Exercice 1. ***(extrait capes 2012)*** *Étant donné une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I \times I\ :\ \big(|x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon\big).$$

(1) *Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».*

(2) *On rappelle qu'une fonction est lipschitzienne sur I de rapport k (où k est un réel strictement positif) si :*

$$\forall (x,y) \in I \times I\ :\quad |f(x)-f(y)| \leq k \cdot |x-y|.$$

Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

(3) (a) *Montrer que pour tous réels x et y on a : $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.*

(b) *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

(4) (a) *Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :*

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \text{et} \quad \big|\sqrt{x}-\sqrt{y}\big| \leq |x-y|^{1/2}.$$

(b) *Montrer que la fonction $g\ :\ x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.*

(c) *Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

(5) (a) *En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h\ :\ x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

(b) *La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?*

(6) *On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $h_1(x) = \sin(x^2)$ et $h_2(x) = \sin(\sqrt{x})$*

(a) *Esquisser l'allure de la représentation graphique des fonctions h_1 et h_2 sur $[10^4, 10^4+1]$. Commentaire ?*

(b) *Étudier la continuité uniforme de la fonction h_1.*

(c) *Montrer que $|h_2(x)-h_2(y)| \leq |\sqrt{x}-\sqrt{y}|$. h_2 est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$?*

(7) *Soit F une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\ :\quad |F(x)| \leq ax+b.$$

(a) *Justifier l'existence d'un réel $\eta_1 > 0$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\ :\quad \big(|x-y| \leq \eta_1 \implies |F(x)-F(y)| \leq 1\big).$$

(b) *Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $\frac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$. Justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et η_1.*

(c) *Montrer que*

$$|F(x_0)-F(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|.$$

(d) *Conclure.*

(8) (a) *Étudier la continuité uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'un polynôme de degré supérieur ou égal à* 2.

(b) *La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *?*

(9) ***Le théorème de Heine.*** *Soit* $I = [a, b]$ $(a < b)$ *un segment de* $\mathbb{R}$. *On se propose de démontrer le théorème de Heine : « Si une fonction* G *est continue sur* I, *alors elle est uniformément continue sur* I *». On suppose dans la suite que* G *est continue sur* $I = [a, b]$ *et que* G *n'est pas uniformément continue sur* I.

(a) *Justifier qu'il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et deux suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* I *tels que pour tout entier* $n \geq 1$ *:*

$$|x_n - y_n| \leq 1/n \quad \textit{et} \quad |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon.$$

(b) *Justifier qu'il existe deux sous-suites convergentes* $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* I *telles que pour tout entier* $n \geq 1$ *:*

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq 1/n \quad \textit{et} \quad |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon.$$

(c) *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$.

(d) *Conclure.*

(10) *Soit* J *un intervalle d'intérieur non vide. Une fonction* G *uniformément continue sur tout intervalle* $[a, b]$ *inclus dans* J *est-elle nécessairement uniformément continue sur* J *?*

(11) *En écrivant* $\mathbb{R}_+ = [0, 1] \cup [1, +\infty[$, *donnez une autre démonstration de l'uniforme continuité de* $g \ : \ x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

(12) (a) *Soit* $f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *continue, positive et telle que* $\int_0^\infty f(t)dt$ *converge. Peut-on affirmer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *?*

(b) *Si* f *est de plus uniformément continue sur* $\mathbb{R}_+$, *montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(13) *Soit* $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ *admettant des limites finies en* $\pm\infty$, *montrer que* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

(14) *Donner d'autres démonstration que celle proposée en (6-b) pour la non périodicité de* $f(x) = \sin(x^2)$.

19 janvier 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

Corrigé

(1) $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in I \times I$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$, si f est lipschitzienne sur I de rapport $k > 0$ alors en posant $\eta = \varepsilon/k$ on aura $\forall (x, y) \in I \times I\ : |x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y| \leq k\varepsilon/k = \varepsilon$. f est donc bien uniformément continue sur I.

(3) (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, par l'inégalité triangulaire $|x| \leq |x - y| + |y|$ soit $|x| - |y| \leq |x - y|$. Pour la seconde inégalité il suffit d'échanger les rôles de x et y.

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{1+|x|} - \frac{1}{1+|y|}\right| = \left|\frac{|y|-|x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right| \leq ||y| - |x|| \leq |x - y|$ vu (3-a). f est donc lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ donc (question (2)) uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(4) (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité évidente $0 \leq x + y = (\sqrt{x+y})^2 \leq x + y + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$. La racine étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ l'inégalité $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ en découle. Pour la seconde, si $x \geq y$ la première inégalité assure que $\sqrt{x} = \sqrt{x - y + y} \leq \sqrt{x-y} + \sqrt{y}$ soit $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|}$. Si $x < y$ on échange les rôles de x et y.

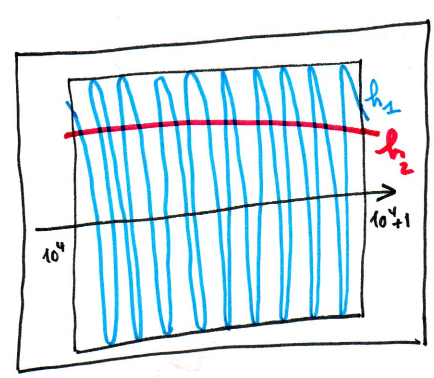
(b) La seconde inégalité vue en (4-a) s'écrit $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|^{1/2}$ (pour la culture, on dit que g est 1/2-hölderienne sur $\mathbb{R}_+$). Soit $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \varepsilon^2$, alors $|x - y| \leq \eta$ implique $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|^{1/2} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$. g est bien uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Si g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ alors il existe $k > 0$ tel que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$. En particulier si $x = 0$ on aura $0 \leq \sqrt{y} \leq ky$ pour tout $y > 0$, soit $1/\sqrt{y} \leq k$ pour tout $y > 0$, ce qui est absurde puisque $\lim_{0_+} 1/\sqrt{y} = +\infty$. g n'est donc pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$

(5) (a) Si h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ alors il existe $\eta > 0$ tel que $|x-y| < \eta$ implique $|h(x) - h(y)| < 1$. Or, $|x_n - y_n| = x_n - y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$: il existe donc n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $|x_n - y_n| < \eta$. Mais une telle situation ne peut se produire puisque $f(x_n) - f(y_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. h n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) h n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ vu les questions (5-a) et (2).

(6) (a) Lorsque x décrit $[10^4, 10^4 + 1]$, $\sqrt{x}$ décrit approximativement l'intervalle $[100, 100.005]$ alors que x^2 décrit l'intervalle $[10^4, 10^4 + 20001]$. En particulier h_1 va décrire sur l'intervalle de longueur 1, $[10^4, 10^4 + 1]$ environ $20001/2\pi = 3180$ oscillations (il y en a bien moins sur la figure !) alors que sur ce même intervalle h_2 en décrira $0.005/2\pi \simeq 8 \cdot 10^{-4}$. Il semble donc que les oscillations de h_1 s'accumulent au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'infini alors que celle de h_2 se raréfient. Tout ceci est sans rigueur mathématique mais traduit assez précisément ce qu'il se passe, il semble clairement que h_1 ne va pas être uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ au contraire de h_2.



(b) Pour h_1 on raisonne comme dans la question (5-a) : les suites de terme général $x_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2}$ et $y_n = \sqrt{2n\pi + 3\pi/2}$ vérifient $\lim_n (x_n - y_n) = 0$ et $|h_1(x_n) - h_2(y_n)| = 2$. Comme dans (5-a), h_1 ne peut être uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) On a $|h_2(x) - h_2(y)| = |\sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{y}| = 2\left|\sin\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)\right|$ $\leq 2\left|\sin\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)\right| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ (on a successivement utilisé les inégalités : $|\cos(u)| \leq 1$ puis $|\sin(u)| \leq |u|$ et enfin $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ démontrée en (4-a)). h_2 est donc 1/2-hölderienne sur $\mathbb{R}_+$; comme g en (4-b) elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Il est bien entendu plus simple (mais peut être moins sportif) et plus raisonnable d'appliquer le théorème des accroissements finis à $u \mapsto \sin(u)$ sur l'intervalle $[\sqrt{x}, \sqrt{y}]$.

(7) (a) C'est la définition de la continuité uniforme sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varepsilon = 1$.

(b) La suite de terme général $x_0/n > 0$ tend vers 0 ; par définition de la limite, il existe $n_0 > 0$ tel que $n \geq n_0$ implique $x_0/n < \eta_1$. La borne inférieure de ces n_0 répond à la question (dans $\mathbb{N}$ toute par non vide et minorée admet un plus petit élément).

$n \geq n_0$ implique $n > x_0/\eta_1$, donc $n_0 = E(x_0/\eta_1) + 1$ (E est la partie entière).

(c) Comme $\left|\frac{(k+1)x_0}{n_0} - \frac{kx_0}{n_0}\right| = \frac{x_0}{n_0} < \eta_1$ pour tout entier $0 \leq k \leq n_0 - 1$, on peut écrire : $|F(x_0)| - |F(0)| \leq |F(x_0) - F(0)| = \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right| \leq$ $\sum_{k=0}^{n_0-1}\left|F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|$
$\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0 = E(x_0/\eta_1) + 1 \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1$.

(d) η_1 étant indépendant de x_0 on a pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$: $|F(x_0)| \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1 + |F(0)| := ax_0 + b$. C.Q.F.D.

(8) (a) D'après la question (7), toute fonction f uniformément continue sur $\mathbb{R}$, (donc sur $\mathbb{R}_+$) vérifie $f(x) = O(x)$ en $+\infty$. Comme il est archi-classique qu'un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 vérifie $\lim_{+\infty} |f(x)/x| = +\infty$, il n'existe pas de polynôme de degré supérieur ou égal à 2 uniformément continu sur $\mathbb{R}$.

(b) $\lim_{+\infty} |e^x/x| = +\infty$, donc, comme pour la question précédente, la fonction exponentielle ne peut être uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

(9) (a) Vu (1) : $\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\,\eta > 0,\ \exists\,(x,y) \in I \times I$ vérifiant $|x-y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Avec $\eta = 1/n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$, on obtient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que pour tout entier $n \geq 1$: $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$.

(b) Par construction dans (9-a) les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $I = [a,b]$ fermé borné donc compact. On peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, disons vers $x \in I$. Pour les mêmes raisons, on extrait aussi de la suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $y \in I$. La sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore convergente vers x comme sous-suite de la suite convergente $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient encore les mêmes relations que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq 1/\sigma(n) \leq 1/n$ et $|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$ (car la croissance de σ sur $\mathbb{N}^\star$ assure par une récurrence élémentaire que $\sigma(n) \geq n$ pour tout n et donc l'inégalité $1/\sigma(n) \leq 1/n$...).

• On peut aussi observer qu'une double extraction est inutile : on vérifie facilement que la convergence de $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, l'inégalité $|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq 1/\psi(n)$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$ et $\lim_n \psi(n) = +\infty$ assurent la convergence de la suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers la même limite que celle de $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Les relations $\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = x$, $\lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)} = y$ et $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq 1/n$ assurent que $x = y$.

(d) On a $\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = x = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$, G étant continue en x on aura $\lim_{n\to+\infty} G(x_{\sigma(n)}) = G(x) = \lim_{n\to+\infty} G(y_{\sigma(n)})$ ce qui est contraire aux inégalités $|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$ obtenues en (9-b) : contradiction, G est bien uniformément continue sur $[a, b]$.

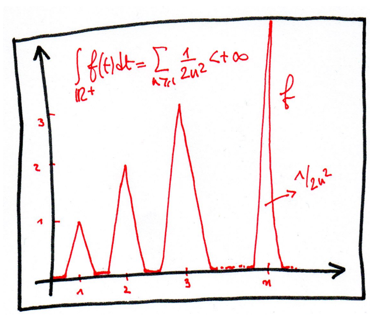
(10) C'est faux si J n'est pas fermé borné : par exemple si $J = \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc (théorème de Heine), uniformément continue sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ bien (8-b) quelle ne soit pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Si J n'est pas $\mathbb{R}$ et n'est pas compact, il est très facile de construire sur J une fonction continue mais pas uniformément continue (prendre e^x si J n'est pas majoré, e^{-x} s'il n'est pas minoré et $1/x - a$ avec $a \in \overline{J} \setminus J$ si J est borné).

(11) g est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, 1] \cup [1, +\infty[$ donc (Heine) uniformément continue sur $[0, 1]$. Il reste à prouver que g est uniformément continue sur $[1, +\infty[$ (l'uniforme continuité survie à la réunion finie). Soient $x, y \geq 1$, les accroissements finis assurent que $|g(x) - g(y)| \leq |g'(\zeta)| \cdot |x - y|$. Or $\zeta \geq 1$ implique $0 \leq g'(\zeta) = 1/2\sqrt{2} \leq 1/2$, on a donc $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|/2$ pour tous $x, y \geq 1$. g est lipschtzienne sur $[1, +\infty[$ et donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

(12) (a) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ on ne peut rien dire à priori sur ses limites en l'infini. Elle peut très bien être positive et non bornée au voisinage de l'infini comme le suggère l'exemple ci-contre où le graphe de f est formé de pics au sommets de plus en plus hauts et à la base convenablement choisi pour que leurs aires successives forment une série convergente. Par exemple, ici on a choisit des triangles centrés sur chaque entier $n \geq 1$ de hauteur n et de largeur $1/n^3$ afin que l'aire du n-ième pics soit $1/2n^2$ terme général d'une série convergente.

Bien entendu, si f admet une limite en l'infini, cette limite ne peut être que nulle puisque f est intégrable.



(b) Supposons que $\lim_{+\infty} f(x) \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_n$ strictement croissante vers $+\infty$ vérifiant $f(x_n) > \varepsilon$ (quitte à changer f en $-f$) pour tout n. D'autre part, f étant uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - y| < \eta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Ainsi, pour tout entier n : $x \in [x_n - \eta, x_n + \eta]$ implique $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon/2$. Mais $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon/2$ implique à son tour $f(x_n) - f(x) \leq \varepsilon/2$ i.e. $\varepsilon/2 \leq f(x_n) - \varepsilon/2 \leq f(x)$ pour tout $x \in [x_n - \eta, x_n + \eta]$. Pour tout entier $n \geq 1$ on aura donc $\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} f(x)dx \geq \eta\varepsilon > 0$. Des inégalités qui contredisent le critère de Cauchy puisque $\lim_n x_n = +\infty$ et $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. C.Q.F.D.

(13) Voir votre manuel favori (attention aux raccords).

(14) • $f(x) = 0$ équivaut à $x = \pm\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Si f est périodique soit $T > 0$ sa période (T est strictement positive car comme f est continue $T = 0$ implique $f \equiv 0$...) on a $f(T) = f(T + 0) = f(0) = 0$: il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $T = \sqrt{k_0\pi}$. Observons aussi que ni $\sqrt{\pi}$ ni $\sqrt{2\pi}$ ne sont égaux à T car $f(\sqrt{\pi} + \sqrt{2\pi}) = -\sin(2\sqrt{2\pi}) \neq 0$. On aura aussi $f(T + \sqrt{\pi}) = f(\sqrt{\pi}) = 0$ soit $\sqrt{k_0\pi} + \sqrt{\pi} = \sqrt{k\pi}$ où $k \in \mathbb{Z}$, donc en

élevant au carré $k_0 + 1 + 2\sqrt{k_0} = k$: on a donc $k_0 = q^2$ avec $q \in \mathbb{Q}$. Maintenant si on fait $f(T + \sqrt{2\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = 0$ il vient de la même manière $1 + 2\sqrt{2k_0} = k'$ soit $2k_o = q'^2,\ q \in \mathbb{Q}$. Mais les égalités $2k_o = q'^2$ et $k_0 = q^2$ sont incompatibles car elles assurent que $\sqrt{2} = p'/p \in \mathbb{Q}$ ce qui est notoirement faux.

• les zéros positifs de f sont $x_k := \sqrt{k\pi},\ k \in \mathbb{N}$, et l'écart entre deux zéros successifs est $x_{k+1} - x_k = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ qui tends vers zéro (lorsque k tends vers l'infini) comme $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}$; en particulier, si f est T-périodique, le nombre de zéros de f dans l'intervalle de longueur T : $[\sqrt{k\pi}, \sqrt{k\pi} + T]$ tends vers l'infini avec k (utiliser l'équivalent ci-dessus qui nous dit qu'il est de l'ordre de $\frac{2T\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}$ ou bien résoudre $\sqrt{m\pi} < \sqrt{k\pi} + 1\ldots$) mais tout cela est absurde car si f est T-périodique son nombre de zéros dans $[\sqrt{k\pi}, \sqrt{k\pi}+T]$ est le même que dans $[0, T]$ et est donc fini : f n'est donc pas périodique. CQFD.

• Toute fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. La fonction continue $f(x) = \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (considérer $|f(x_n) - f(x_{n+1})|$ où $x_n = \sqrt{2n\pi}\ldots$) elle ne peut donc être périodique.

• On vérifie facilement que si f est une fonction dérivable T-périodique, alors f' est encore T-périodique. Supposons $f(x) = \sin(x^2)$ T-périodique, alors $f'(x) = 2x\cos(x^2) + \sin(x^2)$ l'est aussi mais ceci est absurde car $f'(\sqrt{2n\pi}) = 2\sqrt{2n\pi}$ et f' n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}$.

19 janvier 2012 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr