IUP SID M1 **UPS TOULOUSE**
Maîtrise statistique des procédés **2005/2006**

Révision de statistiques

Exercice 1 Révisions sur la lecture de tables.

1. Soit U une v.a. normale centrée réduite.
   Calculer $\mathbb{P}(U < -2)$, $\mathbb{P}(-1 < U < 0.5)$ et $\mathbb{P}(4U \geq -3)$.
   Déterminer u_0 tel que $\mathbb{P}(|U| < u_0) = 0.82$.
2. Soit X une v.a. normale $\mathcal{N}(-1, 2)$.
   Calculer $\mathbb{P}(X < -1)$, $\mathbb{P}(X > 1)$ et $\mathbb{P}(-3 < X < 1)$.
   Déterminer x_0 tel que $\mathbb{P}(X > -x_0) = 0.40$.
3. Soient U, Y, V et W des v.a. de lois respectives χ^2_{10}, χ^2_{40}, T_{12} et $F_{10,30}$.
   (i) Calculer u tel que $\mathbb{P}(U < u) = 0.975$. Encadrer au mieux $\mathbb{P}(U < 4.5)$.
   (ii) Calculer C_1 et C_2 tels que $\mathbb{P}(C_1 < U < C_2) = 0.95$.
   (iii) Calculer y tel que $\mathbb{P}(Y < y) = 0.95$.
   (iv) Calculer v tel que $\mathbb{P}(V < v) = 0.8$ et v' tel que $\mathbb{P}(V < v') = 0.2$.
   (v) Calculer w tel que $\mathbb{P}(W < w) = 0.95$. Soit Z de loi $F_{30,10}$; calculer z tel que $\mathbb{P}(Z < z) = 0.05$.

Exercice 2
Soient X_1, ..., X_n des v.a. i.i.d.
1. Montrer que $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur sans biais de la moyenne théorique $m = \mathbb{E}(X_i)$.
2. Montrer que $\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$ est un estimateur sans biais de $\sigma^2 = Var(X_i)$.
3. Montrer que $S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ est un estimateur sans biais de $\sigma^2 = Var(X_i)$.
4. Quelles sont les lois de ces statistiques lorsque les X_i suivent la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$?

Exercice 3 Construction d'un intervalle de confiance de l'espérance m d'une loi normale d'écart-type connu

Une machine produit en série des tiges métalliques dont la longueur X, par suite d'imperfections inhérentes au fonctionnement, peut être considérée comme une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ lorsqu'elle est réglée à la valeur m. L'écart-type est une caractéristique du procédé de fabrication, de valeur connue $\sigma = 0{,}02$ mm.

1) Pour qu'une tige soit utilisable par un client industriel, sa longueur doit être comprise entre 23,60 mm et 23,70 mm. Quelle valeur m_0 faut-il donner à m pour que la proportion de tiges produites utilisables soit maximale ? Quelle est cette proportion maximale ?

2) L'industriel recevant un lot de 10000 tiges ne connaît pas cette valeur de réglage, lui permettant de décider d'accepter ou de refuser le lot qui lui a été livré ; il ne connaît que $\sigma = 0.02$. Il va donc tirer un échantillon de n tiges dont il va mesurer les longueurs $(X_1, \ldots, X_n)$ pour se faire une idée de la valeur de m. Construire l'intervalle de confiance de niveau 0,90 pour m. Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la longueur de cet intervalle soit au plus égale à 0,01 mm ?

Exercice 4 Intervalle de confiance de l'espérance m d'une loi normale d'écart-type inconnu

Un fabricant de piles électriques affirme que la durée de vie moyenne du matériel qu'il produit est de 170 heures. Un organisme de défense des consommateurs prélève au hasard un échantillon de $n = 100$ piles et observe une durée de vie moyenne de 158 heures avec un écart-type empirique s_{n-1} de 30 heures.

1) Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0,99 pour la durée de vie moyenne m.

2) Peut-on accuser ce fabricant de publicité mensongère ?

Exercice 5 Intervalle de confiance de la variance d'une loi normale d'espérance connue

Pour estimer la précision d'un thermomètre, on réalise $n = 15$ mesures indépendantes de la température d'un liquide maintenu à température constante égale à 20°C. Compte tenu des erreurs de mesure, ce sont des réalisations de v.a. Xi, $1 \leq i \leq n$, de même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où la valeur de m est fixée à 20, σ étant inconnu et caractérisant la précision du thermomètre.
Construire un intervalle de confiance pour σ^2 de niveau 0,99.
On supposera : $\dfrac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - 20)^2 = 18$.

Exercice 6 Intervalle de confiance de la variance d'une loi normale d'espérance inconnue

On veut déterminer le poids P d'un objet à l'aide d'une balance à deux plateaux. Le poids marqué à l'équilibre est une v.a. X qui, compte tenu de l'imprécision, suit une loi $\mathcal{N}(P, \sigma^2)$, σ^2 étant inconnu et caractérisant la précision de la balance. On réalise 20 pesées X_i, $1 \leq i \leq 20$, du même objet. Construire un intervalle de confiance pour σ^2 de niveau 0,95.
On supposera : $\dfrac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \overline{x})^2 = 250$.

Contrôle de la qualité par mesures

Exercice 1 Dureté d'une pièce mécanique
Une entreprise fabrique une pièce mécanique dont la dureté est la caractéristique principale. Cette caractéristique dépend de la composition des matières premières, de leur mélange, de la température, de la pression du moulage... L'entreprise veut contrôler le procédé de fabrication à l'aide de cartes de contrôle pour la dureté moyenne des pièces et l'étendue de la dureté pour chaque échantillonnage. Le mode de contrôle consiste à prélever 5 pièces du procédé de fabrication et ceci à chaque demi-heure et de mesurer sur chaque pièce la dureté. Vingt échantillons ont été prélevés.

No d'échantillon	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\bar{X}$	R
1	80	86	88	83	82	...	...
2	85	83	81	82	83	...	...
3	87	87	87	88	82	...	...
4	84	85	84	85	87	85	3
5	87	84	89	83	87	86	6
6	85	81	78	80	86	82	8
7	85	89	84	82	84	84.8	7
8	84	85	85	88	87	85.8	4
9	78	87	82	82	87	83.2	9
10	86	84	83	84	85	84.4	3
11	82	88	85	81	88	84.8	7
12	79	84	81	79	87	82	8
13	85	85	82	85	85	84.4	3
14	85	84	88	86	83	85.2	5
15	88	83	80	85	88	84.8	8
16	89	83	85	84	85	85.2	6
17	83	90	87	86	84	86	7
18	84	84	82	86	83	83.8	4
19	81	82	85	87	87	84.4	6
20	84	86	85	85	87	85.4	3

1. Compléter le tableau.
2. Mettre en oeuvre une carte $(\bar{X}, R)$. Diagnostics ?
3. Estimer l'écart-type, représenter les différentes zones sur la carte et effectuer les différents tests de stabilité.
4. On poursuit le contrôle. Les résultats des 6 échantillons suivants sont :

No d'échantillon	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\bar{X}$	R
21	84	85	86	81	89	...	...
22	80	88	86	85	91	...	...
23	85	86	89	87	87	...	...
24	88	86	87	86	88	...	...
25	87	87	90	87	86	...	...
26	87	86	90	88	87	...	...

Que peut-on dire sur le procédé ?

Exercice 2 Enduit de phosphore sur les filaments d'une lampe fluorescente
L'objectif de ce contrôle est de s'assurer de la régularité du procédé appliquant l'enduit de phosphore sur les filaments d'un certain type de lampes fluorescentes. Le poids de cet enduit est mesuré sur un échantillon de 10 filaments et ceci toutes les deux heures. Les tolérances sont 3.4-5.2 milligrammes. Les poids (en mg) observés sur 18 échantillonnages sont présentés dans le tableau ci-après.

Observations	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	$\bar{X}$	s
1	4.6	4.7	4.4	4.4	4.2	4.3	4.8	4.6	4.6	4.5	...	...
2	4.4	4.2	5.3	4.8	4.5	4.3	4.1	4.6	4.1	4.6	...	...
3	4.0	4.5	4.6	4.4	4.6	4.0	4.1	4.1	4.3	4.7	...	...
4	4.7	4.3	4.4	5.0	4.4	4.0	4.5	4.1	4.3	4.4	4.41	0.285
5	4.1	4.4	4.5	4.6	4.7	4.3	4.2	4.2	4.7	4.5	4.52	0.405
6	4.0	4.3	4.0	4.1	4.2	4.4	4.5	4.4	4.2	4.2	4.23	0.170
7	4.6	4.6	4.5	4.7	4.2	4.4	4.0	4.6	4.5	4.8	4.49	0.238
8	4.5	4.0	4.7	4.1	4.5	3.9	4.1	4.3	4.2	4.4	4.27	0.254
9	4.8	4.2	4.1	4.4	4.6	4.6	4.5	4.7	4.3	4.0	4.42	0.266
10	3.9	4.3	3.8	3.6	3.5	4.0	3.9	3.9	4.4	4.2	3.95	0.288
11	4.5	4.5	4.6	4.2	4.4	4.7	4.6	4.5	4.3	4.0	4.43	0.211
12	4.1	3.9	4.8	4.3	4.2	4.8	4.2	4.3	4.3	4.6	4.35	0.295
13	4.8	4.4	4.5	4.9	4.4	4.8	4.3	4.6	4.0	4.2	4.49	0.288
14	4.4	4.5	4.2	4.2	4.0	3.9	4.1	4.4	4.6	4.2	4.25	0.282
15	4.2	4.0	4.3	4.5	3.9	4.2	4.1	4.3	4.3	4.5	4.23	0.195
16	4.7	4.8	4.1	4.6	4.2	3.9	4.4	4.3	4.5	4.7	4.42	0.294
17	4.6	4.0	4.0	4.3	4.0	4.4	4.2	4.0	4.5	4.7	4.27	0.271
18	4.5	4.3	4.3	4.8	4.6	4.1	4.2	4.3	3.9	4.0	4.30	0.275

1. Mettre en oeuvre une carte $(\bar{X}, S)$. Diagnostics ?
2. Au vu des résultats, réviser les limites de contrôle et reporter ces nouvelles limites sur les cartes.
3. On poursuit le contrôle sur 8 échantillons supplémentaires.

Observations	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	$\bar{X}$	s
19	4.1	4.4	4.1	4.2	4.0	4.6	4.4	4.3	4.7	4.5		
20	4.2	4.3	4.1	4.1	4.2	4.3	4.3	4.6	4.5	4.1		
21	4.2	4.3	4.2	4.2	4.3	4.3	4.1	4.0	4.1	4.1		
22	4.1	4.5	4.4	4.2	4.6	4.4	4.4	4.3	4.1	4.0		
23	4.7	4.6	4.6	4.1	4.0	4.0	4.2	4.0	4.0	4.1		
24	3.9	4.3	4.3	4.2	3.9	3.9	4.0	3.7	3.6	3.7		
25	3.9	3.9	4.0	3.7	3.7	4.1	4.0	4.0	4.2	4.0		
26	4.1	4.0	3.9	4.2	3.7	3.5	4.3	4.5	4.1	4.2		

Tracer les cartes de contrôle avec les limites précédentes. Que conclure ?

Exercice 3
On souhaite étudier et surveiller le processus de fabrication de butées de choc pour le système d'amortissement d'un véhicule qui contribuent au confort de conduite. On voudrait tracer une carte EWMA avec $w = 0.25$. Le tableau suivant contient les mesures des butées de choc des échantillons prélevés ainsi que leurs moyennes mobiles.

t	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\bar{X}$	Z_t
1	150.17	150.15	150.15	149.99	149.76	...	...
2	149.89	149.98	150.06	150.13	149.97	...	...
3	149.92	149.88	149.97	149.97	150.00	...	...
4	150.01	150.04	150.00	150.00	149.98	150.006	149.997
5	150.04	149.87	150.09	150.04	149.89	149.986	149.994
6	150.01	149.86	150.13	150.08	150.25	150.066	150.012
7	150.19	149.96	149.93	150.06	149.96	150.020	150.014
8	150.00	149.89	150.17	150.01	149.87	149.988	150.008
9	149.99	149.86	150.02	150.05	150.04	149.992	150.004
10	150.01	150.10	150.12	149.94	149.81	149.996	150.002
11	150.10	149.87	149.80	150.05	149.87	149.938	149.986
12	149.92	149.98	149.99	150.09	150.01	149.998	149.989
13	149.87	149.76	150.05	150.23	150.02	149.986	149.988
14	150.23	150.09	149.92	150.08	149.78	150.020	149.996
15	149.82	150.01	149.87	150.16	149.84	149.940	149.982
16	150.11	150.03	150.12	149.95	149.83	150.008	149.989
17	150.01	149.99	150.11	149.95	149.90	149.992	149.989
18	149.94	149.96	150.01	150.03	150.13	150.014	149.996
19	150.11	149.95	150.06	150.01	150.12	150.050	150.009
20	150.05	150.21	149.88	149.88	150.10	150.024	150.013
21	149.95	150.00	150.17	150.05	150.11	150.056	150.024
22	149.80	149.80	150.04	149.95	149.83	149.884	149.989
23	150.07	150.07	149.84	149.93	150.05	149.992	149.990
24	150.07	149.91	150.12	149.98	149.91	149.998	149.992
25	149.88	150.04	149.97	150.02	150.04	149.990	149.991

Exercice 4 Carte de contrôle pour de petites séries
Généralement la mise en place de cartes de contrôle classiques $(\bar{X}, S)$ ou $(\bar{X}, R)$ nécessite

au moins une centaine d'observations. Cependant, il existe de nombreuses situations où on ne dispose pas d'un nombre d'échantillons aussi grand.
Par exemple, considérons un atelier de fabrication qui produit des pièces de rechange à la demande. Supposons que la fabrication de trois types de pièces dont les spécifications sont données dans le tableau suivant ont été commandées.

Type de la pièce	Caractéristique de qualité	Valeur nominale demandée	Quantité commandée
A	Diamètre	$N_A = 100$	$n_A = 16$
B	Diamètre	$N_B = 50$	$n_B = 40$
C	Diamètre	$N_C = 30$	$n_C = 24$

Le tableau suivant donne les diamètres et leur déviation par rapport au nominal pour les trois types de pièces. Les déviations sont calculées comme suit :

déviation=caractéristique mesurée-valeur nominale

No	T	X_1	X_2	X_3	X_4	Nom.	D_1	D_2	D_3	D_4	$\bar{X}$	R
1	A	100.45	98.91	100.43	102.14	100	...	...	...	...	...	...
2	A	97.70	97.36	100.25	104.05	100	...	...	...	...	...	...
3	A	101.31	96.36	96.08	95.70	100	...	...	...	...	...	...
4	A	97.97	102.72	97.65	104.46	100	-2.03	2.72	-2.35	4.46	0.700	6.810
5	B	51.07	53.61	50.08	56.21	50	1.07	3.61	0.08	6.21	2.743	6.130
6	B	57.61	51.26	54.29	47.70	50	7.61	1.26	4.29	-2.30	2.715	9.910
7	B	51.42	46.79	53.92	43.79	50	1.42	-3.21	3.92	-6.21	-1.020	10.130
8	B	49.44	51.15	49.81	48.74	50	-0.56	1.15	-0.19	-1.26	-0.215	2.410
9	B	49.81	44.88	52.94	50.95	50	-0.19	-5.12	2.94	0.95	-0.355	8.060
10	B	48.09	52.84	56.18	45.64	50	-1.91	2.84	6.18	-4.36	0.688	10.540
11	B	49.29	47.76	51.97	53.42	50	-0.71	-2.24	1.97	3.42	0.610	5.660
12	B	41.76	54.14	45.64	51.68	50	-8.24	4.14	-4.36	1.68	-1.695	12.380
13	B	49.34	54.29	49.64	54.29	50	-0.66	4.29	-0.36	4.29	1.890	4.950
14	B	52.94	47.61	52.23	50.82	50	2.94	-2.39	2.23	0.82	0.900	5.330
15	C	33.86	32.20	24.39	28.86	30	3.86	2.20	-5.61	-1.14	-0.173	9.470
16	C	31.50	29.91	31.73	25.57	30	1.50	-0.09	1.73	-4.43	-0.323	6.160
17	C	35.17	29.95	29.59	29.84	30	5.17	-0.05	-0.41	-0.16	1.138	5.580
18	C	30.74	33.13	32.81	32.80	30	0.74	3.13	2.81	2.80	2.370	2.390
19	C	28.28	30.49	33.07	31.95	30	-1.72	0.49	3.07	1.95	0.948	4.790
20	C	31.15	27.41	31.58	31.34	30	1.15	-2.59	1.58	1.34	0.370	4.170

Les séries de pièces commandées ne permettent pas de mettre en place des cartes de contrôle conventionnelles pour la maîtrise et la surveillance du processus de fabrication. Si l'écart-type du procédé est le même pour toutes les pièces, il est possible de mettre en place un carte de contrôle classique : $(\bar{X}, S)$ ou $(\bar{X}, R)$, exploitant les déviations par rapport aux nominales demandées.
La carte $\bar{X}$ pour les déviations a les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} \end{aligned}$$

Il faut reporter sur la carte les moyennes des déviations par rapport aux nominales : $\bar{X}_i$.

La carte R pour le suivi de la variabilité du processus est donnée par :

$$\begin{aligned} LSC &= D_4\bar{R} \\ LC &= \bar{R} \\ LIC &= D_3\bar{R} \end{aligned}$$

Il faut tracer sur la carte les étendues des déviations par rapport aux nominales : R_i.

Appliquer cette démarche aux données précédentes.

Remarque : Afin que les cartes de contrôle aux petites séries donnent de bons résultats, il faut les échantillons aient une taille constante n. Etant donné que les cartes sont fondées sur les déviations par rapport aux nominales, il n'est pas nécessaire d'avoir de longues séries pour chaque pièce. Dans le cas où l'écart-type du procédé n'est pas le même pour toutes les pièces, il convient de standardiser les mesures prélevées.

Sujet d'étude : Etude de l'efficacité d'une carte de contrôle

1. Risque de non-détection d'un déréglage du processus

On cherche à connaître le comportement d'une carte de contrôle par rapport aux déréglages d'un procédé. On considère que la caractéristique étudiée est X qui suit une loi normale et que les paramètres du processus stable sont μ_0 et σ_0. On utilise pour le contrôle une carte de Shewhart avec des échantillons de taille n. Supposons qu'à un moment donné un déréglage qui affecte uniquement la moyenne a lieu. Après le déréglage, la nouvelle valeur de la tendance centrale du procédé est

$$\mu = \mu_0 + \Delta$$

où Δ est l'amplitude du déréglage. Considérons que le déréglage est positif. On a

$$\Delta = \mu - \mu_0$$

Calculons la probabilité β que le point $\bar{X}$ tombe à l'intérieur des limites de contrôle ie β est la probabilité de ne pas détecter le déréglage Δ avec un seul échantillon prélevé après le déréglage. β est aussi appelée *probabilité de risque de deuxième espèce*. On a

$$\beta = \mathbb{P}(LIC_\mu \leq \bar{X} \leq LSC_\mu | \mu = \mu_0 + \Delta) \tag{1}$$

LIC_μ et LSC_μ sont les limites de contrôle de la carte $\bar{X}$ avant déréglage. Après le déréglage, la loi de la caractéristique de qualité suivie est

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0)$$

La moyenne de l'échantillon a alors pour loi

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$$

En exprimant le déréglage en fonction de l'écart-type de X,

$$\Delta = k\sigma_0$$

l'équation 1 s'écrit

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{P}(\mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 = 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) & (2)\\
&= \mathbb{P}(\frac{(\mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq \frac{(\mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}) & (3)\\
&= \mathbb{P}(-3 - k\sqrt{n} \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 3 - k\sqrt{n}) & (4)
\end{aligned}$$

En utilisant la fonction de répartition $\phi(z)$ de la loi normale standard, on obtient,

$$\beta = \phi(3 - k\sqrt{n}) - \phi(-3 - k\sqrt{n})$$

Remarque : On remarque que la carte $\bar{X}$ de Shewhart est efficace pour de grands déréglages du procédé. On peut également souligner que cette carte est d'autant plus efficace que la taille des échantillons prélevés est grande.

<u>AN</u> : On cherche à étudier la stabilité d'un processus d'usinage de rotors fabriqués au rythme de 1000 rotors par semaine à l'aide des cartes $(\bar{X}, S)$ et $(\bar{X}, S)$. Pour commencer 15 échantillons de de taille $n = 5$ sont prélevés. La fréquence de prélèvement est de 5 toutes les deux heures. Pour chaque échantillon, on a calculé la moyenne, son étendue et son écart-type. Le tableau suivant contient les mesures de ces 20 échantillons, ainsi que les moyennes $\bar{X}$, les étendues R et les écart-type s.

i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\bar{X}_i$	R_i	s_i
1	135.0014	135.0000	135.0006	134.9992	135.0010	135.0000	0.0022	0.000865
2	134.9988	135.0011	134.9973	135.0009	134.9971	134.9990	0.0040	0.001907
3	135.0009	134.9989	135.0003	134.9983	135.0002	135.0000	0.0026	0.001078
4	134.9996	134.9995	134.9992	134.9990	134.9994	134.9990	0.0006	0.000241
5	134.9996	135.0007	135.0000	134.9995	134.9997	135.0000	0.0012	0.000485
6	134.9982	134.9992	135.0018	134.9987	135.0008	135.0000	0.0036	0.001509
7	134.9993	135.0003	135.0013	134.9991	135.0013	135.0000	0.0022	0.001053
8	134.9996	135.0005	135.0001	135.0001	134.9986	135.0000	0.0019	0.000733
9	134.9996	134.9999	135.0029	135.0008	134.9982	135.0000	0.0047	0.001737
10	134.9993	135.0005	135.0019	134.9994	135.0020	135.0010	0.0027	0.001303
11	135.0016	135.0003	135.0002	134.9989	135.0018	135.0010	0.0029	0.001180
12	135.0003	135.0002	134.9988	134.9993	134.9981	134.9990	0.0022	0.000934
13	135.0003	135.0006	135.0011	134.9990	135.0005	135.0000	0.0021	0.000784
14	134.9996	134.9990	135.0003	134.9998	134.9999	135.0000	0.0013	0.000476
15	134.9993	134.9990	134.9983	134.9995	135.0005	134.9990	0.0022	0.000801
16	134.9987	134.9987	135.0000	135.0012	135.0011	135.0000	0.0025	0.001226
17	135.0015	134.9998	135.0005	135.0007	134.9989	135.0000	0.0026	0.000981
18	134.9995	135.0004	135.0005	135.0004	134.9996	135.0000	0.0010	0.000487
19	134.9985	135.0003	134.9989	135.0021	134.9998	135.0000	0.0036	0.001411
20	135.0006	134.9982	135.0002	135.0001	135.0023	135.0000	0.0041	0.001464

(i) Tracer une carte de contrôle de Shewhart $(\bar{X}, S)$. Diagnostics ?
(ii) Tracer une carte de contrôle de Shewhart $(\bar{X}, R)$. Diagnostics ?

Après cette étude, on considère que les paramètres du processus sous contrôle sont donc

$$\mu_0 = 135 \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 0.001$$

(iii) Calculer la probabilité β de ne pas détecter un décentrage $\Delta = 0.001$ avec la carte $\bar{X}$.
(iv) En suivant le même raisonnement, calculer la probabilité γ de ne pas détecter un déréglage $\lambda = 2.342$ de la dispersion du processus. On exprimera cette fois l'amplitude du déréglage comme suit

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

(v) En suivant le même raisonnement, calculer la probabilité η de ne pas détecter un déréglage $\lambda = 5.14$ de l'étendue du processus.

2. La courbe d'efficacité

C'est la représentation graphique de la probabilité du risque de non détection β en fonction de l'amplitude du déréglage. Généralement on trace sur le même graphique, les courbes d'efficacité pour différentes valeurs de n. Le graphe suivant représente un faisceau de courbes d'efficacité pour la carte $\bar{X}$ de Shewhart.

A partir des courbes d'efficacité ci-dessus, on peut lire facilement, selon l'amplitude du déréglage, la probabilité β que le point $\bar{X}$ reporté sur la carte moyenne tombe à l'intérieur des limites de contrôle.
<u>AN</u> : On désire mettre en place une carte de contrôle moyenne pour le suivi d'un processus de fabrication dont les valeurs standard sont

$$\mu_0 = 135 \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 0.001$$

Quelle doit être la taille n des échantillons à prélever si l'on désire une probabilité de 10% de ne pas détecter un déréglage de $\Delta = 3.8$ et une fausse alerte $\alpha = 0.0027$?

3. Période opérationnelle moyenne

La période opérationnelle moyenne (POM) d'une carte de contrôle donne le nombre moyen d'échantillons successifs nécessaires pour détecter un déréglage du processus. La probabilité du risque de non détection β dépend de la carte de contrôle utilisée et du déréglage Δ et peut être calculée en utilisant soit la courbe d'efficacité soit la loi de distribution de la statistique suivie. Par exemple pour la carte $\bar{X}$ de Shewhart, on peut utiliser l'équation $\Delta = k\sigma_0$ ou le faisceau de courbes d'efficacité de la figure précédente. Le nombre moyen de points successifs qu'il faut reporter sur la carte pour détecter le déréglage est donné par

$$POM(\Delta) = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{p}$$

<u>AN 1</u> : Pour le processus de fabrication de rotors vu précédemment, calculer la POM pour un déréglage $\Delta = 0.001$.

En abscence de déréglage, la probabilité de fausse alerte est α et le nombre moyen de prélèvements successifs pour donner une fausse alerte est

$$POM(0) = \frac{1}{\alpha}$$

AN 2 : Pour la carte de contrôle $\bar{X}$ de Shewhart, calculer $POM(0)$. Si pour le processus de fabrication des rotors, la fréquence de prélèvements est de 5 toutes les deux heures qu'elle est la fréquence moyenne d'une fausse alerte ?

4. Taille et fréquence des prélèvements

L'efficacité d'une carte de contrôle dépend de la taille des échantillons et de la fréquence des prélèvements. Evidemment, l'efficacité d'une carte de contrôle s'améliore si l'on augmente la taille des échantillons et de la fréquence des prélèvements.

Il n'y a pas de règles universelles pour déterminer la fréquence des prélèvements. Tout dépend du comportement du processus qui est suivi, i.e. de la fréquence des déréglages, de leurs conséquences, du volume de la production, des coûts de contrôle...On utilise généralement des règles empiriques.

Par contre, la taille des échantillons prélevés peut être déterminée en se basant sur la puissance de contrôle. Ainsi si l'on veut mettre en place une carte de contrôle moyenne avec les caractéristiques suivantes :
- une probabilité de fausse alerte α,
- un risque de probabilité de non détection β, pour un déréglage d'amplitude $\Delta = k\sigma$,
la taille n des échantillons à prélever doit satisfaire la condition

$$n \geq [\frac{z_{\alpha/2} + z_\beta}{k}]^2$$

où $z_{\alpha/2}$ et z_β sont les quantiles de la loi normale standard i.e.

$$\mathbb{P}(Z > z_{\alpha/2}) = z_{\alpha/2} \;\text{ et }\; \mathbb{P}(Z > z_\beta) = z_\beta$$

AN : On désire mettre en place une carte de contrôle moyenne pour le suivi d'un processus de fabrication dont les valeurs standard sont

$$\mu_0 = 100 \;\text{ et }\; \sigma_0 = 2$$

Quelle doit être la taille n des échantillons à prélever si l'on désire une probabilité de 10% de ne pas détecter un déréglage de $\Delta = 3.8$ et une fausse alerte $\alpha = 0.002$?

5. Choix de l'échantillon

L'efficacité des cartes de contrôle dépend aussi de l'échantillon lui-même i.e. de la façon dont les individus constituant l'échantillon sont choisis. Par exemple, si le procédé a tendance à dériver progressivement, il convient de prélever des unités produites dans un court intervalle de temps ; par contre, si le procédé a tendance à connaître des réglages brusques en oscillant d'un état sous contrôle à un état hors contrôle, il convient de constituer l'échantillon en tirant au hasard dans l'ensemble des unités produites pendant la période de temps séparant deux prélèvements.

IUP SID M1 | **UPS TOULOUSE**
Maîtrise statistique des procédés | **2005/2006**

Contrôle de la qualité par attributs

Exercice 1 Contrôle visuel pour la proportion de non conformes
Une entreprise fabrique des contenants de verre dont la plupart sont des embouteilleurs de jus d'orange. La vitesse de la ligne correspond à environ 5000 unités par heure. Un contrôle visuel est effectué par deux agents de contrôle (en alternance) sur un échantillon de 80 contenants pour chaque heure de production. Les contenants possédant éraflures, fissures, déformations ou autres anomalies sont classés non conformes.

Les résultats suivants ont été enregistrés pour trois journées de production.

Lundi 3 février

No d'échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8
Heure	8h30	9h30	10h30	11h30	12h30	13h30	14h30	15h30
Nb de non conformes	3	5	11	2	5	5	6	8

Mardi 4 février

No d'échantillon	9	10	11	12	13	14	15	16
Heure	8h30	9h30	10h30	11h30	12h30	13h30	14h30	15h30
Nb de non conformes	2	4	14	3	2	2	1	4

Mercredi 5 février

No d'échantillon	17	18	19	20	21	22	23	24
Heure	8h30	9h30	10h30	11h30	12h30	13h30	14h30	15h30
Nb de non conformes	5	3	2	2	3	5	3	4

1. Mettre en oeuvre une carte p pour la proportion de non conformes. Réviser les limites de contrôle si nécessaire.

On poursuit le contrôle le jeudi 6 février.

Jeudi 6 février

No d'échantillon	25	26	27	28	29	30	31	32
Heure	9h00	10h00	11h00	12h00	13h00	14h00	15h00	16h00
Nb de non conformes	2	4	3	1	2	5	3	2

2. Que peut-on dire sur la journée du 6 février ?

Exercice 2

Une entreprise fabrique des transisors utilisés dans un récepteur radio. Un contrôle régulier est effectué à l'aide d'un testeur électronique permettant de détecter d'une façon automatique les transistors défectueux. Le processus de fabrication produit en moyenne une proportion de transistors défectueux de 0.015. Les résultats suivants ont été enregistrés pour trois journées de production.

Journée	Nb de transistors contrôlés	Nb de transistors défectueux
Mardi	100	4
Mercredi	250	7
Jeudi	400	17

Mettre en oeuvre une carte adéquate au problème.

Exercice 3
Une entreprise d'accessoires électroniques fabrique des interrupteurs avec voyants lumineux. A intervalles réguliers, des échantillons de 50 interrupteurs sont prélevés de la production et le fonctionnement en est vérifié. Le nombre d'interrupteurs défectueux pour 25 échantillons de taille $n = 50$ est noté dans le tableau suivant.

No de l'échantillon	Nb défectueux	No de l'échantillon	Nb défectueux
1	2	14	3
2	3	15	0
3	5	16	1
4	4	17	4
5	3	18	1
6	2	19	2
7	4	20	2
8	1	21	5
9	4	22	4
10	0	23	2
11	0	24	2
12	1	25	3
13	2		

Mettre en oeuvre une carte adéquate au problème.

Exercice 4
Un contrôle visuel est effectué sur des plaques de laiton. La surface d'une plaque est vérifiée pour détecter des tâches de cuivre ou d'oxydation ou autres non-conformités apparentes. Le nombre de non-conformités par plaque a été noté pour 20 échantillonnages successifs. Les résultats sont :

No de l'éch.	Nb de non-conf.	No de l'éch.	Nb de non-conf.
1	1	11	7
2	2	12	2
3	4	13	1
4	1	14	1
5	3	15	0
6	1	16	2
7	0	17	2
8	2	18	1
9	0	19	0
10	1	20	3

1. Mettre en oeuvre une carte adéquate au problème.
2. On a constaté sur une chaîne que le nombre moyen de non-conformités est 2.
Quelle est la probabilité que le nombre de non-conformités d'une chaîne quelconque se situe au-dessus de la limite supérieure de contrôle si $c' = 2$?

Exercice 5 Détermination des limites de contrôle pour une carte aux démérites
Supposons que pour un certain produit on a adopté la pondération suivante pour diverses non-conformités.

Type de non-conformités	Pondération
Non-conformités majeure A	10
Non-conformités majeure B	5
Non-conformités mineure C	3
Non-conformités mineure D	1

Vingt unités ont été contrôlées et le décompte de chaque type de non-conformités sur chaque unité figure dans le tableau suivant :

Unité	Non-conf. majeure A	Non-conf. majeure B	Non-conf. mineure C	Non-conf. mineure D	Nb total de démérites
1	5	4	4	5	...
2	5	4	5	3	...
3	3	3	6	6	69
4	5	5	4	6	93
5	5	6	6	6	104
6	5	7	7	5	111
7	5	5	5	6	96
8	5	4	6	6	94
9	4	4	3	5	74
10	2	3	8	6	65
11	6	6	6	6	114
12	5	5	4	5	92
13	2	3	7	7	63
14	5	3	8	4	43
15	0	3	3	9	53
16	5	2	9	8	95
17	4	1	7	8	74
18	1	4	6	6	54
19	4	3	5	6	76
20	5	2	4	9	81

Mettre en oeuvre une carte adéquate au problème.

IUP SID M1 **UPS TOULOUSE**
Maîtrise statistique des procédés **2005/2006**

Capabilité

Exercice 1 Proportion de non conformes
Une machine fabrique des pièces qui doivent respecter les spécifications suivantes : 78 ± 12.
Pour 28 échantillons consécutifs de taille $n = 4$, on a obtenu

$$\bar{\bar{X}} = 76.7 \quad \text{et} \quad \bar{R} = 7.68$$

On suppose que le procédé est stable.

1. Estimer l'écart-type de la caractéristique de qualité.
2. Quelle est la proportion de pièces non conformes par défaut ? Par excès ?
3. Dans une fabrication de 50 000 pièces, combien de pièces seront vraisemblablement conformes aux spécifications ?

Exercice 2
Notons T_0 la valeur moyenne des spécificités i.e. $T_0 = \frac{T_s+T_i}{2}$.

1. Donner le lien entre les différents indices de capabilité C_p, C_{pk}, CPU et CPL.
2. Montrer que $C_{pk} \leq C_p$.
3. Que signifient $Cpk = 0$, $Cpk \leq 0$, $Cpk = CPU$ et $Cpk = CPL$?
4. Montrer que $C_{pk} = C_p(1-k)$ où $k = 2\frac{|T_0 - \bar{\bar{X}}|}{T_s - T_i}$.
5. Calculer les indices de capabilité C_p, C_{pk}, CPU et CPL lorsque $\bar{\bar{X}} = 20.01$, $\bar{R} = 0.48$, $n = 5$ et les spécifications sont définies par 20 ± 0.5.

Exercice 3
Certaines entreprises qualifient le procédé selon les valeurs de C_p :

C_p	Qualité	Proportion de non conformes
≥ 2	très performant	...
$[1.34, 2]$	performant	...
$[1, 1.33]$	acceptable	...
$[0, 1]$	inacceptable	...

Compléter le tableau.

Exercice 4
Dans l'entreprise Rockwell, on teste la dureté des pièces dont les spécifications sont $[76, 94]$.
On accepte l'hypothèse gaussienne et la stabilité de la loi, on obtient $\bar{\bar{X}} = 84.5$ et $\bar{R} = 5.75$ pour des 5-échantillons.

(i) Proposer une estimation de $\hat{\sigma}$.

(ii) Calculer l'indice de capabilité C_p.
(iii) Proposer un intervalle de confiance pour X de largeur $6\hat{\sigma}$ et le comparer aux spécifications. Que conclure ?
Indication : chercher la probabilité $\mathbb{P}(|U| \leq 3)$, si U est une gaussienne centrée réduite.
(iv) Calculer le C_{pk}.

Exercice 5
On s'interesse à un nouveau procédé de gravure. On veut mesurer la vitesse de gravure. On prélève 16 échantillons et on suppose que X, la vitesse de gravure, suit une loi normale centrée réduite.

On obtient
$$\sum_{i=1}^{16} x_i = 150.84 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2 = 34.85$$
1. Calculer la moyenne et l'écart-type de la gravure.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour l'écart-type de niveau de confiance 95%.

Les tolérances sont 1 et 18.
3. Déterminer C_p et C_{pk}.
4. Déterminer un intervalle de confiance pour le C_p de niveau de confiance 95%.
5. Ecrire l'amplitude de l'intervalle de confiance en fonction de n, taille de l'échantillon. Calculer cette amplitude pour $n = 50$ et $n = 100$.

Exercice 6
1. Effet sur les indices de capabilité d'un décentrage

Les spécifications pour la longueur d'un support particulier utilisé dans une monture servant à l'assempblage d'un produit d'éclairage sont 50mm±6mm.
La caractéristique "longueur de support" est maîtrisée statistiquement et l'estimation de l'écart-type donne $\hat{\sigma} = 1.15$mm.
Comparer les valeurs obtenues pour C_p, C_{pk} CPU et CPL lorsque la moyenne $\bar{\bar{X}}$ est successivement égale à 48.5, 50, 50.8, 52 et 53.5.

2. Effet sur les indices de capabilité de la dispersion

Les spécifications pour le diamètre d'un pivot en mm sont 10-15mm.
La caractéristique "diamètre du pivot" est maîtrisée statistiquement et suit une loi normale. On prélève un échantillon de taille $n = 100$ et on observe
$$\bar{x} = 12 \quad \text{et} \quad s = 0.5$$
Calculer les indices C_p et C_{pk}.
Proposer un intervalle de confiance pour X.
Finalement, on recentre le processus $\bar{x} = 12.5$ en gardant les mêmes spécificités. Etudions l'effet de la dispersion.

s	C_p	C_{pk}
0.3	2.77	2.77
0.4	2.08	2.08
0.6	1.38	1.38
0.7	1.19	1.19
0.8	1.04	1.04

Commenter.