L2 CALCUL DIFFÉRENTIEL, NOTES DE COURS

PATRICE LASSÈRE, 15 AVRIL 2011

1. Le Théorème d'Inversion Locale

1.1. **Une variable : un cas très particulier.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Un résultat classique de L1 nous assure que si f' ne s'annule pas sur I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ (qui est encore un intervalle) et $f^{-1}\ :\ f(I) \to I$ est encore de classe C^1.

Il faut faut toutefois rester vigilant sur les hypothèses :

• I doit être un intervalle : Condidérer $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}^\star$.

• La dérivée ne doit pas s'annuler : La fonction $f(x) = x^3$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée $f'(x) = 3x^2$ ne s'annule qu'en l'origine ; on vérifie sans peine que l'application réciproque f^{-1} continue sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ n'est pas dérivable à l'origine.

• La dérivée doit être continue : La fonction [1] $g(x) = x^2\sin(1/x) + x/4$ prolongée par continuité à l'origine par $g(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(0) = 1/4 > 0$. Toutefois, f n'est croissante sur aucun voisinage de l'origine. Pour s'en convaincre considérons les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ convergentes vers 0 et de terme généraux $u_n = \frac{1}{n\pi+\pi/3}$, $v_n = \frac{1}{n\pi}$, on a $0 < u_n < v_n$. Choisissons $N \geq 1$ tel que $n \geq N$ implique $v_n < 1/16$. Pour un tel choix, $x \in]u_n, v_n[$ implique $n\pi < 1/x < n\pi+\pi/3$ soit $0 < 1/x - n\pi < \pi/3$ et par conséquent $1/2 < \cos(1/x - n\pi) = (-1)^n \cos(1/x) < 1$. Ainsi, $\cos(1/x) > 0$ si n est pair et $\cos(1/x) < 0$ sinon, et dans tous les cas $|\cos(1/x)| > 1/2$.
De plus $0 < x < v_n < 1/16$ implique $|2x\sin(1/x) + 1/4| \leq 2|x| + 1/4 < 1/8 + 1/4 < 1/2$. Donc, comme on a aussi $|\cos(1/x)| > 1/2$ et $g'(x) = 2x\sin(1/x) + 1/4 - \cos(1/x)$ pour tout $x \neq 0$ nous sommes assurés que $g'(x)$ et $\cos(1/x)$ sont différents de 0 et de signe contraire sur chaque intervalle $[u_n, v_n]$. Ainsi pour tout $n \geq N$, f sera strictement décroissante sur le segment $[u_n, v_n]$ pour n impair et strictement croissante si n est pair. elle possède donc la propriété désirée. Dans ce dernier exemple, c'est la discontinuité à l'origine de g' qui rend possible une telle situation. Si g est de classe C^1 et si $g'(a) > 0$ alors, par continuité de f' il existera un intervalle I contenant a sur lequel g' sera strictement positive et par suite strictement croissante.

Notre objectif dans la suite de ce chapitre est d'essayer de généraliser ce genre de résultats en plusieurs variables.

1. B.Hauchecorne « Les contre-exemples en mathématiques » Ellipses 2007.

1.2. C^k difféomorphismes et inversion locale.

Définition 1. *Soit Ω et $\mathscr{U}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. On dira qu'une application $f : \Omega \to \mathscr{U}$ est un* ***difféomorphisme de classe*** *C^k de Ω sur $\mathscr{U}$ (ou un C^k-difféomorphisme) si et seulement si :*
1) $f \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathscr{U})$.
2) f est une bijection de Ω sur $\mathscr{U}$.
3) f^{-1} est de classe C^k sur $\mathscr{U}$.
Si $k = 1$, on dira difféomorphisme pour C^1-difféomorphisme.

Il résulte de la définition que

$$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_\Omega \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_{\mathscr{U}}.$$

Soit, par différentiation

$$D(f^{-1} \circ f)(a) = Df^{-1}[f(a)] \circ Df(a) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall\, \mathrm{a} \in \Omega,$$

et dans le langage des matrices jacobiennes

$$Jf^{-1}[f(a)] \cdot Jf(a) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

De même pour tout $b \in \mathscr{U}$

$$Jf[f^{-1}(b)] \cdot Jf^{-1}(b) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Les matrices jacobiennes $Jf(a)$ et $Jf^{-1}(b)$ sont donc inversibles et $Jf(a)^{-1} = Jf^{-1}(b)$ où $b = f(a)$.

Remarque 1. *Il résulte de ce qui précède que les matrices jacobiennes sont carrées (puisque inversibles). Donc s'il existe un difféomorphisme entre Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ nécessairement $n = p$.*

Théorème 1. ***(théorème d'inversion locale)*** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Si $Jf(a) \in GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe $\mathscr{U}$ un voisinage ouvert de a, $\mathscr{V}$ un voisinage ouvert de $b = f(a)$ et $g \in \mathscr{C}^1(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ telle que*

$$g \circ f = \mathbf{1}_{\mathscr{U}}, \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathbf{1}_{\mathscr{V}}.$$

Autrement dit, f est un C^1 difféomorphisme de $\mathscr{U}$ sur $\mathscr{V}$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}$ vérifiant $f(x) = y$ on a :

$$Jf(x)^{-1} = Jf^{-1}(y).$$

Démonstration : Admise. ■

Une importante conséquence est

Corollaire 1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Si $Jf(a) \in GL_n(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \Omega$ alors f est ouverte, en particulier $f(\Omega)$ est un ouvert.*

Démonstration : On peut appliquer le théorème d'inversion locale en chaque point $a \in \Omega$, il assure en particulier que $f(\Omega)$ contient un voisinage $\mathscr{V}$ de $f(a)$. CQFD. ■

On en déduit aussi le

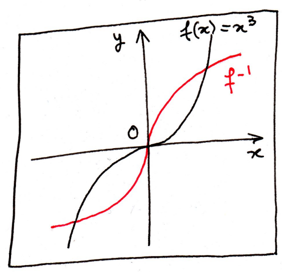
Théorème 2. ***(théorème d'inversion globale)*** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application injective de classe C^1. Si $Jf(a) \in GL_n(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \Omega$, alors $\mathscr{U} := f(\Omega)$ est un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f un C^1 difféomorphisme de Ω sur $\mathscr{U}$.*

Remarques : • Attention ! A la différence du cas d'une variable (voir le premier paragraphe) où $f'(x) = Jf(x) > 0$ sur un intervalle I implique que f est bijective (puis un C^1 difféomorphisme) sur I (le local implique donc le global) ; l'hypothèse d'injectivité dans le théorème d'inversion globale est essentielle en plusieurs variables. Par exemple l'application $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ vérifie

$$\det Jf(x) = \begin{vmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{vmatrix} = e^x \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

C'est donc, (inversion locale –théorème 1) un difféomorphisme local, toutefois f est bien loin d'être injective puisque $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ et ne peut donc être un difféomorphisme global.

• Même en une variable l'hypothèse $\det Jf(x) = f'(x) \neq 0$ est essentielle, par exemple l'application (voir figure ci-contre) $f(x) = x^3$ est bijective, C^∞ et vérifie $f'(0) = 0$. Toutefois son application réciproque continue sur $\mathbb{R}$ et C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$ n'est pas dérivable à l'origine.



• **Le passage en coordonnées polaires :** L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ a pour jacobien

$$\det Jf(r, \theta) = \begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

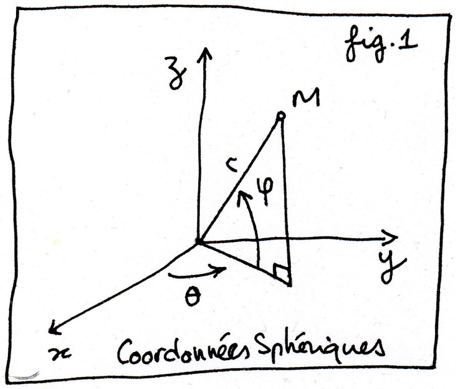
f est donc (inversion locale – théorème 1) un difféomorphisme local sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. f étant injective sur $\mathbb{R}_+^\star \times]-\pi, \pi[$, c'est donc un difféomorphisme global (inversion globale – théorème 2) de $\mathbb{R}_+^\star \times]-\pi, \pi[$ sur $f(\mathbb{R}_+^\star \times]-\pi, \pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$ et son application réciproque est définie par

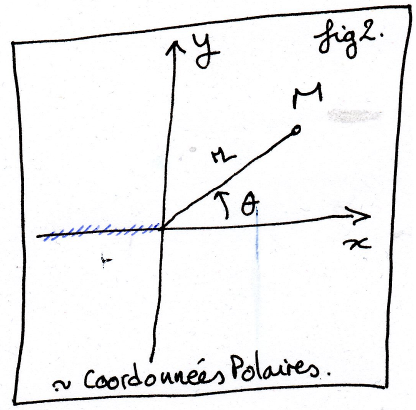
$$f^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\text{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right).$$

En effet $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et comme

$$\tan(\theta/2) = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)} = \frac{r\sin\theta}{r\cos(\theta) + r} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

la seconde formule suit.





• **Le passage en coordonnées sphériques :** L'application $f \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$ vérifie $\det f(r,\varphi,\theta) = -r^2\cos\varphi$. C'est donc un C^1 difféomorphisme de l'ouvert $\mathbb{R}_+^\star \times]-\pi/2,\pi/2[\times]-\pi,\pi[$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$. C'est le passage en coordonnées sphériques.

Exercice 1. *Déterminer l'image $\Phi(\mathbb{R}^3)$ de l'application $\Phi \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\Phi(x,y,z) = (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$ et montrer que c'est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\Phi(\mathbb{R}^3)$.*

• Posons $\Phi(x,y,z) = (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y) = (a,b,c)$. Clairement $a > 0$, et $a+b = e^{2y}+e^{2x} > 0$ enfin $c = x-y \in \mathbb{R}$. Donc $\Phi(\mathbb{R}^3) \subset \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a > 0, a+b > 0, c \in \mathbb{R}\} := \mathscr{O}_1$, c'est clairement un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soit $(a,b,c) \in \mathscr{O}_1$, $\Phi(x,y,z) = (a,b,c)$ implique que $x = c+y$. Comme $a+b = e^{2y}+e^{2x} = e^{2y}+e^{2(c+y)}$ implique $e^{2y} = \frac{a+b}{1+e^{2c}}$ et comme $a+b > 0$ cette équation admet l'unique solution $y = \log\sqrt{\frac{a+b}{1+e^{2c}}}$. Maintenant $e^{2z} = a - e^{2y} = a - \frac{a+b}{1+e^{2c}} = \frac{ae^{2c}-b}{1+e^{2c}}$, il est donc nécessaire que $ae^{2c} > b$ et sous cette hypothèse on tire $z = \log\sqrt{\frac{ae^{2c}-b}{1+e^{2c}}}$. Enfin $x = y+c = c+\log\sqrt{\frac{a+b}{1+e^{2c}}}$. L'image $\Phi(\mathbb{R}^3)$ est donc l'ouvert $\mathscr{O} := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a > 0, a+b > 0, ae^{2c} > b, \ c \in \mathbb{R}\}$.
• Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, le déterminant de la matrice jacobienne de Φ vaut

$$\det Jf(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4e^{2z}(e^{2x}+e^{2y}) \neq 0.$$

Φ étant en outre bijective de $\mathbb{R}^3$ sur $\Phi(\mathbb{R}^3)$ le théorème d'inversion globale assure que c'est bien un C^∞ difféomorphisme. □

Exercice 2. *Déterminer les point $z \in \mathbb{C}$ où le polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ n'est pas localement inversible.*

• On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Il faut donc déterminer les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'application $f(x,y) = (u(x,y) := \mathtt{re}P(x+iy), v(x,y) := \mathtt{im}P(x+iy))$ ne soit pas inversible. Par le théorème d'inversion locale ces points sont parmi ceux qui annulent le jacobien de f en (x, y), s'il agit donc de le calculer. Comme $2u = P + \overline{P}, 2iv = P - \overline{P}$ et $P = \sum_k a_k(x+iy)^k$ il suffit de calculer

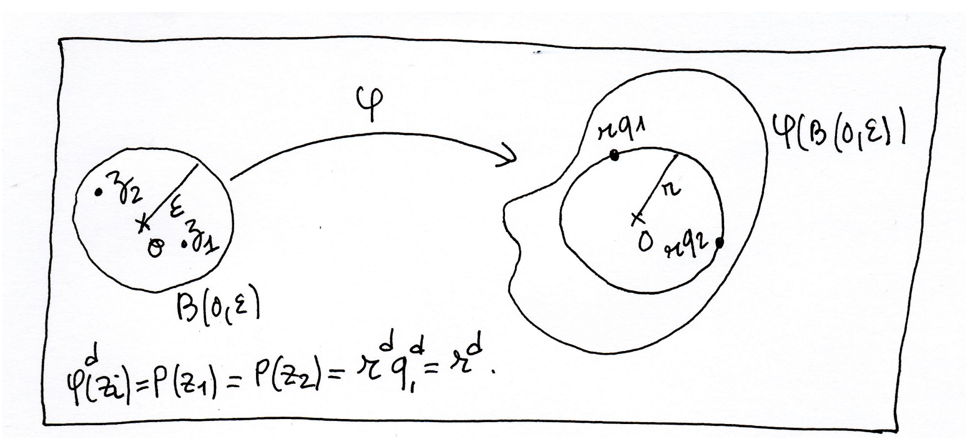
$$\begin{aligned}
\partial_x \left(a_k(x+iy)^k + \overline{a_k}(x-iy)^k\right) &= k\left(a_k(x+iy)^{k-1} + \overline{a_k}(x-iy)^{k-1}\right)\\
\partial_x \left(a_k(x+iy)^k - \overline{a_k}(x-iy)^k\right) &= k\left(a_k(x+iy)^{k-1} - \overline{a_k}(x-iy)^{k-1}\right)\\
\partial_y \left(a_k(x+iy)^k + \overline{a_k}(x-iy)^k\right) &= ik\left(a_k(x+iy)^{k-1} - \overline{a_k}(x-iy)^{k-1}\right)\\
\partial_y \left(a_k(x+iy)^k - \overline{a_k}(x-iy)^k\right) &= ik\left(a_k(x+iy)^{k-1} + \overline{a_k}(x-iy)^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

On déduit les relations de Cauchy-Riemann $\partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v$. Donc

$$\det Jf(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ -\partial_y u(x,y) & \partial_x u(x,y) \end{vmatrix} = \partial_x u(x,y)^2 + \partial_y u(x,y)^2$$

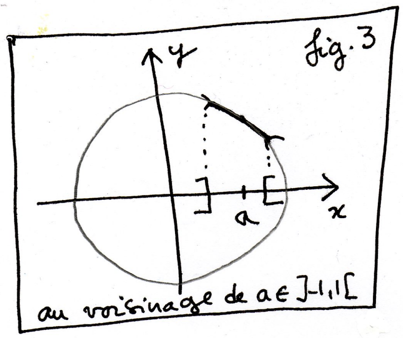
et $\det Jf(x,y) = 0$ si et seulement si $\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) = \partial_y u(x,y) = \partial_x v(x,y) = 0$. Il s'agit donc des points critiques de f.

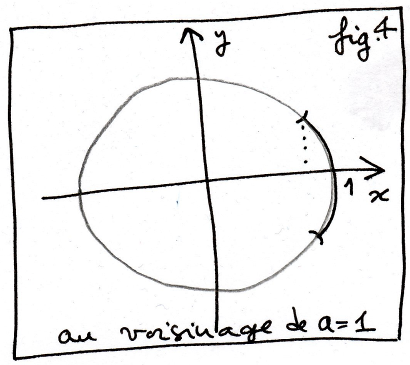
• Le problème maintenant, est de savoir parmi ces points critiques lesquels seront des points d'inversion locale et lesquels ne le seront pas. En fait aucun, mais c'est assez délicat. La méthode est la suivante : soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P'(a) = 0$, quitte à remplacer P par $P - P(a)$ on peut supposer que $P(a) = P'(a) = 0$: a est donc une racine multiple de P. Il est aussi facile de vérifier que les polynômes de la forme $P(z) = z^d$ avec $d \geq 2$ ne sont inversibles sur aucun voisinage de l'origine car par exemple pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta_1 \neq \eta_2$ deux racines d-ièmes distinctes de l'unité : $P(\varepsilon^{1/d}\eta_1) = P(\varepsilon^{1/d}\eta_2) = \varepsilon$. L'idée consiste alors à se ramener à une telle situation si a est une racine multiple de P : pour cela, on commence par observer que quitte à remplacer z par $z + a$ on peut supposer $a = 0$ et P de la forme $P(z) = z^d Q(z)$ avec $d \geq 2$ et $Q(0) \neq 0$ et même $Q(0) = 1$ quitte à multiplier P par un scalaire convenable. Sous cette forme, on peut alors définir $Q^{1/d}$ une racine d-ième de Q sur un voisinage V suffisament petit de $z = 0$. L'application $\varphi : z \mapsto zQ^{1/d}(z)$ est de classe C^1 sur V et on peut vérifier que sa différentielle à l'origine est inversible. On peut lui appliquer le théorème d'inversion locale : il existe U, V deux voisinages de l'origine tels que φ soit un difféomorphisme de U sur $V = \varphi(U)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que (voir la figure) $\overline{B(0,r)} \subset \varphi(B(0,\varepsilon)) \subset V$ ($\varphi(0) = 0$ et φ est ouverte) ; soient $q_1 \neq q_2$ deux racines q-ièmes de l'unité alors $z_1 := \varphi^{-1}(q_1 r) \neq z_2 := \varphi^{-1}(q_2 r)$, $z_1, z_2 \in B(0,\varepsilon)$ et $P(z_1) = r^d = P(z_2)$: P n'est donc inversible sur aucun voisinage de l'origine. C.Q.F.D. $\square$



2. Le Théorème des Fonctions Implicites

2.1. Le théorème des fonctions implicites pour $n = 2$ et $p = 1$. Moralement le théorème des fonctions implicites nous permet de dire à quel moment une courbe définie par une équation du type $f(x, y) = 0$ est localement le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$ où la régularité de φ est liée à celle de f. Par exemple considérons la courbe définie par $f(x, y) = 0$ où $f(x, y) = x^2+y^2-1$ (on reconnait bien entendu le cercle unité).





et soit $a \in]-1, 1[$, il est clair qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour x dans l'intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ la courbe $f(x, y) = 0$ coïncide avec le graphe de $\varphi(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$ (figure 3). Cela est lié au fait que la tangente à la courbe en $(a, b = \sqrt{1 - a^2})$ n'est pas verticale, c'est à dire $\partial_y f(a, b) = 2b \neq 0$. Au contraire, en $(1, 0)$ (figure 4) où la tangente à la courbe est verticale, la courbe n'est jamais le graphe d'une fonction du type $y = \varphi(x)$ Il s'agit là d'un cas particulier du théorème qui suit :

Théorème 3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1. Soit $(a, b) \in \Omega$ tel que*

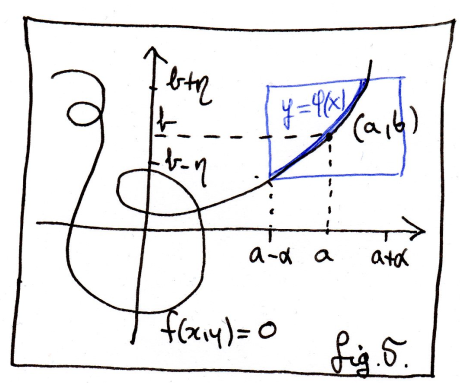
$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Alors il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que

1) $\forall\, x \in]a-\alpha, a+\alpha[$ l'équation implicite (en y) $f(x, y) = 0$ admet une solution (voir figure 5) unique $y = \varphi(x) \in]b - \beta, b + \beta[$.

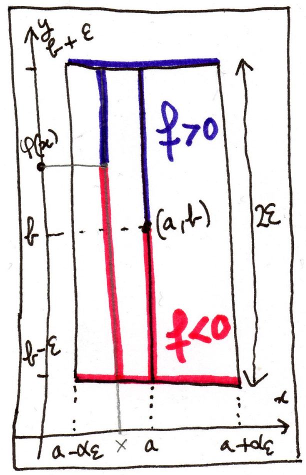
2) φ est continument dérivable sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ et on a

$$\varphi'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}.$$



Remarque 2. *Observez bien que la condition de non-nullité de la dérivée partielle concerne la dérivée partielle par rapport à la variable (ici y) que l'on veut expliciter en fonction des autres.*

Démonstration : • Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ (disons > 0 sans perdre de généralité) et puisque f est de classe C^1 sur Ω, il existe $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ tels que $[a-\alpha_1, a+\alpha_1] \times [b-\beta_1, b+\beta_1] \subset \Omega$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in [a-\alpha_1, a+\alpha_1] \times [b-\beta_1, b+\beta_1]$. Par conséquent $[b-\beta_1, b+\beta_1] \ni y \mapsto f(a,y)$ est strictement croissante et comme $f(a,b) = 0$: $\forall\ 0 < \varepsilon < \beta_1$: $f(a, b-\varepsilon) < 0 < f(a, b+\varepsilon)$. Soit $0 < \varepsilon < \beta_1$. f étant continue sur Ω, il existe $0 < \alpha_\varepsilon < \alpha_1$ tel que $\forall x \in [a-\alpha_\varepsilon, a+\alpha_\varepsilon]$: $f(x, b-\varepsilon) < 0$ et $f(x, b+\varepsilon) > 0$. (faites un dessin : par continuité $f(a, b-\varepsilon) < 0$ implique que $f < 0$ sur un voisinage de $(a, b-\varepsilon)$ donc...). Fixons alors x dans $[a-\alpha_\varepsilon, a+\alpha_\varepsilon]$; puisque $y \mapsto f(x,y)$ croit sur $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $y_x \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ que l'on va noter $\varphi(x)$ tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$. φ est bien définie sur $[a-\alpha_\varepsilon, a+\alpha_\varepsilon]$.



• On vient de montrer (si l'on observe bien la démonstration...) que pour tout $0 < \varepsilon < \beta_1$ existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que $|x-a| < \alpha_\varepsilon$ implique $|\varphi(x) - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$ (cette dernière inégalité résulte du fait que $y_x = \varphi(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$. φ est donc continue au point a. Les hypothèses précédentes étant aussi vérifiées pour tout $(x,y) \in [a-\alpha, a+\alpha] \times [b-\beta, b+\beta]$ le même raisonnement prouve en fait que φ est continue sur tout $[a-\alpha, a+\alpha]$.
• Comme f est de classe C^1 on peut écrire [2]

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (h+k)\varepsilon(h,k)$$

(où $\varepsilon(h,k) \to 0$ lorsque $(h,k) \to (0,0)$). Posons alors $k = \varphi(a+h) - b$, on a donc $f(a+h, b+k) = f(a+h, \varphi(a+h)) = 0$ vu la définition de φ et la formule précédente se réduit à $h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (h+k)\varepsilon(h,k) = 0$ soit

$$k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \varepsilon(h,k)\right) = -h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \varepsilon(h,k)\right).$$

On choisit alors h assez petit pour que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \varepsilon(h,k) \neq 0$ (ce qui ne pose aucun problème puisque $\partial_y f(a,b) \neq 0$ et est continue), donc

$$\frac{k}{h} = \frac{\varphi(a+h) - b}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \varepsilon(h,k)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \varepsilon(h,k)}.$$

2. Avec Taylor-Lagrange : $f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = h\partial_x f(a+\theta h, b+k)$ avec $0 < \theta < 1$ et par continuité des dérivées partielles on a aussi $f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = h\partial_x f(a+\theta h, b+k) = h\partial_x f(a,b) + h\varepsilon_1(h,k)$. On fait de même avec $f(a, b+k) - f(a,b)$ et on somme les deux formules.

Il ne reste plus qu'à faire tendre h vers 0, il en est alors de même pour k : φ est bien dérivable en a et

$$\varphi'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h)-b}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}.$$

• Il reste à prouver que φ' est continue en a : nous savons déjà que φ est dérivable sur un voisinage I_a de a avec

$$\varphi'(c) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(c,\varphi(c))}{\frac{\partial f}{\partial x}(c,\varphi(c))}, \quad \forall\, c \in I_a.$$

f étant de classe C^1 sur Ω et φ continue sur I_a (car dérivable..) il est clair que le second membre de l'égalité ci-dessus est une fonction continue de c. ■

2.2. Le théorème des fonctions implicites (cas général).

Théorème 4. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. On suppose qu'en $(a,b) \in \Omega$ $(a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^p)$:*

$$f(a,b) = 0, \quad \det J_y f(a,b) \neq 0.$$

Alors il existe des voisinages $\mathscr{U}$ de a et $\mathscr{V}$ de b avec $\mathscr{U} \times \mathscr{V} \subset \Omega$, une unique fonction $\Phi : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ de classe C^1 telle que

$$f(x,\Phi(x)) = 0, \quad \forall\, x \in \mathscr{U},$$

et de plus

$$J\Phi(x) = -\left(J_y f(x,\Phi(x))\right)^{-1}\left(J_x f(x,\Phi(x))\right).$$

Avec les notations suivantes : $x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_p)$, $f = (f_1,\dots,f_p)$ et $J_x f$ est la matrice jacobienne de $x \mapsto f(x,y)$, $J_y f$ est la matrice jacobienne de $y \mapsto f(x,y)$ (cette dernière sera donc carrée vu les hypothèses sur f) i.e.

$$J_x f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_p & \dots & \partial_{x_n} f_p \end{pmatrix}, \quad J_y f = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1 & \dots & \partial_{y_p} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} f_p & \dots & \partial_{y_p} f_p \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Admise, elle repose sur le théorème d'inversion locale. ■

Exercice 3. *On considère la fonction $f :]-\infty,1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3+y^3-1$.*

(1) *Avec le théorème des fonctions implicites, montrer que pour tout $(x_0,y_0) \in]-\infty,1[\times\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0,y_0)=0$ il existe un voisinage U de x_0 et une une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ ce classe C^∞ vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$ et $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$.*

(2) *Montrer qu'en fait $f(x,y) = 0$ définit implitement une unique fonction $\varphi :]-\infty,1[\to \mathbb{R}$. Vérifier que φ est de classe C^3 et vérifie : $\varphi^2\varphi''' + 6\varphi\varphi'\varphi'' + 2(\varphi')^3 + 2 = 0$.*

(1) Soit donc $(x_0,y_0) \in]-\infty,1[\times\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0,y_0) = 0$. $\partial_y f(x_0,y_0) = 3y_0^2 = 0$ implique $y_0 = 0$ mais alors $f(x_0,y_0) = 0 = x_0^3 + y_0^3 - 1 = x_0^3 - 1$ soit $x_0 = 1$ ce qui est exclut vu les hypothèses sur x. On peut donc appliquer les théorème des fonctions implicites qui assure qu'il existe un voisinage U de x_0 et une une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ ce classe C^∞ vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$ et $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$.

(2) $x < -1$ et $f(x,y) = x^3 + y^3 - 1 = 0$ impliquent $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ et l'unicité de φ dans le théorème des fonctions implicites implique que $\varphi(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ sur $]-\infty,-1[$; en particulier, φ est bien de classe C^3 sur $]-\infty,-1[$. Enfin, comme pour tout $x < -1$: $f(x,\varphi(x)) = x^3 - \varphi^3(x) - 1 = 0$, si on dérive trois fois cette dernière expression on tombe sur la formule désirée : $\varphi^2\varphi''' + 6\varphi\varphi'\varphi'' + 2(\varphi')^3 + 2 = 0$ (attention : toutes les autres solutions (dérivation directe de la forme explicite ou avec les formules du théorème des fonctions implicites) sont maladroites et à éviter vu la complexité des calculs...). □

Exercice 4. *Après avoir justifié son existence, déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction implicite $x \mapsto \varphi(x) = y$ définie (implicitement) par*

$$\varphi(0) = 1, \qquad f(x,y) = 1 - ye^x + xe^y.$$

On a $f(0,1) = 0$ et $\partial_y f(0,1) = -1 \neq 0$. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe un voisinage U de l'origine, une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$. Pour déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction implicite $\varphi(x) = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$, le plus simple est de composer les développement limités dans $f(x,\varphi(x)) = 1 - \varphi(x)e^x + xe^{\varphi(x)} \equiv 0,\ x \in U$. On regroupe les termes, on résout le système linéaire 3×3 d'inconnues a, b, c et on trouve (sauf erreur...) : $\varphi(x) = 1 + (e-1)x + \left((e-1)^2 - 1/2\right)x^2 + o(x^3)$. □

Exercice 5. *Soit $f(x,y,z) = z^4 - x^4 - 2z^2 + x^2 - y^2 - 1$.*

(1) *Montrer que pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ l'équation $f(x_0,y_0,z_0) = 0$ admet une unique solution $z_0 = \psi(x_0,y_0) > 0$.*

(2) *Montrer que ψ est C^∞ sur un voisinage de (x,y) et calculer ses dérivées partielles en $(2,2)$.*

(1) • Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = 0$ équivaut à $z^4 - x^4 - 2z^2 + x^2 - y^2 - 1$ ou encore en posant $u = z^2 \geq 0$: $u^4 - x^4 - 2u^2 + x^2 - y^2 - 1$. C'est une équation du second dégré en u, sont discriminant vaut $\Delta = (x-1/2)^2 + y^2 + 3/4 \geq 3/4 > 0$. Il existe donc deux solutions dont une strictement positive : $u = 1 + \sqrt{(x-1/2)^2 + y^2 + 3/4}$ soit

$$z = \psi(x,y) = \left(1 + \sqrt{(x-1/2)^2 + y^2 + 3/4}\right)^{1/2} > 1.$$

• L'objectif du paragraphe étant le théorème des fonctions implicites, la réponse précédente est trop satisfaisante puisque l'on a déterminé explicitement la fonction implicite ψ sans même invoquer le théorème. Pour rester dans l'esprit mieux vaut procéder comme suit : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, considérons la fonction $g(z) := z^4 - x^4 - 2z^2 + x^2 - y^2 - 1$ où $z \geq 0$. $g(0) = -x^4 + x^2 - y^2 - 1$ et comme $x \geq 1,\ y \in \mathbb{R}$ implique $-x^4 + x^2 \leq 0$ et $-y^2 - 1 < 0$ et $x < 1,\ y \in \mathbb{R}$: $x^2 - 1 < 0$ et $-x^4 - y^2 < 0$ on aura toujours $g(0) < 0$. Mais alors comme $g'(z) = 4z(z^2 - 1)$: g est donc décroissante sur $[0,1]$ puis croissante vers $+\infty$. Nous sommes donc assurés pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de l'existence d'un unique $z > 1$ vérifiant $g(z) = f(x,y,z) = 0$. C.Q.F.D.

(2) (ψ trouvée dans la première solution de la question précédente est visiblement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et repond au problème) Avec la seconde solution, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ il existe un unique $z=\psi(x,y)>1$ vérifiant $f(x,y,z)=0$ et comme $\partial_z(x,y)=4z(z^2-1)\neq 0$ puisque $z>1$, le théorème des fonctions implicites appliqué au voisinage de chaque point $(x,y,\psi(x,y))$ assure que $\psi\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Enfin comme nous avons

$$\partial_x\psi(x,y)=-\frac{\partial_x f(x,y,\psi(x,y))}{\partial_z f(x,y,\psi(x,y)},$$
$$\partial_y\psi(x,y)=-\frac{\partial_y f(x,y,\psi(x,y))}{\partial_z f(x,y,\psi(x,y)},$$

il est facile d'en déduire $\partial_x\psi(2,2)$ et $\partial_x\psi(2,2)$. □

3. Extrema Liés

Dans l'avant dernier chapitre on a étudié les extrema d'une fonction $x \mapsto f(x)$ différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ variait donc **librement** dans l'ouvert Ω. Mais de nombreux problèmes conduisent à rechercher les extremums de $x \mapsto f(x)$ où les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont **liées** par certaines relations.

Théorème 5. ***(théorème des extrema liés)****. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. soit K une partie de Ω définie par les n (avec $n < d$) relations :*

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= 0, \\ &\ldots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= 0, \end{aligned}$$

où les g_i sont de classe C^1 sur Ω. Si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K$ est un extremum de f sur K et si les formes linéaires $Dg_1(a), Dg_2(a), \ldots, Dg_n(a)$ sont indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\partial_{x_j} f(a) = \lambda_1 \partial_{x_j} g_1(a) + \lambda_2 \partial_{x_j} g_2(a) + \cdots + \lambda_n \partial_{x_j} g_n(a), \quad \forall\, 1 \leq j \leq d.$$

i.e.

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \lambda_2 \nabla g_2(a) + \cdots + \lambda_n \nabla g_n(a).$$

Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés les ***multiplicateurs de Lagrange****.*

Démonstration pour $d = 3$ et $n = 1$: Soit $a = (a_1, a_2, a_3) \in K = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ g(X) = 0\}$ l'hypothèse « les formes linéaires $Dg_1(a), Dg_2(a), \ldots, Dg_n(a)$ sont indépendantes » équivaut, si $n = 1$ à $\nabla g(a) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Par conséquent, une au moins des dérivées partielles n'est pas nulle, disons par exemple $\partial_z g(a) \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à g en a : il existe U un voisinage de (a_1, a_2) dans $\mathbb{R}^2$, une application $\varphi \ : \ U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $a_3 = \varphi(a_1, a_2)$ et $\forall\, (x, y) \in U \ : \ g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$. Supposons alors que f/K présente au point a un extremum, vu ce qui précède, l'application $F \ : U \ni (x, y) \mapsto F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ présente au point (a_1, a_2) un extremum qui est (car $(a_1, a_2) \in U$ **ouvert**) maintenant un point critique de F i.e. $\partial_x F(a) = \partial_y F(a) = 0$. Soit

$$\begin{cases} \partial_x F(a) &= \partial_x f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) + \partial_x \varphi(a_1, a_2) \partial_z f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) = 0, \\ \partial_y F(a) &= \partial_y f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) + \partial_y \varphi(a_1, a_2) \partial_z f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) = 0 \end{cases}$$

Mais avec le théorème des fonctions implicites nous avons aussi

$$\partial_x \varphi(a_1, a_2) = -\frac{\partial_x g(a)}{\partial_z g(a)}, \quad \partial_y \varphi(a_1, a_2) = -\frac{\partial_y g(a)}{\partial_z g(a)}.$$

soit

$$\begin{cases} \partial_x f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) - \frac{\partial_x g(a)}{\partial_z g(a)} \partial_z f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) &= 0, \\ \partial_y f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) - \frac{\partial_y g(a)}{\partial_z g(a)} \partial_z f(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) &= 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\frac{\partial_x f(a)}{\partial_x g(a)} = \frac{\partial_y f(a)}{\partial_y g(a)} = \frac{\partial_z f(a)}{\partial_z g(a)}$$

si $\partial_x g(a)$ et $\partial_y g(a)$ sont non nulles. Si par exemple $\partial_x g(a) = 0$, alors $\partial_x f(a) = 0$... Dans tous les cas tout cela équivaut bien à dire que les formes linéaire $Df(a)$ et $Dg(a)$ sont proportionnelles. ■

Exercice 6. *En utilisant la méthode de Lagrange, trouver les extrema globaux de la fonction* $f(x,y) = xy$ *sur l'ellipse* $\mathscr{E} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - xy + y^2 = 1\}$.

Solution : Soit $g \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1$. Alors, $\mathscr{E} = \{g = 0\}$, c'est un compact : f continue est donc bornée et atteindra ses bornes. Pour appliquer la méthode de Lagrange on commence par observer que $\nabla g(x,y) = (2x - y, 2y - x) \neq (0,0)$ sur $\mathscr{E}$ (en fait partout sauf en $(0,0)$). On peut donc appliquer le critère de Lagrange : pour tout extremum $(x,y) \in \mathscr{E}$ de f il existera $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ soit $y = \lambda(2x - y)$ et $x = \lambda(2y - x)$. λ est différent de 0 car $\lambda = 0$ implique $x = y = 0$ et $(0,0) \notin \mathscr{E}$. En multipliant la première équation par x et la seconde par y on a $\lambda(2x^2 - xy) = xy = \lambda(2y^2 - xy)$. Comme $\lambda \neq 0$, on peut simplifier par λ et on a $2x^2 - xy = 2y^2 - xy$ soit $x = \pm y$. $x = y$ implique $1 = x^2 - xy + y^2 = x^2$ soit $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$. Pour de tels points $f(x,y) = 1$. Si $x = -y$: $1 = x^2 - xy + y^2 = 1$ donne $x = \pm\sqrt{3}/3$ et $y = \mp\sqrt{3}/3$. Pour de tels points $f(x,y) = -1/3$. Les premiers sont donc des max globaux et les seconds des min globaux. ■

Exercice 7. *Déterminer les extrema de* $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ *sur* $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *et préciser leur nature.*

Solution : f continue sur le compact Σ possède un minimum et un maximum globaux atteints. On a $\nabla f(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$ et $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. $\nabla g(x,y,z)$ n'est jamais nul sur Σ donc par la méthode de Lagrange il faut trouver les $(x,y,z) \in \Sigma$ pour lesquels la matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x,y,z) \\ \nabla g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

soit de rang 1. Les trois mineurs de rang 2 doivent s'annuler :

$$\begin{cases} xy(x-y) & = 0 \\ xz(x-z) & = 0 \\ yz(y-z) & = 0. \end{cases}$$

$xyz \neq 0$ implique $x = y = z = \pm\sqrt{3}/3$ soit $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3), (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$. Si une des coordonnées est nulle, par exemple x (le même raisonnement marchera pour x et z puisque f est g sont invariantes par permutation des coordonnées). Si $x = 0$ il reste $yz(y-z) = 0$ soit $y = 0$ et $z = \pm 1$ ou $z = 0, y = \pm 1$ ou bien $xy \neq 0$ qui implique $y = z = \pm\sqrt{2}/2$. On a donc les vecteurs suspects $(0,0,\pm 1), (0, \pm 1, 0), (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ et leurs collègues déduits des précédents par permutation des coordonnées. En résumé :

- En les points de la forme $(0,0,\pm 1), (0,\pm 1, 0)$ (et analogues) f prends les valeurs ± 1.
- En les points de la forme $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ (et analogues) f prends les valeurs $\pm\sqrt{2}/2$.
- En les points de la forme $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3), (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$, f prends les valeurs $\pm\sqrt{3}/3$.

On peut donc déjà dire que $\sup_\Sigma f = 1$ et $\inf_\Sigma f = -1$ et que ces extrema globaux sont atteints en les points $(0,0,\pm1),(0,\pm1,0)$ et $(\pm1,0,0,)$. Pour les deux autres familles il s'agit d'extrema locaux ou de points selle et une étude plus détaillée s'impose à leur voisinage :

• Pour la seconde famille il s'agit de point selles, en effet au voisinage de par exemple $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0)$ posons $x=\sqrt{2}/2+h, y=\sqrt{2}/2+k, z=z$. $(\sqrt{2}/2+h)^2+(\sqrt{2}/2+k)^2+z^2=1$ implique $h+k=-\sqrt{2}/2\,(h^2+k^2+z^2)$ soit

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}/2+h,\sqrt{2}/2+k,z) &= (\sqrt{2}/2+h)^3+(\sqrt{2}/2+k)^3+z^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3(h+k)}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}(h^2+k^2)+z^2+o(h^2+k^2+z^2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}(h^2+k^2)-\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}-1\right)z^2+z^2+o(h^2+k^2+z^2). \end{aligned}$$

La partie quadratique de signature $(2,1)$ n'est pas de signe constant pour (h,k,z) au voisinage de $(0,0,0)$ et surtout même sur Σ car on a un min local sur $\Sigma\cap\{z=0\}$ alors qu'on a un max local sur $\Sigma\cap\{x=y\}$: on est donc en présence d'un point selle aussi sur Σ.

• Pour la troisième famille étudions f sur Σ au voisinage de $(\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$. On pose donc $x=\sqrt{3}/3+h, y=\sqrt{3}/3+k, z=\sqrt{3}/3+l$. Comme pour la seconde famille, les paramètres h,k,l sont ici liés par $h+k+l=-\sqrt{3}/2(h^2+k^2+l^2)$ d'ou :

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}/3+h,\sqrt{3}/3+k,\sqrt{3}/3+l) &= \sqrt{3}/3+(h+k+l)+\sqrt{3}(h^2+k^2+l^2)+o(h^2+k^2+l^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}(h^2+k^2+l^2)+o(h^2+k^2+l^2) \end{aligned}$$

On est donc en présence d'un minimum local. ■

Exercice 8. *Quelle est la distance de l'origine à l'hyperbole* $x^2+8xy+7y^2=225$ *?*

Solution : C'est bien un problème d'extrema liés : il s'agit de rechercher le minimum de $f(x,y)=x^2+y^2$ (c'est le carré de la distance entre l'origine et (x,y)...) sur $\Sigma := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \ g(x,y):=x^2+8xy+7y^2-225=0\}$. Comme $\nabla g(x,y)=(2x+8y,14y+8x)=(0,0)$ ssi $(x,y)=(0,0)\notin\Sigma$ on peut appliquer la méthode de Lagrange :

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 2x &= \lambda(2x+8y) \\ 2y &= \lambda(14y+8x) \end{cases}$$

soit $(1-\lambda)x+4y=0$ et $4x+(7-\lambda)y=0$. Comme $(x,y)\neq(0,0)$ on doit avoir

$$\exists\,\lambda\in\mathbb{R}^\star \ : \ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-8\lambda-9=(\lambda+1)(\lambda-9)=0$$

donc $\lambda=-1$ ou $\lambda=9$. $\lambda=1$ implique $y=0$ puis $x=0$ ce qui est exclut. $\lambda=9$ implique $y=2x$ puis par substitution dans $x^2+8xy+7y^2=225$: $45x^2=225$ soit $x^2=5$ puis $y^2=20$ i.e. $x^2+y^2=25$: la distance de l'origine à Σ est donc égale à 5. Elle est atteinte en les points $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ et $(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$.
On pouvait aussi rechercher les points qui annulent le déterminant de la matrice 2×2 : $\begin{pmatrix}\nabla f(x,y)\\ \nabla g(x,y)\end{pmatrix}$. On trouve $(x+3y/4)^2 = 25y^2/16$ soit $y=2x$ ou $y=-x/2$. $y=2x$ et

$x^2+8xy+7y^2=225$ donnent $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ et $(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$ et $y=-x/2$ conduit à une impasse. On retombe bien sur les résultats précédents. ■

Exercice 9. *Soit $a>0$. Etudier les extrema de $f(x,y,z)=x\log(x)+y\log(y)+z\log(z)$ sur $\Sigma_a:=\{(x,y,z)\in((R_+^\star)^3\ :\ x+y+z=3a\}$.*

Solution : $f\in\mathscr{C}^1(((R_+^\star)^3)$ et $\Sigma_a:=\{(x,y,z)\in((R_+^\star)^3\ :\ g(x,y,z):=x+y+z=3a\}$. comme $\nabla g(x,y,z)=(1,1,1)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ on peut appliquer les extrema liés : la proportionnalité des gradients équivaut a

$$\frac{1+\log(x)}{1}=\frac{1+\log(y)}{1}=\frac{1+\log(z)}{1}$$

ce qui puisque $x+y+z=3a$ donne l'unique suspect $(x,y,z)=(a,a,a)$. Attention, ici Σ n'est pas compact : f n'a donc aucune raison qu'y être borné et, à fortiori d'y atteindre ses bornes. Pour déterminer la nature de ce point, il faut faire un développement limité au voisinage de (a,a,a) :

$$\begin{aligned} f(a+h,a+k,a+l) &= (a+h)\log(a+h)+(a+k)\log(a+k)+(a+l)\log(a+l)\\ &= (a+h)\left(\log(a)+\log(1+h/a)\right)+(a+k)\left(\log(a)+\log(1+k/a)\right)\\ &\qquad +(a+l)\left(\log(a)+\log(1+l/a)\right)\\ &= 3a\log(a)+(h+k+l)(1+\log(a))+\frac{h^2+k^2+l^2}{2a}+o(h^2+k^2+l^2). \end{aligned}$$

Donc, comme sur Σ $x+y+z=3a=h+k+l$ il reste :

$$f(a+h,a+k,a+l)=3a\log(a)+\frac{h^2+k^2+l^2}{2a}+o(h^2+k^2+l^2)$$

(a,a,a) est donc un minimum. Seulement local à priori. ■

Exercice 10. *Soient $\alpha_1>0,\dots,\alpha_n>0$ de somme 1, $f(x_1,\dots,x_n)=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in F:=\mathbb{R}_+\times\dots\times\mathbb{R}_+$, $g(x_1,\dots,x_n):=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n-1$ et enfin $K:=\{(x_1,\dots,x_n)\in F\ :\ g(x_1,\dots,x_n)=0\}$.*

1. *Montrer que K est compact dans $\mathbb{R}^n$.*
2. *Montrer que f atteint sa borne sup sur K en au moins un point $a\in K$ tel que $f(a)>0$, puis calculer a.*
3. *Montrer que $f(tx)=tf(x)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. En déduire avec les question précédentes que*
$$x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\leq\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n,$$
pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+\times\dots\times\mathbb{R}_+$, $\alpha_1>0,\dots,\alpha_n>0$ de somme 1 (un argument de convexité eut été plus rapide...). Etudier le/les cas d'égalité
4. *En déduire qu'à surface donnée, parmi les parallélipipèdes c'est le cube qui possède le plus grand volume.*
5. *En déduire aussi la très fameuse inégalité arithmético-géométrique :*
$$(x_1x_2\dots x_n)^{1/n}\leq\frac{x_1+\dots+x_n}{n},\quad\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+\times\dots\times\mathbb{R}_+,$$
avec son cas d'égalité.

Solution :

(1) K fermé borné est compact dans $\mathbb{R}^n$. f étant continue sur K elle atteint donc son maximum en au moins un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K$. En outre, comme f prends clairement des valeurs > 0, on aura $f(a) > 0$, en particulier $a_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

(2) Les fonction f et g sont de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n\}$ où la différentielle $dg(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ne s'annule jamais. On peut donc appliquer le théorème des extrema liés sur cet ouvert (bien remarquer que f de classe C^1 sur Ω est seulement continue sur $\overline{\Omega}$) : une condition nécessaire pour que f présente au point a un extremum sur $K \cap \Omega$ est qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $Df(a) = \lambda Dg(a)$. Soit

$$\forall\, 1 \leq i \leq n \ : \quad \partial_{x_i} f(a) = \alpha_i \frac{f(a)}{a_i} = \lambda \partial_{x_i} g(a) = \lambda \alpha_i.$$

Soit $f(a) = \lambda a_1 = \cdots = \lambda a_n$ et $f(a) > 0$ et $g(a) = 0$ donnent finalement $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Ce point étant unique et étant assurés de l'existence d'un maximum $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est forcément le point recherché :

$$\forall\, x \in K \ : \quad f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \sup_{x \in K} f(x) = f(a) = 1.$$

Observez que l'inégalité est stricte pour $x \neq a$.

(3) Pour le cas général, i.e. lorsque la somme $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ est seulement positive, on remplace $x = (x_1, \dots, x_n)$ par $tx = (tx_1, \dots, tx_n)$ où $t = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)^{-1}$. On se retrouve alors dans la situation précédente et $f(tx) \leq 1$. Maintenant il suffit d'observer que f est homogène de degré 1 : $f(tx) = tf(x)$ ce qui fournit exactement l'inégalité désirée lorsque $t > 0$, on la prolonge à $t = 0$ par continuité de f sur $\overline{\Omega}$:

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+$, $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ de somme 1. Enfin, on aura égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

(4) Notons x, y, z les les longueurs des trois cotés de la boite. Son volume est $V = xyz$ et sa surface $S = 2(xy + xz + yz)$.Il est inutile de revoir ici un problème d'extremum lié et il suffit de bien appliquer la première question avec $n = 3$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$ et $X = (1/x, 1/y, 1/z)$ soit

$$V^{-1/3} = \left(\frac{1}{xyz}\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{S}{6V}.$$

Donc $S \geq 6V^{2/3}$ avec égalité si, et seulement si $x = y = z$. L'emballage le plus économique correspond donc à la boite cubique.

(5) Si on choisit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1/n$ on tombe sur l'inégalité arithmético-géométrique et son cas d'égalité. ■

Exercice 11. *Soit* $f\ :\ (\mathbb{R}_+)^3 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{(x+y+z)^2}, & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $(\mathbb{R}_+^\star)^3$ *et continue sur* $(\mathbb{R}_+)^3$*. Soit* $a > 0$*, étudier les extrémas de* f *sur* $K := \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$.

Solution : • Que f soit C^1 (et même C^∞ sur $(\mathbb{R}_+^\star)^3$ est clair, sur le bord de cet ouvert f est identiquement nulle et en passant en sphériques on vérifie sans peine (il reste un r en haut) qu'elle est bien continue sur le fermé $(\mathbb{R}_+)^3$. Mieux : on applique l'inégalité arithmético-géométrique : $0 < x+y+z \leq 3(xyz)^{1/3}$ implique $(x+y+z)^{-2} \geq 9(xyz)^{-2/3}$ puis $0 \leq f(x,y,z) \leq (xyz)^{1/3}/9$.

• f est continue sur le compact K, elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Le minimum vaut clairement 0 et est atteint dès que l'une des variables est nulle. Pour le maximum, on va appliquer les extrema liés sur $K' = K \cap (\mathbb{R}_+^\star)^3$: notons $\phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2$,

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yz(y+z-x)}{(x+y+z)^3}, \frac{xz(x+z-y)}{(x+y+z)^3}, \frac{yx(y+x-z)}{(x+y+z)^3}\right), \quad \nabla\phi(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$

et $\nabla\phi(x,y,z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ car $(0,0,0) \notin K'$. Le maximum sera donc atteint en un point où $\nabla f(x,y,z)$ et $\nabla g(x,y,z)$ sont colinéaire. Il est équivalent de dire que la matrice $\begin{pmatrix} \nabla f(x,y,z) \\ \nabla g(x,y,z) \end{pmatrix}$ est de rang 1

$$\begin{aligned} y^2z(y+z-x) &= x^2z(x+z-y), \\ yz^2(y+z-x) &= x^2y(x+y-z), \\ xz^2(x+z-y) &= y^2z(x+y-z). \end{aligned}$$

(il s'agit des trois déterminants mineurs d'ordre 2 qui sont nuls). La première égalité peut s'écrire

$$z(y-x)(y+x) = (x-y)(x^2+y^2)$$

Si $x \neq y$ elle se déduit à $z(x+y) = -(x^2+y^2)$ ce qui est absurde puisque $x,y,z > 0$. Par conséquent $x = y$ et par symétrie $y = y = z = a/\sqrt{3}$. Nous avons trouvé qu'un seul point, vu les remarques préliminaires, c'est forcément le point où le maximum est atteint : $\sup_K f(x,y,z) = f(a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}) = a/9\sqrt{3}$. En particulier

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{(x+y+z)^2} \leq \frac{a}{9\sqrt{3}} \quad \iff \quad \frac{xyz}{(x+y+z)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

sur K. ■

Exercice 12. *Etudier les extrema de* $f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z)$ *sur* $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = \pi\}$.

Solution : • $g(x,y,z) = x+y+z-\pi$ est classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient $\nabla g(x,y,z) = (1,1,1)$ n'est jamais nul : on peut donc appliquer le théorème des extrema liés à f sur $\Sigma = \{g = 0\}$. f/Σ admettra un extrema en $a = (a_1, a_2, a_3)$ vérifiant $a_1 + a_2 + a_3 = \pi$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. Soit $\partial_x f(a) = \partial_y f(a) = \partial_z f(a) = 0$ i.e.

$$\cos(a_1)\sin(a_2)\sin(a_3) = \sin(a_1)\cos(a_2)\sin(a_3) = \sin(a_1)\sin(a_2)\cos(a_3).$$

– Si $\sin(a_1) = 0$, i.e. $a_1 \equiv 0(\pi)$, il reste $\cos(a_1)\sin(a_2)\sin(a_3) = \pm\sin(a_2)\sin(a_3) = 0$, soit par exemple $\sin(a_2) = 0$, soit $a_1 \equiv 0(\pi)$ puis finalement comme $a_1 + a_2 + a_3 = \pi$: $a_1 = a_2 = a_3 \equiv 0(\pi)$. Il est facile de voir que de tels points (par exemple $((\pi, \pi, -\pi)$ ne sont pas des points critiques pour f.

– Si maintenant $\sin(a_1)\sin(a_2)\sin(a_3) \neq 0$, alors les trois équations nous donnent

$$\sin(a_1 - a_2) = \sin(a_2 - a_3) = \sin(a_1 - a_3) = 0$$

soit $3a_1 = 3a_2 = 3a_3 \equiv 0(\pi)$. En mettant de coté les cas de la première étape et comme $a_1 + a_2 + a_3 = \pi$, on trouve facilement

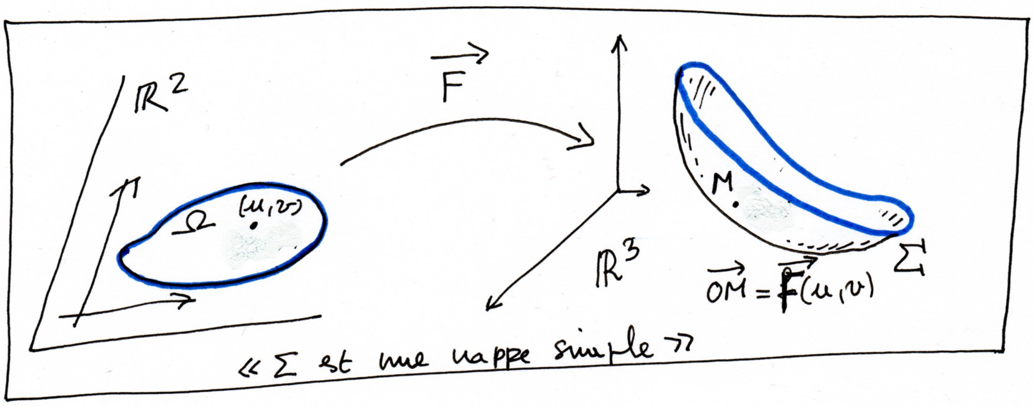
$$(\pi/3 + l_1\pi, \pi/3 + l_2\pi, \pi/3 - (l_1 + l_2)\pi) \quad \text{et} \quad (2\pi/3 + l_1\pi, 2\pi/3 + l_2\pi, 2\pi/3 - (l_1 + l_2 + 1)\pi).$$

Pour ces points f rends les valeurs $\pm 3\sqrt{3}/8$, il s'agit (f est continue périodique donc atteint ses bornes) des max et min globaux.

• ∎

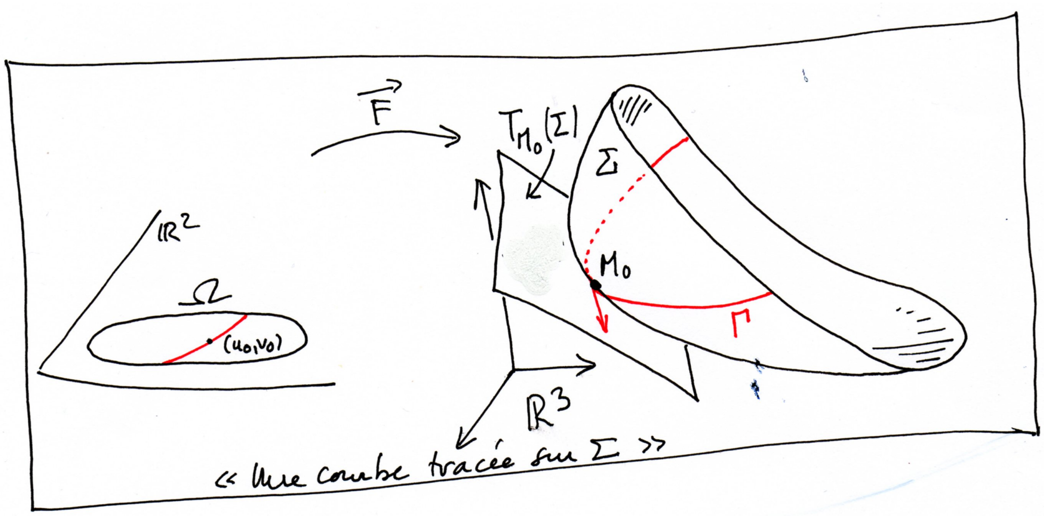
4. Le plan tangent à une surface

4.1. **Le plan tangent à une surface paramétrée.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert du plan limité par une courbe simple continue fermée (par exemple un disque, un pavé, un ouvert convexe). Une **nappe simple** est un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de points tels qu'il existe une bijection $\overrightarrow{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ telle que $\overrightarrow{F}(\Omega) = \Sigma$ ($\forall (u,v) \in \Omega \iff \exists M \in \Sigma : \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u,v)$). Si de plus $\overrightarrow{F} \in \mathscr{C}^1(\Omega, \Sigma)$, on parlera de **nappe simple de classe** C^1.



Une **surface** sera par définition une réunion de nappes simples. On dira qu'un point $M \in \Sigma$ d'une nappe simple de classe C^1 est un **point régulier** si les vecteurs $\partial_x \overrightarrow{F}(u,v)$ et $\partial_y \overrightarrow{F}(u,v)$ ($\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u,v)$) sont non nuls et non colinéaires. Autrement dit, si le gradient est rang maximal 2.

Soit $M_0 \in \Sigma$ un point régulier avec $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{F}(u_0, v_0)$. On considère une courbe dans Ω passant par (u_0, v_0) : $I \ni t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $\exists t_0 \in I$: $(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) = (u_0, v_0)$ avec $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{C}^1(I)$ à valeurs dans Ω et à dérivées non nulles (par exemple $\gamma_1' > 0, \gamma_2' > 0$). Posons pour $t \in I$: $\overrightarrow{OM_t} = \overrightarrow{F}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Alors, lorsque t décrit I, M_t décrit une courbe Γ de classe C^1 tracée sur Σ et passant par M_0.



Comme

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{F}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \partial_x \overrightarrow{F}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \partial_y \overrightarrow{F}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)$$

on en déduit que la tangente en M_0 à Γ est dans le plan engendré par les deux vecteurs $\partial_x \overrightarrow{F}(u_0, v_0)$ et $\partial_y \overrightarrow{F}(u_0, v_0)$. On a donc :

Théorème et définition : *Soit M_0 un point régulier d'une surface Σ. Les tangentes en M_0 à toutes les courbes de classe C^1 tracées sur Σ et passant par M_0 se trouvent dans un même plan passant par M_0 et engendré par les vecteurs $\partial_x \overrightarrow{F}(u_0, v_0)$ et $\partial_y \overrightarrow{F}(u_0, v_0)$. Ce plan souvent noté $T_{M_0}(\Sigma)$ est appelé le* ***plan tangent*** *à Σ au point M_0.*

L'équation du plan tangent est facile à obtenir car $M = (x, y, z) \in T_{M_0}(\Sigma)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\partial_x \overrightarrow{F}(u_0, v_0)$ et $\partial_y \overrightarrow{F}(u_0, v_0)$ sont colinéaires i.e.

$$\begin{vmatrix} x - f_1(u_0, v_0) & y - f_2(u_0, v_0) & z - f_3(u_0, v_0) \\ \partial_x f_1(u_0, v_0) & \partial_x f_2(u_0, v_0) & \partial_x f_3(u_0, v_0) \\ \partial_y f_1(u_0, v_0) & \partial_y f_2(u_0, v_0) & \partial_y f_3(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

où $F = (f_1, f_2, f_3)$. Il est aussi paramétré par

$$(u, v) \mapsto M_0 + (u - u_0)\partial_x \overrightarrow{F}(u_0, v_0) + (v - v_0)\partial_y \overrightarrow{F}(u_0, v_0).$$

C'est l'équation du plan tangent en M_0 à la surface Σ définie implicitement par $\Sigma = \overrightarrow{F}(\Omega)$.

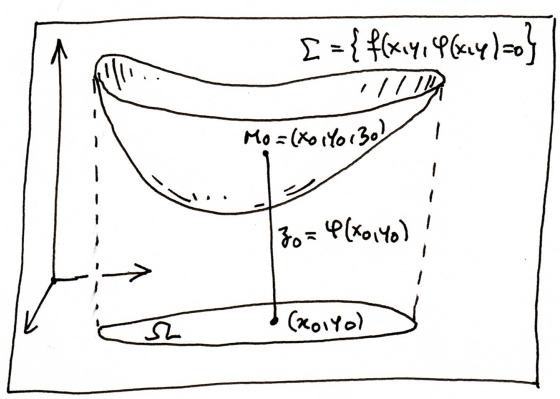
4.2. **Le plan tangent à une « surface » du type $\Sigma = \{f(x, y, z) = 0\}$.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. On considère la surface d'équation $\Sigma := \{ (x, y, z) \in U : f(x, y, z) = 0\}$. Un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ sera dit **régulier** si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq O_{\mathbb{R}^3}$, sinon on dira que M_0 est **singulier**.

Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ un point régulier. Supposons par exemple que $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; alors par le théorème des fonctions implicites il existe un ouvert $\Omega \subset U$ contenant (x_0, y_0), une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \Omega \ : \quad f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

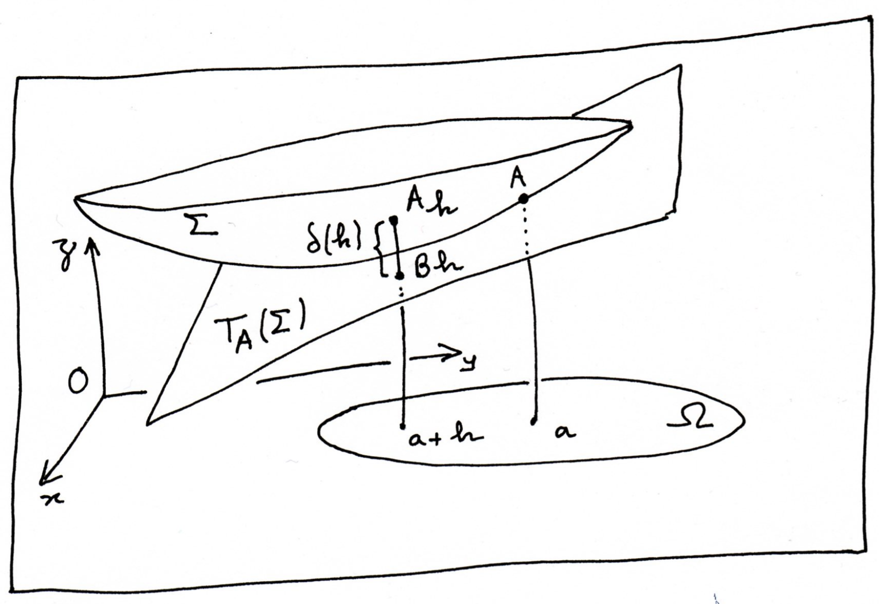
et

$$\partial_x \varphi(x, y) = -\left(\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))\right)^{-1} \cdot \partial_x f(x, y, \varphi(x, y)),$$
$$\partial_y \varphi(x, y) = -\left(\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))\right)^{-1} \cdot \partial_y f(x, y, \varphi(x, y)).$$



Si nous considérons l'application $\overrightarrow{F} : \Omega \to \Sigma$ définie par
$$\forall (x, y) \in \Omega : \quad \overrightarrow{F}(x, y) = (x, y, \varphi(x, y)),$$
nous en déduisons que Σ est bien une surface au sens du premier paragraphe (comme réunion des nappes réglées $\overrightarrow{F}(\Omega)$...). dont l'équation du plan tangent à M_0 est donnée par
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & \partial_x\varphi(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \partial_y\varphi(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$
soit $-\partial_x\varphi(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y\varphi(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$ qui devient avec les formules rappelées plus haut
$$(x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\partial_z f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$
C'est l'équation du plan tangent en M_0 à la surface Σ définie par $\Sigma = \{f(x, y, z) = 0\}$ et il faut observer que l'on y lit la propriété qui dit que le gradient en un point régulier est toujours normal à la surface.

4.3. **Position d'une surface cartésienne $\Sigma = \{z = f(x, y)\}$ par rapport à son plan tangent.** Soit donc Σ une surface et $A = (a_1, a_2, a_3) \in \Sigma$ un point régulier. On veut connaitre la position de Σ par rapport au plan tangent $T_A(\Sigma)$ au voisinage de a. Par le théorème des fonctions implicites on peut supposer qu'il existe un voisinage Ω de $a := (a_1, a_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant $(x, y, f(x, y)) \in \Sigma$ pour tout $(x, y) \in \Omega$. Dans un tel il n'est pas très difficile de connaitre la position de Σ par rapport au plan tangent $T_A(\Sigma)$ au voisinage de $A = (a, f(a))$: en effet, comme on le voit sur la figure, la position point de $A_h \in \Sigma$ de paramètre $a + h$ par rapport au plan tangent $T_A(\Sigma)$ est donnée par le signe $\delta(h)$ de la différence entre la hauteur de ce point et la hauteur du point B_h de même paramètre $a + h$ situé sur le plan tangent.



Les coordonnées de A_h sont $(a+h, f(a+h)$. Pour celle de B_h, l'équation du plan tangent est

$$(x-a_1)\partial_x f(a)+(y-a_1)\partial_y f(a)-(z-f(a))=0,$$

donc en remplacant (x,y) par $a+h=(a_1+h_1,a_2+h_2)$ on trouve $z=f(a)+Df(a)h$ et finalement

$$\delta(h)=f(a+h)-(f(a)+Df(a)h)=\frac{D^2f(a)(h,h)}{2}+o(\|h\|^2).$$

Ainsi, (comme pour les extrema) si la signature de la forme quadratique $D^2f(a)$ est $(+,+)$ la surface sera au dessus du plan tangent, si c'est $(-,-)$ ce sera au dessous, si c'est $(+,-)$ la surface traverse le plan tangent au voisinage de A et bien entendu on ne peut rien dire si la forme est dégénérée (voir l'exercice 13 ci-dessous).

4.4. **Quelques exercices.**

Exercice 13. *On considère la surface Σ définie par l'équation $x^4-x^3+xy-y^2-z=0$.*

(1) *Déterminer les plans tangents à Σ qui sont parallèle au plan O_{xy}.*
(2) *Au voisinage des précédents points, étudier la position du plan tangent par rapport à la surface Σ.*
(3) *Etudier la position relative globale entre Σ et le plan O_{xy}.*

Solution :

(1) $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ f(x,y,z)=x^4-x^3+xy-y^2-z=0\}$. Comme

$$\nabla f(x,y,z)=(4x^3-3x^2+y,x-2y,1)\neq 0_{\mathbb{R}^3},$$

la surface Σ est bien régulière chacun de ses points. Par conséquent, le cours nous assure qu'étant donné $M_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, le plan tangent $T_{M_0}(\Sigma)$ sera normal au gradient $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$. En particulier, $T_{M_0}(\Sigma)$ parallèle au plan O_{xy} équivaut à dire que $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ est parallèle à $(0,0,1)$ soit

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)\wedge(0,0,1)=0_{\mathbb{R}^3}\qquad\Longleftrightarrow\qquad 4x_0^3-3x_0^2+y_0=x_0-2y_0=0.$$

soit $x_0=2y_0$ et $32y_0^3-12y_0^2+y_0=y_0(32y_0^2-12y_0+1)=0$ soit $y_0=0,1/4$ ou $1/8$. On trouve finalement trois points $(0,0,0),(1/2,1/4,0)$ et $(1/4,1/8,1/256)$.

• On pouvait aussi observer qu'on avait une représentation paramètrique de Σ par $(x,y,z)=(u,v,g(u,u)=u^4-u^3+uv-v^2),\ (u,v)\in_m athbbR^2$.

(2) Nous savons que l'équation du plan tangent en M_0 est donnée par

$$(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\partial_z f(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Par conséquent, si $M=(x,y,z)\in T_{M_0}(\Sigma)$ la formule de Taylor nous donne

$$\begin{aligned}f(x,y,z)-f((x_0,y_0,z_0)&=(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\partial_z f(x_0,y_0,z_0)\\&+\frac12\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(M_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2}{\partial xy}f(M_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(M_0)(y-y_0)^2\right)+o(\|M_0M\|^2)\\&=\frac12\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(M_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2}{\partial xy}f(M_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(M_0)(y-y_0)^2\right)+o(\|M_0M\|^2).\end{aligned}$$

La position du plan tangent dépend donc de la signature de la forme quadratique hessienne en M_0. On étudie donc

$$rt - s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_0) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(M_0) - \frac{\partial^2}{\partial xy} f(M_0)^2 = -2(12x_0^2 - 6x_0) - 1 = -24x_0^2 + 12x_0 - 1.$$

Donc :

• En $(0,0,0)$ le plan tangent est confondu avec le plan O_{xy} et $rt - s^2 = -1 < 0$. On a donc un point selle (le plan tangent traverse la surface).

• En $(1/2, 1/4, 0)$, f est aussi nulle donc le plan tangent est encore confondu avec le plan O_{xy}. C'est encore un point selle car $rt - s^2 = -1 < 0$.

• Enfin en $(1/4, 1/8, 1/256)$ l'équation du plan tangent est $z = 1/256$. $rt - s^2 = 1/2 > 0$, la trace $r + s$ est négative le plan tangent est au dessus de la surface.

(3) La position du plan O_{xy} par rapport à la courbe est donnée par le signe de z. Or sur Σ : $z = x^4 - x^3 + xy - y^2$ et

$$x^4 - x^3 + xy - y^2 = x^4 - y^2 - x(x^2 - y) = (x^2 - y)(x^2 + y - x).$$

L'intersection de Σ avec le plan O_{xy} est donc la réunion des deux paraboles $y = x^2$ et $y = -x^2 + x$. ■

Exercice 14. *Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent en* $(1, 1, -1)$ *à la surface d'équation* $x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0$.

Solution : $\Sigma = \{f(x,y,z) = x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0\}$, l'équation du plan tangent est donc donnée par :

$$(x-1)\partial_x f(1,1,-1) + (y-1)\partial_y f(1,1,-1) + (z+1)\partial_z f(1,1,-1) = 0.$$

soit $5(x-1) + (y-1) - (z+1) = 5x + y - z - 7 = 0$. ■

Exercice 15. *On considère la surface* Σ *représentée paramétriquement par* $x = u + v^2, y = u^2 + v, z = uv$. *Montrer que le point associé aux paramètres* $(u, v) = (1, 1)$ *est régulier et déterminer l'équation cartésienne du plan tangent en ce point à la surface* Σ.

Solution : Il s'agit cette fois d'une surface Σ paramétrée par $\overrightarrow{F}(u,v) = (u + v^2, u^2 + v, uv)$. $M = \overrightarrow{F}(1,1) = (2,2,1)$ et on a $\partial_u \overrightarrow{F}(1,1) = (1,2,1)$, $\partial_v \overrightarrow{F}(1,1) = (2,1,1)$. Ces deux vecteurs sont clairement libres : le point $(2,2,1)$ est bien régulier. D'aprés le cours, le plan tangent est alors donné par

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit, sauf erreur de calcul $x + y - 3z = 1$ (les angoissés récurrents peuvent se rassurer en observant que ce plan passe bien par $(2,2,1)$ et est normal au vecteur $(1,1,-3) = -\partial_u \overrightarrow{F}(1,1) \wedge \partial_v \overrightarrow{F}(1,1)$...).

■

Exercice 16. *On considère la surface Σ représentée paramétriquement par $x = \frac{u}{u^2+v^2}, y = \frac{v}{u^2+v^2}, z = \frac{1}{u^2+v^2}$ où $(u,v) \in (\mathbb{R}^\star)^2$. Déterminer l'ensemble des points de Σ en lesquels le plan tangent est parallèle a $(1,1,1)$.*

Solution : • Posons $\overrightarrow{F}(u,v) = (f_1(u,v) = \frac{u}{u^2+v^2}, (f_2(u,v) = \frac{V}{u^2+v^2}, (f_13(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2})$. La surface est définie paramétriquement par $\Sigma = \overrightarrow{F}(\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star)$. Le plan tangent en $M_0 = \overrightarrow{F}(u,v)$ sera parallèle à la droite d'équation $x = y = z$ si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \partial_u f_1 & \partial_u f_2 & \partial_u f_3 \\ \partial_v f_1 & \partial_v f_2 & \partial_v f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)2} & \frac{-2uv}{(u^2+v^2)2} & \frac{-2u}{(u^2+v^2)2} \\ \frac{-2uv}{(u^2+v^2)2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)2} & \frac{-2v}{(u^2+v^2)2} \end{vmatrix} = 0.$$

Après un calcul on trouve $(u^2+v^2)(2u+2v-u^2-v^2) = 0$ i.e. $2x_0 + 2y_0 = 2$. L'ensemble des points est donc la trace sur la surface du plan d'équation $2x_0 + 2y_0 = 2$.
• Observez que Σ est aussi donné par l'équation cartésienne $z = x^2 + y^2$, du coup la normale au plan tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma = \{g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0\}$ est $\nabla g(M_0)$. Nous cherchons donc les points M_0 dont le gradient est normal au vecteur $(1,1,1)$ dirigeant la droite, i.e. $2x_0 + 2y_0 = 2$. ■

Exercice 17. *Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ qui est perpendiculaire à la droite d'équation $x = y/3 = -z/2$.*

Solution : Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. Le plan tangent à Σ en M_0 admet pour équation $xx_0 + yy_0 + 2zz_0 = 1$, sa normale est donc le vecteur $\overrightarrow{n} = (x_0, y_0, 2z_0)$. La droite $x = y/3 = -z/2$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,3,-2)$; elle sera donc perpendiculaire à $T_{M_0}(\Sigma)$ si les deux vecteurs sont parallèles, i.e. $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. On recherche donc les points $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ vérifiant les deux équations

$$x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \quad \text{et} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_0 - 6z_0 \\ 2x_0 + 2z_0 \\ 3x_0 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le système donne $y_0 = 3x_0$ et $z_0 = -x_0$. En reportant dans l'équation de Σ, on trouve $1 = x_0^2 + 9x_0^2 + x_0^2 = 11x_0^2$ soit $x_0 = \pm\sqrt{11}/11$. On a donc deux solutions $(\sqrt{11}/11, 3\sqrt{11}/11, -\sqrt{11}/11)$ et $(-\sqrt{11}/11, -3\sqrt{11}/11, \sqrt{11}/11)$ ■

Exercice 18. *On considère la surface Σ d'équation $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$. Existe-t-il des plans tangents à Σ qui coupent les axes en trois points A, B, C vérifiant $OA = OB = OC$?*

Solution : Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. Le plan tangent à Σ en M_0 admet pour équation $xx_0 + 4yy_0 + zz_0 = 4$ (on a utilisé la relation $x_0^2 + 4y_0^2 + z_0^2 = 4$). Ce plan rencontre les axes en $A = (4/x_0, 0, 0), B = (0, 1/y_0, 0)$ et $C = (0, 0, 4/z_0)$. $OA = OB = OC$ donnent $x_0^2 = 16y_0^2 = 16z_0^2$. En reportant dans $x_0^2 + 4y_0^2 + z_0^2 = 4$ on trouve (sauf erreur de calcul) les solutions $M_0 = (\pm 2\sqrt{21}, \pm\sqrt{21}/2, \pm\sqrt{21}/2)$. ■

Exercice 19. *Déterminer sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ les points où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$ (même question avec le plan $3x + 5y - 2z = 3$).*

Solution : • On vérifie sans peine que la surface $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z) = z - 4x^2 - y^2 = 0\}$ est régulière en chacun de ses points. Donc si $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, le gradient $\nabla f(M_0)$ est normal au plan tangent. Nous cherchons donc les points $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ tels que les vecteurs $\nabla f(M_0) = (-8x_0, -2y_0, 1)$ et $(1, 2, 1)$ soient colinéaires. On trouve l'unique solution $M_0 = (-1/8, -1, 17/16)$.
• Le même raisonnement pour le second plan donne l'unique solution $M_0 = (-3/16, 5/4, 109/64)$. ■

Exercice 20. *Trouver l'équation du plan tangent au point* (x_0, y_0, z_0) *pour chacune des surfaces ci-dessous*

(1) $\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}\ \}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3).$
(2) $\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)\ \}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3).$

Solution : On devrait trouver $x + 3y + 3z = 19$ pour la première surface et $2x + 2y - z = 2$ pour la seconde. ■

Exercice 21.

Solution : ■

Références

[1] De Thelin F. , « Calcul Différentiel : Notes de Cours ».
[2] Rouvières F. , « Petit Guide de Calcul différentiel », Cassini (1991).

◕ 15 avril 2011 ◕ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl :lassere@math.ups-tlse.fr
Page INP : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/