Chapitre 10

Intégrales curvilignes

En mécanique, le travail infinitésimal d'une force $\overrightarrow{F}$ sur une particule ponctuelle qui se déplace de x à $x + \overrightarrow{\delta x}$ (avec δx petit) est

$$\delta W_{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{F}(x) \cdot \overrightarrow{\delta x}.$$

Si la particule se déplace de A à B en suivant le chemin γ, l'énergie totale apportée par la force $\overrightarrow{F}$ est donnée par

$$W_{\overrightarrow{F}}(A \to B) = \int_\gamma \overrightarrow{F}(x) \cdot \overrightarrow{dx}.$$

Selon si la force $\overrightarrow{F}$ est *conservative* ou non, ce travail dépend effectivement du chemin γ emprunté ou bien seulement des points de départ et d'arrivée A et B.

Intuitivement, la signification de cette dernière formule a un sens relativement clair. On approche le chemin γ par une somme de petits déplacements, on calcule le travail correspondant à chacun de ces petits déplacements, et on somme le tout pour obtenir le travail total.

Rigoureusement, le « petit déplacement » $\overrightarrow{\delta x}$ n'a pas de sens précis. Et s'il est bon, voire indispensable, de garder en tête l'approche intuitive pour comprendre ce qu'il se passe, on a besoin de définitions rigoureuses pour pouvoir faire concrètement des calculs et des démonstrations. Évidemment, l'idée est de faire tendre le pas $\left\|\overrightarrow{\delta x}\right\|$ vers 0 comme pour une intégrale classique sur un segment de $\mathbb{R}$ (pour laquelle on approche l'aire sous la courbe par une somme de rectangles dont les bases sont de plus en plus petites). En fait on va directement se ramener au calcul d'une intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$ en paramétrant le chemin γ.

10.1 Formes différentielles de degré 1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

On commence par introduire les formes différentielles sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, qui ne sont rien de plus qu'une application de $\mathcal{U}$ dans l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple l'application « travail de $\overrightarrow{F}$ au point x » qui au vecteur $\overrightarrow{\delta x}$ associe le réel $\overrightarrow{F}(x) \cdot \overrightarrow{\delta x}$ est une forme linéaire. Puisque la force dépend du point x, cette forme linéaire dépend elle-même du point x. On a donc défini une forme différentielle.

Définition 10.1. Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on note

$$dx_j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_j \end{array} \right.$$

Remarque 10.2. $(dx_1, \dots, dx_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (c'est la base duale de la base canonique). Toute forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \, dx_j$$

avec $\varphi_1, \dots, \varphi_j \in \mathbb{R}$. Et pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors $\varphi(u) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j u_j$.

Remarque 10.3. Dans $\mathbb{R}^2$ on pourra noter (dx, dy) au lieu de (dx_1, dx_2) la base duale de la base canonique. De même dans $\mathbb{R}^3$ où on peut préférer noter les coordonnées (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2, x_3).

Définition 10.4. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différentielle de degré 1 (ou 1-forme différentielle, ou 1-forme) de classe C^k une application ω de classe C^k de $\mathcal{U}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Cela signifie qu'il existe des applications $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de classe C^k de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathcal{U}$ on a

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) \, dx_j.$$

Remarque 10.5. Pour $x \in \mathcal{U}$ on notera parfois ω_x au lieu de $\omega(x)$. Pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\omega_x(u) = \omega(x; u) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) u_j.$$

Remarque 10.6. En dimension 2 on note souvent, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\omega(x, y) = P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

et pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on a alors

$$\omega_{(x,y)}(u, v) = P(x, y)u + Q(x, y)v.$$

Exemple 10.7. Soit f une fonction de classe C^k de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $k \geqslant 1$. Pour tout $x \in \mathcal{U}$ la différentielle de f au point x est donnée par

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad d_x f(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Autrement dit,

$$d_x f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, dx_j.$$

Puisque les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pour $j \in [\![1, n]\!]$ sont de classe C^{k-1}, la différentielle de f définit une 1-forme de classe C^{k-1} sur $\mathcal{U}$:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, dx_j.$$

Dans cet exemple, la première égalité est une égalité entre réels (pour chaque x et h fixés), la deuxième est une égalité entre formes linéaires (pour chaque x fixé) tandis que la troisième est une égalité entre formes différentielles sur $\mathcal{U}$.

Définition 10.8. Une 1-forme ω sur $\mathcal{U}$ est dite exacte s'il existe une fonction f de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ telle que $df = \omega$.

Exemples 10.9. • La 1-forme $x\,dx + y\,dy$ est la différentielle de la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ sur n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• La 1-forme $\omega = y\,dx$ n'est exacte sur aucun ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ et une fonction f de classe C^1 sur $\mathcal{V} =]x_0-\delta, x_0+\delta[\times]y_0-\delta, y_0+\delta[$ tels que $df = \omega$ sur $\mathcal{V}$. Alors pout tout $(x,y) \in \mathcal{V}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Par la deuxième égalité on obtient qu'il existe une fonction g de classe C^1 sur $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ telle que $f(x,y) = g(x)$. Ainsi on devrait avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)$$

pour tout $(x,y) \in \mathcal{V}$. Mais cela n'est pas compatible avec l'expression précédente.

10.2 Intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe paramétrée

Ce qu'on avait noté $\delta W_{\overrightarrow{F}}$ en introduction peut donc être vu comme une forme différentielle et a maintenant un sens précis. Pour définir le travail total fourni quand la particule va de A à B en suivant γ, il nous faut maintenant introduire l'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 le long d'une courbe.

Définition 10.10. • Une courbe paramétrée de classe C^k est une application γ de classe C^k d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

• On dit qu'une courbe paramétrée continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est C^1 par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_m = b$ telle que la restriction de γ à $[a_{k-1}, a_k]$ est de classe C^1 pour tout $k \in [\![1,m]\!]$.

• On dit que γ est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$, et qu'elle est simple si sa restriction à $]a,b[$ est injective.

• Enfin on appelle support de γ l'ensemble $\operatorname{supp}(\gamma) = \{\gamma(t), t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 10.11. • Soit ω une 1-forme différentielle continues sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathcal{U}$ une courbe paramétrée C^1. Alors on définit l'intégrale de ω le long de γ par

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\,dt.$$

Si on note $\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j dx_j$ et $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, cela donne

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b \alpha_j\big(\gamma(t)\big)x_j'(t)\,dt.$$

• Si γ est C^1 par morceaux, on considère une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_m = b$ adaptée et on pose

$$\int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\,dt.$$

La proposition suivante montre qu'une intégrale curviligne ne dépend pas du paramétrage mais seulement du sens de parcours :

Proposition 10.12. *Soit $[c,d]$ un autre segment de $\mathbb{R}$, ϕ un C^1-difféomorphisme de $[c,d]$ dans $[a,b]$ et $\tilde\gamma = \gamma \circ \phi$. Alors on a*

$$\int_{\tilde\gamma} \omega = \int_\gamma \omega$$

si ϕ est croissant, et

$$\int_{\tilde\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$$

si ϕ est décroissant.

Démonstration. On effectue le changement de variable $t = \phi(s)$. Si ϕ est croissant on obtient

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\,dt = \int_c^d \omega_{\gamma(\phi(s))}\big(\gamma'(\phi(s))\big)\phi'(s)\,ds.$$

Par linéarité de l'application $\omega_{\phi(s)}$ on obtient

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\,dt = \int_c^d \omega_{\gamma(\phi(s))}\big(\gamma'(\phi(s))\phi'(s)\big)\,ds = \int_c^d \omega_{\tilde\gamma(s)}\big(\tilde\gamma'(s)\big)\,ds = \int_{\tilde\gamma}\omega.$$

Si ϕ est décroissant on obtient de même

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\,dt = \int_d^c \omega_{\gamma(\phi(s))}\big(\gamma'(\phi(s))\big)\phi'(s)\,ds = -\int_{\tilde\gamma}\omega.$$

□

Définition 10.13. Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées. On dit que γ_1 et γ_2 définissent la même courbe (géométrique) orientée s'il existe un C^1-difféomorphisme croissant de $[c,d]$ dans $[a,b]$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$.

Exemple 10.14. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx.$$

On note $\mathcal{C}$ le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. On considère le paramétrage

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(\theta),\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}\cos(\theta)(-\sin(\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

Le paramétrage

$$\tilde\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(2\theta),\sin(2\theta)) \end{array} \right.$$

donne le même résultat :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\tilde\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos(2\theta)}{\cos(2\theta)^2+\sin(\theta)^2} 2\cos(2\theta) - \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)^2+\sin(2\theta)^2}(-2\sin(2\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2\,d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

Par contre

$$\gamma_- : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) \end{array} \right.$$

donne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos(-\theta)}{\cos(-\theta)^2 + \sin(-\theta)^2} \cos(-\theta) - \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)^2 + \sin(-\theta)^2} (\sin(-\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (-1)\, d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

Et si on fait k tours :

$$\gamma_k : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2k\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) \end{array} \right.$$

donne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} \omega &= \int_0^{2k\pi} \left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \cos(\theta)(-\sin(\theta)) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2k\pi} 1\, d\theta = 2k\pi. \end{aligned}$$

10.3 Intégrale d'une forme différentielle exacte

On rappelle le théorème fondamental de l'analyse, qui fait le lien entre intégration et dérivation :

Théorème 10.15. *Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Autrement dit, l'intégrale de la dérivée f sur un segment s'exprime simplement en fonction des valeurs de f sur les bords du segment. Le but principal de la fin de ce cours sera de généraliser cette propriété à des situations où le domaine d'intégration est plus compliqué qu'un simple segment de $\mathbb{R}$.

On commence par le cas d'une intégrale curviligne, relativement proche du cas modèle :

Proposition 10.16. *On suppose que ω est une forme exacte sur $\mathcal{U}$, et on considère une primitive f de ω (ie. f est C^1 sur $\mathcal{U}$ et $df = \omega$). Si $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$ est une courbe paramétrée C^1 par morceaux alors on a*

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Cette proposition simplifie grandement le calcul de l'intégrale curviligne, et explique l'intérêt de s'intéresser aux formes différentielles exactes. On observe en outre que l'intégrale dépend des points de départ et d'arrivée mais pas du chemin γ parcouru entre les deux.

Démonstration. On suppose d'abord que γ est de classe C^1. Pour $t \in [a,b]$ on note $g(t) = f(\gamma(t))$. La fonction g est alors de classe C^1 sur $[a,b]$ et pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$g'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

D'après le théorème 10.15 on obtient

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt = \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a).$$

D'où le résultat si γ est C^1. Si γ n'est que C^1 par morceaux, on considère une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_m = b$ adaptée. Pour chaque $k \in [\![1, m]\!]$ on applique le résultat précédent à la restriction de γ sur $[a_{k-1}, a_k]$, et on obtient

$$\int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{m} \big(f(\gamma(a_k)) - f(a_{k-1}) \big) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

Corollaire 10.17. *Si ω est une forme différentielle exacte sur $\mathcal{U}$ et γ est une courbe fermée de classe C^1 par morceaux, alors*

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Exemple 10.18. La forme différentielle

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy - \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx.$$

n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On revient sur la notion de travail associé à une force. Lorsqu'une force $\overrightarrow{F}$ peut être vue comme le gradient (ou l'opposé du gradient) d'un potentiel V (c'est le cas par exemple pour la force de gravitation ou une force électrique), alors la forme différentielle

$$\overrightarrow{\delta x} \mapsto \overrightarrow{F}(x) \cdot \overrightarrow{\delta x} = -\nabla \operatorname{grad} V(x) \cdot \overrightarrow{\delta x} = -d_x V(\overrightarrow{\delta x})$$

est exacte (et $-V$ est une primitive), donc le travail fourni entre A et B ne dépend que de A et B :

$$W_{\overrightarrow{F}}(A \to B) = V(A) - V(B).$$

En particulier si on revient au point de départ (*ie.* si on suit une courbe fermée), le travail fourni est nul.

Mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple une force de frottement n'est pas conservative, et si même si on revient au point de départ le frottement nous a bel et bien couté de l'énergie. Mathématiquement, cela signifie que la forme différentielle associée n'est pas exacte.

10.4 Exercices

***Exercice* 1.** On considère sur $\mathbb{R}^2$ la 1-forme ω telle que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\omega_{(x,y)} = xy^2\, dx + e^x\, dy$. On note $u = (1,0)$ et $v = (2,1)$. Calculer $\omega_{(3,2)}(u)$ et $\omega_{(0,1)}(v)$.

***Exercice* 2.** Calculer les intégrales curvilignes $\int_\Gamma \omega$ dans les situations suivantes :
1. $\omega = xy\, dx + (x+y)\, dy$ et Γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ pour x allant de -1 à 2.
2. $\omega = y \sin x\, dx + x \cos y\, dy$ et Γ est le segment de droite allant de $A = (0,0)$ à $B = (1,1)$.
3. $\omega = x^2 y\, dx + xy\, dy$ et Γ est le cercle unité centré en 0 et parcouru dans le sens trigonométrique.

***Exercice* 3.** On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega = x^2\, dx - xy\, dy$.
1. Calculer l'intégrale de ω le long des courbes suivantes :
  a. le segment de droite allant de $A = (0,0)$ à $B = (1,1)$,
  b. l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ pour x allant de 0 à 1.
2. La 1-forme ω est-elle exacte ?

***Exercice* 4.** On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

1. Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}_a} \omega$ lorsque

a. $\mathcal{C}_a$ le cercle de rayon a centré en 0 et parcouru dans le sens trigonométrique,

b. $\mathcal{C}_a$ le carré orienté de sommets successifs $A = (a, a)$, $B = (-a, a)$, $C = (-a, -a)$ et $D = (a, -a)$.

2. La forme ω est-elle exacte ?

***Exercice* 5.** Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma y^2\,dx + x^2\,dy$ lorsque

1. Γ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 - ay = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$), orientée dans le sens trigonométrique.

2. Γ est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$ (avec $a > 0$ et $b > 0$), orientée dans le sens trigonométrique.

***Exercice* 6.** On considère

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\right\}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = y\,dx + 2x\,dy$ le long du contour de D parcouru une fois dans le sens direct.