

## Chapitre 6

# Composition de fonctions différentiables - Application aux EDP

### 6.1 Composition de fonctions différentiables

En dimension 1, on sait que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors la composée  $f \circ g$  est également dérivable et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad (6.1)$$

Cette propriété se généralise aux dimensions supérieures en suivant exactement la même démonstration. Comme souvent dans ce cours, les problèmes sont dus à un énoncé un peu plus « lourd » et des notations parfois trompeuses. Un peu de pratique est donc nécessaire (et, *a priori* suffisante,) pour que tout se passe bien.

**Proposition 6.1.** *On suppose que  $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ . Soient  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $g(\mathcal{U})$  et  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application différentiable en  $g(a)$ . Alors l'application  $f \circ g$  est différentiable en  $a$  de différentielle*

$$d_a(f \circ g) = d_{g(a)}f \circ d_a g.$$

*En particulier si  $g$  et  $f$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  respectivement, alors  $f \circ g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$ . En termes matriciels l'égalité précédente s'écrit*

$$\text{Jac}_a(f \circ g) = \text{Jac}_{g(a)}f \bullet \text{Jac}_a g.$$

*Si on note  $y_1, \dots, y_m$  les coordonnées dans  $\mathbb{R}^m$  et  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées dans  $\mathbb{R}^n$  cela donne*

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a).$$

La dernière formule de cette proposition n'est pas très sympathique à priori, mais une fois passée la légitime appréhension on se rendra compte qu'elle permet de calculer concrètement (et finalement sans trop souffrir) les dérivées partielles d'une fonction composée.

**Exercice 6.1.** On suppose que  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On se donne  $a \in \mathbb{R}$ . Rappeler ce que désignent les objets  $d_a(f \circ g)$ ,  $d_{g(a)}f$  et  $d_a g$  dans ce cas et retrouver la formule (6.1).

Soit  $f$  une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient  $x_1, \dots, x_n$  des fonctions dérivables de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $t \in I$  on pose

$$\varphi(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Alors d'après la proposition 6.1 la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $t \in I$  on a

$$\varphi'(t) = x_1'(t) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) + \dots + x_n'(t) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Dans cette formule il faut faire attention à la confusion entre la fonction  $x_j : t \mapsto x_j(t)$  et le nom donné à la  $j^{\text{ième}}$  variable pour la fonction  $f$ . Le temps de s'habituer à ce type d'écriture, il est peut-être plus prudent d'utiliser la notation  $\partial_j f$  au lieu de  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ , ou bien de donner un autre nom aux fonctions coordonnées. Une fois que tout est bien clair, il est en fait pratique de donner le même nom à la variable et à la fonction coordonnée. En général, les abus de notation vont même bien au-delà, sans quoi les formules deviennent vite extrêmement lourdes.

**Exercice 6.2.** Avec les notations précédentes, on note  $X : t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Soit  $t \in I$ . Écrire les matrices jacobiniennes de  $f$  au point  $X(t)$  et de  $X$  au point  $t$ , et retrouver la formule donnée pour  $\varphi'(t)$ .

Si vous avez bien compris le cas  $m = p = 1$  alors vous avez tout compris. En effet, si  $p \geq 2$  alors on peut étudier les différentielles coordonnées par coordonnées, ce qui revient à étudier  $p$  fonctions qui ont chacune une seule variable à l'arrivée. Et si  $m \geq 2$ , on peut calculer les dérivées partielles, qui se comportent chacune comme une dérivée usuelle. Ceci étant dit, il est parfois plus simple d'utiliser directement la formule de la différentielle ou de la jacobienne.

*Exemple 6.2.* On considère une application différentiable  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  on note

$$F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Alors  $F$  est différentiable sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et pour  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial(r \cos(\theta))}{\partial r} \times \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{\partial(r \sin(\theta))}{\partial r} \times \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

**Exercice 6.3.** Avec les notations de l'exemple précédent, calculer  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$  en tout point de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .

Maintenant que l'on est convaincu que la proposition 6.1 n'est pas si terrible, il convient de s'assurer qu'elle est vraie...

**Exercice 6.4.** Démontrer la proposition 6.1. *La première égalité se montre exactement comme pour la dérivée d'une composition de fonction d'une variable, la deuxième égalité est une simple ré-écriture de la première en termes matriciels, et la troisième explicite pour chaque  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la  $j^{\text{ième}}$  colonne de cette matrice  $\text{Jac}_a(f \circ g)$ .*

Avant d'aller plus loin, on revient sur les coordonnées polaires, qui fournissent un changement de variables extrêmement utile pour bien des problèmes.

**Exercice 6.5.** Pour  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  on note  $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ . On considère une fonction différentiable  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , puis on note  $\tilde{f} = f \circ \psi$ .

1. Montrer que  $\tilde{f}$  est une fonction différentiable de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . On note  $(x, y) = \psi(r, \theta)$ ,  $\vec{u}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  et  $\vec{u}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ . Faire un dessin.

3. Montrer que  $\partial_r \tilde{f}(r, \theta)$  est égale à la dérivée de  $f$  au point  $(x, y)$  et dans la direction  $\vec{u}_r$ , tandis que  $\partial_\theta \tilde{f}(r, \theta)$  vaut  $r$  fois la dérivée de  $f$  au point  $(x, y)$  et dans la direction  $\vec{u}_\theta$ .

$\triangle$  Bien souvent pour « simplifier » les notations on écrit  $f(r, \theta)$  au lieu de  $\tilde{f}(r, \theta)$ . Par suite on considère les dérivées partielles  $\partial_r f$  et  $\partial_\theta f$ . Elles ne désignent rien d'autre que les dérivées partielles de la composée  $\tilde{f} = f \circ \psi$ . Cet abus de notation peut éventuellement être pratique pour celui qui a bien l'habitude, mais il est aussi très perturbant dans un premier temps. Car si les fonctions  $f$  et  $\tilde{f}$  désignent la même quantité physique en coordonnées cartésiennes ou polaires, ce sont bel et bien des fonctions différentes.

## 6.2 Équations aux dérivées partielles

On appelle équation aux dérivées partielles une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui fait intervenir les dérivées partielles de cette inconnue.

L'étude des équations aux dérivées partielles (EDP pour les intimes) est une branche importante de la recherche en mathématiques et ses applications sont très nombreuses en physique. Beaucoup font intervenir l'opérateur laplacien :

**Définition 6.3.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle laplacien de  $f$  la fonction définie sur  $\mathcal{U}$  par

$$\Delta f : x \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).$$

L'équation de Schrödinger pour la mécanique quantique est un exemple bien connu et pourtant encore très étudié d'E.D.P. Elle s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, x) + V(x),$$

où  $\psi$  est une fonction inconnue de  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\Delta$  désigne le laplacien par rapport à la variable  $x$ ,  $V$  est un potentiel (une fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ ),  $\hbar \simeq 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.S}$  est la constante de Planck (réduite) et  $m$  est la masse. On peut également mentionner ici l'équation des ondes libres. Elle s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) - \Delta w(t, x) = f(t, x),$$

où  $c$  est une vitesse,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est un terme source et  $\Delta$  désigne à nouveau le laplacien par rapport à la variable  $x \in \mathbb{R}^n$ .

La théorie « générale » des EDP dépasse largement le cadre de ce cours, mais on est déjà capables de discuter les cas les plus simples. En guise de premier exemple, on considère le problème de transport suivant :

*Exemple 6.4.* Étant donné  $c \in \mathbb{R}$  et  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ , déterminer l'ensemble des fonctions  $u$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0 \quad (6.2)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (6.3)$$

On connaît la fonction  $u$  à l'instant initial  $t = 0$ , on cherche à déterminer ce qu'elle deviendra dans le futur (ou ce qu'elle était dans le passé) à partir d'une égalité faisant intervenir sa dérivée par rapport au temps. Il se trouve que cette dérivée est en fait liée à la dérivée par rapport à la variable d'espace.

Une approche possible est la suivante. On commence par supposer que  $u$  est solution et on considère la fonction  $\tilde{u}$  qui à  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$  associe  $\tilde{u}(t, y) = u(t, y + ct)$ .  $\tilde{u}$  est alors une fonction de classe  $C^1$  (comme composée des fonctions  $u$  et  $(t, y) \mapsto (t, y + ct)$  qui sont de classe  $C^1$ ). En outre pour tout  $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, y + ct) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, y + ct) = 0.$$

Cela prouve que pour tout  $y \in \mathbb{R}$  l'application  $t \mapsto \tilde{u}(t, y)$  est constante, et donc pour tout  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\tilde{u}(t, y) = \tilde{u}(0, y) = u_0(y).$$

Ainsi pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x - ct) = u_0(x - ct). \quad (6.4)$$

Cela prouve que s'il existe une solution, c'est forcément cette fonction là. Inversement on vérifie la fonction  $u$  ainsi définie est bien solution. Il s'agit encore de calculer les dérivées partielles d'une fonction composée : pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  on a bien  $u(0, x) = u_0(x)$  et de plus

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = -cu'_0(x - ct) + cu'_0(x - ct) = 0.$$

Cela prouve que  $u$  est solution. Finalement le problème (6.2)-(6.3) admet une unique solution, c'est la fonction  $u$  donnée par (6.4).

## 6.3 Exercices

**Exercice 6.6.** Soit  $f$  une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Après en avoir vérifié l'existence, exprimer en fonction de  $f'$  les dérivées partielles des fonctions

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & f(z \sin(x)) \end{cases}$$

**Exercice 6.7.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Pour  $x, y \in \mathbb{R}$  on pose

$$g_1(x) = f(x, -x), \quad g_2(x, y) = f(y, x), \quad g_3(x) = f(x, f(x, x)), \quad g_4(x, y) = f(y, f(x, x)).$$

Montrer que ces fonctions sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$ , et calculer leurs dérivées (partielles) en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

**Exercice 6.8.** Si une mole de gaz parfait occupe le volume  $V$  à la température  $T$  et à la pression  $P$  alors on a  $PV = RT$ , où  $R$  est une constante. Montrer qu'on a

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1 \quad \text{et} \quad T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Attention, s'il n'y a pas de difficulté calculatoire dans cet exercice, il faut faire attention à l'utilisation des notations « physiques ».

**Exercice 6.9** (Coordonnées polaires, acte III). On note  $D = \mathbb{R}_- \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[$  on note  $\psi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  et  $g = f \circ \psi$ .

**1.** Montrer que  $\psi$  réalise un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  (on verra au chapitre suivant un résultat permettant de montrer facilement que  $\psi^{-1}$  est une fonction de classe  $C^1$ , mais en attendant il va falloir le faire à la main).

**2.** Montrer que  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[$  et exprimer les dérivées partielles de  $g$  en fonction de celles de  $f$ .

**3.** Sans utiliser d'expression explicite pour  $\psi^{-1}$ , exprimer les dérivées partielles de  $f$  en fonction de celles de  $g$ .

**Exercice 6.10** (Laplacien en coordonnées polaires). Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $F$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  par  $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

1. Montrer que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .
2. Montrer que pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  on a

$$\Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) (r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} (r, \theta).$$

**Exercice 6.11** (Équation des cordes vibrantes). Soit  $c \in \mathbb{R}^*$ . Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (t, x) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (t, x) = 0.$$

*Indication : on pourra effectuer le changement de variables  $u = x + ct$ ,  $v = x - ct$ .*

**Exercice 6.12.** Pour  $(x, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  on pose  $\psi(x, \theta) = (x, x \tan(\theta))$ .

1. Montrer que  $\psi$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+^* \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .
2. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et  $g = f \circ \psi$ .
  - a. Montrer que  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
  - b. Calculer  $\partial_x g$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .
  - c. Interpréter « géométriquement » la différence entre  $\partial_x g$  et  $\partial_x f$ .

**Exercice 6.13.** Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x} (x, y) = kf(x, y).$$

*Indication : on pourra effectuer le changement de variables  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ .*

**Exercice 6.14.** Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Exercice 6.15** (Équation d'Euler). Soient  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx) = t^\alpha f(x)$$

( $f$  est positivement homogène de degré  $\alpha$ ) si et seulement si

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} (x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} (x) = \alpha f(x).$$

