n = 7$ et les nombres décimaux a_7 et b_7 fourniront une valeur approchée par défaut et par excès respectivement de $\sqrt{2}$ avec une erreur au plus égale à $1/1280 = 0,0008 < 10^{-3}$.

En effet on alors $m_0 = 1,45 > \sqrt{2}$ et donc on prend donc $a_1 = a_0 = 1,4$ et $b_1 = m_0 = 1,45$ de sorte que $m_1 = 1,425 > \sqrt{2}$. On prend alors $a_2 = a_1 = 1,4$ et $b_2 = m_1 = 1,425$ de sorte que $m_2 = 1,4125 < \sqrt{2}$. On pose alors

$a_3 = m_2 = 1,4125$ et $b_3 = b_2 = 1,425$ de sorte que $m_3 = 1,41875 > \sqrt{2}$. On pose alors $a_4 = a_3 = 1,4125$ et $b_4 = m_3 = 1,41875$ de sorte que $m_4 = 1,415625 > \sqrt{2}$. On pose alors $a_5 = a_4 = 1,4125$ et $b_5 = m_4 = 1,415625$ de sorte que $m_5 = 1,4140625 < \sqrt{2}$. On pose alors $a_6 = m_5 = 1,4140625$ et $b_6 = b_5 = 1,415625 > \sqrt{2}$ de sorte que $m_6 = 1,41484375 > \sqrt{2}$. On pose alors $a_7 = a_6 = 1,4140625$ et $b_7 = m_6 = 1,41484375$ de sorte que $m_7 = 1,414453125 > \sqrt{2}$ et donc $a_8 = 1,4140625$ et $b_8 = 1,414453125$. Ce qui implique que $1,4140625 < \sqrt{2} < 1,414453125$.

On voit clairement que ce n'est qu'après 6 itérations que l'on obtient des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ avec deux décimales exactes et une erreur au plus égale à $0,0016$ et que ce n'est qu'à la septième itération que l'erreur est réduite à moins de $0,0008 < 10^{-3}$ et que l'on obtient une valeur approchée avec 3 décimales exactes. On peut donc affirmer que $\sqrt{2} \approx 1,414$ à $10^{-3}-$près par défaut ce qui signifie que $1,414 < \sqrt{2} < 1,414 + 10^{-3} = 1,415$.

Le procédé de dichotomie est assez simple mais il "converge lentement" comme on l'a vu sur l'exemple précédent. Cependant il permet de localiser la solution cherchée dans un intervalle assez petit et s'applique également dans d'autres situations.

Pour l'approximation de la racine carrée, nous donnerons un autre procédé qui "converge plus vite" i.e. qui permet d'atteindre une valeur approchée rationnelle (décimale) avec la même précision en beaucoup moins d'itérations.

En tout cas cet exemple simple montre clairement comment les suites convergentes apparaissent de façon naturelle dans la recherche d'une valeur approchée de la racine carrée.

Pour donner un sens rigoureux aux considérations heuristiques précédentes, nous allons introduire les concepts de *convergence* et de *limite* d'une suite, étudier les moyens d'établir cette convergence en donnant des règles de calcul des limites dans la pratique.

2 Notion de convergence et limite d'une suite

On rappelle qu'une *suite* de nombres réels est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque entier $n \in \mathbb{N}$ associe un nombre réel $u(n)$ encore noté u_n. On parle alors de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Le nombre réel u_n est appelé le terme de rang n de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Il arrive que l'application u soit définie sur une partie infinie $I \subset \mathbb{N}$, on parle dans ce cas de la suite $(u_n)_{n\in I}$ indexée par I.

2.1 Suites convergentes

Nous allons introduire un concept fondamental en Analyse qu'il faudra bien maitriser.

Definition 2.1 *On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$, s'il existe un* *nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On dira dans ce cas que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.*

Il y a plusieurs remarques importantes à faire à propos de cette définition. Commençons d'abord par démontrer la propriété élémentaire suivante.

Proposition 2.2 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers ℓ. Alors le nombre réel ℓ est unique. On l'appelera la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrira $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.*

Démonstration : En effet, supposons que la suite (u_n) converge vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel arbitraire. En appliquant la définition de la convergence à chacun de ces nombres réels, on aboutit à l'existence d'un entier $N_1 \geq 1$ (resp. $N_2 \geq 1$) tel que pour tout $n \geq N_1$ (resp. $n \geq N_2$) on ait $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ (resp. $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$). Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$ et écrivons $\ell_1 - \ell_2 = (\ell_1 - u_N) + (u_N - \ell_2)$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient $|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_N| + |u_N - \ell_2|$. Il en résulte gâce au choix de N que $|\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$ d'où $\ell_1 = \ell_2$. ▶

Remarques :

1) Lorsque la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, la condition $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ se traduit, en raison de la présence de la valeur absolue, par une double inégalité $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$ qui exprime le fait que u_n est voisin de ℓ à $\varepsilon-$près à partir d'un certain rang N, d'où l'importance de la valeur absolue dans la définition de la convergence. Autrement dit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge lorsque ses termes sont arbitrairement voisins de sa limite ℓ à partir d'un certain rang.

2) Dans les applications, lorsqu'une suite (u_n) converge, il arrive souvent qu'elle donne naissance à un nouveau nombre réel ℓ que l'on ne connait pas à priori. Lorsque $\varepsilon > 0$ est donné, l'entier N à partir duquel on a la double inégalité $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, est alors important, puisqu'il fournit le premier terme u_N qui vérifie $|u_N - \ell| \leq \varepsilon$. On dira que u_N est une valeur approchée (ou une approximation) de ℓ à ε près. Le nombre réel ε doit être assez petit et représente l'erreur maximale commise dans l'approximation de ℓ par u_n. Il est dans ce cas important de trouver le plus petit entier $N(\varepsilon)$ vérifiant cette propriété. Il représente le nombre minimum d'opérations permettant de calculer u_N.

Cependant pour démontrer qu'une suite converge, il ne faut pas cherher à trouver le plus petit des entiers $N(\varepsilon)$ satisfaisant aux exigences de la définition, ce qui peut être assez compliqué, il suffit d'en trouver un.

3) Lorsqu'une suite converge, tous ses termes ont tendance à s'accumuler arbitrairement près (i.e. à ε près, ε étant arbitraire) d'un même nombre réel à savoir sa limite, à l'exception d'au plus un nombre fini d'entre eux N.

Il en résulte que la nature d'une suite (convergence ou non) ainsi que sa limite, lorsqu'elle existe, ne change pas si l'on modifie ou supprime un nombre fini de termes de cette suite. Par exemple, si $p \geq 1$ est un entier fixé, la suite tronquée au rang p,$(u_{n+p})_{n\geq 0}$ est de même nature que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et a la même limite lorsqu'elle existe (à vérifier !).

Donnons quelques exemples simples pour illustrer et manipuler ces définitions

Exemple 1 : Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *constante* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c$ pour tout $n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *stationnaire* s'il existe un rang $p \geq 0$ et un nombre réel $c \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = c$ pour tout $n \geq p$. Dans ce cas la suite converge vers c. (à démontrer en utilisant la définition).

Exemple 2 : La suite $(1/n)_{n\geq 1}$ converge vers 0. En effet pour tout $\varepsilon > 0$ donné, d'après la propriété d'Archimède, il existe une entier $N > 1$ tel que $N > 1/\varepsilon$. Il en résulte que si $n \geq N$ on a $0 < 1/n \leq 1/N \leq \varepsilon$. Le plus petit entier vérifiant cette propriété étant $N(\varepsilon) := [1/\varepsilon] + 1$.

En fait la propriété d'Archimède ne dit rien d'autre que la suite $(1/n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

Exemple 3 : Si $p \geq 1$ est un entier fixé, la suite $(1/n^p)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

En effet, comme précédemment, en posant $N = [1/\varepsilon^{1/p}] + 1$, on obtient $1/n^p \leq 1/N^p \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq N$.

Exemple 4 : Posons $u_n := \frac{2n}{n+\sqrt{n}}$ pour $n \geq 0$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

En effet pour $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{2n}{n+\sqrt{n}} = \frac{2(n+\sqrt{n}) - 2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = 2 - \frac{2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}.$$

D'où $u_n - 2 = -\frac{2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$ et donc $|u_n - 2| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geq 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour avoir l'inégalité $|u_n - 2| \leq \varepsilon$, il suffit d'avoir l'inégalité $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$ i.e. $n > 4/\varepsilon^2$. Pour cela il suffit de poser $N = [4/\varepsilon^2] + 1$. Alors pour $n \geq N$, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$ et donc pour $n \geq N$, on a $|u_n - 2| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve notre assertion.

2.2 Limites infinies

Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas, on dira par définition qu'elle **diverge**, ce qui se traduit par la propriété suivante:

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell \geq \varepsilon.$$

Il faut observer que l'ordre des quantificateurs est essentiel dans cette définition. La présence d'un grand nombre de quantificateurs traduit la complexité de cette notion comme nous le verrons plus loin. En fait lorsqu'une suite diverge, elle peut avoir des comportements très variés. Nous allons décrire un type de comportement qui est étroitement lié à la notion précédente.

Definition 2.3 *1) On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *de nombres réels* **tend vers** $+\infty$ *si par définition pour tout nombre réel* $A > 0$ *il existe un rang* $N > 1$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, on ait* $u_n \geq A$*. On écrira dans ce cas* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2) On dit que la **suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ **tend vers** $-\infty$ *si par définition pour tout nombre réel* $A > 0$ *il existe un rang* $N > 1$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, on ait* $u_n \leq -A$*. Autrement dit la suite* $(-u_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* $+\infty$*. On écrira dans ce cas* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

On peut faire les mêmes remarques à propos de cette définition que celles faites à propos de la convergence. Une suite tend vers $+\infty$ lorsque ses termes deviennent arbitrairement grands à partir d'un certain rang. Cette propriété ne change pas si on modifie ou supprime un nombre fini de termes de la suite. Le lien entre les deux notions de limites (finies et infinies) sera établi plus loin.

Donnons quelques exemples pour illustrer cette définition.

Exemple 1 : Soit $p \geq 1$ est un entier fixé. Alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty.$$

En effet, soit $A > 0$, alors en posant $N = [A^{1/p}] + 1$, on en déduit que pour tout entier $n \geq N$, on a $n^p \geq N^p \geq A$, ce qui prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty.$$

Exemple 2 : Soit $a > 1$ un nombre réel. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty. \tag{2.1}$$

En effet, posons $b := a - 1$ de sorte que $b > 0$ et $a = 1 + b$ et vérifions par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+b)^n \geq 1 + n\cdot b. \tag{2.2}$$

En effet cette inégalité est évidente pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour un entier $n \geq 0$. Alors on en déduit que $(1+b)^{n+1} = (1+b)\cdot(1+b)^n \geq (1+b)\cdot(1+n\cdot b) = 1 + b + n\cdot b + n\cdot b^2 \geq 1 + (n+1)\cdot b$. Ce qui prouve donc l'inégalité (2.2) au rang $n+1$.

Pour démontrer (2.1), fixons $A > 0$ arbitraire et posons $N = [A/b] + 1$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n\cdot b > N\cdot b > A$. Par suite d'après (2.2), on en déduit que pour tout $n \geq N$, on a $(1+b)^n > A$, ce qui prouve (2.1).

Exercices :

1. 1) Démontrer en utilisant la définition que la suite définie par $x_n := (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ ne converge pas.
2) Etudier la suite définie par $y_n := (-1)^n/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Etudier la suite définie par $z_n := (1/n)\sin(2\pi n/3)$ pour $n \geq 1$.

2. 1) Démontrer que si (u_n) a pour limite $\pm\infty$ alors il existe un rang $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \neq 0$ et que la suite $(1/u_n)_{n \geq N}$ converge vers 0.
2) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0. On suppose qu'il existe un rang $N \geq 1$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$. Démontrer que la suite $(1/u_n)_{n \geq N}$ converge vers $+\infty$. Que peut-on dire si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 en changeant de signe ?

3. 1) Soit $0 < a < 1$ un nombre réel. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = 0.$$

2) Soit $b > 1$. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0.$$

(Considérer l'unique entier $p \geq 1$ tel que $p \leq b < p+1$ et vérifier que pour $n \geq p+1$ on a $n! \geq (p+1)^{n-p} p!$.)

4. Soit $0 < q < 1$. On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n.$$

1) Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + q + \ldots + q^n) = \frac{1}{1-q}.$$

2) Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad 1 + q + \ldots + q^n < \frac{1}{1-q}.$$

5. 1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit la suite de ses moyennes arithmétiques en posant

$$y_n := \frac{x_0 + \ldots + x_n}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Démonter que si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. Etudier la réciproque.
2) Démontrer que le résultat est encore valable si $\ell = \infty$.
3) On suppose que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone. Démontrer que si la suite des moyennes arithmétiques $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = \alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$. (Se ramener au cas où $\alpha = 0$.)

7. Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et α un paramètre réel tel que $|\alpha| < 1$.
1) Démontrer qu'il existe une suite unique $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telle que $x_0 = y_0$ et pour $n \geq 1$, $x_n - \alpha x_{n-1} = y_n$. (On exprimera les x_n en fonction des y_n).
2) Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\ell}{1-\alpha}.$$
(On commencera par le cas où $\ell = 0$).