M1 ISMAG
MISB40Y - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°1 : Introduction aux séries chronologiques

---

Exercice 1
Montrer si les suites ci-dessous sont périodiques ou de somme nulle (et discuter selon les valeurs de a et de b) :

1. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $s_t = a\cos(\frac{2\pi t}{p})$;
2. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $s_{2t} = a$ et $s_{2t+1} = b$ avec a et b deux réels ;
3. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $s_{2t} = ab^t$ avec a et b deux réels ;

Exercice 2
Démontrer le résultat de cours suivant :
Toute composante de somme nulle sur une période p est périodique de période p.

Exercice 3
On considère le modèle additif :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t,$$

où $(Z_t)_t$ est une tendance, $(S_t)_t$ une composante saisonnière de période p et $(\epsilon_t)_t$ une suite de variables aléatoires iid de carré intégrable (la variance sera notée σ^2).

1. Calculer l'espérance de X_t pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer la variance de X_t pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
3. Calculer la covariance entre X_t et X_s pour tout $(t, s) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 4
Même questions que l'exercice 3 lorsque l'on considère le modèle multiplicatif :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t S_t + \epsilon_t,$$

où $(Z_t)_t$ est une tendance, $(S_t)_t$ une composante saisonnière de période p et $(\epsilon_t)_t$ une suite de variables aléatoires iid de carré intégrable (la variance sera notée σ^2).

Exercice 5
Même questions que l'exercice 3 lorsque l'on considère le modèle multiplicatif complet :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t S_t \epsilon_t,$$

où $(Z_t)_t$ est une tendance, $(S_t)_t$ une composante saisonnière de période p et $(\epsilon_t)_t$ une suite de variables aléatoires iid de carré intégrable (la variance sera notée σ^2).

Exercice 6
On considère la série suivante du nombre de véhicules à un péage autoroutier de Midi-Pyrénées selon la plage horaire observé pendant 4 jours :

Plage horaire \ Numéro du jour	1	2	3	4
0h-6h	1394	2093	2343	2839
6h-12h	2469	2824	3026	3841
12h-18h	1665	2116	2779	3009
18h-24h	2588	2934	3561	3579

1. Représenter graphiquement cette série. On numérotera les données de 1 à 16.
2. Déterminer s'il s'agit d'un modèle additif ou multiplicatif.

Exercice 7
On considère la série suivante

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	58	40	31	15	18	15	9	9	10	8

1. Représenter graphiquement cette série.
2. On se propose d'ajuster une tendance f de la forme $f(t) = \frac{1}{at+b}$.
   Justifier ce choix pour f.
3. Estimer directement le a et le b par la méthode des points médians.
4. Proposer un changement de variable approprié de façon à obtenir un modèle linéaire.
   Déterminer ensuite les coefficients a et b
   – par la méthode des moindres carrés ordinaires ;
   – par la méthode des points médians.
5. Représenter les trois tendances obtenues sur le graphique précédent.

Exercice 8
Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires (CA) y d'une entreprise (en milliers d'euros) selon le mois de l'année x :

	Année 1												Année 2			
x_i	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	J	F	M	A
y_i	106	107	119	121	117	121	130	143	146	146	145	155	161	173	189	194

1. Représenter graphiquement cette série.
2. Que peut-on dire de la tendance ?
3. Proposer un ajustement linéaire
   – par la méthode des moindres carrés ordinaires ;
   – par la méthode des points médians.
4. Représenter les deux estimations de la tendance obtenues sur le graphique précédent.
5. Proposer une prévision pour les mois de Mai et Juin de la 2ème année avec chacune des deux méthodes.

M1 ISMAG
MISB40Y - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°2 : Moyennes mobiles et décomposition

Quelques exercices pour manipuler les moyennes mobiles

Exercice 1

Calculer les séries des moyennes mobiles d'ordre 2, 3 et 4 de la série initiale X_t suivante

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X_t	30	15	5	30	36	18	9	36	45	15	10	60	48	16	8	72

Exercice 2

On a relevé le nombre de mariages dans une ville du sud-ouest de la France chaque trimestre pendant 3 ans :

Trimestre \ Année	2004	2005	2006
1	10	11	12
2	12	14	15
3	13	15	17
4	11	12	12

1. Représenter graphiquement cette série chronologique (avec périodes superposées puis avec périodes successives). Commenter.
2. Calculer la série des moyennes mobiles pour un ordre choisi judicieusement, lisser la courbe.
3. Calculer les coefficients saisonniers (pour le modèle additif).
4. Calculer l'équation de la droite de tendance et tracer cette droite sur le graphique précédent.
5. Utiliser le modèle construit pour prévoir le nombre de mariages dans cette ville en 2007.

Exercice 3

Dans une grande entreprise, on a mesuré l'absence journalière pendant 4 semaines : chaque semaine comporte 5 jours de travail. Voici les résultats (on donne ici le nombre d'employés absents) :

	Semaine 1	Semaine 2	Semaine 3	Semaine 4
Lundi	1	2	4	5
Mardi	0	3	4	6
Mercredi	5	7	10	11
Jeudi	2	4	2	3
Vendredi	0	1	2	4

1. Représenter graphiquement cette série chronologique (avec périodes superposées puis avec périodes successives). Commenter.
2. Calculer la série des moyennes mobiles pour un ordre choisi judicieusement, lisser la courbe.
3. Calculer les coefficients saisonniers (pour le modèle additif).
4. Calculer l'équation de la droite de tendance et tracer cette droite sur le graphique précédent.
5. Prévoir le nombre d'absents pour les 3 premiers jours de la cinquième semaine.

Quelques exercices sur les propriétés des moyennes mobiles

Exercice 4
Montrer que la composition de toute moyenne mobile avec l'opérateur retard est commutative, i.e. montrer que si M est un moyenne mobile et $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une série temporelle, alors,

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad M(BX_t) = B(MX_t).$$

Exercice 5
Montrer que les moyennes mobiles symétriques vérifient les propriétés suivantes :

1. Si M_1 et M_2 sont deux moyennes mobiles centrées, alors il en est de même de M_1M_2.
2. Une moyenne mobile centrée $M = B^m P(F)$ est symétrique si et seulement si $P(B) = B^{2m}P(F)$.
3. Si M_1 et M_2 sont deux moyennes mobiles symétriques, alors il en est de même de M_1M_2.

Exercice 6 Composition de moyennes mobiles

1. Montrer que si X_t est une série invariante par M_1 et M_2, alors X_t est invariante par M_1M_2. Qu'en est-il de la réciproque ?
2. Montrer que si X_t est une série arrêtée par M_1 ou M_2, alors X_t est arrêtée par M_1M_2. Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 7

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la moyenne mobile $M = (I - B)^p$, appelée **opérateur de différence**, transforme un polynôme de degré p en une constante.
2. Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la moyenne mobile $M = I - B^s$, appelée **opérateur de différence saisonnière**, absorbe les composantes saisonnières de période s.
3. Soient p et $s \in \mathbb{N}^*$. Que se passe-t-il lorsqu'on applique la moyenne mobile $M = (I - B^s)o(I - B)^{p+1}$ à la série temporelle

   $$X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t$$

   où Z est une tendance polynômiale de degré p, S une composante saisonnière de période s et ϵ un bruit blanc ?

Exercice 8
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la moyenne mobile symétrique impaire M définie par

$$M = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^{q} B^i,$$

absorbe les composantes saisonnières de période $2q+1$ et conserve les polynômes de degré 1.

Quelques exercices sur des moyennes mobiles particulières

Exercice 9 On s'intéresse dans cet exercice à la moyenne arithmétique d'ordre 5.

1. Ecrire son polynôme associé.
2. Vérifier que la moyenne arithmétique conserve les polynômes de degré 1.
3. Déterminer les séries invariantes par la moyenne mobile arithmétique d'ordre 5.

Exercice 10

Déterminer les moyennes mobiles symétriques d'ordre minimal conservant les polynômes de degré 2 et annulant les composantes saisonnières trimestrielles.

Exercice 11

Soit (X_t) un processus stochastique. On considère la moyenne mobile suivante :

$$MX_t = \frac{X_{t+2} + 2X_{t+1} + 2X_t + 2X_{t-1} + X_{t-2}}{8}.$$

1. Exprimer cette moyenne mobile à l'aide de l'opérateur B et donner son polynôme caractéristique.
2. Déterminer les suites de la forme a^t absorbées par M.
3. Montrer que les composantes saisonnières de période 4 sont absorbées par M.
4. Déterminer les suites de la forme a^t invariantes par M.
5. Montrer que les polynômes de degré 1 sont invariants par M.
6. On définit le processus (X_t) par $X_t = at + b + S_t + \epsilon_t$, où a et b sont deux constantes, (S_t) une composante saisonnière de période 4 et ϵ_t un bruit blanc faible de variance σ^2. On pose $Y_t = MX_t$. Calculer l'espérance et les autocovariances de ce processus.

Exercice 12

Le tableau ci-dessous donne les indices de quantité d'importations totales de la CEE pour chacun des mois des années 1961 à 1963, correspondant aux observations $X_1, \ldots, X_{36}$.

	Jan.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1961	99.7	104.2	102.3	102.8	104.8	101.0	93.6	90.8	93.2	100.9	105.3	101.5
1962	98.6	103.5	102.6	103.8	106.2	101.2	93.1	90.5	92.9	101.3	104.1	102.4
1963	97.7	102.0	102.9	104.6	107.2	101.5	92.7	90.2	92.8	101.7	102.9	103.8

On considère la moyenne mobile M suivante :

$$M = \frac{1}{3}B^2 + \frac{1}{9}B + \frac{1}{9}I + \frac{1}{9}B^{-1} + \frac{1}{3}B^{-2}.$$

Etudier les propriétés de cette moyenne mobile. Représenter la série initiale et la série filtrée par M.

Exercice 13

Soit (X_t) un processus stochastique. On considère les deux moyennes mobiles suivantes :

$$M_1X_t = \frac{1}{4}(5Xt + 2X_{t-1} - 3X_{t-2})$$

et

$$M_2 X_t = \frac{1}{2}(X_t + X_{t-2})$$

De plus, on considère la moyenne mobile M définie par : $M = M_1 M_2$.

1. Exprimer ces trois moyennes mobiles à l'aide de l'opérateur B et donner leur polynôme caractéristique.
2. Déterminer les suites absorbées par M_1 et par M_2. En déduire celles absorbées par M.
3. Déterminer les suites invariantes par M_1 et par M_2. Vérifier que M laisse invariant les polynômes de degré 1.
4. On définit le processus (X_t) par $X_t = at + b + S_t + \epsilon_t$, où a et b sont deux constantes, (S_t) une composante saisonnière de période 4 et (ϵ_t) un bruit blanc faible de variance σ^2. On pose $Y_t = MX_t$. Calculer l'espérance et les autocovariances de ce processus.

Exercice 14

On considère la moyenne mobile suivante

$$M = a_{-2}B^2 + a_{-1}B + a_0 I + a_1 B^{-1} + a_2 B^{-2}$$

où $a_{-2}, \ldots, a_2$ sont des constantes réelles.

1. Si on dispose des observations $X_1, \ldots, X_n$, pour quelles valeurs de t, $Y_t = MX_t$ est-elle définie ?
2. Quelles conditions doit-on imposer aux coefficients de M pour que M laisse inchangés les polynômes de degré 2 ? Montrer que ces conditions laissent subsister un degré de liberté dans le choix des coefficients lorsque de plus $a_{-2} = a_2$ et $a_{-1} = a_1$. Par la suite, on supposera ces conditions vérifiées.
3. On suppose que (X_t) est défini, pour tout t, par $X_t = Z_t + \epsilon_t$ où Z_t est un polynôme de degré 2 et (ϵ_t) un bruit blanc faible de variance σ^2. Calculer l'espérance et la variance de $Y_t = MX_t$. Quelle est la moyenne mobile telle que la variance de Y_t soit minimale ?
4. On considère les deux moyennes mobiles, M_1 et M_2, suivantes

   $$M_1 = \frac{1}{5}(F^2 + F + I + F^{-1} + F_{-2})$$

   et

   $$M_2 = \frac{1}{8}(F^2 + 2F + 2I + 2F^{-1} + F_{-2})$$

   Montrer que $V_t = M_1 X_t$ et $W_t = M_2 X_t$ ont des espérances qui diffèrent de Z_t par des constantes. Comparer les variances de V_t et de W_t avec celle de Y_t.
5. On suppose que les observations sont trimestrielles et que X_t est défini par $X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t$ où (S_t) est une composante saisonnière de période 4. Etudier comment les moyennes mobiles M_1 et M_2 opèrent sur S_t. Discuter la nature du biais que comportent les suites V_t et W_t comme estimateurs de la tendance Z.

M1 ISMAG
MISB40Y - Séries chronologiques

Feuille d'exercices n°3 : Lissage exponentiel

Exercice 1

On considère le modèle suivant de séries temporelles :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t + \epsilon_t,$$

où $(Z_t)_t$ est une tendance et $(\epsilon_t)_t$ est un bruit blanc fort de variance σ^2. On dispose des observations $X_1, \ldots, X_T$. On souhaite étudier les propriétés du lissage exponentiel simple d'une telle série temporelle. Soit $\hat{X}_T(1)$ l'estimation de X_{T+1} par cette technique :

$$\hat{X}_T(1) = (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1}\beta^j X_{T-j},$$

où $\beta \in]0,1[$. Caractériser la loi de $\hat{X}_T(1)$ dans les deux cas suivants :

1. pour tout $\forall t \in \mathbb{Z}$, $Z_t = a$;
2. pour tout $\forall t \in \mathbb{Z}$, $Z_t = at + b$.

Que pensez-vous de $\hat{X}_T(1)$ comme estimateur de X_{T+1} dans ces deux cas ?

Exercice 2

Le tableau ci-dessous indique la production mensuelle belge de papier journal (exprimée en milliers de tonnes) pour certains mois des années 1968 à 1970.

	Jan.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1968	-	-	-	-	-	-	9.8	10.1	8.3	7.9	9.5	7.5
1969	10.6	7.7	8.8	1.5	2.9	7.4	6.2	6.9	7.6	7.9	8.8	7.7
1970	9.0	7.4	8.0	8.3	7.3	7.8	-	-	-	-	-	-

Nous disposons aussi de la moyenne des 6 premiers mois de l'année 1968 qui est de 8.02.

1) Nous nous proposons, dans cette question, de déterminer un β convenable afin de faire de la prévision.

Compléter les tableaux ci-dessous grâce à un lissage exponentiel simple des données par récurrence pour trois choix de la constante de lissage :

- Constante de lissage $\beta = 0.9$:

	Jan.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1968	-	-	-	-	-	-						
1969												
1970							-	-	-	-	-	-

- Constante de lissage $\beta = 0.5$:

	Jan.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1968	-	-	-	-	-	-						
1969												
1970							-	-	-	-	-	-

- Constante de lissage $\beta = 0.1$:

	Jan.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1968	-	-	-	-	-	-						
1969												
1970							-	-	-	-	-	-

Calculer la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et les valeurs prédites pour chacun des lissages précédents.
Quel est le lissage qui minimise ce critère d'erreur ?

2) Nous nous proposons maintenant de faire de la prédiction.
Effectuer une prévision pour les 6 derniers mois de l'année 1970 avec le β trouvé précédemment.

Remarque : nous rappelons qu'il est possible de choisir de façon systématique le β optimal en minimisant sur β la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et les valeurs prédites.

Exercice 3
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus tel que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z},\\
&\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{Z},\\
&\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \rho^{|h|}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad \forall h \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

avec $-1 < \rho < 1$. On considère la série chronologique $X_1, ..., X_T$ et on note $\hat{X}_T(h)$ la prévision à l'horizon h fournie par le lissage exponentiel simple avec constante de lissage β $(0 < \beta < 1)$:

$$\hat{X}_T(h) = (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j}.$$

On note $D_\rho(h,\beta)$ l'erreur de prévision moyenne définie par :

$$D_\rho(h,\beta) = \mathbb{E}\left((X_{T+h} - \hat{X}_T(h))^2\right).$$

1. Calculer $D_\rho(h,\beta)$.
   NB. On suppose T sufisamment grand et on remplace dans les calculs $\sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j$ par $\frac{1}{1-\alpha}$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.
2. Déterminer, en fonction de ρ, la valeur de β minimisant $D_\rho(1,\beta)$.