« PETIT » BESTIAIRE D'EXERCICES DE MATHÉMATIQUES AVEC LEUR CORRIGÉ, À L'USAGE DE L'ORAL VOIRE DE L'ÉCRIT DE CERTAINS CONCOURS (AGRÉGATION EXTERNE, INTERNE & CAPES)

Version du 7 mars 2008

PATRICE LASSÈRE
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
Laboratoire de Mathématiques Émile Picard, UMR CNRS 5580,
31 062, TOULOUSE Cedex 4, FRANCE. lassere@picard.ups-tlse.fr

☢ MODE D'EMPLOI ☢

Table des matières

Première partie

ALGÈBRE LINÉAIRE ET MULTININÉAIRE

CHAPITRE 1

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1 (Dans $M_n(\mathbb{C})$, tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{C})$.) [10]-*(2006).*
Soit $n \geq 2$.
❶ *Montrer que si un hyperplan $\mathscr{H}$ de $M_n(\mathbb{C})$ contient toutes les matrices nilpotentes, alors il contient une matrice inversible.*
❷ *Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$, tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{C})$.*

❶ $\mathscr{H}$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$: il existe donc une forme linéaire non nulle φ sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathscr{H} = \ker(\varphi)$. Tous les éléments $E_{i,j} = ((\delta_{i,j}^{k,l}))_{k,l}$ de la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ sont, si $i \neq j$ des matrices nilpotentes donc, vu les hypothèses, dans $\mathscr{H}$. Dans ce cas, la matrice

$$A = E_{n,1} + \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathscr{H}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{H}$ mais visiblement $A \in GL_n(\mathbb{C})$ d'où le résultat.

❷ Soit $\mathscr{H} = \ker(\varphi)$, $(\varphi \in M_n(\mathbb{C})^\star \setminus \{0\})$ un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$.

➪ Si $\mathscr{H}$ contient toutes les matrices nilpotente, il n'y a rien à démontrer vu la question précédente.

➪ Sinon, considérons une matrice nilpotente $N \notin \mathscr{H}$ i.e. $\varphi(N) \neq 0$ et posons

$$t := \frac{\varphi(I_n)}{\varphi(N)} \in \mathbb{C}.$$

Si $\varphi(I_n) = 0$ alors $I_n \in \mathscr{H} \cap GL_n(\mathbb{C})$ et le tour est joué. Sinon, puisque $\varphi(I_n - tN) = 0$ i.e. $I_n - tN \in \mathscr{H}$, et comme N est nilpotente ($N^n = 0$) on peut écrire

$$I_n = I_n - t^n N^n = (I_n - tN)\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k N^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k N^k\right)(I_n - tN).$$

Autrement dit $I_n - tN$ est inversible. CQFD. ❑

Exercice 2 (Dimension, bases et applications linéaires)
Soient E_1, E_2 deux sous-espaces de $\mathbb{R}^{10}$ vérifiant

$$E_1 \subset E_2, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_1 = 3, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 6.$$

Déterminer la dimension du sous espace $\mathscr{E}$ de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})$ définit par

$$\mathscr{E} = \left\{ T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{10}) \ : \ T(E_1) \subset E_1 \ \& \ T(E_2) \subset E_2 \right\}.$$

Compétons une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E_1 pour obtenir une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ de E_2 ; enfin, complétons la encore une fois pour obtenir une base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_{10}\}$ de $\mathbb{R}^{10}$. Avec ce choix, la matrice d'un endomorphisme $T \in \mathscr{E}$ sera de la forme

$$\text{mat}(T, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

et par conséquent $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{E} = 9 + 18 + 40 = 67$. ❑

Exercice 3 (Matrices et réduction) [10]

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $C \in M_2(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Le résultat suivant est essentiel : soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice donc le polynôme caractéristique est scindé et s'écrit $\chi_M = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_d)^{\alpha_d}$ où les λ_i sont les valeurs propres deux à deux distinctes de M de multiplicités $\alpha_i \in \mathbb{N}^\star$. Alors M est diagonalisable si, et seulement si, M annule $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_d)$.
Ici $\chi_M = (X - 1)^2 (X - b)^2$. Distinguons deux cas :

- ➪ Si $b = 1$. M est diagonalisable si, et seulement si, $M = I_4$ soit $a = c = 0$ et $C = 0$.
- ➪ Si $b \neq 1$. Dans ce cas, M est diagonalisable si, et seulement si, $(M - I_4)(M - bI_4) = 0$.

Un calcul direct montre que cette dernière condition équivaut à $a = c = 0$. En résumé, M est diagonalisable si, et seulement si

$$(\, a = c = 0 \,) \quad \text{et} \quad (\, b \neq 1 \ \text{ ou } \ C = 0) \,.$$

❑

Exercice 4 (Une équation matricielle dans $M_2(\mathbb{C})$)
Montrer que l'équation
$$X^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
n'a pas de solutions dans $M_2(\mathbb{C})$ pour tout entier $r \geq 2$.

Supposons qu'il existe $r \geq 2$ et $A \in M_2(\mathbb{C})$ tels que $A^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^{2r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et le polynôme caractéristique $\chi_A(x) = ax^2 + bx + c$ de A divise donc x^{2r} ; ceci implique $c = b = 0$, soit $\chi_A(x) = x^2$ et (Cayley-Hamilton) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi (comme $r \geq 2$)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^r = A^2 A^{r-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ce qui est absurde : cette équation est bien sans solutions. ❑

Exercice 5 (Histoire de matrices nilpotentes) [10]-*(2003/04).*
Soit A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

La réponse est oui si $n \leqslant 2$, non si $n > 2$.

➪ Si $n = 1$: c'est clair. Si $n = 2$, on a $(BA)^3 = B(AB)^2A = 0$ donc BA est nilpotente ; comme elle est de taille 2, son indice est inférieur à 2 i.e. $(BA)^2 = 0$.
➪ Pour $n = 3$, BA est nilpotente d'indice au plus 3 et AB d'indice de nilpotence au plus 2. On va chercher A, B pour que AB soit d'indice 2 et BA soit d'indice 3 et plus précisément telles que, par exemple,
$$BA = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Comme $\mathrm{Ker}(A)$ doit être une droite (A n'est pas inversible et de rang supérieur à celui de N, donc de rang 2) incluse dans le noyau de $N = BA$, $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par $(1, 0, 0)$. De même $\mathrm{Im}(B)$ doit être un plan qui doit contenir l'image de N i.e. le plan engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$.
On est donc amené à chercher sous les formes $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a' \\ 0 & b & b' \\ 0 & c & c' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & e & f \\ d' & e' & f' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un peu de calcul montre que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.
➪ Pour $n > 3$ il suffit de border les matrices précédentes par des zéros. ❑

Exercice 6 (Autour du commutant) [10]-*(1998).*
Déterminer la structure de l'ensemble $\mathscr{E}$ des endomorphismes $\varphi \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{R}))$ vérifiant
$$\varphi({}^tB) = {}^t\varphi(B), \quad \forall\, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Si on désigne par T l'endomorphisme $M \mapsto {}^tM$ de $M_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{E}$ n'est rien d'autre que le commutant de T et c'est donc une sous-algèbre de $\mathscr{L}(M_n(\mathbb{R}))$. Soit $\mathscr{S}_n$ (resp. $\mathscr{A}_n$) l'espace vectoriel des matrices symétriques (resp. antisymétrique). Puisque $M_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$, un endomorphisme φ vérifiant $\varphi \circ T = T \circ \varphi$ doit laisser stable les deux sous-espaces propres de T que sont $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$. Mais inversement, un endomorphisme laissant stable $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ satisfait (avec les notations évidentes) à

$$ {}^t\varphi(B) = {}^t\varphi(S+A) = {}^t\varphi(S) + {}^t\varphi(A) = \varphi(S) - \varphi(A) = \varphi(S-A) = \varphi\left({}^t(S+A)\right) = \varphi({}^tB) $$

ce qui montre que $\varphi \in \mathscr{E}$. L'algèbre $\mathscr{E}$ est donc constituée des endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui laissent stable les sous-espaces $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$. Il existe donc un isomorphisme évident

$$ \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{S}_n) \times \mathscr{L}(\mathscr{A}_n) $$

qui à φ associe le couple $\left(\varphi_{/\mathscr{S}_n}, \varphi_{/\mathscr{A}_n}\right)$. Il en résulte que

$$ \dim(\mathscr{E}) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}. $$

❑

Remarque : on retrouve dans la dernière formule le résultat connu mais plus délicate à établir, à savoir que la dimension du commutant est toujours une somme de carrés $p_1^2 + \cdots + p_k^2 \in \{d, d+1, \dots, d^2\}$ (ici $d = n^2$) telle que $p_1 + \cdots + p_k = d$.

Exercice 7 (Étude $A \mapsto A^3$ dans $M_3(\mathbb{R})$) [10].
Déterminer l'image de l'application φ de $M_3(\mathbb{R})$ dans $M_3(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(A) = A^3$.

Nous allons vérifier que cette image est constituée de toutes les matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ sauf celles admettant 0 comme valeur propre multiple et qui ne sont pas diagonalisables.
Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ et cherchons $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(A) = A^3$. On distingue plusieurs cas pour B

➪ *B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*
Il existe alors une base $\{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$, des réels α, β, γ tels que

$$ Bu = \alpha u, \quad Bv = \beta v, \quad Bw = \gamma w. $$

$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ désignant les racines cubiques des valeurs propres α, β, γ, définissons la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ par

$$ Au = \lambda u, \quad Av = \mu v, \quad Aw = \nu w. $$

A est bien réelle et vérifie $A^3 = B$ et B admet bien un antécédent par φ.

➪ *B possède une valeur propre non réelle.*
Les valeurs propres de B sont donc un réel α et deux complexes non réels conjugués ω et $\overline{\omega}$. Il existe un vecteur réel non nul u et un vecteur complexe z non nul tels que

$$ Bu = \alpha u, \quad Bz = \omega z, \quad \text{et par suite,} \quad B\overline{z} = \overline{\omega z}. $$

Notons λ le réel racine cubique de α et soit θ une racine cubique de ω. La matrice A définie dans la base $(u, z, \overline{z})$ de $\mathbb{C}^3$ par

$$Au = \lambda u, \quad Az = \theta z, \quad A\overline{z} = \overline{\theta}\overline{z}$$

vérifie $A^3 = B$. En outre $\overline{A}$ envoie u sur λu, z sur $\overline{\theta}z$ et $\overline{z}$ sur $\theta\overline{z}$. A est donc réelle et et B admet bien un antécédent par φ.

➪ *B possède une valeur propre réelle non nulle λ d'ordre 2 et n'est pas diagonalisable.*
Les valeurs propres de B sont λ, λ, μ où μ est un autre réel. Posons $\alpha = \lambda^{1/3},\ \beta = \mu^{1/3}$, on a donc

$$\mathbb{R}^3 = \ker(B - \lambda I_3)^2 \oplus \ker(B - \mu I_3)$$

La dimension de $\ker(B - \lambda I_3)$ n'est pas deux sinon B serait diagonalisable, elle vaut donc 1. Puisque $\dim\ker(B - \lambda I_3)^2 = 2,\ \dim\ker(B - \lambda I_3) = 1$, considérons $u \in \ker(B - \lambda I_3)^2 \setminus \ker(B - \lambda I_3),\ v = (B - \lambda I_3)u$ et w un vecteur non nul de $\ker(B - \mu I_3)$. on a ainsi construit une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie

$$Bu = \lambda u + v, \quad Bv = \lambda v, \quad Bw = \mu w.$$

Une matrice $A \in M_3(\mathbb{R}^3)$ vérifiant pour un certain réel c

$$Au = \alpha u + cv, \quad Av = \alpha v, \quad Aw = \beta w$$

vérifiera

$$A^3 u = \lambda u + 3\alpha^2 cv, \quad A^3 v = \lambda v, \quad A^3 w = \mu w$$

de sorte que si $c = \dfrac{1}{3\alpha^2}$: $A^3 = B$.

➪ *B possède une valeur propre non nulle λ d'ordre 3 et n'est pas diagonalisable*
Dans ce cas $B = \lambda(I_3 + N)$ où N est une matrice nilpotente non nulle. Posons $\alpha = \lambda^{1/3}$ et cherchons A sous la forme $A = \alpha(I_3 + M)$ avec M nilpotente. On a $M^3 = 0$ donc $A^3 = \lambda(I_3 + 3M + 3M^2)$ et tout se ramène à l'équation $3M + 3M^2 = N$ qui est vérifiée par $M = \dfrac{1}{9}(3N - N^2)$. Une fois de plus B admet un antécédent.

➪ *B admet 0 comme valeur propre d'ordre 2 ou 3 et n'est pas diagonalisable.*
Si l'équation $A^3 = B$ admet une solution, A admet aussi comme vaelur propre d'ordre 2 ou 3. Si 0 est valeur propre d'ordre 3 alors A est nilpotente, $A^3 = 0$, ce qui est absurde puisque B n'est pas diagonalisable. Supposons donc que O soit valeur propre d'ordre 2 de A et notons α l'autre valeur propre (réelle). $\mathbb{R}^3 = \ker(A^2) \oplus \ker(A - \alpha I_3)$ mais $A^3 = B$ implique $Bx = 0,\ \forall\, x \in \ker(A^2)$ soit $\mathbb{R}^3 = \ker(B) \oplus \ker(B - \alpha^3 I_3)$: B est alors diagonalisable ce qui est exclut : tous les cas sont épuisés et la conclusion annoncée s'impose. ❑

Exercice 8 (Réduction des endomorphismes) [45],
Pour $n \in \mathbb{N}^\star,\ A \in M_n(\mathbb{C})$ on définit la matrice $B \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si $A = 0$.

Si $A = 0$ alors $B = 0$ est diagonalisable. Réciproquement, vu la forme de A la polynôme caractéristique de B vérifie

$$\chi_B = (\chi_A)^2$$

et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

qui implique

$$(\diamondsuit) \qquad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}, \quad \forall\, P \in \mathbb{C}[X].$$

En particulier, le polynôme minimal de B vérifie

$$\mu_B(A) = 0$$

et

$$(\text{✘}) \qquad \mu_A \quad \text{divise} \quad \mu_B.$$

Supposons B diagonalisable, μ_B ne possède que des racines simples et comme A et B ont même ensemble valeurs propres avec (✘) nous avons $\mu_A = \mu_B$ qui avec $(\diamondsuit)$ implique

$$A\mu_A'(A) = 0.$$

μ_A divise donc $X\mu_A'$, les deux polynômes μ_A et $X\mu_A'$ étant de même degré d

$$d\mu_A = X\mu_A'$$

soit $\mu_A = X^d$. Mais $\mu_A = \mu_B$ n'a que des racines simples, donc $d = 1$, $\mu_A(X) = X$ et finalement $A = 0$. ❑

Exercice 9 (Encore deux démonstration de Cayley-Hamilton)
Quelques démontrations du Théorème de Cayley-Hamilton

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}) \quad : \quad P_A(A) = 0.$$

❶ **Preuve 1 :** Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe $G \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = G \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} G^{-1}$$

si bien que

$$P_A(A) = G \begin{pmatrix} P_A(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_A(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_A(\lambda_n) \end{pmatrix} G^{-1} = 0.$$

L'application continue

$$M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto P_M(M) \in M_n(\mathbb{C})$$

est donc nulle sur $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$, partie dense de $M_n(\mathbb{C})$ (c.f. exercice 69) : elle est donc identiquement nulle. ❑ verifier

❷ **Preuve 2 :** On cherche à montrer que $P_A(A)x = 0$ pour tout vecteur x. Soit donc x un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$ (si $x = 0$ il n'y a rien à démontrer), notons $\mathscr{E}_x$ le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace stable par A de $\mathbb{C}^n$ contenant x. $\mathscr{E}_x$ est de dimension $1 \leq d \leq n$, et admet pour base $\{x, Ax, \dots, A^{d-1}x\}$.
Il existe donc $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$(\bigstar) \qquad A^d x \;=\; a_{d-1}A^{d-1}x + \cdots + a_1 Ax + a_0 x.$$

Complétons alors la famille libre $\{x, Ax, \dots, A^{d-1}x\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$\{x, Ax, \dots, A^{d-1}x, e_{d+1}, \dots, e_n\}$$

Dans cette base la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} C_P & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $B \in M_{n-d}(\mathbb{C})$ et C_P est la matrice compagnon du polynôme $P(X) = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ i.e. :

$$C_P \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

on a donc $P_A(X) = P_{C_P}(X)P_B(X)$, mais alors

$$\begin{aligned} P_A(A)x &= P_{C_P}(A)P_B(A)x \\ &= P_B(A)P_{C_P}(A)x \\ &= P_B(A)(A^d x - a_{d-1}A^{d-1}x - \cdots - a_1 Ax - a_0 x) = 0 \;\text{ vu } \quad (\bigstar) \end{aligned}$$

dans la seconde inégalité les deux endomorphismes $P_{C_P}(A)$ et $P_B(A)$ commutent légitimement comme polynômes en A. Ainsi $P_A(A)x = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$ i.e. $P_A \equiv 0$. ❑

ℹ **Remarques :** ➪ on notera l'extrême simplicité de cette dernière preuve (niveau première année).

➪ Pour une autre démonstration moins classique voir l'exercice 94 et pour un joli bestiaire de preuves de Cayley-Hamilton consulter /httpblabla?????????

Exercice 10 (Étude de $M_3(\mathbb{R}) \ni B \mapsto AB$) [10]

Pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, considérons l'endomorphisme

$$\varphi_A \ : \ B \in M_3(\mathbb{R}) \mapsto \varphi_A(B) = AB \in M_3(\mathbb{R}).$$

Si le déterminant de A est 32 et son polynôme minimal $(t-4)(t-2)$, quelle est la trace de φ_A ?

$\pi_A(t) = (t-4)(t-2)$ est scindé à racines simples : A est diagonalisable et admet comme valeurs propres 4 et 2 de multiplicités respectives α et β ; le déterminant est donc $\det(A) = 32 = 2^\alpha 4^\beta$ soit $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ (le polynôme caractéristique de A est $P_A(t) = -(t-4)^2(t-2)$...). Soit $\{v_1, v_2, v_3\}$ une base de vecteurs propres de A avec $\ker(A - 4I_3) = \text{vect}\{v_1, v_2\}$, $\ker(A - 2I_3) = \text{vect}\{v_3\}$ et considérons les neuf matrices $E_{i,j} \in M_3(\mathbb{R})$ $1 \leq i, j \leq 3$ définies comme suit : la ième colonne de la matrice $E_{i,j}$ est v_j les deux autres colonnes sont constituées de zéros. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$, les neuf matrices $E_{i,j}$ sont linéairement indépendantes dans $M_3(\mathbb{R})$: c'est donc une base de $M_3(\mathbb{R})$. Par ailleurs ce sont des vecteurs propres de φ_A car un calcul élémentaire nous montre que $\varphi_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \lambda_j E_{i,j}$ avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 2$. Ainsi $M_3(\mathbb{R})$ possède une base de vecteurs propres : φ_A est donc diagonalisable et sa trace est $\text{trace}(A) = 6.4 + 3.2 = 30$. ❑

Exercice 11 ($A^5 + A^3 + A = 3I_d$ dans $M_d(\mathbb{C})$) [10]

Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$ une matrice à valeurs propres réelles vérifiant $A^5 + A^3 + A = 3I_d$, Montrer que $A = I_d$.

Le polynôme $p(t) = t^5 + t^3 + t - 3$ est annulé par A donc π_A divise p. Les valeurs propres de A sont réelles et son polynôme minimal ne possède que des racines réelles, mais $p'(t) = 5t^4 + 3t^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc p ne possède qu'une racine réelle (il est de degré impair donc en possède au moins une mais il ne peut en avoir deux car sinon, par Rolle, p' en aurait une...) et il n'est pas difficile de voir que $p(1) = 0$ cette racine est donc 1, en outre $p'(1) \neq 0$ ce n'est donc pas une racine multiple et par conséquent $p(t) = (t-1)q(t)$ où q est sans racines réelles. π_A divise donc le polynôme irréductible $t - 1$ i.e. $\pi_A(t) = t - 1$ et $A + I_d$. ❑

Exercice 12 (Polynôme minimal et dimension du noyau) [10]

Si le polynôme minimal d'un endormorphisme φ sur un espace vectoriel de dimension 7 est $\pi_\varphi(t) = t^2$, quelles sont les valeurs possibles de dim$(\ker(\varphi))$ *?*

$\pi_\varphi(t) = t^2$, 0 est donc valeur propre de φ : $\dim(\ker(\varphi)) \geq 1$, de l'autre côté puisque $\pi_\varphi(t) \neq t$, φ n'est pas l'endomorphisme nul i.e. $\dim(\ker(\varphi)) \leq 6$ et enfin $\dim(\ker(\varphi^2)) \leq 7$. Soit ψ, la restriction de φ à $\ker(\varphi^2)$, par le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim\big(\ker(\varphi^2)\big) &= \dim(\ker(\psi)) + \dim(\mathrm{im}(\psi))\\ &\leq \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = 2\dim(\ker(\varphi))\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ l'inégalité résultant des inclusions faciles à vérifier :

$$\ker(\psi) \subset \ker(\varphi) \quad \& \quad \mathrm{im}(\psi) \subset \ker(\varphi).$$

Ainsi, nous avons

$$7 = \dim\big(\ker(\varphi^2)\big) \leq 2\dim(\ker(\varphi)) \ \ \& \ \dim(\ker(\varphi)) \in \{1, \dots, 6\}$$

soit

$$\dim(\ker(\varphi)) \in \{4, 5, 6\}$$

et les trois exemples ci-dessous montrent que les valeurs $4, 5, 6$ sont toujours possibles ($\{e_1, \dots, e_7\}$ désigne une quelconque base de notre espace) :

$\rightsquigarrow$ $\dim(\ker(\varphi)) = 6$, définir φ par $\varphi(e_7) = e_6$ et $\varphi(e_j) = 0$ pour $j < 7$.
$\rightsquigarrow$ $\dim(\ker(\varphi)) = 5$, définir φ par $\varphi(e_7) = e_5, \varphi(e_6) = e_4$ et $\varphi(e_j) = 0$ pour $j < 6$.
$\rightsquigarrow$ $\dim(\ker(\varphi)) = 4$, définir φ par $\varphi(e_7) = e_4, \varphi(e_6) = e_3, \varphi(e_5) = e_2$ et $\varphi(e_j) = 0$ pour $j < 5$.

❑

Exercice 13 (Étude de $\varphi : A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \varphi(A) = -A + \mathbf{tr}(A)I_n$.) [10]
Étudier la diagonalisabilité de

$$\varphi : A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \varphi(A) = -A + tr(A)I_n.$$

φ est bien entendu élément de $\mathscr{L}(M_n(\mathbb{R}))$. Soit λ une valeur propre de φ : il existe une matrice A non nulle telle que

$$\varphi(A) = -A + \mathrm{tr}(A)I_n = \lambda A$$

si bien que

$$(1+\lambda)A = \mathrm{tr}(A)I_n \qquad (\bigstar)$$

➪ Si la trace de A est nulle, λ est forcément (A est non nulle) égal à -1 et réciproquement, $\lambda = -1$ implique A de trace nulle : $\lambda = -1$ est bien valeur propre de φ et son sous-espace propre associé E_{-1} est le sous-espace constitué des matrices de trace nulle, classiquement de dimension $n^2 - 1$ (considérer la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ et appliquer le théorème du rang)

➪ Si la trace de A est non nulle, λ est différent de -1 et ($\bigstar$) nous donne

$$A = (1+\lambda)^{-1}\mathrm{tr}(A)I_n \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{tr}(A) = \frac{n\mathrm{tr}(A)}{(1+\lambda)} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = n-1 \quad \& \quad A \in \mathsf{vect}(I_n)$$

i.e. $\lambda = n-1$ est aussi valeur propre, et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par I_n donc de dimension 1.

➪ En conclusion, φ admet deux valeurs propres -1 et $n-1$, les sous-espaces propres associés sont de dimensions respectives n^2-1 et 1 donc de somme $n^2 = \dim M_n(\mathbb{R})$ et φ est diagonalisable (et son polynôme caractéristique $P_\varphi(x) = (-1)^{n^2}(x+1)^{n^2-1}(x+1-n)...$).❑

Exercice 14 (Espaces vectoriels, dimension, réduction des endomorphismes) ([10], 1999/2000).
Soient $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $aA+bB+cC$ possède une valeur propre double.

Dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 il n'y a qu'une alternative : ou bien la famille $\{A,B,C\}$ est liée et il n'y a rien à démontrer, ou bien elle est libre et dans ce cas l'ensemble

$$\mathsf{vect}\{A,B,C\} = \{aA+bB+cC,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

sous-espace vectoriel de dimension 3 est alors tenu, pour des raisons évidentes de dimension, de rencontrer le sous-espace

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

de dimension 2 constitué de matrices à valeurs propres doubles.Le résultat suit. ❑

Exercice 15 (Rayon spectral et décomposition de Dunford) [38]
En utilisant la décomposition de Dunford, montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a :

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

Par Dunford $A = D+N$ avec D diagonalisable de mêmes valeurs propres que A, N nilpotente et $ND = DN$. donc pour $k \geq n$ on aura $N^k = 0$ et

$$A^k = (D+N)^k = \sum_{l=0}^{k} C_n^l D^{k-l} N^l = \sum_{l=0}^{n} C_n^l D^{k-l} N^l = D^{k-n} \sum_{l=0}^{n} C_n^l D^{n-l} N^l.$$

Soit, en posant $\alpha = \sup_{0\leq l\leq n}\{\|D\|^{n-l}\|N\|^l\}$

$$\|A^k\| \leq \|D\|^{k-n} \sum_{l=0}^{n} C_k^l \|D\|^{n-l}\|N\|^l \leq \alpha \|D\|^{k-n} \left(\sum_{l=0}^{n} C_k^l \right)$$

or, pour $0 \leq l \leq n$ et $k \geq n$

$$C_k^l \leq k(k-1)\dots(k-l+1) \leq k^l \leq k^n$$

si bien que

$$\|A^k\| \leq \alpha(n+1)k^n\|D^{k-n}\|$$

et

$$(\bigstar) \qquad \rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq (\alpha(n+1))^{\frac{1}{k}}\, k^{\frac{n}{k}}\|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k}},$$

en remarquant enfin que $\lim\limits_{k\to\infty} (\alpha(n+1))^{\frac{1}{k}}\, k^{\frac{n}{k}} = 1$ et

$$\lim_{k\to\infty} \|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k-n}}\right)^{\frac{k-n}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|D^{k-n}\|^{\frac{1}{k-n}} = \rho(D) = \rho(A)$$

avec $(\bigstar)$, il vient finalement $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$. ❑

Exercice 16 (Matrices nilpotentes)
Existe-t-il une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente à coefficients > 0 ?

Si une telle matrice existe la matrice A^k est encore à coefficients > 0 pour tout entier $k \in \mathbb{N}$; mais A nilpotente implique (Cayley-Hamilton par exemple) $A^n = 0$, contradiction. ❑

Exercice 17 (Matrice, comatrice et rang)
Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$, étudier le rang de la comatrice de A en fonction du rang de A.

L'identité suivante est toujours vérifiée dans $M_d(\mathbb{C})$

$${}^t(\mathrm{com}(A))A = A\,{}^t(\mathrm{com}(A)) = \det(A)I_d.$$

et on a aussitôt :

$$\mathrm{rang}(A) = d \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rang}({}^t(\mathrm{com}(A))) = d,$$

dans le cas contraire le déterminant de A est nul et notre formule devient

$${}^t(\mathrm{com}(A))A = A\,{}^t(\mathrm{com}(A)) = 0$$

soit, identifiant canoniquement matrice et endomorphisme

$$\left(\mathrm{im}({}^t(\mathrm{com}(A))) \subset \ker(A)\right) \quad \& \quad \left(\mathrm{im}(A) \subset \ker({}^t(\mathrm{com}(A)))\right)$$

et par suite

$$\forall\, A \in M_d(\mathbb{C}) \quad \mathrm{rang}\,{}^t(\mathrm{com}(A)) + \mathrm{rang}(A) \leq d \qquad (✘)$$

$\rightsquigarrow$ Si $\mathrm{rang}(A) = d-1$ la matrice A admet un mineur d'ordre $d-1$ non nul et donc la comatrice de A admet un coefficient non nul, son rang est donc supérieur ou égal à 1 et

égal à 1, vu (✘). De même $\det(A) = 0$ et $\mathrm{rang}({}^t\mathrm{com}(A)) \geq 1$ exigent $\mathrm{rang}({}^t\mathrm{com}(A)) = 1$ et $\mathrm{rang}(A) = d - 1$.
⇝ Si $\mathrm{rang}(A) \leq d-2$ tous les mineurs d'ordre $d-1$ de A sont nuls et par suite la comatrice de A est la matrice nulle, donc de rang nul et réciproquement. Résumons nous

$$\begin{cases} \mathrm{rang}(A) = d & \iff \quad \mathrm{rang}({}^t\mathrm{com}(A)) = d, \\ \mathrm{rang}(A) = d - 1 & \iff \quad \mathrm{rang}({}^t\mathrm{com}(A)) = 1 \quad \textit{pour } d \geq 2, \\ \mathrm{rang}(A) \leq d - 2 & \iff \quad \mathrm{rang}({}^t\mathrm{com}(A)) = 0. \end{cases}$$

❑

Exercice 18 (Séries entières, algèbre linéaire)
Pour $A \in M_d(\mathbb{C})$, quel est le rayon de convergence de la série entière $f_A(z) := \sum_{k\geq 0} tr(A^k)z^k$?
Exprimer f_A en fonction du polynôme caractéristique et de ses dérivées.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicités. A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pour tout entier k

$$\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{j=0}^{d} \lambda_j^k$$

par conséquent, si les λ_j ne sont pas tous non nuls (i.e. A n'est pas nilpotente) le rayon de convergence de notre série entière est supérieur ou égal (et en fait égal) à

$$\rho := \inf_{\lambda_j \neq 0,\, 1\leq j\leq d} |\lambda_j|^{-1}.$$

Pour $|z| < \rho$

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{tr}(A^k)z^k &= \sum_{k\geq 0} \lambda_1^k z^k + \cdots + \sum_{k\geq 0} \lambda_d^k z^k \\ &= \frac{1}{1-\lambda_1 z} + \cdots + \frac{1}{1-\lambda_d z} \\ &= \frac{\chi_A'(z^{-1})}{z\chi_A(z^{-1})} \qquad (\bigstar) \end{aligned}$$

Enfin, si A est nilpotente $f \equiv d$ puisque $\mathrm{tr}(A^k) = 0\,,\, \forall k \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{tr}(A^0 = I_d) = d$. Dans ce dernier cas, il faut remarquer que la formule $(\bigstar)$ subsiste encore puisque $\chi_A(z) = (-1)^d z^d$.
❑

Exercice 19 (Matrices semblables, polynômes)
Montrer que deux matrices réelles $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont encore semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$, soit si $P_1 = \mathrm{re}(P)$ et $P_2 = \mathrm{im}(P)$: $(P_1 + iP_2)A = B(P_1 + iP_2)$ i.e. prenant parties réelles et imaginaires :

$$(\bigstar) \qquad P_1 A = BP_1 \quad \& \quad P_2 A = BP_2.$$

On considère alors l'application : $\varphi\ :\ z \in \mathbb{C} \mapsto \varphi(z) = \det(P_1 + zP_2)$. $\varphi \in \mathbb{C}[z]$ et n'est pas identiquement nulle car $\varphi(i) = \det(P)$: il existe donc (un polynôme non nul ne possède dans $\mathbb{C}$ qu'un nombre fini de racines) $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) \in \mathbb{R}^\star$, autrement dit $Q = P_1 + xP_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ et avec $(\bigstar)$ on a immédiatement $A = Q^{-1}BQ$ ❑

🛈 **Remarque :** c'est un cas particulier du résultat suivant :
« Soit $\mathbb{L}$ une extension du corps $\mathbb{K}$. Soit M et $N \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $M_n(\mathbb{L})$, alors elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ ».

Exercice 20 (Réduction des endomorphismes)
Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A^N = I_2$, montrer que $A^{12} = I_2$.

A est annulée par $P(X) = X^N - 1$ scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont racines de P donc des racines N-ièmes de l'unité. Enfin, A étant à coefficients réels, si elle admet une valeur propre non réelle : les deux seront conjuguées ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$)

⇝ Si les valeurs propres sont réelles $\lambda_1, \lambda_2 \in \{-1, +1\}$ et A étant diagonalisable $A^2 = I_2$.

⇝ Sinon, elles sont conjuguées, mais A étant à coefficients dans $\mathbb{Z}$ implique

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\mathrm{re}(\lambda_1) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 2\mathrm{re}(\lambda_1) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

On en déduit facilement que λ_1 est racine seconde, troisième ou quatrième de l'unité, dans tous les cas $A^{12} = I_2$. ❑

🛈 **Remarque :** En résumé, l'ordre d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ appartient à $\{1, 2, 3, 4, 6, +\infty\}$ et ces valeurs sont atteintes. Par exemple l'ordre des matrices ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est respectivement $1, 2, 3, 4, 6$ et $+\infty$.

Exercice 21 (Réduction des endomorphismes)
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 = A^2$. Si 1 et -1 sont valeurs propres de A, montrer que A est diagonalisable.

Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est annulé par A, le spectre de A est donc inclus dans $\{-1, 0, 1\}$ et vu les hypothèses nous avons donc deux alternatives :

$\mathrm{sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$ et $P_A(X) = -X(X+1)(X-1)$ est scindé à racines simples : A est diagonalisable.

0 n'est pas valeur propre de A : dans ce cas $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et alors

$$A^4 = A^2 \Longrightarrow A^2 = I_2,$$

A annulée par un polynôme scindé à racines simples est encore diagonalisable (ce dernier cas correspond au cas $\mathrm{sp}(A) = \{-1, 1\}$ et donc $P_A(X) = (X-1)^2(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$. ❑

Exercice 22 (Groupes, réduction des endomorphismes)
Soient $n > p$ deux entiers. Montrer que les groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ ne sont pas isomorphes.

Pour cela considérons

$$G := \{\, A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ diagonales et telles que } \mathrm{sp}(A) \subset \{-1, 1\}\} \,,$$

c'est un sous-groupe commutatif de cardinal 2^n de $GL_n(\mathbb{K})$. Supposons alors qu'il existe un isomorphisme $\varphi : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_p(\mathbb{K})$. Alors $\varphi(G) = H$ est un sous-groupe commutatif de $GL_p(\mathbb{K})$ de cardinal 2^n, dont les éléments sont annulés par $X^2 - 1$: ils sont donc diagonalisables à valeurs propres dans $\{-1, +1\}$. $\varphi(G)$ étant commutatif il est alors bien connu ([12]-2, prop. 55 page 220) que ses éléments sont simultanément diagonalisables i.e.

$$\exists P \in GL_p(\mathbb{K}) \text{ telle que } \forall\, B \in \varphi(G) \ : \ P^{-1}BP \text{ est diagonale.}$$

$P^{-1}BP$ est alors diagonale à spectre dans $\{-1, +1\}$ ce qui implique que $2^n = |\varphi(G)| \leq 2^p$ inégalité absurde puisque $n > p$. ❑

Exercice 23 (Inégalité, matrices, déterminant) [45].
Soient $c \in \mathbb{R}_+$, $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $|a_{i,j}| \leq c$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Montrer que

$$|det(A)| \leq c^n n^{n/2}.$$

Seul le cas où $A \in GL_n(\mathbb{C})$ mérite explication. Pour une telle matrice désignons par $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

➪ Supposons les colonnes $(C_i)_1^n$ deux à deux orthogonales. Si

$$D_i = \|C_i\|^{-1} C_i, \quad \text{et} \quad B = [D_1, \dots, D_n]$$

la matrice B est orthogonale donc $|\det(B)| = 1$; vu que

$$\forall\, 1 \leq j \leq n \ : \ \|C_j\| = \sqrt{a_{1,j}^2 + \dots + a_{n,j}^2} \leq c\sqrt{n}$$

on a

(✔) $$|\det(A)| = |det(B)|\, \|C_1\| \dots \|C_n\| \leq c^n n^{n/2}.$$

➪ Pour le cas général, appliquons le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille libre $(C_i)_1^n$: soit $D_1 = C_1$, et $D_2 = C_2 + \lambda_{2,1}C_1$ où comme toujours la constante $\lambda_{2,1}$ est déterminée de sorte que D_2 soit orthogonal à D_1 i.e.

$$\langle C_2, D_1\rangle + \lambda_{2,1}^2\|D_1\|^2 = 0$$

avec Pythagore

$$\|D_2\| = \|C_2\|^2 - \lambda_{2,1}^2\|D_1\|^2 \leq \|C_2\|^2.$$

De même

$$D_k = C_k - \lambda_{k,1}D_1 + \cdots + \lambda_{k,k-1}D_{k-1}$$

et avec

$$\langle C_k, D_j\rangle + \lambda_{k,j}^2\|D_j\|^2 = 0, \quad \forall\, 1 \leq j \leq k-1$$

on a

$$\begin{aligned}\|D_k\| &= \|C_k\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1}\lambda_{k,j}^2\|D_j\|^2 - 2\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_{k,j}^2\|D_j\|^2\\ &\leq \|C_k\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1}\lambda_{k,j}^2\|D_j\|^2 \leq |C_k\|^2\end{aligned}$$

soit

$$(✘) \qquad \|D_k\| \leq \|C_k\|, \quad \forall\, 1 \leq k \leq n$$

puisque bien entendu $\det[C_1, \ldots, C_n] = \det[D_1, \ldots, D_n]$; l'inégalité est démontrée vu (✘) et (✔). ❑

Exercice 24 (Un théorème de Kronecker)
Par **polynôme de Sylvester** *on entend tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire à racines de module inférieur où égal à 1. Montrer que* **(Kronecker)** *Les zéros non nuls d'un polynôme de Sylvester sont des racines de l'unité.*

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Notons Z_n la collection des zéros (comptés avec leurs multiplicités) de l'ensemble $\mathscr{S}_n$ des polynômes de Sylvester de degré inférieur où égal à n.

➪ **Étape 1 :** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $s_n := \mathrm{card}(\mathscr{S}_n)$ est fini.

Soit $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^n (z - \zeta_i) \in \mathscr{S}_n$, avec les formules de Newton, si $0 \leq k \leq n-1$ on a

$$|a_k| = \Big|\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}(-1)^k\zeta_{i_1}\ldots\zeta_{i_k}\Big| \leq \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}|\zeta_{i_1}\ldots\zeta_{i_k}| \leq \mathsf{C}_n^k \leq n!,$$

les coefficients a_k étant entiers, il n'y a qu'un choix fini de a_k et s_n est fini.

➪ **Étape 2 :** $(\,\zeta \in Z_n) \Longrightarrow \big(\,\zeta^k \in Z_n,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\big)$.

Soit $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, sa matrice compagnon

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$$

est triangularisable dans $M_n(\mathbb{C})$, il existe $G \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$C_p = G^{-1} \begin{pmatrix} \zeta_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_n \end{pmatrix} G.$$

Mais alors

$$C_p^N = G^{-1} \begin{pmatrix} \zeta_1^N & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_n^N \end{pmatrix} G \in M_n(\mathbb{Z}),$$

autrement dit C_p^N est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet $\zeta_1^N, \dots \zeta_n^N$ comme valeurs propres : son polynôme caractéristique répond à la question.

➪ **Étape 3 :** *La conclusion.*

Supposons qu'il existe un polynôme $p \in K_n$ admettant au moins une racine, (disons ζ_1) qui ne soit ni racine de l'unité, ni de module strictement compris entre 0 et 1, l'ensemble $\{\zeta_1^N\}_{N\in\mathbb{N}^\star}$ est alors de cardinal **infini**. D'autre part, par la seconde étape $p_{C_p^N}(\zeta_1^N) = 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^\star$, si bien que l'ensemble infini $\{\zeta_1^N\}_{N\in\mathbb{N}^\star}$ est inclu dans Z_n de cardinal **fini** (étape 1) et on a la contradiction désirée. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ On peut tout aussi bien montrer qu'un polynôme de Sylvester est sans zéros de module strictement compris entre 0 et 1 de la manière suivante : soit $p(z) = z^k \prod_{i=k+1}^n (z - \zeta_i) \in K_n$, toujours avec Newton : $1 \leq |a_k| = |\zeta_{k+1} \dots \zeta_n| \leq 1$, soit $|\zeta_{k+1}| = \cdots = |\zeta_n| = 1$.

➪ On pourra aussi consulter les ouvrages de J.M.Arnaudies & J.Bertin *"Groupes, Algèbre et Géométrie"* tome 1, pages 127-128, Ellipse, (1993) ou E.Leichnam *"Exercices corrigés de Mathématiques, Polytechnique, ENS" (Algèbre et Géométrie)*, exercice 1-30, Ellipse, (1999) pour d'autres approches.

➪ Un **entier algébrique** est une racine d'un polynôme unitaire $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. On a

« Un entier algébrique est soit entier, soit irrationnel. »

Cette assertion repose essentiellement sur les idées précédentes, en voici donc les étapes principales :

$\rightsquigarrow$ $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique si, et seulement si, il est valeur propre d'une matrice à coefficients entiers.

$\rightsquigarrow$ Si $A \in M_n(\mathbb{Z})$ admet une valeur propre λ rationnelle, alors A admet un vecteur propre à coordonnées entières associé à la valeur propre λ.

$\rightsquigarrow$ Soit α un entier algébrique racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \geq 2$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ considérons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k < \alpha < k+1$ et $A := C_P - kI_n \in M_n(\mathbb{Z})$. On vérifie facilement que $\lambda := \alpha - k$ est valeur propre de A, puis en considérant la suite $(A^m X)_m$ où $X \in \mathbb{Z}^n$ vérifie $AX = \lambda X$, conclure.

Exercice 25 (Le commutant dans $M_2(\mathbb{K})$)
À toute matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ on associe

$$\mathscr{C}_A := \{B \in M_2(\mathbb{K}) \ : \ AB = BA\}$$

son commutant. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est de dimension 2 ou 4.

Soit

$$(\bigstar) \qquad A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$$

la décomposition de A dans la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$.

➪ Si A est scalaire (i.e. $A = \lambda I_2$), $\mathscr{C}_A = M_2(\mathbb{K})$ est donc dimension 4.

➪ Si A est diagonale mais non scalaire, on vérifie encore sans peine avec $(\bigstar)$ que $\mathscr{C}_A$ est de dimension 2.

➪ Sinon, A est non scalaire et A et I_2 sont libres, et $\mathscr{C}_A$ est de dimension supérieure ou égale à 2. Supposons $\mathscr{C}_A$ de dimension supérieure ou égale à 3. Dans $M_2(\mathbb{K})$ de dimension 4 il se doit de rencontrer

$$\mathscr{E} := \mathbb{K}E_{11} + \mathbb{K}E_{12}.$$

Soit donc

$$B = \alpha E_{11} + \beta E_{12} \in \mathscr{E} \cap \mathscr{C}_A, \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

en écrivant $AB = BA$ il vient $c = 0$. De même, en considérant $\mathscr{E} := \mathbb{K}E_{21} + \mathbb{K}E_{22}$ il vient $b = 0$ soit A diagonale ce qui est absurde donc $\dim(\mathscr{C}_A) < 3$, soit $\dim(\mathscr{C}_A) = 2$. ❏

ℹ **Remarques :** ➪ Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, la dimension du commutant de A vérifie

$$n \leq \dim(\mathscr{C}_A) \leq n^2$$

et la dimension vaut n si, et seulement si A est cyclique (i.e. A est semblable à une matrice compagnon ou encore polynômes minimaux et caractéristiques coïncident) et n^2 si et seulement si A est semblable à la matrice identité.
➪ La question se pose alors de savoir si la dimension du commutant peut prendre toutes les valeurs comprises entre n et n^2. L'exercice que nous venons de traiter montre que la réponse à cette question est non si $n = 2$ car $\dim \mathscr{C}_A$ à priori dans $\{2, 3, 4\}$ ne peut jamais être égale à 3. L'explication de ce phénomène est résumée dans le résultat qui suit

Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\dim \mathscr{C}_A = m$ si et seulement si il existe des entiers $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$\begin{cases} p_1 + \cdots + p_k & = n \\ p_1^2 + \cdots + p_k^2 & = m. \end{cases}$$

Car pour $n = 2$, l'entier 3 est le seul élément de $\{2, 3, 4\}$ qui ne vérifie pas ces deux propriétés. Ce dernier résultat est délicat à établir [1] ; pour notre exercice, il est d'ailleurs plus rapide (([10], 2000/01, ex. 15)) d'établir (c'est d'ailleurs un corollaire immédiat du précédent) que la codimension du commutant est toujours paire ce qui n'est pas le cas de l'entier 3 $(4 - 3 = 1...)$.

Exercice 26 (Points isolés des solutions de l'équation $X^2 = I_n$ dans $M_n(\mathbb{R})$) [10]

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, quel est l'ensemble des points isolés de l'ensemble des matrices dont le carré est égal à I_n ?

Posons $A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I_n\}$. Nous allons montrer que les points isolés de A sont I_n et $-I_n$. Le cas $n = 1$ étant trivial, on suppose dans la suite $n \geqslant 2$.

Soit $M \in A$. Le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ étant annulateur de M, la matrice M est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$. On a

$$\operatorname{tr} M = 2p - n, \quad \operatorname{tr} M = n \Leftrightarrow M = I_n \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} M = -n \Leftrightarrow M = -I_n.$$

Soit φ l'application de A dans $\mathbb{R}$: $M \mapsto \operatorname{tr} M$. L'application φ est continue et $\{I_n\} = \varphi^{-1}\big(]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\big)$. Ainsi, $\{I_n\}$ est un ouvert de A et I_n est donc un point isolé de A. On montre de même que $-I_n$ est un point isolé de A.

Soit $M \in A \setminus \{I_n, -I_n\}$: $M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $1 \leqslant p \leqslant n - 1$. Notons $E_{1,n}$ la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la 1ère ligne et n-ème colonne qui vaut 1. On constate que $M_k = P \left[\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} + \frac{1}{k} E_{1,n} \right] P^{-1}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) est élément de A et que la suite (M_k) tend vers M sans prendre la valeur M. Ainsi, M n'est pas isolé.

🛈 **Remarque :** Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, on note $A_p = \{M \in A \mid \operatorname{tr} M = 2p - n\}$. On montre que les A_p sont les composantes connexes par arcs de A. On utilise pour cela l'écriture $M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P^{-1}$ et on montre qu'on peut choisir P dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, A_p l'est aussi.

[1] voir Carrieu, Fadel, Fieux, Lassère, Rodriguez « *Autour des matrices de Frobenius ou Compagnon* »

Exercice 27 (Sur l'équation $\sin(A) = B$) P*utnam, 1996.*
Existe-t-il une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\sin(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

➪ **Solution 1 :** Supposons qu'une telle matrice existe.

⇝ Si les deux valeurs propres (α et β) de A sont distinctes, A est diagonalisable ; il existe donc $C \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = CAC^{-1},$$

on à alors (car $A^n = CB^nB^{-1}$)

$$\sin(A) = C \sin(B) C^{-1} \quad \text{et} \quad \sin(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \beta^{2n+1} \end{pmatrix}^{2n+1} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

$\sin(A)$ est donc diagonalisable ce qui est contraire à l'hypothèse.

⇝ Envisageons maintenant les cas où les valeurs propres de A sont égales. Il existe $C \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = CAC^{-1},$$

soit (en calculant B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$\sin(B) = C \sin(A) C^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(x) & y\cos(x) \\ 0 & \sin(x) \end{pmatrix}$$

mais 1 est l'unique valeur propre de A, donc $\sin(x) = 0$, $\cos(x) = 0$, $B = I_2$ et finalement

$A = I_2$ ce qui est absurde.

➪ **Solution 2 :** Avec

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$$

on vérifie que

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = I_2$$

si bien que

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implique

$$\cos^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2.2005 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière équation implique que la matrice $\cos^2(A)$ est nilpotente, étant de taille 2×2 elle ne peut être que nulle ce qui est absurde. ❏

Exercice 28 (Quelques propriétés topologiques de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$) [20],

❶ *Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$) est compact dans $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$).*

❷ ***Décomposition polaire généralisée :*** *montrer que*

$$\forall\, M \in M_n(\mathbb{R}) \ :\ \exists\,(O,S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+ \ \text{ telles que } M = OS,$$
$$\forall\, M \in M_n(\mathbb{C}) \ :\ \exists\,(U,H) \in \mathscr{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{H}_n^+ \ \text{ telles que } M = UH.$$

❸ *Montrer que*

$$GL_n(\mathbb{R}) \underset{top.}{\simeq} \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+\star} \quad \text{et} \quad GL_n(\mathbb{C}) \underset{top.}{\simeq} \mathscr{U}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{H}_n^{+\star}.$$

❹ *Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$) est un sous-groupe compact maximal dans $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) (commencer par montrer que les valeurs propres de tout élément d'un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{K})$ sont de module 1).*

❶ $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ car $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ où φ est l'application continue sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par $A \mapsto {}^tAA$. $|||.|||$ étant la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ implique $\|AX\| = 1$ et par suite $|||A||| = 1$. $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ fermé bornée dans $M_n(\mathbb{R})$ est bien compact. La procédure est analogue pour $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$.

❷ On rappelle (voir ref. ? ? ? ?) que

❸

❹ À suivre...... ❏

Exercice 29 (Dans $M_n(\mathbb{R})$: $AB + A + B = 0 \implies AB = BA$)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + A + B = 0$; montrer que $AB = BA$.

$AB+A+B = 0$ implique que $(A+I_n)(B+I_n) = AB+A+B+I_n = I_n$, les matrices $A+I_n$ et $B + I_n$ sont respectivement inverses l'une de l'autre. Par conséquent $(A + I_n)(B + I_n) = (B + I_n)(A + I_n) = I_n$, on développe et $AB = BA$. ❏

Exercice 30 (Dual de $M_n(\mathbb{C})$, tout hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ rencontre $GL_n(\mathbb{C})$) [15]

❶ *Montrer que l'application qui à $A \in M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) associe $f_A : M_n(\mathbb{K}) \ni M \mapsto f_A(M) = Tr(AM)$ établit un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual.*

❸ *Soit $f \in M_n(\mathbb{K})'$ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant*

$$f(XY) = f(YX), \qquad \forall\, X, Y \in M_n(\mathbb{K}).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \lambda Tr(X)$.

❷ *Montrer que pour tout $n \geq 2$, tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.*

❷ On vérifie facilement que f_A est linéaire ; pour des raisons de dimension, il est donc suffisant de montrer que l'application $A \mapsto f_A$ est injective :
Soit $A = ((a_{i,j}))$ telle que $f_A = 0$. $(E_{i,j})$ désignant la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ on a pour $1 \leq k, l \leq n$

$$\begin{aligned} 0 = f_A(E_{k,l}) = \mathrm{Tr}(AE_{k,l}) &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}E_{i,j}E_{k,l}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}E_{i,l}\right) \quad \text{car } E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\mathrm{Tr}(E_{i,l}) = a_{l,k}. \end{aligned}$$

Et A est bien nulle.
❸ Soit f une telle forme et $1 \leq i, j \leq n$, si $i \neq j$

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = 0,$$

et

$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}) := \lambda.$$

Ainsi, f et $\lambda\mathrm{Tr}$ coïncident sur la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$: elles sont égales.

🛈 **Remarque :** On trouvera aussi dans [15], exercice 7.7 une autre démonstration s'appuyant sur la première question.

❹ Un hyperplan H de $M_n(\mathbb{K})$ est le noyau d'une forme linéaire f non nulle ; il existe donc $A \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle, telle que $f = f_A$ et $H = \{X \in M_n(\mathbb{K}) \;:\; \mathrm{Tr}(AX) = 0\}$. Il s'agit donc de montrer qu'il existe $X \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(AX) = 0$. Pour cela, soit $r \geq 1$ le rang de A, il existe[2] P et Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$PAQ = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour $X \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(P^{-1}J_rQ^{-1}X) = \mathrm{Tr}(J_rQ^{-1}XP^{-1})$ et il suffit donc de trouver une matrice inversible Y telle que $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$ ($X = QYP$ répondra alors à la question). Par exemple, la matrice de permutation

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient puisque J_rY est de diagonale nulle. ❑

🛈 **Remarque :**

[2] donner une référence

Exercice 31 (Caractérisation des matrices nilpotentes par la trace) [18], [10] *2008.*

❶ *Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ la trace de A^k est nulle. Montrer que A est nilpotente.*

❷ *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, établir l'équivalence des propriétés :*
1) La seule valeur propre de A est 1.
2) $tr(A) = tr(A^2) = \cdots = tr(A^n) = n$.

🛈 Nous restons ici fidèlement sur la trace de Francinou, Gianella et Nicolas [18] qui proposent plusieurs solutions de ce classique problème.

❶ ➪ Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractérique de A est scindé. Raisonnons par l'absurde en supposant A non nilpotente. Alors A possède au moins des valeurs propres non nulles que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r,\ 1 \leq r \leq n$ de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$. Par hypothèse nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\mathrm{tr(A^k) = n_1\lambda_1^k + \cdots + n_r\lambda_r^k}.$$

Écrire ces relations pour k variant de 1 à r équivaut à dire que le vecteur $(n_1, \dots, n_r)$ est solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \dots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} = 0.$$

Et ce système est de Cramer puisque le déterminant de la matrice du système vaut[3]

$$\lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i - \lambda_j)$$

donc nécessairement $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 0$ ce qui est exclu.

➲ La seconde solution utilise les formules de Newton. Désignons cette fois-ci par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique χ_A comptées avec leur multiplicités. Dire que $\mathrm{tr(A^k)} = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$ revient exactement à dire que

$$\mathrm{tr(A^k) = 0 = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star}$$

car A étant semblable à une matrice triangulaire à coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les matrices A^k sont elles semblables à des matrices triangulaires à coefficients diagonaux $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Les formules de Newton[4] impliquent alors que les fonctions symétriques élémentaires des racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont nulles :

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 0.$$

On en déduit que[5]

$$\chi_A = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n = X^n.$$

[3]C'est le trés fameux déterminant de Vandermonde : [18], exercice 1.8.
[4]Voir [15], exercice 5.26 où...
[5]où $(-1)^n\chi_A$ comme le veut souvent la coutume.

Soit $A^n = 0$ d'aprés le théorème de Cayley-Hamilton

➲ Pour la troisième solution on procède par récurrence sur la taille de la matrice. Si $n = 1$, $\mathrm{tr(A)} = 0$ implique $A = 0$. Soit donc $n \geq 2$, et supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$. Le polynôme caractéristique de A

$$\chi_A = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n$$

vérifie par Cayley-Hamilton

$$\chi_A(A) = 0 = A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}A + (-1)^n\sigma_n I_n$$

et en prenant la trace de cette dernière expression il vient

$$(-1)^n\sigma_n \cdot n = (-1)^{\lambda}_1 \ldots \lambda_n n = (-1)^n n \det(A) = 0$$

soit $\det(A) = 0$. 0 est donc valeur propre de A et on peut écrire

$$\chi_A = X^p Q \quad \text{avec} \quad Q(0) \neq 0 \ \text{ et } \ p \geq 1.$$

Le théorème de décomposition des noyaux assure alors que

$$\mathbb{K}^n = \ker(\chi_A(A)) = \ker(A^p) \oplus \ker(Q(A)).$$

Supposons maintenant $\ker(Q(A)) \neq \{0\}$. Dans une base obtenue comme réunion d'une base de $\ker(A^p)$ et d'une base de $\ker(Q(A))$, l'endomorphisme A admet une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Mais $A'^p = 0$, A' est donc nilpotente et par conséquent $\mathrm{tr(A'^k)} = 0,\ \forall\, \mathrm{k} \in \mathbb{N}^\star$. Maintenant, comme A^k est semblable à

$$\begin{pmatrix} A'^k & 0 \\ 0 & B'^k \end{pmatrix}$$

on a nécessairement $\mathrm{tr(B'^k)} = 0,\ \forall\, \mathrm{k} \in \mathbb{N}^\star$: B' est aussi nilpotente. Mais par hypothèse, $Q(0) \neq 0$ qui implique que la restriction de A à $\ker(Q(A))$ est injective, soit B' inversible ce qui fournit la contradiction.
On peut donc affirmer que $\ker(Q(A)) = \{0\}$, soit $\mathbb{K}^n = \ker(A^p)$ et la matrice A est bien nilpotente.

❷ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comme $\mathrm{rang}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est immédiate.
Pour (2) $\Rightarrow$ (1), remarquons que $\mathrm{spec}(A - I_n) = \{\, \lambda - 1, \lambda \in \mathrm{spec}(A)\}$, il est donc suffisant de montrer que la seule valeur propre de $A - I_n$ est 0 ou encore que $A - I_n$ est nilpotente. D'aprés la première question, $A - I_n$ est nilpotente, si et seulement si, $\mathrm{tr}(A - I_n)^k = 0$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, et cette dernière vérification est élémentaire car :

$$\mathrm{tr}(A - I_n)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l \mathrm{tr}(A^{k-l}) = n \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l = (1-1)^k = 0.$$

❏

Exercice 32 (Sur l'équation $A^p = I_n$ dans $M_n(\mathbb{Z})$.) [10].
Soient $p, n, m \in \mathbb{N}^\star$ avec $m \geq 2$. On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^p = I_n$ et $A \equiv I_n(m)$. Montrer que $A = I_n$.

Il existe par hypothèse $B \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que
$$A = I_n + mB.$$
En outre, le polynôme $X^p - 1$ scindé à racines simples annule la matrice A qui est donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ ses valeurs propres étant des racines p-ièmes de l'unité.
Nous avons $B = m^{-1}(A - I_n)$. B est aussi diagonalisable et ses valeurs propres sont de la forme $m^{-1}(\lambda - 1)$ avec $\lambda^p = 1$. Alors, comme
$$|m^{-1}(\lambda - 1)| \leq \frac{2}{m} < 1$$
on a
$$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0.$$
Mais les matrices B^k sont à coefficients entiers : la seule alternative est donc qu'il existe un entier k_0 tel que $B^{k_0} = 0$. La matrice B est donc diagonalisable et nilpotente : c'est la matrice nulle et finalement $A = I_n$ ❑

Exercice 33 (Calcul de $\exp(A)$ où $A = ((\exp(2i\pi(k+l)/5)))_{k,l} \in M_5(\mathbb{C})$.) [10].
Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $A = ((\omega^{k+l}))_{0\leq k,l\leq 4} \in M_5(\mathbb{C})$.

❶ *Montrer que A est diagonalisable.*
❷ *Calculer* $\exp(A)$.

❶ Nous avons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega^4 \\ \omega & \omega^2 & \dots & \omega^5 \\ \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^4 & \omega^5 & \dots & \omega^8 \end{pmatrix},$$
les colonnes de A sont proportionnelles : A est donc de rang 1 et donc semblable à un matrice de la forme
$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \dots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$
Mais $\mathrm{tr}(A) = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 = 0$ implique que $B^2 = 0$ puis $A^2 = 0$: la matrice A n'est donc pas diagonalisable.
❷ $A^2 = 0$ implique $A^n = 0$ pour tout entier $n \geq 2$, soit $\exp(A) = I_5 + A$. ❑

Exercice 34 (Matrices entières inversibles) [28]

Soient $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que $A, A+B, A+2B, A+3B$ et $A+4B$ soient inversibles à inverses dans $M_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $A+5B$ est inversible et que son inverse est encore à coefficients entiers.

Il faut se souvenir qu'une matrice M à coefficients entiers est inversible avec un inverse à coefficients entiers si et seulement si $\det(M) = \pm 1$ (si M admet un tel inverse N alors, $\det(M)\det(N) = \det(M)\det(N) = 1$ soit $\det(M) = \pm 1$; réciproquement si $\det(M) = \pm 1$ alors $\pm\widetilde{M}$ (où $\widetilde{M}$ est la transposée des cofacteurs de M) est l'inverse de M).
Considérons alors le polynôme de degré au plus 2, $f(x) = \det(A + xB)$. Vu les hypothèses et la remarque préliminaire $f(x) = \pm 1$ pour $x = 0, 1, 2, 3$ et 4 ; par le principe des tiroirs f prends une des valeurs ± 1 au moins trois fois ce qui le force à être constant, en particulier $\det(A + 5B) = \pm 1$, CQFD ❑

Exercice 35 (Sur l'équation $S = X^2$ dans $M_n(\mathbb{C})$ avec S symétrique et X antisymétrique.) [10], *2008.*

CHAPITRE 2

ALGÈBRE BILINÉAIRE ET HERMITIENNE

Exercice 36 (Sur l'équation $S = X^2$ dans $M_n(\mathbb{C})$ avec S symétrique et X antisymétrique.) [10].
Soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique réelle, donner une condition nécessaire et suffisante sur ses valeurs propres pour quelle soit le carré d'une matrice antisymétrique réelle.

On va montrer que S est le carré d'une matrice antisymétrique réelle si et seulement si, toutes ses valeurs propres sont négatives et ses valeurs propres strictement négatives sont de multiplicité paire.

➪ (condition suffisante). Si S est la matrice nulle, alors $S = 0^2$ et on peut supposer désormais $S \neq 0$. S est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles et peuvent, vu les hypothèses, s'écrire sous la forme

$$-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, \dots, -a_l^2, -a_l^2, 0, \dots, 0$$

où $a_1, a_2, \dots a_l \in \mathbb{R}_+^\star$ (et ne sont pas forcément distincts). Toujours parce que S est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée :

$$\exists\, O \in O_n(\mathbb{R}) \ : \quad O^{-1}SO = \operatorname{diag}(-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, \dots, -a_l^2, -a_l^2, 0, \dots, 0).$$

Notons pour $k \in \{1, \dots, l\}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -a_k \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$$

et considérons la matrice diagonale par blocs

$$R = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_l, 0, \dots, 0) \in M_n(\mathbb{R}).$$

R est bien antisymétrique réelle et un calcul par blocs montre que

$$R^2 = \operatorname{diag}(-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, \dots, -a_l^2, -a_l^2, 0, \dots, 0) = O^{-1}SO = {}^t\!OSO,$$

$OR\,{}^t\!O$ est une matrice antisymétrique réelle vérifiant $(OR\,{}^t\!O)^2 = S$, CQFD.

➪ Pour la condition nécessaire, si $S = R^2$ avec R antisymétrique, comme $R = -\,{}^tR$ on a $S = R^2 = -\,{}^tRR$ qui implique

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tXSX = -\,{}^tX\,{}^tRRX = -\|RX\|^2$$

qui prouve que S est symétrique réelle négative : son spectre est donc inclu dans $\mathbb{R}_-$.

Les valeurs propres de S sont les carrés des valeurs propres de R qui sont donc imaginaire pures et stables par conjugaison puisque R est à coefficients réels. ($\lambda \in \mathrm{spec}(S) \implies \pm i\sqrt{\lambda} \in \mathrm{spec}(R)$) : elles sont donc de multiplicité paire. CQFD. ❑

Exercice 37 (Convexité, matrice symétrique, calcul d'intégrale)
Montrer que l'application $A \mapsto (\det(A))^{-1/2}$ de l'ensemble $\mathscr{S}_n^{++}$ des matrices symétriques définies positives dans $\mathbb{R}_+^\star$ est strictement convexe.

Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. En se placant dans une base orthonormale de réduction de A nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2)} dy_1 \dots dy_n = (\det(A))^{-1/2} C \quad \text{où} \quad C = \pi^{n/2}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ pour conclure. ❑

Exercice 38 (Matrices symétriques) [33]
Pour $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$ symétrique et vérifiant $A^2 = A$, établir les inégalités suivantes :

❶ $0 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \leq n.$

❷ $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{rang(A)}.$

❸ $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| < n^{3/2}$ *si* $n \geq 2.$

❶ Notons $V = {}^t(1, 1, \dots, 1) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, par un calcul élémentaire

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = {}^tVAV = {}^tVA^2V = {}^tV({}^tAA)V = \|AV\|^2 \geq 0.$$

Pour l'inégalité de droite, remarquons que $B = ((b_{i,j})) = I_n - A$ vérifie encore ${}^tB = B$ et $B^2 = B$, si bien que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j} = n - \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \geq 0.$$

❷ Notons $A' = ((|a_{i,j}|)) \in M_n(\mathbb{R})$ et $U = (V, V, \dots, V) \in M_n(\mathbb{R})$. $M_n(\mathbb{R})$ étant muni de sa structure euclidienne canonique $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}({}^tAB)$, par Cauchy-Schwarz

$$\langle A', U\rangle^2 \leq \|A'\|^2 \, \|U\|^2$$

soit

$$(\bigstar)\qquad \left(\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|\right)^2 \leq \left(\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{i,j}^2\right)\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}1^2\right)$$

mais

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{i,j}^2=\mathrm{trace}({}^tAA)=\mathrm{trace}(A)$$

et puisque A est une matrice de projection $\mathrm{trace}(A)=\mathrm{rang}(A)\leq n$ soit avec $(\bigstar)$

$$\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|\right)^2\leq n^2\mathrm{rang}(A)\leq n^3.$$

❸ Vu l'inégalité précédente, on aura toujours une inégalité large, et l'égalité équivaut à $\mathrm{rang}(A)=n$ soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$ puis ($A^2=A$) $A=I_n$, mais alors

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|=n<n^{3/2}\quad\text{dès que}\quad n\geq 2,$$

d'où le résultat. ❑

Exercice 39 (Espaces euclidiens et projection orthogonale) [10]
$\mathscr{S}_n$ désignant le sous-espace dans $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles, calculer pour $A=((a_{ij}))\in M_n(\mathbb{R})$

$$\inf_{M=((m_{ij}))\in\mathscr{S}_n}\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{ij}-m_{ij})^2$$

Il est bien entendu équivalent de déterminer

$$(\text{✘})\qquad \inf_{M=((m_{ij}))\in\mathscr{S}_n}\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{ij}-m_{ij})^2},$$

et si $M_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A\,{}^tB)$$

on peut reécrire (✘) sous la forme

$$\inf_{M\in\mathscr{S}_n}\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{ij}-m_{ij})^2}=\inf_{M\in\mathscr{S}_n}\mathrm{tr}\left((A-M)\,{}^t(A-M)\right)=\inf_{M\in\mathscr{S}_n}\|A-M\|=\mathrm{dist}(A,\mathscr{S}_n).$$

Par le théorème de projection orthogonale

$$\mathrm{dist}(A, \mathscr{S}_n) = \|A - B\|$$

où B est la projection orthogonale de A sur $\mathscr{S}_n$, le théorème de projection nous assure en outre que $B - A \in \mathscr{S}_n^{\perp}$ et il est bien connu que $\mathscr{S}_n^{\perp}$ n'est rien d'autre que l'ensemble des matrices antisymétriques, soit

$$^t(A - B) = B - A \quad \Longleftrightarrow \quad B = ^t B = \frac{1}{2}(A + ^t A)$$

si bien que

$$\inf_{M=((m_{ij}))\in\mathscr{S}_n} \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{(a_{ij} - a_{ji})^2}{2}.$$

❑

Exercice 40 (Une matrice symétrique non diagonalisable)

La matrice symétrique $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Non bien sûr ! $\lambda = 1$ est son unique valeur propre : si elle était diagonalisable elle serait semblable et donc égale à I_2. ❑

Remarques : ➪ un contre-exemple à toujours avoir sous la main : ce sont les matrices symétriques **réelles** qui sont toujours diagonalisables et dans une base orthonormée s'il vous plaît.

➪ Profitons en pour donner l'exemple d'une matrice non triangularisable (sur $\mathbb{R}$ bien entendu...) : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et d'une matrice non diagonalisable (sur $\mathbb{C}$ bien entendu...), à savoir $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➪ Dans la même veine, pour terminer voici deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui ne sont pas semblables mais qui ont même polynômes minimal et caractéristiques. Vous pouvez remarquer que ce sont des matrices 4×4, ce qui est normal car ***pour** $n \leq 3$**, deux matrices (ou endomorphismes) sont semblables si, et seulement si, ils ont mêmes polynômes minimal et caractéristiques. Mais pour** $n \geq 4$ **l'implication non triviale est fausse.***

Exercice 41 (Produit scalaire, continuité, topologie) [33]
Soit E un espace pré-hilbertien, montrer que l'ensemble

$$\mathscr{O} := \{(x, y) \in E \times E \text{ tels que } x, y \text{ sont libres dans } E\}$$

est un ouvert de $E \times E$.

L'application

$$\varphi \ : \ (x, y) \in E \times E \mapsto \varphi(x, y) = \langle x, y\rangle - \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} \in \mathbb{R}.$$

est continue sur $E \times E$ muni de sa topologie naturelle d'espace produit (la continuité du produit scalaire résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et, vu le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\mathscr{O} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$. C'est donc un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. ❑

Exercice 42 (Autour de la trace) [10]
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, X \in M_n(\mathbb{R}),\ tr(X) = 0 \Longrightarrow tr(AX) = 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\,{}^tB)$, $M_n(\mathbb{R})$ est un espace euclidien et

$$E := \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$: c'est en effet le noyau de la forme linéaire

$$\varphi \ : \ A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(A) = \mathrm{tr}(A)$$

donc $\dim E + \dim(\mathrm{im}(\varphi)) = n^2 \Longrightarrow \dim E = n^2 - \dim(\mathrm{im}(\varphi)) = n^2 - 1$ car $\mathrm{im}(\varphi)$ est un sous-espace non réduit à l'origine de $\mathbb{R}$ donc égal à $\mathbb{R}$.
Par suite $\dim E^\perp = 1$ et $E^\perp = \mathbb{R}I_n$ car bien sûr $I_n \in E^\perp$, mais

$$\big(\forall\, X \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(X) = 0 \Longrightarrow \mathrm{tr}(AX) = 0 = \langle A, {}^tX\rangle\big) \iff \big(A \in E^\perp = \mathbb{R}I_n\big)$$

❑

Exercice 43 (Bases orthormées) [10]
Soient $(e_1, \dots, e_d)$, $(f_1, \dots, f_d)$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien $(E, \langle .|.\rangle)$. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, montrer que la quantité

(✔)
$$\sum_{1\leq i,j\leq d} \langle u(e_i), f_j\rangle^2$$

est indépendante du choix de ces deux bases.

$(f_j)_1^d$ étant orthonormée, on a avec Pythagore

$$\sum_{1\leq i,j\leq d} \langle u(e_i), f_j\rangle^2 = \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \langle u(e_i), f_j\rangle^2 = \sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|^2,$$

nous sommes donc déja assurés que (✔) ne dépend pas $(f_j)_1^d$. Il reste à prouver que

$$\sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^d \|u(f_i)\|^2$$

Pour cela si $A = ((a_{i,j}))$ désigne la matrice de u dans la base $(e_i)_1^d$

$$\mathrm{trace}(\mathrm{A^tA}) = \sum_{1\leq \mathrm{i,j}\leq \mathrm{d}} \mathrm{a}_{\mathrm{i,j}}^2 = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{d}} \|\mathrm{u(e_i)}\|^2$$

de même

$$\sum_{i=1}^d \|u(f_i)\|^2 = \mathrm{trace(B^tB)}$$

où $B = \mathrm{mat(u,(f_j)_1^d) = P^{-1}AP}$ et $P\in GL_d(\mathbb{R})$ est la matrice de passage entre les deux bases. Ces deux bases étant orthonormées, P est orthogonale i.e. $P^{-1} = {}^tP$ et par suite

$$\mathrm{trace(B^tB) = trace(P^{-1}AP^t(P^{-1}AP) = trace(P^{-1}AP^tP^tA^tP) = trace(P^{-1}A^tAP) = trace(A^tA).}$$

❏

Exercice 44 (Toute matrice carrée réelle est produit de deux matrices symétriques réelles) [10]
❶ *Montrer que pour toute matrice carrée réelle, il existe une matrice de passage à sa transposée qui soit symétrique.*
❷ *En déduire que toute matrice carrée réelle est le produit de deux matrices symétriques réelles.*

❶ La solution repose sur le fait suivant : « toute matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée mais si de plus A est une matrice cyclique (i.e. semblable a une matrice compagnon), on peut imposer à la matrice de passage d'être symétrique réelle. » que l'on va pouvoir étendre à tout $M_n(\mathbb{R})$.

En effet, soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}),$$

alors

$$AS = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & a_3 & a_4 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique et par conséquent $AS = {}^t\big(AS\big) = S\big({}^tA\big)$ i.e. $A = S\big({}^tA\big)S^{-1}$.

Il en résulte immédiatement que toute matrice de Frobenius (i.e. une matrice constituée de blocs diagonaux cycliques) F admet une matrice de passage à sa transposée S symétrique réelle ($F = SAS^{-1}$). Vérifions maintenant que cette propriété se généralise à **toutes** les matrices.

Comme toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Frobenius (c'est le théorème de décomposition de Frobenius analogue cyclique du théorème de décomposition de Jordan) il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R}), S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et F matrice de Frobenius, telles que

$$A = PFP^{-1}, \quad F = S\,{}^tFS^{-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A = P(S\,{}^tFS^{-1})P^{-1} &= (PS)({}^tP\,{}^tP^{-1})\,{}^tF({}^tP\,{}^tP^{-1})(S^{-1}P^{-1}) \\ &= (PS\,{}^tP)({}^tP^{-1}\,{}^tF\,{}^tP)({}^tP^{-1}S^{-1}P^{-1}) \\ &= (PS\,{}^tP)\,{}^tA({}^tP^{-1}S^{-1}P^{-1}) \\ &= (PS\,{}^tP)\,{}^tA(PS\,{}^tP)^{-1} = S_1\,{}^tAS_1^{-1} \end{aligned}$$

où $S_1 = PS\,{}^tP$. La matrice de passage S_1 est clairement symétrique, nous avons donc démontré que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice de passage symétrique S telle que $A = S\,{}^tAS^{-1}$.

❷ On peut alors écrire

$$A = SS', \quad \text{où} \quad S' = {}^tAS^{-1}$$

et comme

$${}^t(S') = {}^t({}^tAS^{-1}) = {}^tS^{-1}A = S^{-1}S\,{}^tAS^{-1} = {}^tAS^{-1} = S'$$

S' est symétrique et le tour est joué puisque $A = SS'$. ❑

ℹ **Remarques :** ➪ On peut consulter[1] « The factorisation of a square matrix into two symmetric matrices » Amer.Math.Monthly 1986-6, page 462/64 pour une approche via la decomposition de Jordan et apprendre aussi que ce resultat est du a Frobenius lui même.

➪ Dans [20], on trouve cette jolie caractérisation des matrices diagonales réelles : *« Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice S symétrique définie positive telle que ${}^tA = S^{-1}A^tS$ ».*

La preuve n'est pas difficle : si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale. Donc $D = {}^tD = {}^tP^tA^tP^{-1}$, soit ${}^tP^tA^tP^{-1} = P^{-1}AP$ où encore ${}^tA = (P^tP)^{-1}A(P^tP)$ et la condition est nécessaire puisque $S = P^tP$ est symétrique définie positive.

[1] Une référence aimablement communiquée par notre collégue J.B.Hiriart-Urruty (Université Toulouse 3).

Réciproquement, supposons qu'il existe S symétrique définie positive (vérification immédiate) telle que ${}^tA = S^{-1}AS$; S définie positive se factorise[2] sous la forme $S = P{}^tP$ où $P \in GL_n(\mathbb{R})$, donc ${}^tA = {}^tP^{-1}P^{-1}AP{}^tP$ soit ${}^tP{}^tA{}^tP^{-1} = P^{-1}AP$ et finalement ${}^t(P^{-1}AP) = P^{-1}AP$. Ainsi, $P^{-1}AP$ est symétrique réelle, donc diagonalisable qui entraine à son tour A diagonalisable.

Exercice 45 (Sur l'équation $\det(I_n - xA - yB) = \det(I_n - xA)\det(I_n - yB), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$**.)**
Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$(H_n) \qquad \det(I_n - xA - yB) = \det(I_n - xA)\det(I_n - yB), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $AB = 0$. On pourra procéder de la manière suivante :

❶ *Soit $A = ((a_{ij}))$ une matrice symétrique positive ; si un élément diagonal a_{ii} $(1 \leq i \leq n)$ est nul il en est de même pour la ligne (et la colonne correspondante) i.e. $a_{ij} = a_{ji} = 0,\ \forall\, 1 \leq j \leq n$.*

❷ *Soient $U, V \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose $U \geq 0,\ V$ symétrique et*

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \ : \quad \det(U - tV) = 0.$$

Alors

$$\ker(V) \cap \ker(U) \neq \{0\}.$$

❸ *Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que B (ou A, c'est pareil par symétrie) admet une valeur propre λ non nulle telle que $\ker(A) \cap \ker(I_n - \lambda B) \neq \{0\}$.*

❹ *En déduire l'objectif de l'exercice en procédent par récurrence sur n.*

On procède par récurrence sur la taille n de la matrice, la propriété est clairement vraie pour $n = 1$.

Soit $n \geq 2$, on suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ et soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$(H_n) \qquad \det(I_n - xA - yB) = \det(I_n - xA)\det(I_n - yB), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Montrons que $AB = 0$. Tout repose sur le fait suivant (on exclut le cas trivial où au moins une des deux matrices est nulle) :

$(\bigstar)$ B (ou A, c'est pareil par symétrie) admet une valeur propre λ non nulle telle que $\ker(A) \cap \ker(I_n - \lambda B) \neq \{0\}$.

Admettons pour le moment $(\bigstar)$ et prouvons l'assertion au rang n. Soit λ une valeur propre non nulle de B telle que $\ker(A) \cap \ker(I - \lambda B) \neq \{0\}$ et soit $e_\lambda \in \ker(A) \cap \ker(I - \lambda B) \setminus \{0\}$. On considère alors une base orthogonale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ de premier terme e_λ. Les matrices de A et B dans cette base sont respectivement de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$ où les

[2] Il existe $O \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = O^{-1}DO = {}^tODO$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\lambda_i > 0,\ \forall i)$; si on pose $\sqrt{D} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ alors $P = \sqrt{D}O$ convient.

matrices A' et B' sont dans $\mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ (c'est la symétrie de A et B et l'orthogonalité de $\mathscr{B}$ qui imposent aux deux matrices d'etre symétrique ce qui impose à son tour la symétrie des deux sous matrices A' et B' et les zéros sur les premières lignes à partir du second terme). Maintenant par un calcul élémentaire

$$\det(I_n - xA - yB) = (1-\lambda y)\det(I_{n-1} - xA' - xB')$$
$$\det(I_n - xA)\det(I_n - yB) = (1-\lambda y)\det(I_{n-1} - xA')\det(I_{n-1} - xB')$$

soit

$$\det(I_{n-1} - xA' - xB') = \det(I_{n-1} - xA')\det(I_{n-1} - xB'), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$: $A'B' = 0$. De là

$$AB = P^{-1}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) P = P^{-1}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A'B' \end{array}\right) P = 0$$

et le tour est joué. ■

Il reste donc à établir la propriété (★), c'est la partie délicate qui se déduit des deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Soit $A = ((a_{ij}))$ une matrice symétrique positive ; si un élément diagonal a_{ii} $(1 \leq i \leq n)$ est nul il en est de même pour la ligne (et la colonne correspondante) i.e. $a_{ij} = a_{ji} = 0,\ \forall\, 1 \leq j \leq n$.*

Preuve du lemme 1 : Considérons une telle matrice et supposons par l'absurde qu'il existe un coefficient $a_{ji} \neq 0$. Soit $X_t = (x_k)_1^n$ le vecteur colonne où $x_j = 1, x_i = ta_{ji},\ t \in \mathbb{R}$ et où les autres composantes sont nulles, alors ${}^tX_tUX_t = a_{jj} + ta_{ji}^2$ change de signe lorsque t décrit $\mathbb{R}$ ce qui est absurde. ■

Lemme 2. *Soient $U, V \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose $U \geq 0,\ V$ symétrique et*

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \ : \quad \det(U - tV) = 0.$$

Alors

$$\ker(V) \cap \ker(U) \neq \{0\}.$$

Preuve du lemme 2 : On diagonalise V dans une base orthonormée :

$$PV{}^tP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) = \left(\begin{array}{c|c} D_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) := D, \quad \lambda_i \neq 0,$$

on a alors

$$PU{}^tP - tPV{}^tP = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & U_2 \\ \hline {}^tU_2 & U_3 \end{array}\right) - t\left(\begin{array}{c|c} D_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U_1 - tD_r & U_2 \\ \hline {}^tU_2 & U_3 \end{array}\right).$$

Vu l'hypothèse, le polynôme en "t"

$$\det(PU{}^tP - tD) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

est identiquement nul (bien entendu, $r < n$) et son terme de plus haut degré est (au signe près) $\det(U_3)$ qui est donc nul.

Quitte à modifier les $n-r$ vecteurs de base $e_{r+1},\dots,e_n$ on peut supposer U_3 diagonale, plus précisément soit $Q\in\mathscr{O}_{n-r}$ telle que

$$ {}^tQU_3Q=\operatorname{diag}(u_{r+1,r+1},\dots,u_{n,n}) $$

Dans la nouvelle base correspondant à la matrice orthogonale $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & Q\end{array}\right)$ notre matrice $PU{}^tP-tPV{}^tP$ s'écrit $\left(\begin{array}{c|c} U_1-tD_r & U_2' \\ \hline {}^tU_2' & \operatorname{diag}(u_{r+1,r+1},\dots,u_{n,n})\end{array}\right)$

Il en résute que $\det(U_3)=(-1)^ru_{r+1,r+1},\dots,u_{n,n}=0$ qui assure que la matrice U symétrique positive admet un élément diagonal disons $u_{ii},(i\in\{r+1,\dots,n\})$ nul ; on peut donc appliquer le lemme 1 et affirmer que la ième colonne correspondante dans U est nulle. Ainsi $PU{}^tPe_i=0$, mais on a aussi

$$ PV{}^tPe_i=De_i=\left(\begin{array}{c|c} D_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)e_i=0 $$

car $i\in\{r+1,\dots,n\}$ ou encore $U{}^tPe_i=V{}^tPe_i=0$, soit finalement

$$ {}^tPe_i\in\ker(U)\cap\ker(V). $$

CQFD ■

Preuve de (★) : Soit λ une valeur propre non nulle de B, l'hypothèse (H_n) implique que

$$ \det(I_n-\lambda^{-1}B-xA)=0,\quad \forall\, x\in\mathbb{R} $$

on est donc dans le cadre du lemme 2 avec $V=A$ et $U=I_n-\lambda^{-1}B$ qui sera positive si on choisit pour λ la plus grande des valeurs propres non nulle. ❏

ℹ C'était un exercice « estival » aimablement proposé par notre collégue J.B.Hiriart-Urruty.

Deuxième partie

POLYNÔMES

Exercice 46 (Sur les polynômes de la forme $P = QP''$ avec $\deg(Q) = 2$)
Putnam 1999

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré d. On suppose que $P = QP''$ où Q est de degré 2. Montrer que si P admet au moins deux racines distinctes alors, il doit avoir d racines distinctes.

➪ **Solution 1 :** Supposons que P n'admet pas d racines distinctes, il admet donc une racine au moins double que l'on peut supposer, sans perdre de généralité être égale à 0 (quitte à remplacer x par $x-a$). Désignons par n la multiplicité de ce zéro, on a donc $P(x) = x^n R(x)$ avec $R(0) \neq 0$. Soit

$$P''(x) = (n^2 - n)x^{n-2}R(x) + 2nx^{n-1}R'(x) + x^n R''(x).$$

Comme $R(0) \neq 0$ et $n \geq 2$, $x = 0$ est une racine d 'ordre au plus $n - 2$ de P'' et par conséquent (car c'est aussi une racine d'ordre n de P) x^2 divise Q. Mais Q est de degré 2 et donc de la forme $Q(x) = Cx^2$ où $C = d^{-1}(d-1)^{-1}$ (en comparant les termes de degré d dans $P = Cx^2P''$...).
Pour conclure, l'égalité $P(x) = a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0 = d^{-1}(d-1)^{-1}x^2P''(x)$ implique $a_j = d^{-1}(d-1)^{-1}j(j-1)a_j,\ 0 \leq j \leq d$, soit $a_j = 0$ pour $0 \leq j \leq d-1$ et finalement $P(x) = a_dx^d$.

❏

Exercice 47 (Trois exercices sur les polynômes) [10], *2003/04.*
❶ *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, P non constant et E un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$. Montrer que*

$$|P^{-1}(E)| \geqslant (|E| - 1)\deg P + 1.$$

❷ *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $d \geqslant 1$. On note $n(z)$ le nombre de racines de l'équation $P(x) = z$. Donner une expression de*

$$\sum_{z\in\mathbb{C}} (d - n(z)).$$

❸ *Soit $P(X,Y)$ un polynôme réel de deux variables. On suppose P de degré au plus m en X et au plus n en Y. Montrer que la fonction de variable réelle $x \mapsto P(e^x, x)$ admet au plus $mn + m + n$ zéros.*

❶ Notons[3] C l'ensemble des points critiques de P, c'est-à-dire l'ensemble des zéros de P', $V = P(C)$ l'ensemble des valeurs critiques de P. Introduisons les ensembles $F = E \cap V$ et $G = E \setminus F$.
Soit $w \in G$; par définition de G, tous les zéros du polynôme $P - w$ sont simples, donc $P - w$ possède $\deg(P)$ racines distinctes. De là, $\mathrm{card}(P^{-1}(G) = \deg(P)\,\mathrm{card}(G)$.
Ecrivons $F = \{w_1, \ldots, w_r\}$ où les w_i sont deux à deux distincts et notons $x_{1,j}, \ldots, x_{p(j),j}$ les racines de $P - w_j$, $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{p(j),j}$ leurs multiplicités, de somme $\deg(P)$. Chaque $x_{i,k}$ est

[3] Nous reprenons in-extenso les solutions données dans la revue.

racine de P' avec la multiplicité $\alpha_{i,k}-1$; le nombre de racines de P' ainsi obtenu est de ce fait

$$S=\sum_{i,j}(\alpha_{i,j}-1)=r.\deg(P)-\mathrm{card}(P^{-1}(F)\leqslant\deg(P')$$

il en résulte $\mathrm{card}(P^{-1}(F))\geqslant(r-1)\deg(P)+1=(\mathrm{card}(F)-1)\deg(P)+1$.
En réunissant les deux résultats ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(P^{-1}(E))&=\mathrm{card}(P^{-1}(F))+\mathrm{card}(P^{-1}(G))\\&\geq\deg(P)(\mathrm{card}(F)+\mathrm{card}(G)-1)+1=\deg(P)(\mathrm{card}(E)-1)+1.\end{aligned}$$

❷ Comme dans la question précédente, on introduit l'ensemble C des points critiques de P, c'est-à-dire l'ensemble des zéros de P', et l'ensemble $V=P(C)$ des valeurs critiques de P.

➪ Lorsque $z\notin V$, aucune des racines du polynôme complexe $P(X)-z$ n'est multiple, on a donc, avec les notations de l'énoncé, $d=n(z)$. La contribution de z à la somme étudiée est donc nulle.

➪ Notons $z_1,\dots,z_r$ les éléments de V. Pour j dans $\{1,\dots,r\}$, soient $x_{1,j},\dots,x_{p(j),j}$ les racines complexes de $P(X)-z_j$ appartenant à C, de multiplicités respectives $\alpha_{1,j},\dots,\alpha_{p(j),j}$ dans P'. Ces racines sont précisément les racines multiples de $P(X)-z_j$, car ce dernier a pour dérivée P'.

Donc $P(X)-z_j$ possède exactement $d-\sum_{i=1}^{p(j)}\alpha_{i,j}$ racines distinctes, et de ce fait

$$d-n(z)=\sum_{i=1}^{p(j)}\alpha_{i,j}.$$

Or les ensembles $\{x_{1,j},\dots,x_{p(j),j}\}$ constituent, quand j parcourt $\{1,\dots,r\}$, une partition de C. La somme des $d-n(z)$, $z\in V$, est donc égale à la somme des racines de P' comptées avec leurs multiplicités, c'est-à-dire au degré de P' : la somme cherchée est $d-1$.

❸ On suppose bien évidemment P non nul et non constant. On raisonne par récurrence sur le degré m de P en X, le cas de $m=0$ étant trivial. Supposons donc $m\geqslant 1$, et

$$f(x)=P(x,e^x)=e^{mx}P_m(x)+\cdots+P_0(x)$$

avec $P_m\neq 0$ et $\deg(P_0)\leqslant n$. Par les opérations usuelles, la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ au voisinage de chaque point ; puisque f n'est pas nulle, on peut déterminer, pour chaque zéro a de f, le premier indice p_a tel que $f^{p_a}\neq 0$, que l'on appelle multiplicité du zéro a de f. Avec cette définition, un zéro de f de multiplicité p devient un zéro de f' de multiplicité $p-1$, et le théorème de Rolle amène usuellement le fait que, si f possède au moins N zéros comptés avec leurs multiplicités, f' en possède au moins $N-1$.
Montrons alors, avec les notations de l'énoncé, que la somme des multiplicités des zéros de f est majorée par $mn+m+n$.
Comme $\deg(P_0)\leqslant n$, la dérivée $n+1$-ème de f est de la forme

$$g(x) = e^{mx}.Q_m(x) + \cdots + e^x.Q_1(x)$$

où les Q_i sont des polynômes vérifiant, par une récurrence immédiate, $\deg(Q_i) = \deg(P_i)$. Après simplification par e^x, on applique l'hypothèse de récurrence à g qui possède donc moins de $(m-1)n+m-1+n$ zéros, comptés avec leurs multiplicités. D'après ce qui précède (Rolle) le nombre de zéros de f est borné par $(m-1)n+m-1+n+n+1 = mn+n+m$. ❑

Exercice 48 (Polynômes harmoniques et homogènes en deux variables) [10], *2003/04.*
Soit E_n l'ensemble des polynômes réels à deux variables homogènes de degré n, A_n le sous-ensemble des $P \in E_n$ multiples de X^2+Y^2 et H_n celui des $P \in E_n$ harmoniques (i.e. tels que $\Delta P = 0$).
Montrer qu'on a $E_n = A_n \oplus H_n$.

➪ E_n est le sous-espace de $\mathbb{R}[X,Y]$ de base $\{X^iY^{n-i}\ /i = 0,\dots,n\}$ donc de dimension $n+1$. ➪ A_n est l'ensemble des $(X^2+Y^2)Q$ où $Q \in E_{n-2}$. En effet, si Q est homogène de degré $n-2$, il est clair que $(X^2+Y^2)Q$ est homogène de degré n. Inversement, si $P \in A_n$, homogène de degré n, s'écrit $P = (X^2+Y^2)Q$, alors Q est homogène de degré $n-2$; pour le voir on peut invoquer le résultat suivant

$P \in \mathbb{R}[X,Y]$ est homogène de degré n si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^n P(X,Y)$.

La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante si $P = \sum_{(i,j)\in F} a_{i,j}X^iY^j$, avec F fini, la relation donne $\forall (i,j) \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, a_{i,j}(\lambda^n - \lambda^{i+j}) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est infini, $a_{i,j} = 0$ dès que $i+j \neq n$.

On déduit que si $P = (X^2+Y^2)Q$ est homogène de degré n, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^n(X^2+Y^2)Q(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^2(X^2+Y^2)Q(\lambda X, \lambda Y)$$

puis, du fait que $\mathbb{R}[X,Y]$ est intègre, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^{n-2}Q(X,Y) = Q(\lambda X, \lambda Y)$ i.e. $Q \in E_{n-2}$.

➪ On voit donc que A_n est de dimension $n-1$ car l'application $Q \in E_{n-2} \mapsto (X^2+Y^2)Q \in A_n$ est un isomorphisme.

➪ Déterminons le noyau de $\Delta_n : P \in E_n \mapsto \Delta P$. Si $P = \sum_{i=0}^n a_iX^iY^{n-i}$ on a

$$\Delta P = \sum_{k=0}^{n-2}\big((n-k)(n-k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}\big)X^kY^{n-2-k}$$

donc ΔP est nul si, et seulement si, $\forall k, a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+1)(k+2)}a_k$ c'est à dire si, et seulement si,

$$\text{pour } 0 \leqslant 2k \leqslant n, a_{2k} = (-1)^k C_n^{2k} a......slant 2k+1 \leqslant n, a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{n} C_n^{2k+1} a_1.$$

Ainsi l'application qui à $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i Y^{n-i} \in \operatorname{Ker} \Delta$ associe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme donc $\operatorname{Ker} \Delta$ est de dimension 2. De plus tout $P \in \operatorname{Ker} \Delta$ s'écrit $P = a_0 R + a_1 I$ avec

$$R = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k C_n^{2k} X^{2k} Y^{n-2......leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k C_n^{2k+1} X^{2k+1} Y^{n-2k-1}.$$

➪ Déterminons $A_n \cap \operatorname{Ker} \Delta$. Si $P = aR + bI \in \operatorname{Ker} \Delta$ est multiple de $X^2 + Y^2$, on a un polynôme Q tel que $aR + bI = (X^2 + Y^2)Q$ donc $aR(i,1) + bI(i,1) = 0$ soit

$$a \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} C_n^{2k} + bi \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} C_n^{2k+1} = 0$$

ce qui, puisque $a, b \in \mathbb{R}$, donne $a = b = 0$ et $P = 0$.

➪ En conclusion A_n et $\operatorname{Ker} \Delta$ ont une intersection réduite à $\{0\}$ et la somme de leur dimension est égale à celle de E_n $(n+1)$ donc on a $E_n = A_n \oplus H_n$. ❑

ℹ **Remarques :** ➪ Ainsi tout $P \in E_n$ s'écrit de manière unique

$$P = H + (X^2 + Y^2)Q \text{ avec } H \text{ harmonique et } Q \in E_{n-2}.$$

On peut décomposer Q de la même manière et en itérant on obtient une écriture $P = \sum_{i=0}^{E(n/2)} H_i (X^2 + Y^2)^i$ avec H_i harmonique et homogène de degré $n - 2i$.

➪ On peut aussi contourner le calcul en notant que les polynômes (complexes) $(X + \pm iY)^n$ sont homogènes de degré n et harmoniques. On en déduit aisément que $\frac{1}{2}\big((X+iY)^n + (X - iy)^n\big)$ et $\frac{1}{2i}\big((X+iY)^n - (X-iy)^n\big)$ constituent une base de $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$. D'ailleurs ce sont à peu près les polynômes R, I ci-dessus.

Exercice 49 (Polynomes et fractions rationelles, approximation) [10], *2003/04.*
Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des fractions rationnelles réelles sans pôle dans $[0,1]$ et $\mathscr{R}_{m,n}$ le sous-ensemble des fractions $F = \frac{P}{Q}$ où P est de degré $\leqslant n$ et Q de degré $\leqslant m$.
❶ *Ces ensembles sont-ils des espaces vectoriels ?*
❷ *On considère $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\inf\{||g - r||_\infty \;/\; r \in \mathscr{R}_{m,n}\}$ est atteint*
 (i) *Lorsque $n = 0$.*
 (ii) *Dans tous les cas.*

❶ Pour $m = 0$, $\mathscr{R}_{m,n}$ est un espace vectoriel (pour les opérations usuelles sur les fonctions) mais pour $m \geqslant 1$, ce n'est pas le cas : par exemple $\frac{x^n}{(x+1)^m} + \frac{x^n}{(x+2)^m} \notin \mathscr{R}_{m,n}$.

❷ Pour $n = 0$, $\mathscr{R}_{m,n}$ est un espace vectoriel de dimension finie et le résultat découle du fait que dans tout espace vectoriel normé la distance à un sous-espace de dimension finie est atteinte.

Passons au ii). Si f est continue sur I et F rationnelle sans pôle dans I, $f - F$ est continue donc bornée sur le segment I. De plus l'ensemble $\{||f - F||_\infty \ / \ F \in E_{mn,}\}$ est non vide et minoré par 0 : il admet une borne inférieure $d_{m,n}(f)$.

Soit $F_k = \frac{P_k}{Q_k}$, avec $P_k \in \mathbb{R}_m[X]$ et $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ sans zéro dans I, une suite de $E_{m,n}$ telle que $||f - F_k||_\infty$ tend vers $d_{m,n}(f)$. Quitte à multiplier P_k et Q_k par une même constante, on peut supposer $||Q_k||_\infty = 1$.

De plus la suite $||F_k - f||_\infty$ est convergente donc bornée, donc la suite des $||F_k||_\infty$ est aussi bornée par un réel $M \geqslant 0$. On a alors $\forall k, ||P_k||_\infty = ||Q_k F_k||_{\infty ???} ||Q_k||_\infty ||F_k||_\infty \leqslant M$. Ainsi les deux suites (P_k) et (Q_k) sont des suites bornées d'un espace normé de dimension finie, selon le théorème de Bolzano-Weirstrass il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(P_{\phi(k)})$ converge vers un polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ puis il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(Q_{\phi(\psi(k))})$ converge vers un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

ℹ Attention, Q n'est pas le polynôme nul (car $||Q||_\infty = 1$) mais a priori il peut s'annuler dans $[0, 1]$.

Soit $F = \frac{P}{Q} \in E_{m,n}$. Pour tout x non zéro de Q, on a $F(x) = \lim_k \frac{P_{\phi(\psi(k))}(x)}{Q_{\phi(\psi(k))}(x)}$ (car la convergence uniforme entraîne la convergence simple) et donc

$$|f(x) - F(x)| = \lim_k \Big| f(x) - \frac{P_{\phi(\psi(k))}(x)}{Q_{\phi(\psi(k))}(x)} \Big| \leqslant d_{m,n}(f)$$

Comme f est bornée, on en déduit que F est bornée sur le complémentaire d'une partie finie de $[0, 1]$ donc elle n'a pas de pôle dans $[0, 1]$ (si elle avait un pôle a on aurait $\lim_{x \to a} |F(x)| = +\infty$) et donc $F \in E_{m,n}$.

De plus le calcul précédent montre que $||f - F||_\infty \leqslant d_{m,n}(f)$ et donc, comme l'inégalité inverse est évidente, on a $||f - F||_\infty = d_{m,n}(f)$.

Exercice 50 (Polynômes, nombres premiers) [8]
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant

$$P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} \cdots + a_1 X + a_0$$

tel que $P(k)$ soit premier pour tout entier k (L.Euler).

Soit $N, M \in \mathbb{N}$ tels que $P(N) = M$. Alors, pour tout entier k

$$P(N+kM) - P(N) = a_d \left((N+kM)^d - N^d \right) + a_{d-1} \left((N+kM)^{d-1} - N^{d-1} \right) + \cdots + a_1 (N + kM - N)$$

est divisible par kM (car $(N + kM)^j - N^j$, $(1 \leq j \leq d)$ est divisible par $N + kM - N = kM$) donc par M. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad P(N + kM) \quad \text{est divisible par} \quad M.$$

Un polynôme de degré $d \geq 1$ ne pouvant prendre au plus d fois la même valeur il existera dans la suite $(P(N + kM))_{k=0}^{2n+1} \subset M\mathbb{Z}$ des entiers distincts de $\pm M$ donc non premiers. ❑

Remarque : Par contre la réponse est oui en plusieurs variables..............à suivre......

Exercice 51 (Polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$) *Montrer que si le produit de deux polynômes $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme à coefficients pairs non **tous** multiples de 4, alors dans l'un des deux polynômes A, B, tous les coefficients doivent être pairs et dans l'autre tous ne sont pas pairs.*

Notons

$$A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, \qquad B = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m.$$

Puisque $AB \notin 4\mathbb{Z}[X]$ nécessairement l'un des deux polynômes, disons B, possède au moins un coefficient impair.

Supposons alors que tous les coefficients de A ne soient pas pairs, soit a_s (resp. b_k) le premier coefficient impair de A (resp. B) alors le coefficient de X^{s+k} dans AB est

$$\underbrace{\overbrace{a_0b_{k+s} + a_1b_{k+s-1} + \cdots + a_{s-1}b_{k+1}}^{pair\cdot(?)+pair\cdot(?)+\cdots+pair\cdot(?)}}_{pair} + \underbrace{\overbrace{a_sb_k}^{impair\cdot impair}}_{impair} + \underbrace{\overbrace{a_{s+1}b_{k-1} + \cdots + a_{k+s}b_0}^{(?)\cdot pair+(?)\cdot pair+(?)\cdot pair}}_{pair}$$

il est donc impair, d'où la contradiction. ❑

Exercice 52 (Polynômes trigonométriques : un théorème de Fejèr-Riesz) [10],ex.77, 2003/04
Soit $g\ :\ x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$. On suppose g positive sur $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$g(x) = |P(e^{ix})|^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En écrivant g sous la forme

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_ke^{ikx} \ \text{ avec }\ c_n \neq 0 \text{ et } c_k = \overline{c\_k},\ \forall\, 0 \leq k \leq n$$

nous avons pour $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) := g(x) + \varepsilon &= e^{-inx}\left(c_{-n} + c_{-n+1}e^{ix} + \cdots + (c_0+\varepsilon)e^{inx} + \cdots + c_ne^{2inx}\right) \\ &= e^{-inx}Q_\varepsilon(e^{ix}) \qquad\qquad (\text{✘}) \end{aligned}$$

où le polynôme

$$Q_\varepsilon(z) = c_{-n} + c_{-n+1}z + \cdots + (c_0+\varepsilon)z^n + \cdots + c_nz^{2n}$$

vérifie pour tout $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbb{C}^\star$

$$(\bigstar) \qquad Q_\varepsilon(z) = z^{2n}\overline{Q_\varepsilon\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

La démonstration s'enchaîne alors de la manière suivante :

➪ **Étape 1 :** *Pour tout $\varepsilon > 0$, le polynôme Q_ε est sans racines sur le cercle unité.*

C'est une conséquence immédiate de la formule (✘) qui implique $|Q_\varepsilon(e^{ix})| \geq \varepsilon$.

➪ **Étape 2 :** *Soit $\varepsilon > 0$. Si $\zeta \in \mathbb{C}$ est une racine de Q_ε, alors $\overline{\zeta}^{-1}$ est aussi racine de Q_ε avec la même multiplicité.*

Remarquons déja que, $Q_\varepsilon(0) \geq \varepsilon > 0$, donc $\zeta \neq 0$. On a alors $Q_\varepsilon(z) = (z-\zeta)^d R(z)$ où $R \in \mathbb{C}_{2n-d}[X]$ vérifie $R(\zeta) \neq 0$. En exploitant ($\bigstar$), on peut aussi écrire $Q_\varepsilon(z) = (1-\overline{\zeta}z)^d S(z)$ où le polynôme $S(z) = z^{2n-d}\overline{R(\overline{z}^{-1})}$ vérifie $S(\overline{\zeta}^{-1}) \neq 0$. C.Q.F.D.

➪ **Étape 3 :** *Les éventuelles racines de Q_0 sur le cercle unité sont de multiplicités paires.*

Supposons au contraire qu'une telle racine $e^{i\theta}$ soit de multiplicité $2m-1,\ m \in \mathbb{N}^\star$. La suite de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ étant simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers Q_0, les racines d'un polynôme dépendant continuement de ses coefficients et les polynômes Q_ε étant sans racines sur le cercle unité, il existe $r > 0,\ \varepsilon_r > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_r$ le polynôme Q_ε possède exactement $2m-1$ racines (comptées avec leurs multiplicités) dans le disque $D(e^{i\theta}, r)$. Vu l'étape précédente, et quitte à réduire ε_r, nous sommes alors assurés que pour toute racine ζ de Q_ε

$$\zeta \in D(e^{i\theta}, r) \cap D(0,1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\zeta}^{-1} \in D(e^{i\theta}, r) \cap \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$$

ces zéros ont donc même multiplicité et le nombre de racine de Q_ε dans $D(e^{i\theta}, r)$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_r)$ est forcément pair, d'où la contradiction et les racines éventuelles de Q_0 sur le cercle unité sont de multiplicité paire.

➪ **Étape 4 : la conclusion** $\zeta_1^\varepsilon, \dots, \zeta_n^\varepsilon$ désignant les racines de Q_ε dans le disque unité, nous avons donc

$$Q_\varepsilon(z) = \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1^\varepsilon} \dots \overline{\zeta_n^\varepsilon}} \prod_{j=1}^n (z - \zeta_j^\varepsilon)(1 - \overline{\zeta_j^\varepsilon} z)$$

où la somme ne porte que sur les racines $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ de module strictement plus petit que 1 (conséquence des deux premières étapes). Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers vers zéro, et, toujours en invoquant la continuité « coefficients-racines » d'un polynôme :

$$Q_0(z) = \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1} \dots \overline{\zeta_n}} \prod_{j=1}^n (z - \zeta_j)(1 - \overline{\zeta_j} z)$$

(si par exemple $|\zeta| < 1$ est racine de Q_0, il existera une suite $(\zeta_\varepsilon)_\varepsilon$ de racines de Q_ε de module < 1 et de limite ζ ; vu l'étape 2, la suite de racines $(\overline{\zeta_\varepsilon}^{-1})_\varepsilon$ se doit de converger vers

la racine $\overline{\zeta}^{-1}$; par « symétrie » la situation est analogue à l'extérieur du disque unité, enfin sur le cercle unité on invoque l'étape 3 tout en remarquant que dans ce cas $\zeta = \overline{\zeta}^{-1}$).
On peut donc écrire

$$\begin{aligned} g(x) = e^{-inx}Q_0(e^{ix}) &= \frac{(-1)^n c_n e^{inx}}{\overline{\zeta_1}\dots\overline{\zeta_n}} \prod_{j=1}^n (e^{ix}-\zeta_j)(1-\overline{\zeta_j}e^{ix}) \\ &= \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1}\dots\overline{\zeta_n}} \prod_{j=1}^n (e^{ix}-\zeta_j)(e^{-ix}-\overline{\zeta_j}) \\ &= \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1}\dots\overline{\zeta_n}} \Big| \prod_{j=1}^n (e^{ix}-\zeta_j)\Big|^2, \end{aligned}$$

finalement,

$$g \geq 0 \implies c = \frac{(-1)^n c_n}{\overline{\zeta_1}\dots\overline{\zeta_n}} \geq 0,$$

en posant $d := \sqrt{c}$ et $P(X) = d\prod_{j=1}^n (X-\zeta_j)$, soit encore

$$g(x) = \left|P(e^{ix})\right|2$$

et le résultat est démontré. ❑

ℹ **Remarque :** Ce résultat est dû à L. FEJÈR et F. RIESZ (voir F. RIESZ & B.S. NAGY « Functional Analysis », Dover, pages 117-118 ou bien Q.I. RAHMAN & G. SCHMEISSER « *Analytic Theory of Polynomials* », Oxford Publications (2002) page 410). On peut aussi remarquer que pour notre choix de P, toutes ses racines sont dans le disque unité fermé.

Exercice 53 (Autour du résultant de deux polynômes)
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non nuls de degrés respectifs n et m. Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{P, XP, X^2P, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q\}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

➪ Soit α une racine commune aux deux polynômes P, Q : il existe alors deux polynômes non nuls P_0, Q_0 tels que

$$P(X) = (X-\alpha)P_0(X) \quad \& \quad Q(X) = (X-\alpha)Q_0(X)$$

si bien qu'en posant $U = Q_0,\ V = -P_0$ on a

$$UP + VQ = 0$$

avec

$$\deg(U) = \deg(Q) - 1,\ \deg(V) = \deg(P) - 1.$$

➪ Réciproquement, supposons qu'il existe deux polynômes non nul U, V tels que

$$\deg(U) < \deg(Q) \quad \& \quad \deg(V) < \deg(P)$$

suite ? ? ? ? ? ? ? ? ? ❏

Remarques & applications : ➪ On appelle **matrice de Sylvester**, la matrice $S(P,Q)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n+m-1}[X]$ du système de vecteurs $\mathscr{F}$, son déterminant $\mathsf{res}(P,Q) = \det S(P,Q)$ est le **résultant** de P et Q ; on a donc :

$$\mathsf{res}(P,Q) \neq 0 \quad \iff \quad P \wedge Q = 1.$$

➪ Une application immédiate est que l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ formé des matrices ayant n valeurs propres distinctes est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$: en effet vu la remarque précédente

$$A \in \mathscr{D}'_n(\mathbb{C}) \quad \iff \quad P_A \wedge P'_A = 1 \quad \iff \quad \varphi(A) = \mathsf{res}(P_A, P'_A) \neq 0,$$

l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ est donc ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{C}^\star$ par l'application continue (car polynomiale en les coefficients de A) φ, c'est en fait même un ouvert dense (voir l'exercice ci-dessous).

Exercice 54 (Le théorème de Gauss-Lucas)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme, P' son polynôme dérivé. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P (théorème de Gauss-Lucas).

On peut supposer P de degré $d \geq 1$. Il existe des entiers $1 \leq n \leq d, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $P(X) = \lambda \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ alors

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{X - \lambda_j}$$

et si z_0 est une racine de P' distincte des racines de P (pour les autres il n'y a rien à démontrer)

$$\begin{aligned} \frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \quad 0 = & \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{z_0 - \lambda_j} \\ \iff \quad 0 = & \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\overline{z_0} - \overline{\lambda_j}} \\ \iff \quad 0 = & \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{|z_0 - \lambda_j|^2} (z_0 - \lambda_j) \end{aligned}$$

ainsi, z_0 est le barycentre des $(\lambda_j)_1^n$ affectés des poids $\frac{\alpha_j}{|z_0 - \lambda_j|^2}$: il est donc dans l'enveloppe convexe des zéros de P. ❏

Exercice 55 (Le théorème de Gauss-Lucas : nouvelle approche)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme, P' son polynôme dérivé. Il s'agit de montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P (théorème de Gauss-Lucas).

❶ *Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ vérifiant*

$$\exists \psi, \quad \forall\, j \in \{1, \dots, n\} \ : \quad z_j = \rho_j e^{i\theta_j} \ \text{ avec } \ 0 \leq |\theta_j| < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

(en d'autre terme les z_j sont à partie réelle strictement positive et l'angle sous lequel on les voit depuis l'origine est inférieur à 2ψ) montrer que

$$(✔) \qquad |z_1 \dots z_n|^{1/n} \cos(\psi) \leq \frac{1}{n} |z_1 + \dots + z_n|.$$

❷ *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ et H l'enveloppe convexe de ses racines. Soient $z \notin H$ et 2ψ l'angle sous lequel H est vu de z ; montrer que*

$$(✘) \qquad \left| \frac{a_n}{P(z)} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{n\cos(\psi)} \left| \frac{P'(z)}{P(z)} \right|.$$

❸ *En déduire le théorème de Gauss-Lucas.*

❶ (✔) est une « version complexe » de l'inégalité arithmético-géométrique (en particulier, si les z_j sont réels on peut prendre $\psi = 0$ et on retombe sur l'inégalité arithmético-géométrique classique). On a vu les hypothèses sur les z_j et l'inégalité arithmético-géométrique

$$\begin{aligned} |z_1 + \dots + z_n| &\geq |\mathrm{Re}(z_1 \dots + z_n)| \\ &= |z_1| \cos(\theta_1) + \dots + |z_n| \cos(\theta_n) \\ &\geq (|z_1| + \dots + |z_n|) \cos(\psi) \\ &\geq n |z_1 \dots z_n|^{1/n} \cos(\psi) \end{aligned}$$

soit (✔).

❷ Pour l'inégalité (✘) soient $r_1, \dots, r_n$ les racines de P (comptées avec leur multiplicités) et $z \notin H$. En écrivant $z - r_j := \rho_j e^{i\theta_j}$, $(1 \leq j \leq n)$ on a

$$\frac{1}{z - r_j} = \rho_j^{-1} e^{-i\theta_j}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

H étant inclu dans le cône $\{re^{i\theta},\ |\theta| \leq \psi\}$ et $z \notin H$, nous pouvons appliquer (✔) à la famille $(\frac{1}{z-r_j})_1^n$ soit

$$\cos(\psi) \left| \frac{1}{z - r_1} + \dots + \frac{1}{z - r_n} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - r_j} \right|$$

soit (✘).

❸ Pour démontrer le théorème de Gauss-Lucas, on raisonne par l'absurde : soit z un racine de P' n'appartenant pas à H, on a alors $P'(z) = 0$ et $\left| \dfrac{a_n}{P(z)} \right| > 0$ ce qui est absurde vu (✘) donc $z \in H$. ❑

🛈 **Remarque :** L'inégalité (✘) est connue comme « l'inégalité de Wilf ».

Exercice 56 (Une inégalité autour des polynômes)
Montrer qu'il existe une constante $C \geq 4.10^6$ *telle que*

$$\forall\, P \in \mathbb{C}_{2004}[X], \qquad |P(1) - P'(1) + P(-1) + P'(-1)| \leq C \int_{-1}^{1} |P(t)|dt.$$

Considérons l'application

$$f\ :\ (a_0, a_1, \dots, a_{2004}) \in \mathbb{C}^{2005} \backslash \{0_{\mathbb{C}^{2005}}\} \mapsto f(a_0, a_1, \dots, a_{2004}) = \frac{|P(1) - P'(1) + P(-1) + P'(-1)|}{\int_{-1}^{1} |P(t)|dt},$$

où $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{2004} x^{2004} \in \mathbb{C}_{2004}[X]$.
➪ Il n'est pas difficile de vérifier que f est homogène de degré 0, i.e.

$$f(ta_0, ta_1, \dots, ta_{2004}) = f(a_0, a_1, \dots, a_{2004}), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^\star.$$

➪ Le second point est que f est continue sur la sphère unité de $\mathbb{C}^{2004}$ (c'est une fraction rationnelle en les variables $a_0, a_1, \dots, a_{2004}$) dont le dénominateur $\int_{-1}^{1} |P(t)|dt$ s'annule seulement si $P = 0$ i.e. $a_0 = a_1 = \dots = a_{2004} = 0$).

Par compacité de la sphère unité, l'application continue f y est bornée (disons par $C > 0$) et par homogénéité $f \leq C$ sur $\mathbb{C}^{2004} \setminus \{0_{2004}\}$. L'inégalité pour $P = 0$ étant une égalité, la démonstration est terminée.
Avec $P(x) = x^{2004}$ on vérifie sans peine que $C \geq 4.10^6$. ❑

Exercice 57 (Encore un calcul de $\zeta(2)$) [15]
❶ *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe un unique polynôme* P_n *vérifiant*

$$P_n(\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t})) = \frac{\sin((2\mathrm{n}+1)\mathrm{t})}{\sin^{2\mathrm{n}+1}(\mathrm{t})}, \qquad \forall\, \mathrm{t} \in]0, \pi/2[.$$

❷ *Expliciter les racines de* P_n *et calculer leur somme.*
❸ *En observant que*

$$\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t}) \leq \frac{1}{\mathrm{t}^2} \leq 1 + \mathrm{cotan}^2(\mathrm{t}), \qquad \forall\, \mathrm{t} \in]0, \pi/2[,$$

retrouver la valeur de $\quad \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

❶ La formule de Moivre nous donne pour tout $t \in]0, \pi/2[$

$$\sin((2n+1)t) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(t) \cos^{2(n-k)}(t)$$

soit, en divisant par le réel non nul $\sin^{2n+1}(t)$

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k \mathrm{cotan}^{2(n-k)}(\mathrm{t}) = \mathrm{P_n}(\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t}))$$

avec $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{n-k}$. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$ répond également au problème alors $P_n(x) = Q(x)$ pour tout $x > O$: en effet tout tel x peut s'écrire $x = \mathrm{cotan}^2(\mathrm{t})$ avec $t = \mathrm{arccotan}(\sqrt{\mathrm{t}}) \in]0, \pi/2[$.

❷ P_n est bien de degré n et l'équation $P_n(\mathrm{cotan}^2(\mathrm{t})) = \sin((2n+1)t)$ nous donne déja comme racines $x_k = \mathrm{cotan}^2\left(\frac{\mathrm{k}\pi}{2\mathrm{n}+1}\right)$, $\mathrm{k} \in \{1, \dots, \mathrm{n}\}$; ces racines étant deux à deux distinctes, il s'agit de toutes les racines de P_n. Enfin, la somme des racines étant l'opposé du coefficient de X^{n-1} divisé par le coefficient dominant de P_n :

$$(✔) \qquad x_1 + \cdots + x_n = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

❷ La double inégalité résulte de l'inégalité classique $\sin(t) \leq t \leq \tan(t)$ valable sur $]0, \pi/2[$ (faire une étude de fonction ou invoquer un argument de convexité). Si on écrit cette inégalité pour $t = k\pi/2n+1$, en les sommant pour $1 \leq k \leq n$ il vient avec (✔)

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par $(2n+1)^2/\pi^2$ et faire tendre n vers $+\infty$ pour retrouver la valeur bien connue

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

❏

Exercice 58 (Nombre de racines réelles du 2005-ième itéré de $P(x) = x^2 - 1$)

Soit $P(x) = x^2 - 1$, déterminer le nombre de racines réelles distinctes de l'équation

$$\underbrace{P(P(\dots(P}_{2005}(x)))) = 0.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$P_n(x) = \underbrace{P(P(\dots(P}_{n}(x)))).$$

➪ Comme $P_1(x) = x^2 - 1 \geq -1$ sur $\mathbb{R}$, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)) \geq -1$ et l'équation $P_n(x) = a$ n'admet pas de solution pour tout $a < -1$.

➪ Montrons que l'équation $P_n(x) = a$ admet exactement deux racines réelles distinctes pour tout $a > 0$. Pour cela, procédons par récurrence sur $n \geq 1$: pour $n = 1$ c'est clair. Supposons l'assertion vraie au rang n, $P_{n+1}(x) = a$ équivaut à $P_1(P_n(x)) = a$ qui implique $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$ ou $P_n(x) = \sqrt{a+1}$; l'équation $P_n(x) = \sqrt{a+1} > 1$ admet exactement deux solutions distinctes par hypothèse de récurrence ; l'équation $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$ est sans solutions réelles puisque $-\sqrt{a+1} < -1$. Ainsi l'équation $P_n(x) = a$ admet exactement deux racines réelles distinctes pour tout $a > 0$.

➪ Nous allons maintenant montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet exactement $n+1$ solutions réelles distinctes. On procède à nouveau par récurrence sur n. Si $n = 1$ les solutions sont ± 1 et si $n = 2$: 0 et $\pm\sqrt{2}$. Supposons l'assertion vraie au rang $n \geq 3$. Comme on peut écrire $P_{n+2}(x) = P_2(P_n(x)) = P_n^2(x)(P_n^2(x)-2)$, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $P_{n+2}(x) = 0$ est exactement la réunion des racines réelles de équations $P_n(x) = 0$, $P_n(x) = \sqrt{2}$ et $P_n(x) = -\sqrt{2}$. Vu l'hypothèse de récurrence l'équation $P_n(x) = 0$ admet $n+1$ racines réelles distinctes et les deux premières étapes nous assurent que les équations $P_n(x) = \sqrt{2} > 0$ et $P_n(x) = -\sqrt{2} < -1$ admettent respectivement 2 et 0 racines réelles ; ces trois ensembles étant deux à deux disjoints, l'équation $P_{n+2}(x) = 0$ admet $n+1+2 = n+3$ solutions et l'assertion est bien établie.
En particulier l'équation $P_{2005}(x) = 0$ admet 2006 racines réelles distinctes. ❏

Exercice 59 (Racines de $P(z)$ et de $2zP'(z) - dP(z)$)
On suppose que toutes les racines d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré d se trouvent sur le cercle unité. Montrer que les racines du polynôme $Q(z) = 2zP'(z) - dP(z)$ se trouvent aussi sur le même cercle.

Il est suffisant de supposer que le coefficient dominant de P est 1 . De la décomposition $P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_d)$ avec $|\alpha_j| = 1$, un calcul élémentaire nous donne

$$Q(z) = 2zP'(z) - dP(z) = (z+\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_d) + \dots + (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z+\alpha_d)$$

soit

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k},$$

puis

$$\begin{aligned}\mathrm{re}\left(\frac{\mathrm{Q(z)}}{\mathrm{P(z)}}\right) &= \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{d} \frac{|z|^2 - |\alpha_k|^2}{|z-\alpha_k|^2} = \sum_{k=1}^{d} \frac{|z|^2 - 1}{|z-\alpha_k|^2}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$(|z| \neq 1) \Longrightarrow \left(\mathrm{re}\left(\frac{\mathrm{Q(z)}}{\mathrm{P(z)}}\right) \neq 1\right)$$

soit $Q(z) = 0 \ \Rightarrow\ |z| = 1$ et le résultat suit. ❏

Exercice 60 (Un polynôme de degré 6 et un peu de géométrie)
On suppose que le graphe d'un polynôme de degré 6 est tangent a une droite en trois points A_1, A_2, A_3 où A_2 est situé entre A_1 et A_3.
➊ *On suppose les longueurs des segments A_1A_2 et A_2A_3 égales. Montrer que les aires délimitées par ces segments et la courbe sont égales.*
➋ *Soit $k = A_1A_2/A_2A_3$, K désignant le rapport des aires des deux figures, montrer que*
$$\frac{2k^5}{7} \leq K \leq \frac{7k^5}{2}.$$

➊ Supposons, sans perdre de généralité, que le point A_2 est l'origine. Le polynôme peut s'écrire alors sous la forme

$$P(x) = (a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4)x^2 + a_5x.$$

L'équation $y = a_5x$ est donc celle de la tangente à la courbe à l'origine et détermine le segment A_1A_3. Vu l'hypothèse, les abcisses des points A_1 et A_3 sont respectivement a et $-a$ avec $a > 0$: les réels a et $-a$ sont racines doubles du polynôme $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ soit $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = a_0(x^2 - a^2)^2$ et

$$P(x) = a_0(x^2 - a^2)^2x^2 + a_5x.$$

L'égalité des aires est alors conséquence de l'égalité (par parité de $x \mapsto a_0(x^2 - a^2)^2x^2$) des intégrales

$$\int_{-a}^{0} a_0(x^2 - a^2)^2x^2dx = \int_0^a a_0(x^2 - a^2)^2x^2dx.$$

➋ Toujours sans perdre de généralité, supposons $a_0 = 1$, comme dans la situation précédente, notre polynôme peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = (x - a)^2(x - b)^2x^2 + a_5x.$$

(avec (c'est Thalés...) $b = ka,\ 0 < k < \infty$). Les aires des deux domaines sont respectivement

$$\int_{-a}^{0} (x - a)^2(x - b)^2x^2dx = \frac{a^7}{210}(7k^2 + 7k + 2)$$

et

$$\int_0^b (x - a)^2(x - b)^2x^2dx = \frac{a^7}{210}(2k^2 + 7k + 7)$$

si bien que

$$K = k^5\frac{2k^2 + 7k + 7}{7k^2 + 7k + 2} := k^5f(k).$$

La dérivée de f étant négative sur $]0, +\infty[$, f décroit de $7/2$ à $2/7$ et l'inégalité désirée en découle immédiatement. ❑

Exercice 61 (Sur les racines multiples du polynôme dérivé)
On considère un $P \in \mathbb{R}[X]$ n'admettant que des racines réelles. Si le polynôme dérivé P' admet une racine réelle multiple a, montrer que $P(a) = 0$.

Soit P un tel polynôme de degré $d \geq 1$, soient $a_1 < \cdots < a_r$ les racines distinctes de P de multiplicité respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, a_i est donc racine d'ordre $\alpha_i - 1$ de P' ; par Rolle P' admet une nouvelle racine b_i sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ $(1 \leq i \leq r-1)$ si bien que nous avons déja $\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - 1) + r - 1$ racines pour P' qui est de degré $d - 1$. Soit

$$d - 1 \geq \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i - 1) + r - 1 = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i - r + r - 1 = d - 1$$

d'où l'égalité et P' ne peut donc avoir d'autres racines ; les b_i sont donc racines simples et les éventuelles racines multiples de P' sont parmi celles de P. ❏

Troisième partie

GÉOMÉTRIE

Exercice 62 (Optimisation dans un triangle)
On désigne par h_1, h_2, h_3 les hauteurs d'un triangle et par ρ le rayon de son cercle inscrit. Déterminer le minimum de
$$\frac{h_1+h_2+h_3}{\rho}$$
lorsque l'on décrit tous les triangles non dégénérés du plan.

Si on note S l'aire du triangle, a, b, c les longueurs de ses cotés, nous avons[4]
$$h_1 = \frac{2S}{a}, \quad h_2 = \frac{2S}{b}, \quad h_3 = \frac{2S}{c}, \quad \rho = \frac{S}{p} \text{ où } 2p = a+b+c.$$
Ainsi
$$\frac{h_1+h_2+h_3}{\rho} = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b},$$
et comme il est bien connu que $x + x^{-1} \geq 2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec égalité si et seulement si $x = 1$, nous avons finalement
$$\frac{h_1+h_2+h_3}{\rho} \geq 3+6 = 9.$$
Le minimum est donc 9 et il est atteint si et seulement si le triangle est équilatéral. ❑

Exercice 63 (Sur la longueur de l'intersection entre une parabole et un disque) (Putnam, 2001).
Une parabole intersecte un disque de rayon 1. Est-il possible que la longueur de l'arc de parabole inscrit dans le disque soit supérieure ou égale à 4 ?

Sans perdre de généralité (quitte à faire une translation), on peut prendre comme cercle celui d'équation $(\mathscr{C})\ :\ x^2 + (y-1)^2 = 1$ et comme parabole, celle d'équation $(\mathscr{P}_k)\ :\ y = kx^2$ (si la parabole n'est pas tangente au cercle, on imagine bien qu'en « l'enfonçant » un peu plus, la longueur de l'arc inscrit ne peut qu'augmenter). $(\mathscr{P}_k)$ est alors tangente à $(\mathscr{C})$ en $(0,0)$ et pour $k > \frac{1}{2}$, l'intersecte en les deux points
$$\left(\pm\frac{\sqrt{2k-1}}{k}, \frac{2k-1}{k}\right).$$
La longueur d'arc inscrite dans le disque est donc
$$L(k) = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2k-1}}{k}} \sqrt{1+4k^2t^2}dt = \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1+u^2}du,$$
(après le changement de variable $u = 2kt$). Il s'agit donc d'étudier le maximum de

$$(\text{✘}) \qquad L\ :\ k \in [\frac{1}{2}, +\infty[\ \mapsto\ L(k) = \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1+u^2}du.$$

[4] trouver une ref.

Commencons par quelques observations (voir les schémas) : pour $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$ la parabole se trouve à l'extérieur du disque (figure 1) et $L(k) \equiv 0$; le cas $k > \frac{1}{2}$ est celui qui nous intéresse puisque $L(k) > 0$ d'après (✘) ; enfin si k tends vers $+\infty$ la parabole dégénère cette fois-ci en deux demi-droites confondues $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ ce qui donne comme intersection deux fois le segment $\{0\} \times [0,2]$ soit une longueur égale à 4. Il semble donc que notre fonction L croit strictement sur $\mathbb{R}_+^\star$ de 0 à 4. Mais il faut toutefois se méfier des impressions, en effet nous allons maintenant vérifier que L n'est pas strictement monotone et même prends des valeurs strictement plus grandes que 4. Justifions cette dernière affirmation :

$$\begin{aligned}
L(k) &= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1+u^2}du \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \left(\sqrt{1+u^2}-u\right) du + \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} udu \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} + \frac{4(2k-1)}{2k} \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} + 4 - \frac{2}{k} \\
&= \frac{1}{k}I(k) + 4 - \frac{2}{k},
\end{aligned}$$

ainsi,

$$L(k) > 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} > 2$$

mais la fonction croissante I vérifie

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} = +\infty$$

car la fonction intégrande est clairement non intégrable en $+\infty$: il existe donc $k_0 > \frac{1}{2}$ tel que $k > k_0 \;\Rightarrow\; I(k) > 1$ et par suite

$$\exists\, k_o > \frac{1}{2} \quad : \quad k > k_0 \quad \Longrightarrow L(k) > 4.$$

❑

🛈 **Remarques :** ➪ La fonction continue L nulle en $1/2$ tend vers tout de même vers 4 en $+\infty$ car

$$L(k) = \frac{1}{k}I(k) + 4 - \frac{2}{k}$$

et

$$0 \leq \frac{1}{k}I(k) = \frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} \leq \frac{2\sqrt{2k-1}}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

➪ Vu les variations de L, notre fonction est bornée sur $[1/2, +\infty[$ et atteint son maximum pour une valeur $1/2 < m < +\infty$. En utilisant un logiciel de calcul, on peut donner une valeur approchée de m.........autour de $4,001$...semble-t-il.

On peut s'étonner que pour résoudre cet exercice on n'étudie pas la fonction L. En effet il n'est pas trés difficile de trouver une primitive :

$$\int \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2t\sqrt{2t-1}} + \frac{1}{2}\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

mais son apparence peu sympathique nous enlève les dernières envies de calculer la dérivée de L pour étudier ses variations....

Exercice 64 (Inégalités dans un triangle (1)) R. HONSBERGER « Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry », MAA 1995 ; voir aussi http://www.les-mathematiques.net

Soit ABC un triangle propre du plan affine euclidien et trois points D, E, F respectivement sur $[BC], [CA]$ et $[AB]$ tels que $(AD), (BE)$ et (CF) soient sécantes en un point P intérieur au triangle ABC. Montrer que

$$6 \leq \frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} \quad \& \quad 8 \leq \frac{AP}{PD}\frac{BP}{PE}\frac{CP}{PF}.$$

❶ Posons $a = \frac{AP}{PD}, b = \frac{BP}{PE}, c = \frac{CP}{PF}$, P est alors le barycentre de

$$\begin{cases} (A,1) & \text{et} \quad (D,a) \\ (B,1) & \text{et} \quad (E,b) \\ (C,1) & \text{et} \quad (F,c) \end{cases}$$

ou bien, x, y, z désignant les coordonnées barycentriques de P dans le repère (A, B, C) :

$$\begin{cases} P & \text{est le barycentre de} \quad (A,x) \quad \text{et} \quad (D, y+z) \\ P & \text{est le barycentre de} \quad (B,y) \quad \text{et} \quad (E, z+x) \\ P & \text{est le barycentre de} \quad (C,z) \quad \text{et} \quad (F, x+y) \end{cases}$$

avec

$$a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{x+z}{y}, c = \frac{x+y}{z}$$

si bien que

$$a+b+c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

et de l'inégalité classique $u + \frac{1}{u} \geq 2,\ (\forall\, u > 0)$, résulte la première inégalité à établir à savoir :

$$a+b+c \geq 6.$$

❷ Pour la seconde, on utilise l'inégalité $x+y \geq 2\sqrt{xy},\ (\forall\, x, y \geq 0)$:

$$\begin{aligned} abc &= \frac{y+z}{x}\frac{x+z}{y}\frac{x+y}{z} \\ &\geq 8\frac{\sqrt{yz \times xz \times xy}}{xyz} = 8. \end{aligned}$$

❑

Exercice 65 (Inégalités dans un triangle (2)) http://www.les-mathematiques.net
Soit ABC un triangle propre du plan affine euclidien et $\mathscr{S}$ son aire. Établir l'inégalité

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\mathscr{S}\sqrt{3} \quad \textit{(Hadwiger-Finsler (1937))}$$

Cas d'égalité ?

Désignons par p le demi-périmètre du triangle ($2p = a+b+c$) et posons $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, on vérifie alors facilement que

$$\begin{cases} a^2 - (b-c)^2 & = (a-b+c)(a+b-c) = 4yz \\ b^2 - (c-a)^2 & = (b-c+a)(b+c-a) = 4xz \\ c^2 - (b-a)^2 & = (c-a+b)(c+a-b) = 4xy \end{cases}$$

si bien que l'inéquation demandée est équivalente à

$$(\bigstar) \qquad xy + xz + zy \geq \mathscr{S}\sqrt{3}$$

en élevant au carré et en utilisant la formule de Héron

$$\mathscr{S}^2 = (x+y+z)xyz$$

on est amené à vérifier

$$(xy + xz + yz)^2 \geq 3(x+y+z)xyz$$

soit, après développement

$$(\bigstar) \quad \iff \quad x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

pour vérifier cette dernière inégalité il suffit d'appliquer celle de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $u = (xy, yz, zx)$ et $v = (yz, zx, xy)$, en effet

$$\begin{aligned} |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \quad & \iff \quad \langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2 \\ & \iff \quad x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \end{aligned}$$

Et par Cauchy-Schwarz (cas d'égalité), l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires i.e. $x = y = z$ configuration qui correspond à un triangle ABC équilatéral.
❑

Exercice 66 (Coniques : le théorème de Joachimsthal)
Une ellipse centrée $\mathscr{E}$ rencontre un cercle $\mathscr{C}$ (distinct de l'ellipse) en 4 points d'arguments respectifs $\theta_1, \dots, \theta_4$. Montrer que $\theta_1 + \cdots + \theta_4 \equiv 0(2\pi)$.

L'ellipse est paramétrée par $\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b\sin(\theta) \end{cases}$ et soit $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ l'équation de $\mathscr{C}$. Ainsi

$$\begin{aligned} M_\theta = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{E} \cap \mathscr{C} &\iff a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta) - 2\alpha a\cos(\theta) - 2\beta b\sin(\theta) + \gamma = 0 \\ &\iff Q(e^{i\theta}) := e^{4i\theta}\left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right) + e^{3i\theta}(ib\beta - a\alpha) + e^{2i\theta}\left(\gamma + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) \\ &\qquad - e^{i\theta}(a\alpha + b\beta) + \frac{a^2 - b^2}{4 = 0,} \end{aligned}$$

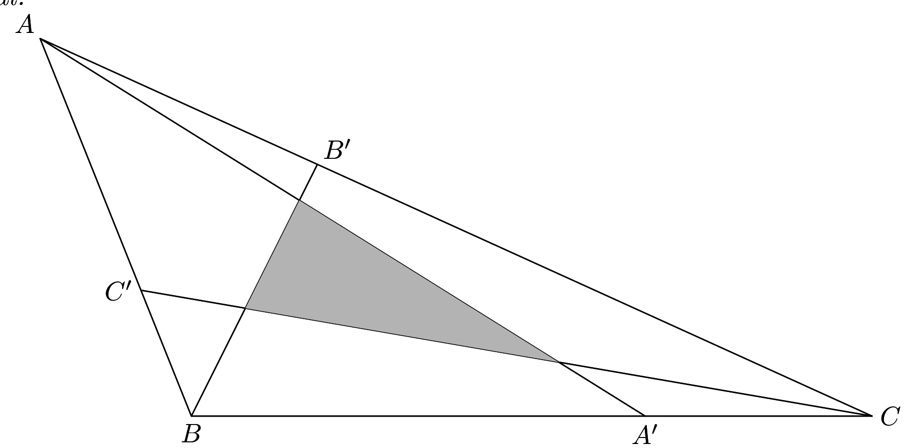
en d'autres termes, $M_\theta \in \mathscr{E} \cap \mathscr{C} \iff Q(e^{i\theta}) = 0$, et à nos quatre points d'intersection correspondent quatre racines $e^{i\theta_k}$, $1 \leq k \leq 4$ du polynôme Q. Or, les coefficients dominant et constant de Q sont égaux : le produit de ses racines vaut 1 i.e.

$$1 = e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_4} = e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_4)} \Longrightarrow \theta_1 + \dots + \theta_4 \equiv 0(2\pi)$$

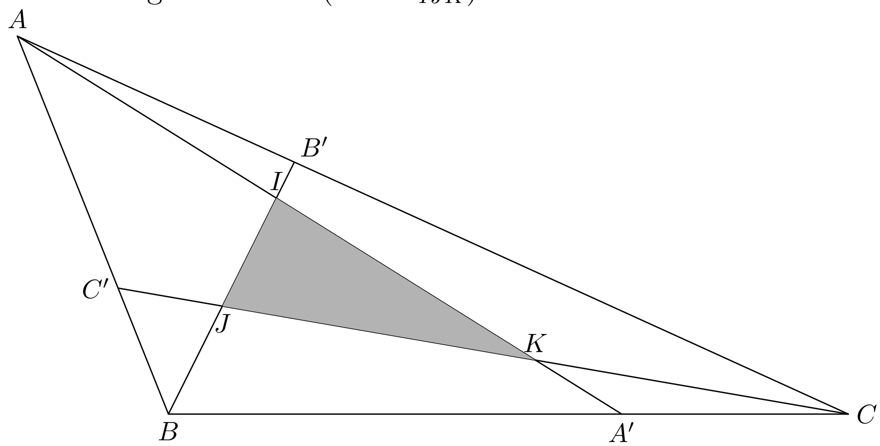
❏

🛈 **Remarques :** ➪ il s'agit du théorème de Joachimsthal.
➪ Il existe surement une explication géométrique claire de ce phénomène, cette démonstration ne la met pas en valeur, une autre serait la bienvenue.

Exercice 67 (Heptadivision d'un triangle)
À partir de chaque sommet A, B, C d'un triangle non dégénéré on construit sur le côté opposé les points A', B', C' tels que $AB' = \frac{1}{3}AC$, $BC' = \frac{1}{3}BA$, $CA' = \frac{1}{3}CB$. Les points d'intersection des droites (AA'), (BB'), (CC') forment un nouveau triangle. Montrer que l'aire de ce nouveau triangle vaut exactement $1/7$ de l'aire du triangle initial.



On note I, J et K les sommets du triangle intérieur, I étant le sommet le plus proche de A sur (AA') et ainsi de suite. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du triangle de départ ($\mathscr{A} = \mathscr{A}_{ABC}$) et x l'aire du triangle intérieur ($x = \mathscr{A}_{IJK}$).



Je dis que :

$$(\bigstar) \qquad \mathscr{A}_{ACA'} = \frac{\mathscr{A}}{3}$$

En effet (cf. figure ci-dessus) ABC et ACA' ont la même hauteur $h = AH$ et la base de ACA' vaut $1/3$ de la base de ABC. Or on sait que l'aire d'un triangle est donnée par : aire $= \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ d'où ($\bigstar$).

De même, on a : $\mathscr{A}_{BAB'} = \dfrac{\mathscr{A}}{3}$ $\qquad \mathscr{A}_{CBC'} = \dfrac{\mathscr{A}}{3}$.

On essaie maintenant d'écrire l'aire de ABC comme la somme des aires de sous-triangles, le petit triangle IJK, les 3 triangles qu'on vient d'examiner, puis on corrige en soustrayant ce qui a été compté 2 fois :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{IJK} + (\mathscr{A}_{ACA'} + \mathscr{A}_{BAB'} + \mathscr{A}_{CBC'}) - (\mathscr{A}_{AB'I} + \mathscr{A}_{CA'K} + \mathscr{A}_{BC'J})$$

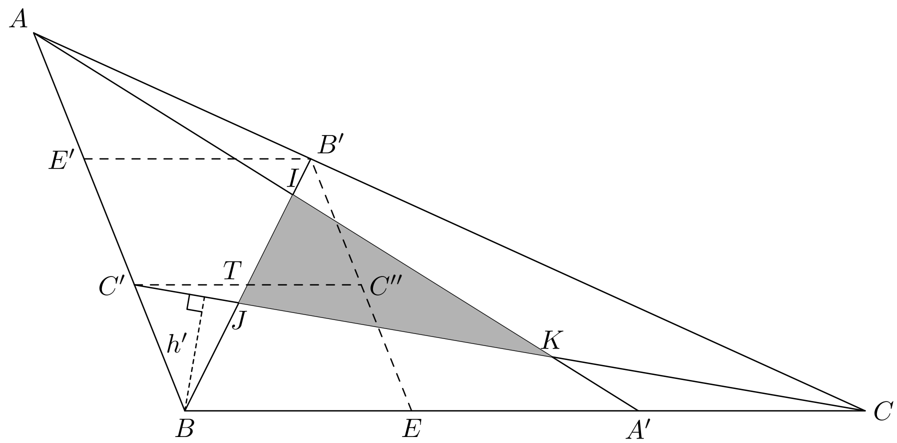
Ceci s'écrit :

$$\mathscr{A} = x + \left(\frac{\mathscr{A}}{3} + \frac{\mathscr{A}}{3} + \frac{\mathscr{A}}{3}\right) - (\mathscr{A}_{AB'I} + \mathscr{A}_{CA'K} + \mathscr{A}_{BC'J})$$

D'où (en simplifiant par $\mathscr{A}$ dans chaque membre) :

$$x = \mathscr{A}_{AB'I} + \mathscr{A}_{CA'K} + \mathscr{A}_{BC'J}$$

On va maintenant montrer que $\mathscr{A}_{AB'I} = \frac{1}{27}\mathscr{A}$:



On trace la parallèle à (BC) passant par B' : $(E'B') \parallel (BC)$ avec $E' \in (AB)$.
On trace aussi la parallèle à (AB) passant par B' : $(B'E) \parallel (AB)$ et $E \in (BC)$.
On définit le point C'' comme l'intersection de $(B'E)$ avec la parallèle à (BC) passant par C'. Alors :

$$BEB'E' \text{ est un parallélogramme}$$

En effet, $(B'E) \parallel (AB) = (E'B)$ et $(B'E') \parallel (BC) = (BE)$.
On appelle T le point d'intersection de (BB') et (CC''). Alors :donc

$$T \text{ est le milieu de } [C'C'']$$

En effet :

1°) dans $E'BB'$, C' milieu de $[E'B]$ (c'est Thalès) et $(E'B') \parallel (C'T)$ entraîne par la réciproque du théorème des milieux que T milieu de $[BB']$.

2°) dans $BB'E$, T milieu de $[BB']$ et $(TC'') \parallel (BE)$ entraîne par la réciproque du théorème des milieux que C'' milieu de $[B'E]$.

3°) $E'B = B'E$ car $E'BEB'$ parallélogramme, donc $C'B = B'C''$

4°) pour $[BB']$ et $[C'C'']$ qui s'intersectent en T, Thalès entraîne $TB/TB' = 1 = TC'/TC''$

.
Donc $C'T = \frac{1}{2}BE$. Or $BE = \frac{1}{3}BC$ et finalement

$$C'T = \frac{1}{6}BC$$

On a $(C'T) \parallel (BC)$, on peut donc appliquer Thalès à $[C'C]$ et $[BT]$ qui s'intersectent en J :

$$\frac{C'T}{BC} = \frac{C'J}{JC} \iff \frac{1}{6} = \frac{C'J}{JC} \implies C'J = \frac{1}{6}JC \implies C'J = \frac{1}{7}CC'$$

Les triangles BJC' et BCC' ont même hauteur (h' sur la figure) et leurs bases dans un rapport de 7 :

$$\mathscr{A}_{BJC'} = \frac{1}{7}\mathscr{A}_{BCC'} \qquad \implies \qquad \mathscr{A}_{BJC'} = \frac{1}{21}\mathscr{A}_{ABC}$$

Le même raisonnement appliqué à chacun des deux autres triangles donne le même résultat.
❑

🛈 **Remarque :** si vous consultez le numéro de décembre 2003 ou janvier 2004 de la revue **Pour la science** page 94, vous trouverez une preuve « sans mots » de ce résultat qui illustre notre démonstration et bien plus encore.

Exercice 68 (Disposition de n points sur une sphère)
On dispose n points sur la sphère $\mathscr{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la somme des carrés des $n(n-1)/2$ distances (dans $\mathbb{R}^3$) entre ces points au plus égale à n.

Notons $P_i = (x_i, y_i, z_i),\ 1 \leq i \leq n$ nos n points. Le carré de la distance entre P_i et P_j est

$$\begin{aligned}(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 &= (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) - 2(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) \\ &= 2 - 2(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j).\end{aligned}$$

Et notre somme vaut donc

(✘) $$\sum_{1\leq i<j\leq n} 2 - 2(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) = n(n-1) - 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j).$$

Maintenant puisque

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}2 \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) &= (x_1 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + \cdots + y_n)^2 + (z_1 + \cdots + z_n)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &= (x_1 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + \cdots + y_n)^2 + (z_1 + \cdots + z_n)^2 - n \\ &:= X^2 + Y^2 + Z^2 - n\end{aligned}$$

soit, en reportant dans (✘)

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} P_i P_j^2 = n(n-1) - (X^2 + Y^2 + Z^2 - n) = n^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 \leq n^2$$

CQFD ❑

Exercice 69 (Une suite associée à un polygône) *S_n désigne la somme des longueurs de toutes les faces et de toutes les diagonales d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité. Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Un petit calcul nous donne

$$S_n = n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

et avec l'identité $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b)-\cos(a+b)$, on a

$$2sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right) = 2(1+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

si bien que

$$\frac{S_n}{n^2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

et le résultat suit ❑

Exercice 70 (Sur la longueur de l'ellipse) [27]
L est la longueur de l'ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad a>b>1.$$

❶ *Montrer que* $\pi(a+b)\leq L\leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

❷ *Montrer que*

$$L = 2\pi a\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{\mathbf{e}^{2n}}{2n-1}\right)$$

$\mathbf{e} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ *étant l'exentricité de l'ellipse.*

❶ L'équation paramétrique de l'ellipse étant

$$\begin{cases} x(t) &= a\cos(t),\\ y(t) &= b\sin(t), \quad 0\leq t\leq 2\pi,\end{cases}$$

sa longueur est

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt\\ &= 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt + 4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt\\ &= 4\int_0^{\pi/4}\left(\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}+\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}\right)dt \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement $t=\pi/2-s$ dans la seconde intégrale de la seconde ligne. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'intégrande dans la dernière intégrale est une fonction croissante sur $[0,\pi/4]$.

❷ Nous avons

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)} dt \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (a^2 - b^2)\cos^2(t)} dt \\ &= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \mathbf{e^2}\cos^2(t)} dt \end{aligned}$$

Nous avons pour $|u| < 1$

$$\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} u^n.$$

En posant $u = \mathbf{e}\cos(t) \in]-1,1[$, on a par convergence normale de la série entière sur $[0,\pi/2]$

$$L = 4a\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \mathbf{e}^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt\right),$$

où l'on reconnait l'intégrale de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$

le résultat suit. ❏

Exercice 71 (Même périmètre et même aire) *Putnam (2005), [34] 2005/8.*
Déterminer tous les nombres réels $a > 0$ pour lequels il existe il existe une fonction positive $f \in \mathscr{C}^0([0,a])$ telle que le domaine

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le a, \ 0 \le f(x) \le f(x)\}$$

admette une aire et un périmètre de même valeur.

f continue sur le compact $[0,a]$ atteint son maximum en un point $c \in [0,a]$ et il faut remarquer que $f(c) > 0$ (sinon $\mathscr{D}$ aurait une aire nulle mais un perimètre $a > 0$...). Notons k l'aire (ou le périmètre) de $\mathscr{D}$. $\mathscr{D}$ est visiblement inclu dans le rectangle $[0,a] \times [0,f(c)]$: son aire est donc inférieure ou égale à celle du rectangle $af(c)$. D'un autre coté, $k > 2f(c)$ car $2f(c)$ est strictement plus petit que la distance de $(0,0)$ à $(c,f(c))$ plus la distance de $(c,f(c))$ à $(a,0)$ distance strictement plus petite que le périmètre k de $\mathscr{D}$. Nous avons donc $2f(c) < k \le af(c)$; en particulier, ceci impose $a > 2$.

Réciproquement, pour $a > 2$ le domaine $\mathscr{D}$ associé à l'application constante $f(x) = 2a/(a-2)$ est un rectangle d'aire $2a^2/(a-2)$ et de périmètre

$$2a + 2\frac{2a}{a-2} = \frac{2a^2}{a-2}.$$

Donc, tout nombre réel $a > 2$ convient. ❏

Exercice 72 (Deux inégalités) [13].

❶ *Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ des réels strictement positifs, montrer que*
$$\max\left\{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n},\ \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\dots+\frac{b_n}{a_n}\right\}\geq n.$$

❷ *Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels ≥ 1, montrer que*
$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\geq\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\dots+a_n).$$

❶ ➪ **Première solution :** Avec l'inégalité arithmético-géométrique[5] on a
$$A:=\left(\frac{a_1a_2\dots a_n}{b_1b_2\dots b_n}\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}\right)$$
et
$$A^{-1}=\left(\frac{b_1b_2\dots b_n}{a_1a_2\dots a_n}\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\dots+\frac{b_n}{a_n}\right).$$
Comme l'un des réels A et A^{-1} est nécessairement supérieur ou égal à 1 le résultat suit.

➪ **Seconde solution :** Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n\frac{b_i}{a_i}\right)\geq n^2,$$
par conséquent dans le terme de gauche, l'un des deux facteurs se doit d'être supérieur ou égal à n.

➪ **Troisième solution :** Par convexité sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'application $f\ :\ x\mapsto f(x)=x^{-1}$ nous avons
$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i}\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$
soit
$$n^2\leq\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n\frac{b_i}{a_i}\right)$$
et on retrouve l'inégalité de la seconde solution.

❷ ➪ **Première solution :** Par récurrence sur $n\geq 1$: c'est clair pour $n=1$; supposons la formule valide jusqu'au rang n, alors
$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1})&\geq\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\dots+a_n)(1+a_{n+1})\\&:=\frac{2^n}{n+1}(1+a)(1+b),\end{aligned}$$

[5] L'inégalité arithmético-géométrique : pour toute suite de réels positifs $a_1,a_2,\dots,a_n$ on a $(a_1a_2\dots a_n)^{1/n}\leq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

(avec $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, b = a_{n+1}$) et il ne reste plus qu'à montrer

$$\frac{2^n}{n+1}(1+a)(1+b) \geq \frac{2^{n+1}}{n+2}(1+a+b).$$

Cette inégalité équivaut à

$$(n+2)(1+a)(1+b) \geq 2(n+1)(1+a+b).$$

Mais

$$(n+2)(1+a)(1+b) - 2(n+1)(1+a+b) = 2(ab-n) + n(a-1)(b-1),$$

et les deux derniers termes sont positifs car $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$ et $b = a_{n+1} \geq 1$.

➪ **Seconde solution :** L'inégalité proposée équivaut à

$$\left(\frac{1+a_1}{2}\right)\left(\frac{1+a_2}{2}\right)\dots\left(\frac{1+a_n}{2}\right) \geq \frac{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n+1}$$

ou encore

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + \frac{2}{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

en posant $x_i = (a_i-1)/2,\ (1 \leq i \leq n)$. Mais par positivité des x_i

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) &\geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ &\geq 1 + \frac{2}{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\end{aligned}$$

CQFD. ❑

Quatrième partie

COMBINATOIRE ET PROBABILITÉS

Exercice 73 (Combinatoire : les nombres de Bell) [15]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[1,\dots,n]$ avec par convention $B_0 = 1$.

❶ *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:* $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

❷ *Montrer que le rayon de convergence R de la série génératrice exponentielle $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ de la suite $(B_n)_0^\infty$ est strictement positif et calculer $f(z)$ pour $|z| < R$.*

❸ *Montrer que* $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

❶ Associons à tout entier $0 \leq k \leq n$, l'ensemble E_k des partitions de $[1,2,\dots,n+1]$ telles que la partie de $[1,2,\dots,n+1]$ contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Le cardinal de E_k vaut $C_n^k E_{n-k}$ (car une telle parttion est déterminée par les k éléments restant pour compléter la partie de $[1,2,\dots,n+1]$ contenant $n+1$ (soit C_n^k possibilités, à laquelle on peut adjoindre les B_{n-k} partitions de l'ensemble à $n-k$ éléments restant). Comme $E_0, E_1, \dots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[1,2,\dots,n+1]$, on a bien

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} = B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k.$$

❷ Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n \leq n!$. Comme $B_0 = B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$, la propriété est vérifiée pour $n \leq 3$. Supposons là vérifiée jusqu'au rang n, alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)!.$$

On a donc $\dfrac{B_n}{n!} \leq 1$ et le rayon de convergence R de la série entière $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 1.

On va utiliser la formule démontrée dans la première question pour calculer $f(z)$. Pour $z \in]-R, R[$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \right) z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

On reconnait alors dans le dernier terme le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = f(z)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ de rayon de convergence strictement positif : on a donc

$$f'(z) = f(z)e^z, \qquad \forall\, z \in]-R, R[.$$

En intègrant cette équation différentielle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = Ce^{e^z}$ sur $]-R, R[$; enfin, comme $f(0) = B_0 = 1$, $C = e^{-1}$ et finalement

$$f(z) = e^{e^z - 1}, \qquad \forall\, z \in]-R, R[.$$

❸ Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ étant infini, on a

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \right), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

La série double $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} u_{n,k}$ (où $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$) est sommable[6] ; il est donc légitime d'échanger l'ordre de sommation

$$f(z) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0} \frac{n^k}{n!} \right) z^n, \quad z \in]-R, R[,$$

soit par unicité des coefficients

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

Q.E.D. ❑

Exercice 74 (Un peu de dénombrement autour d'une série entière)
Est-ce que le coefficient de x^{45} dans le développement en série entière à l'origine de

$$(1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^9)^{-1}(1-x^{15})^{-1}$$

vaut 88 ?

Les pôles de cette fraction rationnelle sont des racines de l'unité : elle est donc développable en série entière à l'origine (et le rayon de convergence vaut 1). On a donc

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^9)^{-1}(1-x^{15})^{-1} &= \left(\sum_{a=0}^{+\infty} x^a\right)\left(\sum_{b=0}^{+\infty} x^{3b}\right)\left(\sum_{c=0}^{+\infty} x^{9c}\right)\left(\sum_{d=0}^{+\infty} x^{15d}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k,\end{aligned}$$

où u_k désigne bien entendu le nombre de 4-uplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ vérifiant $a+3b+9c+15d = k$. Notre mission est donc de dénombrer les 4-uplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ vérifiant

$$(✘) \qquad a + 3b + 9c + 15d = 45.$$

[6] car $\sum_k |u_{n,k}| = e^{|nz|}/n!$ et $\sum_n \sum_k |u_{n,k}| = e^{e^{|z|}}$, voir [12] (T2, page ...).

(✘) assure déja que a est un multiple de 3, disons $a = 3\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N}$, soit

$$\alpha + b + 3c + 5d = 15.$$

➪ $d = 3$ implique $\alpha = b = c = 0$: **un cas**.
➪ $d = 2$ implique $c = 1$ (alors trois possibilités : $(\alpha, b) \in \{(0, 2), (2, 0), (1, 1)\}$) ou $c = 0$ (alors $\alpha + b = 5$ soit 6 possibilités) : **neuf cas**.
➪ $d = 1$ implique $c = 3, 2, 1$ ou 0 soit $2, 5, 8$ et 11 possibilités : **26 cas**.
➪ $d = 0$ implique $c = 5, 4, 3, 2, 1$ ou 0, soit $1, 4, 7, 10, 13$ et 16 possibilités : **51 cas**.
L'équation (✘) a donc $51 + 26 + 9 + 1 = 87$ solutions : la réponse à la question est donc non.
❑

Exercice 75 (Autour du « nombre de dérangements ») [15]

On désigne par D_n ($D_0 = 1$ par convention) le nombre de permutations de $\mathscr{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ n'ayant pas de points fixes (i.e. le nombre de dérangements)

❶ ***Approche classique :*** *Montrer que*

(✘) $$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k}$ *pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire que*

(✔) $$D_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

❷ ***Avec les séries entières :*** *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$. *Minorer la rayon de convergence de la série génératrice de $(D_n)_n$:* $\displaystyle D(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{D_k z^k}{k!}$ *et donner une expression de $D(z)$. Retrouver la valeur de D_n et montrer que D_k est la partie entière de* $\displaystyle\frac{k!}{e} + \frac{1}{2}$.

❸ ***Troisième approche :*** *Montrer que pour tout $n \geq 2$: $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$, en déduire que $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ et retrouver la valeur de D_n.*

❶ ➪ Soit $n \geq 1$ et désignons par P_k l'ensemble des permutations de $\mathscr{S}_n$ ayant exactement k points fixes. $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une partition de $\mathscr{S}_n$, par conséquent $\mathrm{card}(\mathscr{S}_n) = n! = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(P_k)$. Nous allons vérifier que $\mathrm{card}(P_k) = C_n^k D_{n-k}$. Visiblement $D_n = \mathrm{card}(P_0)$ et $\mathrm{card}(P_n) = 1 = D_0 = C_n^n D_0$; si $1 \leq k \leq n-1$ un k-dérangement est complétement déterminé par le choix de ses k points fixes (soit C_n^k possibilités) et par le choix de la permutation induite sur les $n-k$ éléments restants (soit D_{n-k} possibilités)[7] soit $\mathrm{card}(\mathrm{P_k}) = \mathrm{C_n^k D_{n-k}}$, puis

$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k = \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^k D_k.$$

➪ On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(p-k)!(n-p)!}\\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^p C_p^k = C_n^p(1-1)^p = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p\geq 1,\\ 1 & \text{si} \quad p=0.\end{cases}\end{aligned}$$

➪ Des deux formules précédentes

$$\begin{aligned}n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)!\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\left(\sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l D_l\right) \quad \text{vu} \quad (\text{✘})\\ &= \sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-l}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^l\right) D_l = D_n \quad \text{vu} \quad (\text{✔})\end{aligned}$$

en échangeant l'ordre de sommation.

➪ Une variante repose sur la formule du crible en remarquant que $D_n = n! - \mathrm{card}\bigcup_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{U_k}$, U_k désignant les permutations de $\mathscr{S}_n$ qui fixent k.

❷ ➪ La somme est calculée dans la question précédente. Comme $0 \leq D_k \leq k!$ le rayon de convergence R de la série entière $D(z)$ est supérieur ou égal à 1. En écrivant (✘) pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous la forme

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}$$

on reconnait y le coefficient de z^n dans le produit de Cauchy des séries entière $\sum_k \frac{D_k}{k!} z^k$ et $\sum_k \frac{z^k}{k!}$ de rayon de convergence au moins 1. Ainsi, pour tout $z \in D(0,1)$

$$D'ze^z = \left(\sum_{k\geq 0}\frac{D_k}{k!}z^k\right)\left(\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$$

soit

$$D(z) = \sum_{k\geq 0}\frac{D_k}{k!}z^k = \frac{e^{-z}}{1-z}, \qquad \forall\, z \in D(0,1).$$

[7] Remarquer que D_1 est toujours égal à zéro et qu'effectivement P_{n-1} est vide : une permutation ne peut avoir $n-1$ points fixes !

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients du développement en série entière à l'origine de $z \mapsto \frac{e^{-z}}{1-z}$ pour obtenir D_k. Après un produit de Cauchy des deux séries $\sum_k \frac{(-1)^k}{k!} z^k$ et $\sum_k z^k$ on trouve bien

$$\frac{D_n}{n!} \left(= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

➪ Nous avons

$$\frac{1}{e} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} = \frac{D_k}{k!} + \sum_{l \geq k+1} \frac{(-1)^k}{k!} := \frac{D_k}{k!} + R_k,$$

soit

$$\frac{k!}{e} + \frac{1}{2} = D_k + \frac{1}{2} + k! R_k.$$

La série $\sum_l \frac{(-1)^l}{l!}$ vérifiant le critère des séries alternées, la majoration de son reste

$$|R_k| \leq \frac{1}{(k+1)!}$$

assure pour pour $k \geq 1$:

$$|k! R_k| < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

qui nous donne finalement

$$D_k = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{k}!}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} \right).$$

❸ Désignons par $\mathscr{D}_n$ les dérangements de $\mathscr{S}_n$; si $\sigma \in \mathscr{D}_{n+1}$: $\sigma(n+1) \in \mathscr{S}_n$ et si $F_k := \{\sigma \in \mathscr{D}_{n+1} \ : \ \sigma(n+1) = k\}$ nous avons la partition $\mathscr{D}_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. Montrons que $\mathrm{card(F_k) = D_n + D_{n+1}}$. Pour cela on considère la partition $F_k = G_k \cup H_k$ où $G_k = \{\sigma \in F_k \ : \ \sigma(k) = n+1\}$ et $H_k = F_k \setminus G_k$. Un élément de G_k est parfaitement déterminé par sa restriction à $\{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ et cette restriction devant être un dérangement nous avons $\mathrm{card(G_k) = D_{n-1}}$; pour le second terme $\sigma \in H_k \ \Rightarrow \ \sigma^{-1}(n+1) \neq k$ si bien que la correspondance

$$H_k \ni \sigma \quad \longmapsto \quad \tilde{\sigma} \in \mathscr{D}_n \quad \text{où} \quad \tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si} \quad i \neq \sigma^{-1}(n+1) \\ k & \text{si} \quad i = \sigma^{-1}(n+1). \end{cases}$$

réalise une bijection et par conséquent $\mathrm{card(H_k) = D_n}$. Finalement, nous avons bien $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$ pour tout $n \geq 2$.

➪ La formule $D_n = nD_{n-1} + (-1)^{n+1}$ se déduit de le précédente par une récurrence élémentaire (elle est vraie pour $n = 2$ car $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$). En divisant cette formule par $n!$ il vient pour tout $n \geq 2$:

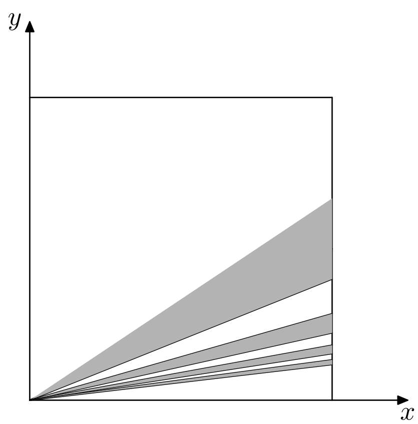
$$\frac{D_k}{k!} = \frac{D_{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(-1)^k}{k!}$$

et en sommant cette dernière pour $2 \leq k \leq n$ on retrouve (★). ❑

Exercice 76 (Distance entre deux racines d'un polynôme)
Si l'on choisit deux réels au hasard dans l'intervalle $[0,1]$, quelle est la probabilité que la distance dans le plan complexe des deux racines du polynôme $p(z) = z^2+bz+c$ soit inférieure ou égale à 1 ?

La distance entre les deux racines de p est égale à $\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|b^2-4c|}$; elle est donc inférieure à 1 si et seulement si $-1 \leq b^2-4c \leq 1$. Il faut donc que le point (b,c) se trouve dans la région délimitée par le carré $[0,1]\times[0,1]$ et les deux paraboles $y = \frac{x^2-1}{4}$ $y = \frac{x^2+1}{4}$. La probabilité cherchée est donc l'aire de ce domaine, soit $\int_0^1 \frac{x^2+1}{4}dx = \frac{1}{3}$ divisée par l'aire du carré (soit 1) : elle vaut donc 1/3. ❑

Exercice 77 (Distribution de deux points sur un segment (1)) (PUTNAM 1993).
Si x et y sont choisis au hasard dans $[0,1]$ (avec une densité uniforme), quelle est la probabilité que l'entier le plus proche de $\frac{x}{y}$ soit pair ?



L'entier le plus proche de $\frac{x}{y}$ est zéro si $2x < y$ et (pour $n \geq 1$) vaut $2n$ si $\frac{2x}{4n+1} < y < \frac{2x}{4n-1}$ (on ignore bien entendu les éventuelles extrémités de ces intervalles qui sont de probabilités nulles). La probabilité cherchée est donc l'aire grisée de la figure ci-contre, soit :

$$\bigcup_{n\geq 1}\left\{ (x,y)\in[0,1]^2 \quad : \quad \frac{2x}{4n+1} < y < \frac{2x}{4n-1}\right\}$$

soit

$$p = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right) + \dots$$

Mais comme

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

on trouve $p = \dfrac{5}{4} - \dfrac{\pi}{4}$ ❑

Exercice 78 (« Probabilité » que deux entiers soient premiers entre-eux)
On se propose de démontrer que la probabilité r_n que deux entiers pris au hasard dans $\{1,\dots,n\}$ soient premiers entre-eux vérifie

$$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{d\geq 1}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \quad et \quad \lim_n r_n = \frac{6}{\pi^2}$$

*où l'application (c'est la **« fonction de möebius »**) $\mu : \mathbb{N}^\star \to \{-1,0,1\}$ est définie par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ 0 & si\ n\ possède\ au\ moins\ un\ facteur\ carré, \\ (-1)^k & si\ n = p_1\dots p_k où\ les\ p_i\ sont\ des\ nombres\ premiers\ distincts. \end{cases}$$

Soient $p_1,\dots,p_k$ les nombres premiers $\leq n$ et pour $1\leq i\leq k$:

$$V_i := \left\{(a,b)\in\{1,\dots,n\}^2 \ :\ p_i\ divise\ a\ et\ b\right\}.$$

① *Montrer que*

$$\begin{aligned} card\left(\bigcup_{i=1}^k V_i\right) &= \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{1+card(I)}card\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right) \\ &= -\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{card(I)}E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)^2 \\ &= -\sum_{d=2}^n \mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

Et en déduire r_n.

② *Montrer que* $\left|r_n - \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{d^2}\right| = 0\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$.

③ *Montrer que* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{i\geq 1}\sum_{l\ divise\ i}\frac{\mu(l)}{i^2} = 1.$

④ *Conclure.*

❶ Soit donc $n\geq 1$ et désignons par $p_1,p_2,\dots,p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Avec la formule du crible

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^k V_i\right) = \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{1+\text{card}(I)}\text{card}\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)$$

soit $I\subset\{1,\dots,n\}$ une partie non vide, le nombre de multiples de $\prod_{i\in I}p_i$ dans $\{1,\dots,n\}$ est $E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)$ soit

$$\text{card}\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right) = E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I}p_i}\right)^2$$

si bien qu'avec la formule du crible le nombre de couples d'entiers inférieurs ou égaux à n est

$$\begin{aligned}\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right) &= \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+\text{card}(I)}\text{card}\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right)\\ &= \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+\text{card}(I)} E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2, \qquad (\bigstar)\end{aligned}$$

il faut maintenant remarquer que puisque $\mu\left(\prod_{i\in I} p_i\right) = (-1)^{\text{card}(I)}$ et $\mu(l) = 0$ pour tout autre entier $l \in \{2,\dots,n\}$ (ces derniers possèdent un facteur carré) :

$$\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+\text{card}(I)} E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2 = -\sum_{d=2}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2$$

soit finalement

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right) = -\sum_{d=2}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

Ainsi, le nombre de couples $(a,b) \in \{1,2,\dots,n\}^2$ premiers entre-eux est

$$n^2 - \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right) = n^2 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2 = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2$$

et la probabilité cherchée est

$$r_n = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n} \mu(d) E\left(\frac{n}{d}\right)^2.$$

❷ Commencons par remarquer que pour $1 \leq d \leq n$

$$\left(\frac{n}{d}\right)^2 \geq E\left(\frac{n}{d}\right)^2 > \left(\frac{n}{d} - 1\right)^2$$

qui implique

$$0 \geq \frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{1}{d^2} \geq \frac{1}{n^2} - \frac{2}{nd}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\left|r_n-\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| &= \left|\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{n^2}E\left(\frac{n}{d}\right)^2-\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}\right|\\ &= \left|\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left[\frac{1}{n^2}E\left(\frac{n}{d}\right)^2-\frac{1}{d^2}\right]\right|\\ &\leq \sum_{d=1}^{n}|\mu(d)|\left(\frac{2}{nd}-\frac{1}{n^2}\right)\\ &\leq \sum_{d=1}^{n}\left(\frac{2}{nd}-\frac{1}{n^2}\right)\\ &\leq \frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}=\frac{1}{n}+O\left(\frac{\log n}{n}\right)=O\left(\frac{\log n}{n}\right).\end{aligned}$$

❸ & ❹ La série $\sum_d \mu(d)/d^2$ étant convergente

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}, \tag{1}$$

d'un autre coté, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\\ &= \sum_{(i,d)\in\mathbb{N}^2}\frac{\mu(d)}{i^2d^2}=\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i^2}\sum_{l/i}\mu(l):=\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i^2}S(i)\end{aligned}$$

où les deux avant dernières égalités sont justifiées par l'absolue convergence des deux premieres séries (on peut alors « sommer par paquets »). il reste donc à estimer $S(i)$ pour $i\geq 1$. $S(1)=1$ et pour $i\geq 2$ soit $i=q_1^{\alpha_1}\dots q_N^{\alpha_N}$ la décomposition de i en facteurs premiers ; un diviseur l de i s'écrit donc sous la forme $l=q_1^{\beta_1}\dots q_N^{\beta_N}$ avec $0\leq\beta_j\leq\alpha_j$. Mais $\mu(l)\neq 0$ signifie que $\beta_j=0$ ou 1 et dans ce cas $\mu(l)=(-1)^s$ où $s=\text{card}\{1\leq j\leq N\ :\ \beta_j=1\}$. Il existe donc une bijection entre l'ensemble des diviseurs l de i tels que $\mu(l)=(-1)^s$ et l'ensemble des N-uplets $(\beta_1,\dots,\beta_N)\in\{0,1\}^N$ avec exactement s composantes égales à 1 et ce dernier est bien entendu de cardinal C_N^s si bien que

$$S(i)=\sum_{l/i}\mu(l)=\sum_{s=0}^{N}\sum_{l/i\&\mu(l)=(-1)^s}\mu(l)=\sum_{s=0}^{N}C_N^s(-1)^s=(1-1)^N=0.$$

en résumé

$$S(i)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad i=1\\ 0 & \text{si}\quad i\geq 2.\end{cases}$$

soit

$$\frac{\pi^2}{6}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}=1$$

et enfin

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

❑

Exercice 79 (Nombre de matrices symétriques à coefficients dans $\{0,1\}$ et série entières) (PUTNAM, 1967).
Soit u_n le nombre de matrices $n \times n$, symétriques à coefficients dans $\{0,1\}$ avec exactement un 1 sur chaque ligne (on notera S_n cet ensemble). Avec $u_0 := 1$, montrer que

$$u_{n+1} = u_n + nu_{n-1}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{u_n x^n}{n!} = \exp(x) + \frac{x^2}{2} := f(x).$$

Il y a une correspondance bijective entre S_n et l'ensemble des matrices $M = ((m_{ij})) \in S_{n+1}$ telles que $m_{11} = 1$. De même si $i \geq 2$, il y aussi une correspondance bijective entre S_{n-1} et les matrices $M \in S_{n+1}$ telles que $m_{1i} = 1$ (en effet M étant symétrique $m_{i1} = 1$, il n'y a donc que des zéros sur les autres coefficients des i-èmes lignes et colonnes : la donnée de M correspond donc à celle de la matrice $(n-1)\times(n-1)$ déduite de M en lui supprimant ses ièmes lignes et colonnes). De ces deux correspondances et puisque $u_0 = u_1 = 1$ on a

$$u_{n+1} = u_n + nu_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

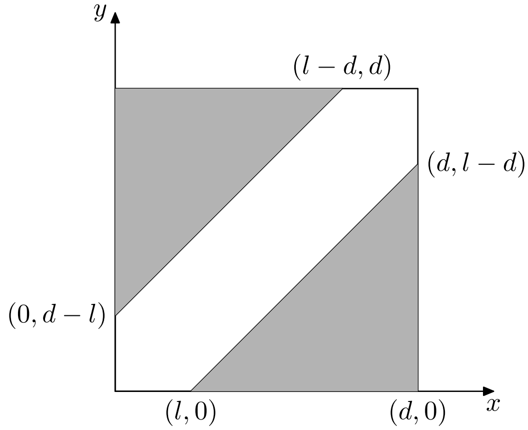
Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que f est développable en série entière $\sum_n v_n x^n$ sur $\mathbb{R}$, puis que les coefficients v_n satisfont à la même relation de récurrence que les u_n pour conclure facilement. ❑

Exercice 80 (Distribution aléatoire de deux points sur un segment) (PUTNAM, 1961).
On choisit deux points au hasard et de manière indépendante sur un segment I de longueur d. Soit $0 < l < d$, quelle est la probabilité que la distance entre ces deux points soit supérieure ou égale à l ?

Sans perdre de généralité, supposons que $I = [0,d]$, et considérons dans $\mathbb{R}^2$:

$$\{\ (x,y) \in [0,d]\times[0,d]\ :\ |x-y| = l\}$$

Parmi tous les cas possibles soit $[0,d]\times[0,d]$, les couples (x,y) qui nous intéressent sont ceux qui se trouvent dans les deux triangles rectangles de sommets respectifs $(0,l),(0,d),(d-l,d)$ et $(l,0),(d,0),(d,d-l)$ qui se réunissent pour former un carré de coté $d-l$.



La probabilité cherchée est donc $p = \dfrac{(d-l)^2}{d^2}$. ❑

Exercice 81 (Dénombrement et séries entières/génératrices)
Il s'agit de dénombrer le nombre de manières de distribuer n euros à p personnes.

Notons $d_{n,p}$ la quantité cherchée et voici deux solutions.

❶ **Par dénombrement :** Les p personnes sont numérotées de 1 à p. Étant donné $n+p-1$ cases vides, on en sélectionne n (signalées par « ✘ »), les $p-1$ autres sont marquées par un trait vertical « | ». Le nombre d'étoiles entre les deux premiers traits représente le nombre d'euros (éventuellement nul) attribués à la première personne et ainsi de suite. Par exemple si $p=5$ et $n=6$ la configuration

| |✘✘✘|✘| |✘✘

correspond au partage $0,3,1,0,2$
Cette procédure résout visiblement notre problème et il y a clairement C_{n+p-1}^n choix possibles i.e. $d_{n,p} = C_{n+p-1}^n$.

❷ **0ù avec les séries entières :** Vu le cours sur les séries entières, par convergence absolue on a le produit de Cauchy

$$\sum_n a_n x^n \sum_n b_n x^n \dots \sum_n c_n x^n = \sum_n d_n x^n \quad \text{avec} \quad d_n = \sum_{k+k'+\dots+k''=n} a_k b_{k'} \dots c_{k''} x^k$$

avec $c_{n,p} = \displaystyle\sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=n} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_p}$ où les $a_{k_i}=1$, donc vu la formule ci-dessus :

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n\geq 0} C_{n+p-1}^n x^n = \sum_n x^n \sum_n x^n \dots \sum_n x^n = \sum_n c_{n,p} x^n$$

et il n'y a plus qu'à identifier les coefficients. ❑

🛈 **Remarque :** le candidat à l'agrégation externe peut (et doit) se placer dans l'unique cadre des séries formelles.

Exercice 82 (Groupes et probabilités)
Soit G un groupe fini non commutatif. On note $p(G)$ la probabilité pour que deux éléments de G tirés au hasard commutent entre eux. Montrer que $p(G) \leq \frac{5}{8}$ et préciser pour quels groupes cette valeur maximale est atteinte.

Soit G un groupe fini non commutatif, notons Z son centre et pour $x \in G$ désignons par G_x l'ensemble des éléments de G commutant avec x. Z et G_x sont deux sous-groupes de G ; Z est lui même un sous groupe de C_x. Le théorème de Lagrange, nous assure de l'existence de trois entiers $m, k_x, l_x \in \mathbb{N}$ vérifant

$$|G| = m|Z|, \quad |G| = k_x|G_x|, \quad \text{et} \quad |G_x| = l_x|Z|.$$

soit

$$k_x l_x = m$$

.

- Si $x \in Z$, alors $G_x = G$, $k_x = 1$ et $l_x = m$.
- Sinon, $G_x \neq G$ (car $x \notin Z$) donc $k_x > 1$ et $l_x > 1$.

Il existe donc $a \in G \setminus Z$ tel que

$$mk_a l_a = m^2 \geq 4.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
p(G) &= \frac{1}{|G|^2}\sum_{x\in G}|G_x| = \frac{1}{|G|^2}\left(\sum_{x\in Z}|G_x| + \sum_{x\in G\setminus Z}|G_x|\right)\\
&= \frac{1}{|G|^2}\left(|G||Z| + \sum_{x\in G\setminus Z}|G_x|\right)\\
&\leq \frac{1}{|G|^2}\left(|G||Z| + (|G|-|Z|)\frac{|G|}{2}\right)\\
&\leq \frac{|G|+|Z|}{2|G|}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right) = \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Pour le cas d'égalité, $p(G) = \frac{5}{8}$, si, et seulement si $m = 4$. C'est en effet nécessaire vu ce qui précède ; réciproquement, si $m = 4$, on a $|G_x| = \frac{1}{2}|G|$ pour tout $x \in G \setminus Z$ et on obtient l'égalité. ❑

Remarque : Pour en savoir plus, on peut consulter la rubrique *« questions-réponses »* de la RMS [10], 2003/04, tome 2.

Exercice 83 (Dénombrement et algèbre linéaire) [33]
Déterminer le cardinal de $O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$.

Soit $A = ((a_{ij})) \in O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$, A étant orthogonale, ses colonnes sont de norme 1

$$\forall\, 1 \leq j \leq n \quad : \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

mais les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, donc

$$\forall\, 1 \leq j \leq n,\ \exists!\ \sigma(j) \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_{\sigma(j)j} = +1 \text{ ou } -1 \text{ et } \ a_{ij} = 0\ \forall\, i \neq \sigma(j)$$

ainsi, dans chaque colonne (ou ligne) un seul coefficient n'est pas nul et vaut + ou -1. Toujours par orthogonabilité de A :

$$\forall\, i \neq j \quad : \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = 0.$$

Supposons que dans la première colonne le k-ième coefficient soit non nul : $a_{k1} \neq 0$, les vecteurs première et seconde colonne étant orthogonaux on a forcément $a_{2k} = 0$ et il ne reste donc que $2(n-1)$ choix possibles pour completer la seconde colonne. De proche en proche le cardinal de $O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$ est $2^n n!$. ❑

Exercice 84 (Les dés sont pipés)
Références ? ? ?
① *Montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés de sorte que la variable aléatoire « somme des deux faces » soit uniformément répartie.*

② *Est-il toutefois possible de piper les deux dés et que la variable aléatoire « somme des deux faces » continue à suivre la loi usuelle associée à deux dés « normaux » ?*

❶ Désignons par X_i, $(i = 1, 2)$ les variables aléatoires correspondant à la somme des points sur les faces de chacun des deux dés, elles sont **indépendantes** à valeur dans $\{1, \dots, 6\}$. Notons $p(X_1 = i) = a_i$, $P(X_2 = i) = b_i$, $(i = 1, \dots 6)$. Supposons donc que $X_1 + X_2$ (à valeur dans $\{2, \dots, 12\}$) suive une loi uniforme i.e.

$$\forall\, i \in \{2, \dots, 12\} \ : \ P(X_1 + X_2 = i) = \frac{1}{11}.$$

La fonction de répartition de $X_1 + X_2$ est

$$F_{X_1+X_2}(t) = \frac{1}{11}\left(t^2 + t^3 + \cdots + t^{12}\right)$$

et celles des X_i sont

$$F_{X_1}(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_6 t^6, \qquad \text{et} \qquad F_{X_2}(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_6 t^6.$$

Mais X_1 et X_2 sont indépendantes

$$(\bigstar) \qquad F_{X_1+X_2}(t) = F_{X_1}(t) F_{X_2}(t)$$

i.e.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}: \qquad \frac{1}{11}\left(1+t+t^2+\cdots+t^{10}\right) = (a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5)(b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5)$$

le coefficient de t^{10} étant $\frac{1}{11}$, nécessairement $a_6>0$ et $b_6>0$ et par suite $a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5$ et $b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5$ possèdent chacun une racine réelle comme polynômes de degré impair mais ceci est absurde car $1+t+t^2+\cdots+t^{10}$ est sans racines réelles, contradiction.

❷ Avec deux dés normaux, on a bien entendu

$$P(X_1+X_2=2)=\frac{1}{36},\quad P(X_1+X_2=3)=\frac{2}{36},\quad P(X_1+X_2=4)=\frac{3}{36},\ldots\text{ect}\ldots P(X_1+X_2=12)=\frac{1}{36}.$$

de sorte que la formule (★) deviens maintenant

$$\begin{aligned}\frac{F_{X_1+X_2}(t)}{t^2} &= \frac{1}{36}\left(1+2t+3t^2+4t^3+5t^4+6t^5+5t^6+4t^7+3t^8+2t^9+t^{10}\right)\\ &= \frac{1}{36}\left(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5\right)^2\\ &= \frac{1}{36}\left(\frac{1-t^6}{1-t}\right)^2\\ &= \frac{F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)}{t^2}\\ &= (a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5)(b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5)\end{aligned}$$

les racines du premier polynôme sont les racines sixièmes de l'unité, exepté 1 et toutes avec une multiplicité 2 :

$$\omega,\omega^2,-1,-\omega,-\omega^2$$

(où ω est une racine primitive de l'unité) ainsi les dix racines du polynôme $t^{-2}F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)$ sont les dix nombres complexes

$$\omega,\omega^2,-1,-\omega,-\omega^2,\omega,\omega^2,-1,-\omega,-\omega^2.$$

cinq d'entre-eux sont les racines de $a_1+a_2t+\cdots+a_6t^5$ les cinq autres étant celles de $b_1+b_2t+\cdots+b_6t^5$. En choisissant les cinq premières pour le premier polynôme et les cinq autres pour le second on obtient

$$\frac{F_{X_1}(t)}{a_6t} = (t+1)(t-\omega)(t-\omega^2)(t+\omega)(t+\omega^2) == 1+t+t^2+t^3+t^4+t^5$$

on fait de même pour le second dé, soit

$$a_1=a_2=\cdots=a_6=\frac{1}{6}=b_1=b_2=\cdots=b_6$$

i.e. les deux dés ne sont pas pipés. Il ne reste plus qu'à vérifier à la main qu'aucune autre partition des dix racines ne convient. La seule alternative est donc le cas classique de deux dés non pipés. ❑

ℹ **Remarque :** voici une autre manière pour résoudre la première partie de ce problème, elle est un peu plus simple mais (à mon goût), moins élégante. On conserve les mêmes notations qu'au dessus.

On a

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=2) &= a_1b_1 = \frac{1}{11}\\
P(X_1+X_2=12) &= a_6b_6 = \frac{1}{11}\\
P(X_1+X_2=7) &= a_1b_6+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2+a_6b_1 = \frac{1}{11}
\end{aligned}$$

des deux premières égalités on tire

$$b_1 = \frac{1}{11a_1} \quad b_6 = \frac{1}{11a_6}$$

l'inégalité classique $\dfrac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$ nous donne

$$\frac{1}{11}\left(\frac{a_1}{a_6}+\frac{a_6}{a_1}\right) \geq \frac{2}{11} > \frac{1}{11}$$

soit, sur le troisième terme

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=7) = &\ a_1b_6+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2+a_6b_1\\
&= \frac{1}{11}\left(\frac{a_1}{a_6}+\frac{a_6}{a_1}\right)+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2\\
&> \frac{1}{11}+a_2b_5+a_3b_4+a_4b_3+a_5b_2 > \frac{1}{11}
\end{aligned}$$

i.e.

$$P(X_1+X_2=7) > \frac{1}{11}$$

contradiction.

Exercice 85 (Avec un peu d'algèbre linéaire)
Soient $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ des parties non vides de $\{1,2,\dots,n\}$. Montrer qu'il existe deux ensembles $I, J \subset \{1,2,\dots,n+1\}$ non vides et disjoints tels que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Soit l'identification naturelle $\mathscr{P}(\{1,2,\dots,n\}) \simeq \{0,1\}^n$ donnée par

$$A \in \mathscr{P}(\{1,2,\dots,n\}) \quad \leftrightsquigarrow \quad e_A = (e_A(i))_{i=1}^n \quad \text{où} \quad e_A(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin A,\\ 1 & \text{si } i \in A.\end{cases}$$

Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^n$ de dimension n, les $n+1$ vecteurs $e_{A_1}, \dots, e_{A_{n+1}}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants ce qui peut se traduire facilement par

$$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z} \text{ non tous nuls, tels que } \quad \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_i e_{A_i} = 0.$$

et qui équivaut à

$$\sum_{i\in I}\lambda_i e_{A_i}=\sum_{j\in J}\lambda_j e_{A_j}$$

où $I := \{k\in\{1,2,\dots,n+1\},\ \text{tels que } \lambda_k>0\}\neq\emptyset$ (resp. $J := \{k\in\{1,2,\dots,n+1\},\ \text{tels que } \lambda_k<0\}\neq\emptyset$) qui fourni immédiatement l'égalité

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{j\in J}A_j,$$

si désirée. ❑

Exercice 86 (Probabilité d'obtenir un multiple de cinq en jetant n dés)
On jette n fois un dé équilibré ; quelle est la probabilité que la somme des n faces obtenues soit divisible par 5 ?

❶ **première solution :** Désignons pour $n=r(5)\in\mathbb{N}$ par $p_n^{(r)}$ la probabilité qu'aprés n tirages la somme des faces soit congrue à r modulo 5. Nous avons bien entendu

$$p_0^{(0)}=1\quad\text{et}\quad p_0^{(1)}=p_0^{(2)}=p_0^{(3)}=p_0^{(4)}=0$$

et il est facile de vérifier que pour $n\in\mathbb{N}^\star$

$$(\text{✘})\qquad p_n^{(r)}=\sum_{j=1}^{6}\frac{p_{n-1}^{r-j}}{6}.$$

Ces formules nous permettent de calculer $p_n^{(r)}$ pour quelques petites valeurs de n pour conjecturer que

$$p_n^{(r)}=\frac{1}{5}+\frac{4}{5.6^n}\quad\text{si}\quad n\equiv 0(5)\quad\text{et}\quad p_n^{(r)}=\frac{1}{5}-\frac{4}{5.6^n}\quad\text{sinon.}$$

Ces conjectures se démontrent alors facilement par récurrence avec (✘).

❷ **seconde solution :** On considère la partition suivante de l'ensemble $\mathscr{S}=\{1,2,3,4,5,6\}^n\setminus\{(6,6,\dots,6)\}$: chaque famille sera constitué des suites de la forme

$$\underbrace{66\dots6}_{k\text{ fois}}XY_1\dots Y_{n-k-1}$$

où $X\in\{1,2,3,4,5\}$ et $Y_1,\dots,Y_{n-k-1}$ sont fixés. Chaque élément de la partition est donc constituée de 5 suites dont, modulo 5 la somme des chiffres est exactement $0,1,2,3,4$ soit exactement une dont la somme de chiffres est $0(5)$. Ainsi le nombre de suites dont la somme des chiffres est divisible par 5 est $\text{card}(\mathscr{S})/5=(6^n-1)/5$ si n est pas un multiple de 5 et $1+\text{card}(\mathscr{S})/5=1+(6^n-1)/5$ sinon (dans ce cas $(6,6,\dots,6)$ est aussi solution).
La probabilité cherchée est donc (cas favorables sur cas possibles)

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{5.6^n}\quad\text{si}\quad n\equiv 0(5)\quad\text{et}\quad\frac{1}{5}-\frac{4}{5.6^n}\quad\text{sinon.}$$

❸ **troisième solution :** Désignons par p_k la probabilité que la somme des faces soit égale à k et considérons la série génératrice associée

$$f(z)=\sum_{k\geq 1}p_k x^k=\left(\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6}\right)^n$$

où la seconde égalité peut être vérifiée facilement par récurrence sur n. Il s'agit donc de calculer $\sum_{k\geq 1}p_{5k}$; pour cela soit $\varepsilon=e^{2i\pi/5}$ la première racine cinquième de l'unité, nous avons

$$\sum_{k\geq 1}p_{5k}=\frac{f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)+f(\varepsilon^3)+f(\varepsilon^4)}{6}.$$

Il est clair que $f(1)=1$ et pour $j=1,2,3,4$ $f(\varepsilon^j)=\frac{\varepsilon^{jn}}{6^n}$ si bien que

$$f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)+f(\varepsilon^3)+f(\varepsilon^4)=\begin{cases}\dfrac{4}{6^n} & \text{si}\quad n\equiv 0(5),\\ \dfrac{-1}{6^n} & \text{sinon.}\end{cases}$$

et finalement

$$\sum_{k\geq 1}p_{5k}=\begin{cases}\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5.6^n} & \text{si}\quad n\equiv 0(5),\\ \\ \dfrac{1}{5}-\dfrac{-1}{5.6^n} & \text{sinon.}\end{cases}$$

❑

Exercice 87 (Combinatoire et matrices)
Soient $A_0=B_0=((1))\in M_1(\mathbb{R})$. Pour $n\geq 1$ on définit les suites de matrices par

$$A_n=\begin{pmatrix}A_{n-1} & A_{n-1}\\ A_{n-1} & B_{n-1}\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad \mathrm{B_n}=\begin{pmatrix}A_{n-1} & A_{n-1}\\ A_{n-1} & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{M_{2n}}(\mathbb{R}).$$

Montrer que

$$S(A_n^{k-1})=S(A_k^{n-1}),\forall\, n,k\in\mathbb{N}^\star$$

avec $S(M)=\sum_{1\leq i,j\leq n}m_{ij}$ où $M=((m_{ij}))$.

L'astuce (redoutable) consiste à donner un « sens combinatoire » à la quantité $S(A_n^{k-1})$. Pour cela soit T un tableau $n\times k$ à coefficients 0 et 1 (i.e. un élément de $M_{n,k}(0,1)$) vérifiant la propriété suivante : *« il n'existe dans T aucune sous matrice 2×2 constituée uniquement de* 1 *»* et soit $F_{n,k}$ le nombre de tels tableaux.
Chaque ligne d'un tableau correspond à un entier entre 0 et 2^n-1 écrit en base 2. $F_{n,k}$ est donc le nombre de k-uplets d'entiers dont toute paire d'entiers consécutifs correspond à un tableau $n\times 2$ sans sous-matrice . 2×2 constituée uniquement de 1.
Soient $\overline{i_n i_{n-1}\dots i_1}$, $\overline{j_n j_{n-1}\dots j_1}$ les écritures en base 2 de deux entiers $i,j\in\{0,\dots,2^n-1\}$.
Deux cas sont à envisager :

➪ Si $i_n j_n = 0$ alors $\overline{i_n i_{n-1} \dots i_1}$ et $\overline{j_n j_{n-1} \dots j_1}$ sont consécutifs si et seulement si $\overline{i_{n-1} \dots i_1}$ et $\overline{j_{n-1} \dots j_1}$ le sont.

➪ Si $i_n j_n = 1$ alors $\overline{i_n i_{n-1} \dots i_1}$ et $\overline{j_n j_{n-1} \dots j_1}$ sont consécutifs si et seulement si $i_{n-1} j_{n-1} = 0$ et $\overline{i_{n-2} \dots i_1}$ et $\overline{j_{n-2} \dots j_1}$ le sont.

Ainsi

Exercice 88 (10^{2006} divise $n!$)

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^\star$ tels que l'écriture décimale de $n!$ se termine par 2006 zéros exactement.

Dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$, l'exposant du nombre premier p vaut (pourquoi ?)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]$$

qui est bien entendu une somme finie puisque $[n/p^i] = 0$ pour $i > \log_p(n)$. Ainsi

$$n! = \prod_{p,\ p/n!} p^{\alpha_p} = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} \dots$$

où

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^i}\right], \quad \alpha_5 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{5^i}\right].$$

Mais pour $n \geq 2$

$$\alpha_5 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{5^i}\right] < \alpha_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^i}\right].$$

Par conséquent, pour que l'écriture décimale de $n!$ se termine par exactement 2006 zéros il est essentiel que $\alpha_5 = 2006$. Il faut donc déterminer les entiers n tels que $n! = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{2006} \dots$. Comme

$$\alpha_5 = 2006 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{5^i}\right] < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{5^i} = \frac{n}{5} \sum_{i=0}^{\infty} 5^{-i} = \frac{n}{4},$$

nous avons $n > 4 \times 2006 = 8024$. Avec un calcul facile l'exposant de 5 dans la décomposition de $8025!$ vaut

$$\alpha_5 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{8025}{5^i}\right] = 1605 + 321 + 64 + 2 = 2004.$$

Il faut nous faut donc deux zéros supplémentaires, par conséquent, le plus petit entier n tel que $n!$ se termine par 2006 zéros est $n = 8035$ et l'ensemble cherché est $8035, 8036, 8037, 8038, 8039$.

❏ **Exercice 89 (Dénombrement dans les groupes)** [10]

Soient G un groupe fini, A, B deux parties de G telles que

$$card(A) + card(B) > card(G).$$

Montrer que $AB = G$ (où $AB = \{\ ab,\ a \in A,\ b \in B\}$).

Soit $g \in G$, il s'agit de montrer que g s'écrit sous la forme $g = ab$ où $a \in A,\ b \in B$.
Soit $A^{-1}g := \{\, a^{-1}g,\ a \in A \,\}$, l'application $A \ni a \mapsto a^{-1}g \in A^{-1}g$ étant bijective $\text{card}(A) = \text{card}(A^{-1}g)$ et par suite $\text{card}(A^{-1}g) + \text{card}(B) > \text{card}(G)$. Il en résulte immédiatement que $\text{card}(A^{-1}g) \cap \text{card}(B) \neq \emptyset$ i.e. il existe $a \in A$ tel que $a^{-1}g = b \in B$ soit $g = ab$. ❏

Cinquième partie

ANALYSE 1

CHAPITRE 3

TOPOLOGIE

Exercice 90 (Une famille totale dans $l^2(\mathbb{N})$) [10]
L'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suite réelles de carré sàmmable est muni du produit scalaire usuel. On fixe $\alpha \in]-1,1[$ et on pose pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$: $U_i = (\alpha^{ni})_{n\geq 0}$.
❶ *Montrer que $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille libre de $l^2(\mathbb{N})$.*
❷ *Calculer l'orthogonal dans $l^2(\mathbb{N})$ de $F := vect\{U_i,\ i \in \mathbb{N}^\star\}$.*
❸ *Que peut-on en déduire ?*

❶ Dire que la famille $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas libre dans $l^2(\mathbb{N})$ c'est dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^\star,\ \lambda_1,\dots,\lambda_N \in \mathbb{R}$ non tous nuls, tels que

$$\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_N U_N = 0_{l^2(\mathbb{N})}$$

soit

$$\lambda_1(\alpha^k)_k + \lambda_2(\alpha^{2k})_k + \cdots + \lambda_N(\alpha^{Nk})_k = (\lambda_1\alpha^k + \lambda_2\alpha^{2k} + \cdots + \lambda_N\alpha^{Nk})_k = 0_{l^2(\mathbb{N})},$$

ou encore, si $P(X) = \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_N X^N \in \mathbb{R}[X]$

$$P(\alpha^k) = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$

Comme $\alpha \in]-1,1[$ le polynôme P a trop de zéros pour ne pas être le polynôme nul donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N = 0$$

et la famille $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ est bien libre dans $l^2(\mathbb{N})$.

❷ Soit $X = (x_k)_k \in l^2(\mathbb{N})$.

$$\begin{aligned}\left(X = (x_k)_k \in F^\perp\right) &\iff (\langle X, U_i\rangle = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}^\star)\\ &\iff \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \alpha^{kj} = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}^\star\right).\end{aligned}$$

Comme $X = (x_k)_k \in l^2(\mathbb{N})$, le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{k=0}^\infty x_k z^k$ est supérieur ou égal à 1 ; la formule établie au dessus assure alors que f s'annule sur tous les points de la suite $(\alpha^k)_k$ convergente vers 0 : l'ensemble des zéros de f dans le disque unité ouvert n'est donc pas isolé, classiquement (voir par exemple : [17] exercice 3.31, inutile d'invoquer les zéros isolés...) f est identiquement nulle, i.e. $x_k = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^\star$ i.e. $X = 0_{l^2(\mathbb{N})}$ et $F^\perp = \{0_{l^2(\mathbb{N})}\}$.

❸ $F^\perp = \{0_{l^2(\mathbb{N})}\}$ implique que $\overline{F} = l^2(\mathbb{N})$ (c'est une conséquence immédiate du théorème de projection orthogonale sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert car $F^\perp = (\overline{F})^\perp$) autrement dit, la famille $\{U_i\}$ est totale dans $l^2(\mathbb{N})$. ❑

Exercice 91 (La somme de deux sous espaces fermés est-elle fermée ?) [10]

Soient E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), F, G deux sous espaces de E. On suppose F fermé et G de dimension finie, montrer que $F+G := \{\ x+y,\ x \in F,\ G \in G\}$ est fermé.

Aprés une récurrence élémentaire, on peut se ramener au cas où G est une droite vectorielle $\mathbb{K}g$ de E. Si $g \in F$ alors $F + G = F$ qui est fermé et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $g \notin F$, soit $x \in \overline{F+G}$, et montrons que $x \in F + G$.
Il existe une suite $(x_n)_n$ dans $F + G$ qui converge vers x dans E, les vecteurs x_n sont donc de la forme $x_n = f_n + \lambda_n g$ où $f_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$. Remarquons que si la suite $(|\lambda_n|)_n$ ne tends pas vers $+\infty$ alors l'exercice est résolu : en effet on peut alors on peut alors extraire de la suite $(\lambda_n)_n$ une suite bornée, puis, via Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}$, une sous-suite $(\lambda_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$. Dans ce cas, la relation $f_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \lambda_{\varphi(n)} g$ montre que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge vers $f = x - \lambda g$ qui appartient à F puisque F est fermé par hypothèse et finalement $x = f + \lambda g \in F + G$.
Il reste à vérifier que $(|\lambda_n|)_n$ ne tends pas vers $+\infty$. Si tel était le cas, les relations (valables pour n assez grand)

$$g = \frac{x_n}{\lambda_n} - \frac{f_n}{\lambda_n}$$

impliqueraient que $F \ni f_n/\lambda_n \to -g$ soit, $g \in \overline{F} = F$ ce qui est exclu puisque $g \notin F$. ❑

🛈 L'hypothèse « G de dimension finie » est essentielle : en général, la somme de deux sous-espaces fermés n'est pas fermée même dans un espace de Hilbert comme on peut le vérifier dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 92 (Deux sous-espaces fermés dont la somme ne l'est pas)

Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert séparable. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_n = e_{2n} \quad et \quad y_n = \sqrt{1-4^{-n}}e_{2n} + 2^{-n}e_{2n+1}.$$

On désigne par X le sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite de vecteurs $(x_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $X = \overline{vect(x_n,\ n \geq 0)}$) et par Y celui engendré par la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

❶ *Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont des bases hilbertiennes de X et Y respectivement. Montrer que $X \cap Y = \{0_H\}$ puis que $\overline{X+Y} = H$.*

❷ *Montrer que la série $\sum_n 2^{-n}e_{2n+1}$ converge dans H mais que sa somme $v = \sum_n 2^{-n}e_{2n+1}$ n'appartient pas à $X+Y$. En déduire que $X+Y$ n'est pas fermé dans H.*

❶ ➲ Extraite de la base orthonormée $(e_n)_{n\geq 0}$ la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée. Pour la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ on a : $\|y_n\|^2 = (1-4^{-n}) + (2^{-n})^2 = 1$; et pour $n \neq m$ les vecteurs $e_{2n},\ e_{2n+1}$ sont orthogonaux aux vecteurs $e_{2m},\ e_{2m+1}$ car les ensembles $\{2n, 2n+1\}$ et $\{2m, 2m+1\}$ sont disjoints : la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est aussi orthonormée. Ce sont des bases hilbertiennes des espaces X et Y respectivement, car dans un esapce de Hilbert, toute suite orthonormée est une base hilbertienne de l'espace vectoriel fermé qu'elle engendre.

➲ Soit $x = \sum_{n\geq 0} c_k e_k \in H$. Si $x \in X \cap Y$, de la question précédente nous avons aussi les developpements $x = \sum_{n\geq 0} a_n x_n = \sum_{n\geq 0} b_n y_n$. Calculons c_{2k+1} :

$$c_{2k+1} = \langle x, e_{2k+1}\rangle = \langle \sum_{n\geq 0} a_n x_n, e_{2k+1}\rangle = \sum_{n\geq 0} a_n \langle x_n, e_{2k+1}\rangle = 0,$$

puisque $\langle x_n, e_{2k+1}\rangle = \langle e_{2n}, e_{2k+1}\rangle = 0$. Mais on a aussi

$$c_{2k+1} = \langle x, e_{2k+1}\rangle = \langle \sum_{n\geq 0} b_n y_n, e_{2k+1}\rangle = \sum_{n\geq 0} b_n \langle y_n, e_{2k+1}\rangle = \langle y_k, e_{2k+1}\rangle = 2^{-k} b_k$$

ce qui montre que $b_k = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ et donc $x = 0_H$.

➲ Pour vérifier la densité de $X+Y$ dans H il est suffisant de montrer que $X+Y$ contient la base $(e_n)_n$; c'est bien le cas puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ $e_{2n} = x_n \in X+Y$ et $e_{2n+1} = 2^n(y_n - \sqrt{1-4^{-n}}) \in X+Y$.

❷ La série $\sum_n 2^{-n} e_{2n+1}$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet H. Si le vecteur $v = \sum_n 2^{-n} e_{2n+1}$ était dans $X+Y$ on aurait $v = x+y = \sum_{n\geq 0} a_n x_n + \sum_{n\geq 0} b_n y_n$. En particulier pour $k \geq 0$

$$2^{-k} = \langle v, e_{2k+1}\rangle = 2^{-k} b_k$$

ce qui impose $b_k = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, mais ceci est impossible car la série définissant y serait divergente.

Ainsi $X+Y$ est strictement inclu dans H, comme $\overline{X+Y} = H$, $X+Y$ ne peut être fermé dans H. ❑

Exercice 93 (Complémentaire d'un hyperplan dans un espace vectoriel normé) [10]-*2006.*

Soit E un espace vectoriel normé réel et H un hyperplan. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si, et seulement si H est fermé.

🛈 Il est utile de se souvenir qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle sur E ; il faut aussi ne pas oublier (voir exercice ? ? ?) qu'un hyperplan $H = \ker(\varphi)$ est fermé si, et seulement si, la forme linéaire φ est continue. Rappelons aussi (voir l'exercice ? ?) que dans un espace vectoriel normé de dimension **infinie**, il existe **toujours** des formes linéaires discontinues.

➲ Supposons H fermé et montrons que $E\setminus H$ n'est pas connexe. Soit φ une forme linéaire sur E de noyau H, posons $H^+ = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^\star),\ H^- = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^\star)$. Comme φ n'est pas identiquement nulle H^+ et H^- sont non vides, montrons que H^+ est ouvert[1]. Soit $x \in H^+$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E \setminus H$ (une telle boule existe car H est fermé donc $E \setminus H$ est ouvert) ; la boule $B(x,r)$ est convexe et φ est linéaire donc $\varphi(B(x,r))$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$ ne contenant pas l'origine mais rencontrant $\mathbb{R}_+^\star$ c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi $\varphi(B(x,r)) \subset \mathbb{R}_+^\star$ et donc $B(x,r) \subset H^+$ qui est bien ouvert. De la même manière H^- est fermé. On dispose ainsi d'une partition de $E \setminus H$ en deux ouverts non vides H^+ et H^- : $E \setminus H$ est pas connexe et à fortiori n'est pas connexe par arcs.

➲ Pour la réciproque, le lemme suivant est crutial.

Lemme : *Soit C une partie convexe de E et D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Alors D est connexe par arcs.*

Preuve du lemme : Il s'agit de montrer que pour tous $c, d \in D$ il existe un chemin continu $\gamma\ :\ [0,1] \to D$ tel que $\gamma(0) = c$ et $\gamma(1) = d$.
Supposons pour commencer que $c \in C$ et $d \in D \subset \overline{C}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans C de limite d et de premier terme $x_1 = c$. Considérons alors le chemin continu $\gamma\ :\ [0,1] \to D$ défini comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star\ :\ \gamma(1-1/n) = x_n$, la restriction de γ à $[1-1/n, 1-1/(n+1)]$ est affine, et enfin $\gamma(1) = d$. Comme C est convexe et inclu dans D il est clair que $\gamma([0,1[) \subset C \subset D$ et $\gamma(1) = d$ implique $\gamma([0,1]) \subset D$. La restriction de γ à chaque segment de $[0,1[$ est affine par morceaux : γ est donc continue sur $[0,1[$. Il reste donc à vérifier que γ est bien continue au point 1. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $n \geq N$ implique $x_n \in B(d,\varepsilon)$. Pour $t \in]1-1/N, 1[$ il existe $n \geq N$ tel que $t \in [1-1/n, 1-1/(n+1)]$, soit $\gamma(t) \in [x_n, x_{n+1}]$, comme x_n et x_{n+1} sont dans la boule convexe $B(d,\varepsilon)$ il en est de même de $\gamma(t)$ i.e. $\|\gamma(t) - d\| = \|\gamma(t) - \gamma(1)\| < \varepsilon$. γ est bien continue au point 1.
Pour le cas général $c, d \in D$, et on choisit un point e dans C, vu ce qui précède il existe dans D deux chemins continus sur $[0,1]$, l'un reliant e à c et l'autre e à d et c'est alors une procédure classique pour en construire un reliant c à d. C.Q.F.D. ■

Montrons maintenant que si H n'est pas fermé, alors $E \setminus H$ est connexe par arcs. $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant strictement H, donc $\overline{H} = E$. Soit $a \in E \setminus H$, l'application $x \mapsto x + a$ étant un homéomorphisme $\overline{a + H} = a + \overline{H} = E$. Ainsi $a + H \subset E \setminus H \subset \overline{a + H}$. $a + H$ étant convexe, le lemme précédent assure que $E \setminus H$ est connexe par arcs. ❏

🛈 **Remarque :** Par exemple, si on considére l'espace $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et l'hyperplan $F = \{f \in E\ :\ f(0) = 0\}$, alors $E/H = \{f \in E\ :\ f(0) \neq 0\}$ est connexe par arcs dans $(E, \|\cdot\|_1)$ mais ne l'est pas dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

[1] on peut bien sûr invoquer la remarque préléminaire pour conclure immédiatement, toutefois la preuve qui suit est suffisament intéressante pour la présenter.

Exercice 94 (Normes, normes équivalentes) [10]

Pour $f \in \mathscr{E} := \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \ : \ f(0) = f'(0) = 0\}$ *on pose*

$$\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$

❶ *Montrer que* $\|\cdot\|$ *est sur* $\mathscr{E}$*, une norme plus fine que la norme uniforme* $\|\cdot\|_\infty$*. Déterminer la plus petite constante* $a > 0$ *vérifiant* $\|f\|_\infty \leq a \cdot \|f\|$ *sur* $\mathscr{E}$*.*

❷ *Les normes* $\|\cdot\|$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *sont-elles équivalentes sur* $\mathscr{E}$ *?*

❶ Soit $f \in \mathscr{E}$ vérifiant $\|f\| = 0$. Comme donc $f + 2f' + f'' = 0$, f est de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$ et les conditions $f(0) = f'(0) = 0$ impliquent $\lambda = \mu = 0$; f est donc identiquement nulle. Les autres axiomes des normes sont faciles à vérifier.

Soit $f \in \mathscr{E}$. Posons $g = f + 2f' + f''$, on a donc $\|g\|_\infty = \|f\|$. Nous allons exprimer f en fonction de g. En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle $y''+2y'+y = g$. Les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme $e^{-t}(\alpha t + \beta)$; la méthode de variation des contantes nous conduit alors à chercher deux fonctions α et β telles que

$$\begin{cases} te^{-t}\alpha'(t) + e^{-t}\beta'(t) & = 0 \\ (1-t)e^{-t}\alpha'(t) - e^{-t}\beta'(t) & = g(t) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} t\alpha'(t) + \beta'(t) & = 0 \\ (1-t)\alpha'(t) - \beta'(t) & = e^t g(t) \end{cases}$$

qui donne

$$\alpha'(t) = e^t g(t) \quad \text{et} \quad \beta'(t) = -te^t g(t),$$

soit

$$\alpha(t) = \int_0^t e^x g(x)dx + \lambda, \quad \beta(t) = -\int_0^t xe^x g(x)dx + \mu.$$

Comme $f(t) = e^{-t}(\alpha(t)t + \beta(t))$ les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$ assurent $\lambda = \mu = 0$ et finalement

$$f(t) = e^{-t}\int_0^t (t-x)e^x g(x)dx.$$

On en déduit

$$|f(t)| \leq \|g\|_\infty e^{-t}\int_0^t (t-x)e^x dx = \|f\|(1-e^{-t}(1+t) \leq \|f\| \sup_{[0,1]}(1-e^{-t}(1+t) = \|f\|\left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

La constante $1 - 2e^{-1}$ est bien la meilleure possible puisque pour $f(t) = (1 - e^{-t}(1+t)$ qui appartient bien à $\mathscr{E}$ on a $\|f\| = 1$ et $\|f\|_\infty = 1 - 2e^{-1}$.

❷ Les deux normes ne sont toutefois pas équivalentes puisque (par exemple) la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ dans $\mathscr{E}$ définie par $f_n(t) = t^n/n$ tends vers zéro pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|$ car $\|f_n\|_\infty = 1/n$ alors que $\|f_n\| = n^{-1} + 1 + n$. ❑

Exercice 95 (Démonstration des inégalités faibles de Kolmogorov via les normes équivalentes, formule de Taylor) [10],2004/05, ? ?, 114-2,

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f\ :\ [a,+\infty[$ une fonction réelle de classe C^{n+1}. On se propose d'utiliser les résultats du cours pour donner une preuve assez inhabituelle du résultat suivant :

« Si f et $f^{(n+1)}$ sont bornées sur $[a,+\infty[$, il en est de même pour les dérivées intermédiaires $f', f'', \dots, f^{(n)}$. »

❶ *Soit $\delta > 0$, pour $Q = \sum_{k=0}^n c_k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*

$$N_1(Q) = \max_{0\leq k\leq n} |c_k| \quad et \quad N_2(Q) = \sup_{x\in[0,\delta]} |Q(x)|.$$

Montrer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^\star$ telles que

$$\mu N_2(Q) \leq N_1(Q) \leq \lambda N_2(Q), \quad \forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

❷ *Pour tout $x \geq a$ et $\delta \geq u > 0$ montrer que (utiliser Taylor-Lagrange)*

$$\left|f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!}\right| \leq \|f\|_\infty + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty := M,$$

où $\|g\|_\infty := \sup_{x\geq a} |g(x)|$.

En déduire que pour tout $x \geq a$ (en notant $P_x(X) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$) on a :

$$N_2(P_x) \leq M.$$

❸ *En déduire la version faible des inégalités de Kolmogorov*

$$\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n\} \ :\ \|f^{(k)}\|_\infty \leq k!\lambda M.$$

❶ N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ espace vectoriel de dimension finie $n+1$: elles sont donc équivalentes.

❷ Avec Taylor-Lagrange nous avons pour tout $x \geq a,\ \delta \geq u > 0$

$$f(x+u) = f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!} + \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta) \quad \text{où} \quad \zeta \in]x, x+u[,$$

soit

$$\left|f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!}\right| \leq |f(x+u)| + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\| \leq \|f\| + + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|$$

nous avons donc pour tout $x \geq a$

$$\sup_{0\leq u\leq\delta}\left|f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!}\right| = \sup_{0\leq u\leq\delta} |P_x(u)| = N_2(P_x) \leq M$$

❸ Il ne reste plus qu'à combiner les deux inégalités : $N_1(P_x) \leq \lambda N_(P_x)$. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Pour une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ si f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ il en est de même pour f' et on a les inégalités de Kolmogorov à l'ordre 2 (avec $M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|,\ i =$

$0, 1, 2)$

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

La preuve repose sur l'inégalité de Taylor-Lagrange qui assure que pour tout réel x et tout $h > 0$:

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2M_2}{2}$$

En appliquant maintenant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre cette fois-ci x et $x-h$ on a

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2M_2}{2}.$$

Ces deux inégalités et l'inégalité triangulaire donnent pour tout $x \in \mathbb{R},\ h > 0$

$$|f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x)| \leq h^2M_2$$

soit

$$|f'(x)| \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h} := g(h), \quad \forall\, h \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Un calcul rapide montre que l'inf de g sur $\mathbb{R}_+^\star$ vaut $\sqrt{2M_0M_2}$ pour $h = \sqrt{\dfrac{M_2}{2M_0}}$ soit finalement

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f' est bornée et $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

➪ Avec plus de persévérence on démontre (voir par exemple ....) les inégalités de Kolmogorov : soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$. Si f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, il en est de même des dérivées intermédiaires et on a (avec les mêmes notations que dans la remarque précédente)

$$M_k \leq 2^{\frac{k(k-n)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Exercice 96 (L'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers est infini : preuve topologique) [1]
Pour $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, on pose

$$N_{a,b} := \{a + nb,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

On dira qu'une partie non vide $O \subset \mathbb{Z}$ est ouverte si pour tout $a \in O$ il existe $b \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N_{a,b} \subset O$.

❶ *Montrer que l'on a bien défini sur $\mathbb{Z}$ une topologie $\mathbb{T}$ pour laquelle tout ouvert non vide est de cardinal infini et tout $N_{a,b}$ est à la fois ouvert et fermé.*

❷ *Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers est infini.*

❶ Une réunion quelconque d'ouverts sera visiblement ouverte. Pour deux ouverts O_1, O_2 et $a \in O_1 \cap O_2$, il existe $b_1, b_2 \in \mathbb{N}^\star$ tels que $N_{a,b_1} \subset O_1,\ N_{a,b_2} \subset O_2$ et par conséquent $N_{a,b_1b_2} \subset O_1 \cap O_2$: $\mathscr{T}$ est stable par intersection finie et définit bien une topologie sur $\mathbb{Z}$.

Par construction, tout ouvert non vide est clairement de cardinal infini et la seconde assertion résulte de l'égalité élémentaire

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{b-1} N_{a+k,b} \right)$$

qui assure que $N_{a,b}$ est fermé comme complémentaire d'un ouvert.

❷ Comme tout entier $n \neq \pm 1$ admet un diviseur premier p et appartient donc à $N_{0,p}$, nous avons

$$\mathbb{Z} \setminus \{+1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathscr{P}} N_{0,p}.$$

Maintenant, si $\mathscr{P}$ est fini alors $\cup_{p\in\mathscr{P}} N_{0,p}$ est fermé comme réunion finie de fermés et, comme complémentaire d'un fermé, $\{-1, 1\}$ est ouvert ce qui est absurde puisque tout ouvert non vide est de cardinal fini : l'ensemble des nombres premiers est bien infini. ❑

Exercice 97 (Espace métrique et continuité) [34], (2003), PROBLÈME 10998.
On considère dans un espace métrique (X, d) une partie D non vide, ouverte, connexe et relativement compacte. Soit $f : D \to D$ une application continue. Si $f(D)$ est ouvert, montrer qu'il existe $x_0 \in D$ tel que

$$d(x_0, \partial D) = d(f(x_0), \partial D).$$

➪ La continuité de $h : X \ni x \mapsto d(x, \partial D)$ est classique. Par conséquent, l'application définie par $g(x) := d(f(x), \partial D) - d(x, \partial D)$ est aussi continue. Nous allons montrer successivement qu'il existe z_0 et y_0 dans D vérifiant $g(z_0) \leq 0$ et $g(y_0) \geq 0$. L'existence de x_0 résulte alors de la connexité de D via la continuité de f.
➪ h étant continue et $\overline{D}$ compact, il existe $z_0 \in \overline{D}$ tel que $h(z_0) = d(z_0, \partial D) = \sup_{z\in\overline{D}} d(z, \partial D)$. D étant ouvert et non vide : $h(z) > 0$, $\forall\, z \in D$ de sorte que $z_0 \in D$. Enfin comme $f(z_0) \in D$: $d(f(z_0), \partial D) \leq d(z_0, \partial D)$; autrement dit $g(z_0) \leq 0$.
➪ Pour l'existence de y_0 on distingue deux cas :
▷ Si $f(D) = D$, alors il existe $y_0 \in D$ tel que $f(y_0) = z_0$. Alors $g(y_0) = d(z_0, \partial D) - d(y_0, \partial D) \geq 0$.
▷ Si $f(D) \neq D$ et puisque D est connexe et $f(D)$ ouvert il existe $w \in D \cap \partial f(D)$ tel que $w \notin f(D)$ (sinon on aurait une partition de D en deux ouverts disjoints non vides...). Considérons alors une suite $(y_n)_n$ dans D telle que $f(y_n) \to w$. $\overline{D}$ étant compact, on peut (quitte à extraire une sous-suite) supposer la suite $(y_n)_n$ convergente, disons vers $\alpha \in \overline{D}$. $w \notin f(D)$ implique $\alpha \in \partial D$ et par conséquent $d(y_n, \partial D) \to 0$. toutefois $\lim_n d(f(y_n), \partial D) = d(w, \partial D) > 0$: nous avons donc pour n assez grand $g(y_n) > O$. CQFD ❑

Exercice 98 (Normes sur $\mathscr{C}^0([0,1])$) [10], 2003/04
Soit $(s_n)_n$ une suite dense dans $[0,1]$ et $(a_n)_n$ une suite de réels strictements positifs tels que la série $\sum_n a_n$ converge. On pose pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$

$$N(f) = \sum_{n\geq 0} a_n |f(s_n)|.$$

❶ *Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1])$.*
❷ *Cette norme est-elle équivalente à la norme « sup » ?*

❶ $\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1])$: $0 \leq N(f) \leq \|f\|_\infty \sum_n a_n < +\infty$, N est donc bien définie. Le seul point non trivial restant à vérifier pour que N soit une norme est $N(f) = 0 \iff f \equiv 0$. Mais $N(f) = 0$ implique que f est nulle sur la partie dense $(s_n)_n$, par continuité elle est donc identiquement nulle sur $[0,1]$. N est donc une norme sur $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$.

❷ Soit $n \geq 1$ et $(I_k)_0^{n-1}$ la subdivision de pas constant $\frac{1}{n}$ de l'intervalle $[0,1]$. Puisque la série $\sum_k a_k$ converge, il existe $0 \leq k_0 \leq n-1$ tel que

$$\sum_{k\in I_{k_0}} a_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k\geq 0} a_k.$$

en effet sinon, (la série étant à termes positifs)

$$\sum_{k\geq 0} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \cdots + \sum_{k\in I_n} a_k > \frac{1}{n}\sum_{k\geq 0} a_k + \cdots + \frac{1}{n}\sum_{k\geq 0} a_k = \sum_{k\geq 0} a_k$$

ce qui est absurde.

Il est clair que $\|f\|_\infty = s^{-1}$ et f étant nulle en dehors de I_{l_n} nous avons ???

$$N(f_n) = \sum_{k\geq 0} a_k |f_n(s_k)| = \sum_{k\in I_{l_n}} a_k |f_n(s_k)| \leq \sum_{k\in I_{l_n}} a_k \|f_n\|_\infty \leq \frac{\sum_{k\in I_{l_n}} a_k}{s} \leq \frac{1}{n}.$$

$N(f_n) = \frac{1}{n}$ et $\|f_n\|_\infty = s^{-1}$ pour tout $n \geq 1$ assure que les deux normes ne peuvent être équivalentes sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ (parce que cela implique qu'il ne peut exister de constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C.N(f)$ ou bien parce que $N(f_n) = \frac{1}{n}$ implique que la suite $(f_n)_n$ converge vers zéro dans $(\mathscr{C}^0([0,1],N)$ ce qui ne peut être le cas dans $(\mathscr{C}^0([0,1], \|.\|_\infty)$ puisque les applications f_n y sont de normes s^{-1}). ❑

Exercice 99 (Autour des suites décroissantes de fermés) [21],
① *Dans un espace métrique complet l'intersection d'une suite décroissante de boules fermées est-elle nécessairement non vide ?*

② *Dans un espace de Banach, l'intersection d'une suite décroissante de fermés bornés convexes non vides est-elle nécessairement non vide ?*

❶ Nous donnons un exemple où l'intersection peut être vide : pour cela on munit l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels de la métrique

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{m+n} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Il est classique de vérifier que $(\mathbb{N}, d)$ est un espace métrique complet (l'espace est complet car toute boule de centre n et de rayon $r \in]0,1[$ est réduite au singleton $\{n\}$ avec pour conséquence que les seules suites de Cauchy sont les suites constantes clairement convergentes). On considère alors les ensembles

$$I_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}^\star$$

avec le choix de notre métrique I_n n'est d'autre que la boule fermée $B_f(n, 1 + \frac{n}{2})$; En effet

$$\left(x \in B_f(n, 1+\frac{n}{2})\right) \iff \left(1 + \frac{1}{n+x} \leq 1 + \frac{1}{2n}\right) \iff (x \geq n)$$

et bien entendu

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n = \varnothing.$$

❷ Ici encore la réponse est non, pour un exemple considèrons dans l'espace de Banach $(\mathscr{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty)$ la suite décroissante définie par

$$E_n = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1]) \ : \ f([0,1]) \subset [0,1], \ f(0) = 0 \ \text{ et } \ f(x) = 1 \ \forall x \in [\frac{1}{n}, 1] \right\}$$

Ces ensembles sont clairement (pour la norme « sup ») fermés, bornés, convexes mais c'est un exercice élémentaire de vérifier qu'aucune fonction continue ne peut appartenir à l'intersection des E_n. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Dans le premier exemple, on construit une suite décroissante de boules fermées à intersection vide. Il faut se souvenir que dans tout espace métrique complet l'intersection d'un suite décroissante de fermés dont le diamètre tends vers zéro est réduite à un point, en particulier non vide. L'hypothèse sur les diamètres est par conséquent essentielle.
➪ Pour le second exemple c'est seulement dans le cadre des espaces de Hilbert qu'une telle intersection est forcément non vide (pour le candidat à l'agrégation externe : topologies fortes et faibles coïncident sur les parties convexes d'un Hilbert, c'est alors la faible compacité des ensembles qui assure que leur intersection est non vide.)

Exercice 100 (Continuité de l'opérateur de dérivation dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}[X]$) [10]

❶ *Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ rendant continu l'opérateur de dérivation*
$$D\ :\ f \mapsto\ D(f) = f'$$

❷ *Est-ce toujours le cas dans $\mathbb{R}[X]$?*

❶ Supposons qu'une telle norme N existe, il existe une constante $C > 0$ vérifiant
$$N(f') \leq CN(f), \quad \forall\, f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$$
mais en considérant les fonctions
$$f_n(x) = \exp(nx) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}$$
l'inégalité précedente donne
$$\exists\, C > 0\ :\quad N(f_n') = nN(f_n) \leq CN(f_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
inégalité absurde (N est une norme donc, $N(f_n) \neq 0$) : une telle norme ne peut exister.

❷ Sur $\mathbb{R}[X]$ la situation est différente, en effet il existe des normes pour lesquelles la dérivation n'est pas continue on peut par exemple considèrer
$$N(P = \sum_k a_k X^k) := \sup_k |a_k|$$
avec ce choix la suite de polynômes $P_n = X^n$ donne
$$N(P_n) = 1,\ N(P_n') = n,$$
égalités qui rendent impossible la continuité de D dans $(\mathbb{R}[X], N)$. Toutefois, à partir d'une norme quelconque N sur $\mathbb{R}[X]$, il est facile d'en construire une nouvelle N_1 rendant continue la dérivation : il suffit pour cela de considérer
$$N_1(P) = \sum_{k\geq 0} N(P^{(k)}), \quad P \in \mathbb{R}[X]$$
P étant un polynôme, la somme est toujours finie, et les autres axiomes de la norme sont trivialement réalisés, en outre
$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X]\ :\ N_1(D(P)) = N_1(P') = \sum_{k\geq 1} N(P^{(k)}) \leq \sum_{k\geq 0} N(P^{(k)}) = N_1(P)$$
et l'opérateur de dérivation D est continu dans $(\mathbb{R}[X], N_1)$. ❑

Exercice 101 (Deux normes non équivalentes en dimension finie)
Sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{\, a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$$
de dimension finie 2, montrer que les normes :
$$N_1(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|, \qquad N_2(a + b\sqrt{2}) = |a| + |b|$$
ne sont pas équivalentes. Commentaire ?

Que N_1 et N_2 soient deux normes sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est immédiat. Considérons alors pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = (1 - \sqrt{2})^n, \quad v_n = (1 + \sqrt{2})^n,$$
avec la formule du binôme on a
$$\begin{aligned} u_n &= (1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{N}, \\ v_n &= (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \\ a_n &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{aligned}$$
si bien que $\lim_n u_n = 0, \lim_n v_n = +\infty$ et $\lim_n a_n = +\infty$, par conséquent
$$\begin{aligned} N_1(u_n) &= |1 - \sqrt{2}|^n &\implies \lim_n N_1(u_n) = 0, \\ N_2(u_n) &= |a_n| + |b_n| &\implies \lim_n N_2(u_n) = +\infty \end{aligned}$$
ces deux limites assurent la non équivalence des deux normes. ❑

ℹ **Remarque :** *« ...en dimension finie toutes les normes sont équivalentes... »* oui mais pour des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou plus généralement sur un corps à boule unité compacte. C'est en effet la compacité de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$) (pour la norme « sup » par exemple) qui est l'ingrédient essentiel de la démonstration, ici le corps est $\mathbb{Q}$ où la boule unité associée n'est plus compacte et plus rien ne marche.

Exercice 102 (Topologie dans $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$: propriétés de $\mathscr{D}_n$ et $\mathscr{D}'_n$) [38]
$\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$) désigne l'ensemble des matrices diagonalisables (respectivement de matrices ayant n valeurs propres distinctes) de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'intérieur de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ est $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$. $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ est il dense dans $M_n(\mathbb{R})$?

➪ Nous avons déja vu dans l'exercice précédent que $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ est ouvert. Bien entendu $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C}) \subset \mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ donc

(✘) $$\mathscr{D}'_n(\mathbb{C}) \subset \mathscr{D}^o_n(\mathbb{C})$$

Pour l'inclusion inverse, supposons qu'il existe $A \in \mathscr{D}_n^o(\mathbb{C})$ admettant une valeur propre λ d'ordre supérieur ou égal à deux, il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}DP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

soit alors, pour $k \in \mathbb{N}^\star$

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda & k^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_k = \begin{pmatrix} \lambda & k^{-1} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal de D_k est un multiple du polynôme minimal de M_k qui vaut $(x-\lambda)^2$, il n'est donc pas scindé à racines simple : la matrice D_k et par suite $A_k = P^{-1}D_kP$ n'est pas diagonalisable. Mais par construction, $\lim_k A_k = A$, et la matrice A ne peut être intérieure à $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$. Les matrices intérieures à $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ ne peuvent avoir de valeurs propres multiples : $\mathscr{D}_n^o(\mathbb{C}) \subset \mathscr{D}_n'(\mathbb{C})$ d'où l'égalité avec (✘).

➪ Il s'agit maintenant de prouver que $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{D}_n'(\mathbb{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$, on va montrer que $\overline{\mathscr{D}_n'(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$, une matrice $T = ((t_{ij})) \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$A = PTP^{-1}.$$

On pose alors :

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t_{ii} = t_{jj} \text{ pour tout } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ \inf\{\, |t_{11} - t_{jj}| \ : \ 1 \leq i,j \leq n\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on considère la suite de matrices $(T_k := T + \Delta_k)_{k\geq 1}$ où

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\alpha}{nk} \end{pmatrix}$$

par le choix de α, les valeurs propres des matrices T_k, $(k \geq 1)$ sont deux à deux distinctes car si

$$t_{ii} + \frac{\alpha}{ik} = t_{jj} + \frac{\alpha}{jk} \text{ avec } t_{ii} \neq t_{jj}$$

on aurait :

$$|t_{ii} - t_{jj}| = \frac{\alpha}{k}\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| < \frac{\alpha}{k} \leq \alpha$$

qui contredit la définition de α. Ainsi

$$(T_k)_{k\geq 1} \subset \mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$$

Enfin, par continuité du produit matriciel $A = \lim_k PT_kP^{-1}$ d'où la densité de $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ et donc de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Ce résultat est faux dans $M_n(\mathbb{R})$ ceci fait l'objet de l'exercice suivant. Remarquons tout de même le cas cas $n = 2$ qui est lumineux : l'application « discriminant »

$$\varphi\ :\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(A) = (a-d)^2 + 4bc \in \mathbb{R}$$

est continue, mais $A_k \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \varphi(A_k) \geq 0$, si bien que

$$(\bigstar) \qquad \Big((A_k)_k \subset \mathscr{D}_2(\mathbb{R})\ \&\ \lim_k A_k = A\Big) \Longrightarrow \Big(\varphi(A) = \lim_k \varphi(a_k) \geq 0\Big)$$

il suffit alors de choisir $A \in M_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres complexes non réelles de sorte que $\varphi(A) < 0$ qui, avec $(\bigstar)$ assure que $A \notin \overline{\mathscr{D}_2(\mathbb{R})}$.

➪ En fait l'adhérence dans $M_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, fait qui explique la densité si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (dans $\mathbb{C}$ tout polynôme est scindé) et la non densité si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 103 (Topologie dans $M_n(\mathbb{R})$: l'adhérence de $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$) [10]-*1999.*

① *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si*

$$(\text{✘}) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad : \quad |P(z)| \geq |Im(z)|^{deg(P)}.$$

② *Soit $(A_k)_k \in M_n(\mathbb{R})$ une suite convergente de matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $A := \lim_k A_k$ est trigonalisable.*

③ *En déduire l'adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables.*

❶ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire, de degré d. Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, on a, en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les zéros de P

$$P(z) = \prod_{k=1}^{d}(z - \lambda_k).$$

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{d}|z - \lambda_k| = \prod_{k=1}^{d}|\text{re}(z) - \lambda_k - i\text{Im}(z)| \geq |\text{Im}(z)|^d$$

(la dernière inégalité n'est rien d'autre que $|z| \geq |\text{Im}(z)|$.....) La réciproque est évidente puisque (6) implique que les racines de P sont réelles.

❷ Soit $(A_k)_k \in M_n(\mathbb{R})$ une suite convergente de matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ et A sa limite, les polynômes caractéristiques P_{A_k} sont donc scindés sur $\mathbb{R}$ soit

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N} \quad : \quad |P_{A_k}(z)| \geq |\mathrm{im}(z)|^n.$$

Il ne reste plus qu'à invoquer la continuité de l'application $A \mapsto P_A$ pour en déduire que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad : \quad |P_A(z)| \geq |\mathrm{im}(z)|^n.$$

Vu ❶, P_A est scindé sur $\mathbb{R}$: A est donc triangularisable.

❸ Le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale dans $M_n(\mathbb{R})$ étant scindé sur $\mathbb{R}$, les questions précédentes assurent que l'adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables est inclue dans l'ensemble des matrices triangularisables. L'inclusion inverse est facile à vérifier (raisonner comme dans la seconde partie de 'exercice précédent...). ❑

Exercice 104 (Autour des sous-groupes de $\mathbb{R}$)

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

❶ *Montrer que G est soit dense soit monogène (i.e. $\exists\, a \geq 0\ :\ G = a\mathbb{Z}$).*

❷ *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ montrer que $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.*

❸ *En déduire un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}$ tels que $A + B$ ne soit pas fermé.*

❹ *à toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on associe son groupe des périodes*

$$G_f := \{T \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x+T) = f(x)\}.$$

Montrer que G_f est bien un groupe et que f est toujours constante sur G_f.

❺ *Si de plus f est continue, montrer que*

$$(f \text{ est non constante }) \iff (\ G_f \text{ est monogène })$$

❻ *Donner l'exemple d'une fonction f non constante munie d'un groupe des périodes dense.*

❼ *Montrer que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.*

❽ *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

➪ *Que dire d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $X = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, $f(X) = f(X + (1,0)) = f(X + (0,1)) = f(AX)$?*

➪ *Même question avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

❶ On exclut le cas trivial $G = \{0\}$. La procédure est classique : considérons $a := \inf\{g \in G\ :\ g > 0\}$, a est donc ≥ 0. ✘

➪ Si $a > 0$: tout d'abord, remarquons que $a \in G$ sinon par définition de l'inf, il existerait x et y dans G tels que $0 < a < x < y < 2a \implies 0 < y - x < a$ ce qui est absurde vu la définition de a car $y - x \in G$.

$a \in G \Longrightarrow a\mathbb{Z} \subset G$. Réciproquement, si $x \in \mathbb{G}$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ : \ na > x\}$ est non vide, donc il admet un plus petit élément $n_0 + 1$. On a $n_0 a \leq x < (n_0+1)a$ mais $n_0 a < x \Longrightarrow 0 < x - n_0 a < a$ inégalités encore une fois absurdes : $x = n_0 a$ et finalement $G = a\mathbb{Z}$.

➪ Supposons maintenant $a = 0$, pour montrer que G est dense il est équivalent de montrer que $\forall\, x < y$ dans $\mathbb{R}$ il existe $g \in G$ avec $x < g < y$. $a = 0 \Longrightarrow \ \exists\, g \in G$ tel que $0 < g < y - x$ on conclut alors comme dans le premier cas.

❷ ➪ Si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux

$$\begin{aligned} G &= a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ &= \{na + mb,\ n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{na + \frac{qam}{p},\ n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(np + qm)\,\frac{a}{p},\ n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \frac{a}{p}\mathbb{Z} \qquad \text{par Bezout.} \end{aligned}$$

➪ Réciproquement s'il existe $c > 0$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$ il existe $n, m \in \mathbb{Z}^\star$ tels que $a = nc$ et $b = mc$ soit $a/b = n/m$. CQFD

❸ Vu la question précédente, $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$, distinct de $\mathbb{R}$ ($1/2 \in G \Longrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\,!$) bien que $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ soient fermés dans $\mathbb{R}$.

❹ G_f est toujours non vide ($0 \in G_f$) le reste suit tout aussi facilement.

❺ Avec la première question, il est équivalent de montrer que

$$(f \text{ est constante }) \iff (\ G_f \text{ est dense })$$

f étant continue, ceci est immédiat.

❻ Si

$$f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on vérifie sans peine que $G_f = \mathbb{Q}$: la continuité est donc essentielle dans la question précédente.

❼ Remarquons que

$$\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n + 2\pi m),\ n, m \in \mathbb{Z}\} = \cos(G)$$

où G est le sous groupe dense $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. On conclut facilement la fonction cosinus étant continue et surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$ (par exemple car f continue ssi $\forall\, A\ :\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$...) De la même manière on peut montrer avec $f(x) := \exp(2i\pi x)$ que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ a une image par f dense dans le cercle unité pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

❽ ➪ Soit f une fonction continue et $\mathbb{Z}^2$-périodique telle que $f \circ A = f$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a ainsi, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(x+y,y)$. Autrement dit, $u \mapsto f(u,y)$, qui est a priori 1-périodique, est également y-périodique. Si y est irrationnel, l'argument utilisé dans a prouve que cette fonction est constante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \qquad f(x,y) = f(0,y).$$

Par continuité de $y \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(0,y)$ et densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on obtient donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = f(0,y)$$

Inversement, si f vérifie cette condition, c'est-à-dire si $f(x,y)$ est indépendante de x, f vérifie bien $f \circ A = f$.

➪ Soit enfin f une fonction continue et $\mathbb{Z}^2$-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $f = f \circ A$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme A a deux valeurs propres :

$$\mu = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

de sorte que $|\mu| < 1 < |\lambda|$. Soient u (resp. v) un vecteur propre de A associé à μ (resp. λ). Si $X = xu + yv$ où (x,y) est dans $\mathbb{R}^2$ on a , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(✔) \qquad f(X) = f(A^n X) = f\left(x\mu^n u + y\lambda^n v\right)$$

Mais f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{Z}^2$-périodique donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$ (vérification en fin de solution). Il s'ensuit que :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x\mu^n u + y\lambda^n v\right) - f\left(y\lambda^n v\right) = 0$$

(car $x\mu^n u \to 0$ quand $n \to +\infty$). Par suite : $f(X) = f(xu)$. Ceci montre que $f(xu+yv)$ ne dépend pas de y. Mais en utilisant (✔) pour n dans $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, et en faisant tendre n vers $-\infty$, il vient $f(X) = f(yv)$. Autrement dit $f(xu+yv)$ ne dépend pas de x. En fin de compte, f est constante sur $\mathbb{R}^2$. ➪

🛈 **Remarque :** *Preuve de l'uniforme continuité d'une fonction continue et $\mathbb{Z}^2$ périodique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.* Soient f une telle fonction et $|| \ ||_\infty$ la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par $||(x_1,x_2)||_\infty = \text{Max}(|x_1|,|x_2|)$. La restriction de f au compact $K = [-1,1]^2$ est uniformément continue. Soient donc $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0,1/2[$ tels que :

$$\forall (x,y) \in K^2, \qquad ||x-y||_\infty \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Soient enfin x et y dans $\mathbb{R}^2$ tels que $||x-y||_\infty \leqslant \delta$. Soit m dans $\mathbb{Z}^2$ tel que $x' = x-m$ soit dans $[-1/2,1/2]^2$. Alors $y' = y-m$ vérifie $||y'-x'||_\infty \leqslant \delta$, donc $(x',y') \in K^2$ et :

$$|f(x)-f(y)| = |f(x')-f(y')| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 105 (Le théorème de Riesz dans un espace de Hilbert : c'est facile !)

Soit H un espace de Hilbert.

① *On suppose la boule unité $\mathscr{B}_H := \{x \in H \ : \ |\langle x, x\rangle| \leq 1\}$ compacte. Montrer que H est de dimension finie.*

② *On suppose H de dimension infinie. Soit $\mathscr{E} := \{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormée. Montrer que $\mathscr{E}$ est un fermé borné non compact de H.*

❶ Supposons H de dimension infinie, on peut alors construire dans H (Hilbert-Schmidt) une famille orthonormale $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bien entendu incluse dans $\mathscr{B}_H$. Mais pour tout $i \neq j$: $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, toute boule ouverte dans H de rayon $\sqrt{2}/2$ ne peut donc contenir plus d'un vecteur e_j : il est par conséquent exclus d'espérer du recouvrement ouvert de $\mathscr{B}_H$

$$\mathscr{B}_H \subset \bigcup_{x\in\mathscr{B}_H} B(x, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

extraire un sous-recouvrement fini ; contradiction.

❶ H est de dimension infinie : soit $\mathscr{E} := \{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormale, elle est visiblement bornée. Montrons qu'elle est fermée : soit $x \in \overline{\mathscr{E}}$: il existe une suite $(e_{\varphi(k)})_k \subset \mathscr{E}$ qui converge vers x. On a donc $\lim_k \|e_{\varphi(k+1)} - e_{\varphi(k)}\| = 0$, mais pour tout $i \neq j$: $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. La seule alternative est alors que φ soit constante à partir d'un certain rang k_0 i.e. $x = e_{\varphi(k_0)} \in \mathscr{E}$ qui est donc fermé.
Comme pour la question précédente $\mathscr{E}$ n'est pas compact vu le recouvrement ouvert $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(e_n, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
❑

🛈 **Remarque :** C'est bien sûr la version « Hilbert » du célèbre théorème de Riesz dont la preuve est un peu plus délicate. Le cadre particulier des espaces de Hilbert permet cette très simple et élégante approche.

Exercice 106 (Connexité)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ une application dérivable. On suppose f' identiquement nulle (respectivement > 0) sur Ω ; f est-elle constante sur Ω (resp. strictement croissante) sur Ω ?

Bien sûr que non ! il suffit de considérer pour le premier cas l'application $f \ : \ \Omega = \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0, \\ +1 & \text{si} x < 0. \end{cases}$$

et pour le second la fonction $g \ : \ \Omega = \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ où $g(x) = -\dfrac{1}{x}$. ❑

🛈 **Remarque :** dans les deux cas c'est la non connexité de Ω qui fait capoter ce résultat archi-classique.

Exercice 107 (Un opérateur borné sans adjoint)
On munit $\mathbb{C}[X]$ du produit scalaire

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{C}[X] \ : \ \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\overline{Q(t)}dt.$$

Montrer que l'opérateur $T\ :\ P \in \mathbb{C}[X] \mapsto T(P) = P'$ n'a pas d'adjoint.

Supposons que T admette un adjoint $T^\star$. Notons pour $n \in \mathbb{N},\ p_n(x) = x^n$, alors

$$\begin{aligned}\langle\, p_n, T^\star p_0\rangle &= \int_0^1 t^n\overline{T^\star p_0(t)}dt\\ &= \int_0^1 T(t^n)\overline{p_0(t)}dt\\ &= \int_0^1 nt^{n-1}dt = 1\end{aligned}$$

mais de l'autre côté, avec Cauchy-Schwarz

$$1 = |\langle\, p_n, T^\star p_0\rangle| \leq \|p_n\|\cdot\|T^\star p_0\| \leq \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\|T^\star p_0\| < 1 \quad \text{ pour } n \text{ assez grand,}$$

d'où la contradiction. ❑

Exercice 108 ($\exp(A) \in \mathbb{C}[A],\ \forall A \in M_n(\mathbb{C})$) [45].
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$e^A = P(A).$$

L'ensemble $\mathscr{V} := \{\, P(A),\ \ P \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie : $\mathscr{V}$ est donc lui aussi[2] fermé dans $M_n(\mathbb{C})$. Mais $e^A = \lim_N \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}$ appartient à l'adhérence de $\mathscr{V}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ donc à $\mathscr{V}$, d'où le résultat. ❑

[2]un sous-espace de dimension finie d'un e.v.n. est toujours fermé

Exercice 109 (Topologie dans $M_n(\mathbb{C})$: commutant et bicommutant) $M_n(\mathbb{C})$ *est muni de sa topologie canonique d'espace vectoriel normé. Montrer que*

① *L'ensemble $\mathscr{F}$ des matrices semblables à une matrice compagnon (i.e. l'ensemble des matrices cycliques) est un ouvert connexe dense de $M_n(\mathbb{C})$.*
② *Si $n \geq 2$, l'application $\varphi : A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \varphi(A) := \pi_A$ n'est pas continue.*

Soit $u \in \mathrm{End(E)}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On rappelle que :

$$\mathrm{Com}(u) = \{v \in \mathrm{End(E)} \ : \ \mathrm{u \circ v = v \circ u}\}$$

$$\mathrm{Bicom}(u) = \{v \in \mathrm{End(E)} \ : \ \mathrm{u \circ w = v \circ w} \ , \ \forall \mathrm{w} \in \mathrm{Com(u)}\} \subset \mathrm{Com(u)}$$

sont, respectivement, le commutant et le bicommutant de u. Si M est la matrice de u (peu importe le choix de la base de E), on a bien sûr les définitions similaires de $\mathrm{Com}(M)$, *et* $\mathrm{Bicom}(M)$.
③ *Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ son commutant $\mathrm{Com}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension au moins n.*
④ *...................... ? ?*

❶ Procédons par étapes :

➪ Si $A \in \mathscr{F}$, il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\left(A^k x_0\right)_{k=0}^{n-1}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. Alors, l'application continue sur $M_n(\mathbb{C})$

$$\varphi_{x_0} \ : \ M_n(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \varphi_{x_0}(A) := \det(x_0, \, Ax_0, \ldots, \, A^{n-1}x_0)$$

vérifie donc $\varphi_{x_0}(A) \neq 0$. Par continuité de φ_{x_0} en A il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_{x_0}(M) \neq 0$ pour tout $M \in B(A, \delta)$ i.e. $B(A, \delta) \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est bien ouvert.

➪ Pour la connexité, vu que

$$A \in \mathscr{F} \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists\, a = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \ : \ A = P^{-1}C(a)P,$$

où $C(a)$ est la matrice compagnon associée au vecteur $a \in \mathbb{C}^n$. Autrement dit $\mathscr{F} = \psi(GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n)$ avec

$$\psi \ : \ GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \ni (P, a) \mapsto \psi(P, a) := P^{-1}C(a)P.$$

ψ est une application clairement continue de l'ouvert $GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$ connexe (comme produit des deux ouverts connexes $GL_n(\mathbb{C})$, et **attention !** $GL_n(\mathbb{R})$ lui n'est pas connexe si $n \geq 1$...) et $\mathbb{C}^n$: $\mathscr{F}$ est donc bien connexe comme image continue d'un connexe.

➪ Il nous reste à établir la densité : mais il est bien connu que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices à valeurs propres deux à deux distinctes donc semblables à des matrices de Frobenius d'où la densité.

❷ Supposons φ continue, il en sera alors de même pour

$$\psi \ : \ M_n(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \psi(A) := p_A - (-1)^n \pi_A \in \mathbb{C}[X]$$

mais alors

$$\mathscr{F} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ p_A = (-1)^n \pi_A\} = \psi^{-1}(\{0_{\mathbb{C}[X]}\})$$

est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Nous avons vu plus haut que $\mathscr{F}$ est ouvert : c'est donc une partie à la fois ouverte, fermée, non vide du connexe $M_n(\mathbb{C})$, la seule alternative est $\mathscr{F} = M_n(\mathbb{C})$: égalité absurde si $n \geq 2$ et trivialle si $n = 1$.

❸ Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a l'inclusion évidente $\mathbb{C}[A] \subset \text{Com}(A)$; mais, si A est cyclique $\mathbb{C}[A] = \text{vect}\{ I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ est (lemme fondamental) de dimension n, et ???? par ailleurs, l'ensemble des matrices cycliques $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est ouvert dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Par transitivité de la densité, il sera donc suffisant de montrer que l'ensemble

$$F := \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ \dim \text{Com}(A) \geq n\}$$

est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$. Pour établir ce dernier point, considérons, si $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $\varphi_A \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{C}))$ défini par

$$\varphi_A(B) = AB - BA,$$

avec ce choix

$$\ker(\varphi_A) = \text{Com}(A)$$

si bien que

$$F = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ \text{rang}(A) \leq n^2 - n\}.$$

Sous cette forme, il est n'est pas difficile de vérifier que F est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$: soit $A \in \overline{F}$, il existe dans F une suite $(A_k)_k$ de limite A, ce qui implique aussitot : $\lim_k \varphi_{A_k} = \varphi_A$. Montrer que $A \in F$ est maintenant une conséquence immédiate de la semi-continuité inférieure de l'application rang en dimension finie, précisément :

> *Pour tout espace vectoriel E de dimension finie d et tout entier $1 \leq k \leq d$, les ensembles de niveau $\mathscr{R}_k = \{T \in \mathscr{L}(E) \ : \ rang(T) \leq k\}$ sont fermés dans $\mathscr{L}(E)$.*

En effet, pour $T \in \overline{\mathscr{R}_k}$, $(T_l)_l \subset \mathscr{R}_k$ de limite T : si $r = \text{rang(T)}$, la matrice T admet un mineur $\Delta_r(T)$ non nul et par continuité : $\lim_l \Delta_r(T_l) = \Delta_r(T) \neq 0$. Il existe donc l_0 tel que $l \geq l_0$ implique $\Delta_r(T_l) \neq 0$; autrement dit : $\forall l \geq l_0 \ : \ k \geq \text{rang}(T_l) \geq r$ i.e. $k \geq r \implies T \in F$. Le résultat suit avec $T = \varphi_A,\ T_l = \varphi_{A_l}$.

❏

🛈 **Remarques :** ➪ La démonstration de la non continuité $A \mapsto \pi_A$ donnée dans la seconde question n'est bien entendu pas celle que l'on doit fournir le jour d'un oral (le prérequis est trop important). Il faut impérativement connaitre la suivante, classique, rapide et simple : Supposons φ continue, l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ des matrices à valeurs propres deux à deux distinctes étant (cf exercice ? ? ?) dense dans $M_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(A_k)_k \subset \mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ telle ref que

$$I_n = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

Par continuité de φ

$$\pi_{I_n} = \lim_{k\to\infty} \pi_{A_k}$$

mais sur $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C}) \ : \ (-1)^n\pi_A = P_A$ si bien que

$$X - 1 = \pi_{I_n} = \lim_{k\to\infty} \pi_{A_k} = \lim_{k\to\infty} P_{A_k} = P_{I_n} = (-1)^n(X-1)^n$$

égalité absurde si $n > 1$ (si $n = 1$ polynôme minimal et caractéristique coïncident d'où l'évidente continuité de φ) l'application est donc discontinue en I_n.

➪ Sur la dimension et parler du bicommutant............voir un autre exo......... ❏

Exercice 110 (Topologie dans $M_n(\mathbb{C})$: autour des matrices nilpotentes) [45], [18].

❶ *Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, il existe une suite de matrices $(B_k)_k$ semblables à A et de limite nulle.*

❷ *Montrer que le sous-espace $\mathscr{N}$ engendré par les matrices nilpotentes est le sous-espace $\mathscr{T}$ des matrices de trace nulle.*

❶ ➪ Si A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire $T = ((t_{ij}))$ stricte (i.e. $t_{ij} = 0$ pour $i \geq j$). Il est bien entendu suffisant de prouver le résultat pour T. Pour tout $q \in \mathbb{N}$ soit $D(q) = \operatorname{diag}(q^n, q^{n-1}, \dots, q^2, q)$ et notons

$$D(q)^{-1}TD(q) = ((u_{ij})), \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

on a alors

$$\begin{cases} u_{ij} & = q^{i-j}t_{ij}, \forall\, n \geq j > i \geq 1 \\ u_{ij} & = 0, \quad \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Donc, si $\alpha := \max\{\,|t_{ij}|,\ 1 \leq i, j \leq n\}$ on a aussitot

$$|u_{ij}| \leq \frac{\alpha}{q}, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

et par suite $\lim_q D(q)^{-1}TD(q) = O_{M_n(\mathbb{R})}$. D'où le résultat.

➪ Réciproquement soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||.|||$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$.Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A on a (classiquement) :

$$|\lambda| \leq |||A|||.$$

Si bien que s'il existe une suite $(B_k)_k$ de matrices semblables à A et de limite nulle, les matrices A et B_k ayant même spectre on démontre sans peine que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad |\lambda| < \varepsilon, \quad \forall\, \lambda \in \operatorname{spec}(A),$$

i.e. $\operatorname{spec}(A) = \{O\}$ et A est nilpotente. ❏

Exercice 111 (Topologie dans $M_n(\mathbb{C})$: les classes de conjugaison) [45], [18].

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on définit la classe de conjugaison de A par

$$\mathscr{S}_A = \left\{ P^{-1}AP, \quad P \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

❶ *Si A est nilpotente, montrer que $0 \in \overline{\mathscr{S}_A}$.*

❷ *Montrer l'équivalence entre :*

(i) A est diagonalisable.
(ii) $\mathscr{S}_A$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.

❸ *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que*

(i) Montrer que $\mathscr{S}_A$ est borné si, et seulement si $A \neq \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Montrer que $\mathscr{S}_A$ est connexe par arc, d'interieur vide dans $M_n(\mathbb{C})$.

❶ C'est une conséquence immédiate de l'exercice précédent.

❷ (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et est annulé par A, ie $\pi_A(A) = O$. En outre, $M \in \mathscr{S}_A \;\Rightarrow\; \forall\, k \in \mathbb{N} \;:\; M^k = PA^kP^{-1} \;\Rightarrow\; \pi_A(M) = P \cdot \pi_A(A) \cdot P^{-1} = O$. Ainsi

$$\pi_A(M) = O, \quad \forall\, M \in \mathscr{S}_A$$

et par continuité[3] de $M \mapsto \pi_A(M)$

$$\pi_A(M) = O, \quad \forall\, M \in \overline{\mathscr{S}_A},$$

ainsi $\pi_A(B) = O$: la matrice $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$ est donc annulée par un polynôme scindé à racine simples et est donc diagonalisable. Pour s'assurer que $B \in \mathscr{S}_A$, il est maintenant suffisant de montrer que les matrices A et B ont mêmes valeurs propres et mêmes dimension de sous espaces propres.

Soient $\lambda \in \text{spec}(A)$, $E_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \;:\; Ax = \lambda x\}$ le sous-espace propre associé et $F_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \;:\; Bx = \lambda x\}$ et posons $n_\lambda = \dim E_\lambda$, $m_\lambda = \dim F_\lambda$. Soit $M \in \mathscr{S}_A$, M étant semblable à A : $\text{rang}(M - \lambda I_n) = n - n_\lambda$ qui implique que les mineurs d'ordre $n - n_\lambda + 1$ de $M - \lambda I_n$ sont nuls. Ces mineurs dépendant polynomialement et donc continuement des coefficients, les mineurs d'ordre $n - n_\lambda + 1$ de B sont aussi nuls, soit :

$$n - m_\lambda = \text{rang}(B - \lambda I_n) \leq n - n_\lambda$$

i.e.

$$m_\lambda \geq n_\lambda, \quad \forall \lambda \in \text{spec}(A).$$

En outre B étant diagonalisable

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} m_\lambda = n = \sum_{\lambda \in \text{spec}(A)} n_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \text{spec}(A)} m_\lambda$$

[3]Attention ! par contre l'application $A \mapsto \pi_A$ n'est pas continue, on deux trouvera deux preuves dans ce document.

qui implique $n_\lambda = m_\lambda,\ \forall\,\lambda \in \text{spec}(A)$ qui assure à son tour que B est semblable à A : $B \in \mathscr{S}_A$ soit $\mathscr{S}_A = \overline{\mathscr{S}_A}$.

(ii) $\Leftarrow$ (i). Supposons maintenant par contraposée A non diagonalisable. On peut écrire A sous la forme $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente non nulle et $ND = DN$. À conjugaison prés, on peut supposer

$$D = \text{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_k I_{m_k})$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ étant les valeurs propres distinctes de A, $m_1, \dots, m_k$ leur multiplicité. Comme $ND = DN$, N est de la forme

$$N = \text{diag}(N_1, \dots, N_k), \quad N_i \in M_{m_i}(\mathbb{C}),\ 1 \leq i \leq k,$$

et en effectuant les produits par blocs dans $ND = DN$ on voit que l'on peut[4] supposer les N_i triangulaires supérieures strictes. Alors, comme dans la preuve de la première question

$$D(q)^{-1}DD(q)) = D \quad \text{et} \quad \lim_q D(q)^{-1}ND(q)) = 0$$

qui implique

$$D = \lim_q D(q)^{-1}(D+N)D(q) = \lim_q D(q)^{-1}AD(q)$$

i.e. $D \in \overline{\mathscr{S}_A}$. D'un l'autre coté $D \notin \mathscr{S}_A$ puisque A n'est pas diagonalisable : $\mathscr{S}_A \neq \overline{\mathscr{S}_A}$ et la seconde implication est démontrée.

Remarques : ➪ Dans la solution de la question précédente il est démontré que pour toute matrice $A = D + N \in M_n(\mathbb{C})$ (décomposition de Dunford), la matrice diagonale D est toujours dans $\overline{\mathscr{S}_A}$.

➪ Suivant Francinou Gianella &...[15] on peut simplifier la preuve (i)⇒(ii) de la manière suivante : soient A diagonalisable, $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$, avec $B = \lim_k A_k$ où $(A_k)_k \subset \mathscr{S}_A$. $A_k \in \mathscr{S}_A$ implique $\chi_A = \chi_{A_k},\ \forall k \in \mathbb{N}$ et par continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$ il vient

$$\chi_B = \lim_k \chi_{A_k} = \chi_A.$$

Mais aussi, comme nous l'avons remarqué plus haut $\pi_A(B) = O$: la matrice B annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable. Les matrices A et B ont donc mêmes valeurs propres (comptées avec leur multiplicités) et sont diagonalisables : elles sont semblables et $B \in \mathscr{S}_A$.

❸ ➪ Si $A = \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{C}$ alors $\mathscr{S}_A = \{A\}$ qui est bien bornée. Maintenant, si A n'est pas une matrice scalaire l'endomorphisme f canoniquement associé à A n'est pas une homothétie et un exercice classique d'algèbre linéaire[5] assure de l'existence d'un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ tel que la famille $\{v, f(v) = Av\}$ soit libre. Considérons alors la base $\mathscr{B}_\lambda := \{v, \lambda Av, e_3, \cdots, e_n\}$ où $\lambda > 0$ et soit $A_\lambda \in \mathscr{A}$ la matrice de A dans cette base. En observant la première colonne de A_λ il vient $\|A_\lambda\|_\infty \geq \lambda^{-1} \longrightarrow +\infty$ lorsque λ tends vers 0 et $\mathscr{S}_A$ n'est pas bornée[6] dans $M_n(\mathbb{C})$.

[4] Choisir une base adaptée à la décomposition précédente dans laquelle chaque matrice N_i est triangulaire, la matrice D reste inchangée vu sa forme et le choix de la nouvelle base.

[5] Consultez votre ouvrage favori...

[6] Qu'importe la norme, elles sont toutes équivalentes...

➪ Une classe de similitude n'est jamais ouverte et est même d'intérieur vide car tous les éléments d'une telle classe ayant même trace, elle est incluse dans un hyperplan affine de $M_n(\mathbb{C})$ donc d'intérieur vide.
Pour la connexité par arcs, ce n'est pas encore clair.... ❑ ✘

Exercice 112 (Espace de Banach) [10]-*1994/95.*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach admettant une famille libre $(a_n)_{n\geq 1}$.
① *Montrer que $F_n := Vect(a_1, \dots, a_n)$ est fermé dans E.*
② *Construire une suite $(\alpha_n)_n$ de réels strictement positifs vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$*

$$\alpha_n.\|a_{n+1}\| \leq \frac{1}{3}d(\alpha_n a_n, F_{n-1}).$$

③ *Justifier l'existence de $x = \sum_{k\geq 1}\alpha_k a_k$. Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x \in F_n$?*
④ *Conclusion ?*

❶ E_n est un sous espace vectoriel normé de dimension finie de E il est donc complet (consultez votre manuel favori) et donc fermé dans E (dans un espace métrique, toute partie complète est fermée).

❷ On procède par récurrence. α_0 se construit sans peine ; supposons $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ construits, puisque F_{n-1} est fermé et que $\alpha_n a_n \notin F_{n-1}$, on a $d_n := d(\alpha_n a_n, F_{n-1}) > 0$ si bien qu'en posant $\alpha_{n+1} = \dfrac{d_n}{3\|a_{n+1}\|}$ on tire

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d(\alpha_{n+1}a_{n+1}, F_n) \leq d(\alpha_{n+1}a_{n+1}, 0) = \alpha_{n+1}\|a_{n+1}\| \\ &\leq \frac{1}{3}d_n = \frac{1}{3}d(\alpha_n a_n, F_{n-1}) \leq \frac{\alpha_n\|a_n \ Vert}{3} \end{aligned}$$

soit

❸ On déduit de la construction précédente que pour tout entier k

$$\|\alpha_k a_k\| \leq \frac{\|\alpha_0 a_0\|}{3^k},$$

La série $\sum_n \alpha_k a_k$ est donc absolument convergente, et comme E est complet, elle converge.

❸ .... ❑

Exercice 113 (Surjectivité universelle de l'ensemble de Cantor) [34] *10/1998.*

Il s'agit de quelques applications, souvent surprenantes de la propriété « universelle » de surjectivité de l'ensemble de Cantor C :

« Tout espace métrique compact est image continue de l'ensemble de Cantor »

(Alexandroff-Hausdorff)

❶ *Il existe une surjection continue f de $[0,1]$ sur $[0,1]^d$.*

❷ ***Une fonction continue qui interpole toute suite bornée :*** *Il existe une application continue $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour toute suite $\mathbf{y} = (y_n)_n \in [-1,1]^{\mathbb{Z}}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(a+n) = y_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

❸ ***Le théorème de Banach-Mazur :*** *Tout Banach séparable est linéairement isométrique à un sous-espace de $\mathscr{C}([0,1])$.*

❶ Par le théorème d'Alexandroff-Hausdoff, il existe une application continue surjective $f : C \to [0,1]^d$. On va prolonger f à tout l'intervalle $[0,1]$ par interpolation linéaire : le complémentaire de l'ensemble de Cantor dans $[0,1]$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts. Soit $]a,b[$ l'un de ces intervalles, on définit f sur $]a,b[= \{\, ta+(1-t)b,\ 0<t<1\}$ en posant

$$(✘) \qquad f(ta+(1-t)b) = tf(a)+(1-t)f(b).$$

f ainsi prolongée est visiblement continue et par convexité du cube $[0,1]^d$ elle reste à valeurs dans le cube, soit $f([0,1]) = [0,1]^d$.

Remarques : ➪ Donner une référence pour la preuve du théorème de Alexandroff-Hausdorff.

➪ Dans la première question, seule intervient la convexité du cube. On à donc en fait démontré : *« Pour tout espace métrique compact convexe K d'un espace vectoriel topologique E (il faut tout même être dans un e.v.t. pour que le prolongement (✘) soit continu), il existe une surjection continue de $[0,1]$ sur K ».* Et même plus générallement *« Pour tout espace métrique compact K d'un espace vectoriel topologique E, il existe une application continue $f \in \mathscr{C}([0,1],E)$ telle que $K \subset f([0,1]) \subset conv(K)$ ».*

❷ Munissons l'ensemble $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$ des suites $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant $|y_n| \leq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$, de la topologie produit ; par le théorème de Tychonoff c'est un espace compact. Comme produit dénombrable d'espace métrisable, K est aussi métrisable (par exemple par $d(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|}|y_n - x_n|$, la compacité peut alors d'ailleurs de démontrer par un procédé d'extraction diagonal...).
Avec Alexandroff-Hausdorff, il existe donc une surjection continue ψ de C sur $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$: $t \in C \mapsto \psi(t) := (\psi_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$; $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$ étant muni de la topologie produit, les applications coordonnées $\psi_n : C \to [-1,1]$ sont continues.

On suppose ici que $C \subset [0, 1/2]$ (par exemple l'image du Cantor standart par l'homéomorphisme $f(x) = x/2$) de telle sorte que

$$(C+n) \bigcap (C+m) = \emptyset, \quad \forall\, m \neq m \ \text{ dans } \ \mathbb{Z},$$

ce qui permet de définir la fonction f sur $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C+n)$ par

$$f(t+n) = \psi_n(t), \quad t \in C,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Vu A et ψ, f est bien définie et continue sur A et comme dans la question précedente ($\mathbb{R}\setminus A$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts ; on peut aussi bien entendu invoquer le théorème d'extension de Tietze) on prolonge f sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée encore f à valeurs dans $[-1, 1]$. La fonction f possède la propriété recquise : soit $\mathbf{y} = (y_n)_n \in [-1, 1]^{\mathbb{Z}}$, il existe $t_0 \in C$ tel que $\psi(t_0) = \mathbf{y}$ i.e. $f(t_0 + n) = \psi_n(t_0) = y_n,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

🛈 **Remarques :** ➪ On peut bien entendu remplacer $[-1, 1]^{\mathbb{Z}}$ par $[-a, a]^{\mathbb{Z}}$ avec $a > 0$. Toutefois il n'est pas envisageable de contruire une application continue sur $\mathbb{R}$ qui interpole toutes les suites doublement (i.e. indicées dans $\mathbb{Z}$) bornées et même toute les suite constantes : en effet si tel était le cas on aurait

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \ :\ f(t+n) = \alpha, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

qui implique $f([0, 1]) = \mathbb{R}$ contredisant la continuité de f.
➪ Soit $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite arbitraire d'entiers positifs ; en remplacant $[-1, 1]^{\mathbb{Z}}$ par $\prod_{n\in\mathbb{Z}}[-M_n, M_n]$ la démonstration précédente permet de travailler avec des suites $\mathbf{y} = (y_n)_n$ vérifiant $|y_n| \leq M_n,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Il est en particulier possible de construire une fonction continue qui interpole toutes les suites (indicées dans $\mathbb{N}$) bornées. Précisément : « *Il existe $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour toute suite bornée $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(t+n) = y_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$* » . En effet, considèrons la fonction f obtenue avec la suite $M_n = n$ si $n \geq 0$ et $M_n = 0$ sinon. Avec ce choix, pour toute suite bornée $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n| \leq k,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ et il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(s+m) = 0$ si $m < k$ et $f(s+m) = y_{m-k}$ pour $m \geq k$, le choix $t = s + k$ convient.

❸ Pour montrer que tout espace de Banach séparable X est isométrique[7] de $\mathscr{C}([0, 1])$, on procède par étape :

➪ **Première étape :** *Tout espace de Banach séparable est isométrique à un sous-espace de $\mathscr{C}(K)$ où K est une partie compacte convexe métrisable d'un espace vectoriel topologique E.*

Désignons par $X^\star$ le dual topologique de X. Tout élément $x \in X$ peut être considéré comme une forme linéaire sur $X^\star$ par

$$(\text{✘}) \qquad x(y^\star) := y^\star(x), \quad \forall\, y \in X^\star.$$

Si l'on muni $X^\star$ de la topologie $\sigma(X^\star, X)$ (où faible*, c'est la topologie la plus faible sur $X^\star$ rendant continue les éléments de X considérés comme fonctionnelles par (✘)), pour cette topologie, la boule unité K de $X^\star$ (la boule unité de l'espace de Banach $X^\star$) est une partie

[7] X est isométrique à un sous-espace Y d'un Banach, s'il existe une application linéaire continue $T\ :\ X \to Y$ vérifiant $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ pour tout $x \in X$.

compacte, convexe et métrisable ([46] pages ? ? ?). Nous pouvons maintenant définir une isométrie J de X dans $\mathscr{C}(K)$ par

$$J(x)(k) := k(x) = x^\star(k), \quad \forall\, x \in X,\ k \in K.$$

J est clairement linéaire, que $J(x) \in \mathscr{C}(K)$ résulte de la définition de la topologie $\sigma(X^\star, X)$, vérifions enfin que J est bien une isométrie. Pour tout $k \in K,\ x \in X$

$$|J(x)(k)| = |k(x)| \leq \|k\|_{X^\star}\|x\|_X \leq \|x\|_X$$

la première inégalité résulte de la définition de la norme sur $X^\star$ et la seconde du fait que K est la boule unité de $X^\star$ (i.e. $\|k\|_{X^\star} \leq 1$). Ainsi

$$\|J(x)\|_{\mathscr{C}(K)} = \sup_{k\in K} |J(x)(k)| \leq \|x\|_X.$$

L'inégalité contraire est une conséquence d'un corollaire du théorème de Hahn-Banach ([46] page ....) : pour tout $x \in X$ il existe $k_x \in K$ telle que $k_x(x) = \|x\|_X$. Alors

$$\|J(x)\|_{\mathscr{C}(K)} \geq J(x)(k_x) = k_x(x)\|x\|_X$$

soit finalement $\|J(x)\|_{\mathscr{C}(K)} = \|x\|_X,\ \forall\, x \in X$: J est bien une isométrie.

➪ **Seconde étape :** *$\mathscr{C}(K)$ est isométrique à un sous espace de $\mathscr{C}([0,1])$.*

Puisque K est un espace compact convexe métrisable, il existe (c'est la seconde remarque de ❶) une surjection continue $\psi\ :\ [0,1] \to K$. L'opérateur de composition défini sur $\mathscr{C}(K)$ par

$$T(f)(t) = f(\psi(t)), \quad t \in [0,1]$$

est un opérateur linéaire de $\mathscr{C}(K)$ dans $\mathscr{C}([0,1])$, c'est une isométrie car

$$\|T(f)\|_{\mathscr{C}([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]} |f(\psi(t))| = \sup_{k\in K} |f(k)| = \|f\|_{\mathscr{C}(K)}$$

par surjectivité de ψ. ❑

🛈 **Remarques :** Dans l'article cité dans l'énoncé on trouvera d'autres applications, par exemple

➪ **Un ensemble convexe « universel » :** Pour tout $d \in \mathbb{N}^\star$, il existe un compact convexe $K \subset \mathbb{R}^{d+2}$ tel que tout compact convexe de $\mathbb{R}^d$ soit isométrique à l'une des faces de K.

➪ (Rudin, 1973) Il existe une suite uniformément bornée d'applications strictement positives $(f_n)_n$ continues sur $[0,1]$ (on peut même prendre des polynômes) vérifiant

⇝ $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

⇝ Pour toute suite non bornée $(\lambda_n)_n$ de réels positifs, il existe $x \in [0,1]$ telle que $\mathrm{limsup_n \lambda_n f_n(x) = 0}$.

Exercice 114 (Sur les espaces de Baire) [46]
Soient X un espace topologique, Y un sous-espace de X

❶ *Soit $A \subset Y$ un ensemble fermé d'intérieur vide (dans Y). Montrer que A est rare dans X i.e. $\mathring{\overline{A}}^X = \emptyset$.*

❷ *Si $A \subset Y$ est maigre dans Y, montrer qu'il est maigre dans X.*

❸ *Dans un espace de Baire, montrer que le complémentaire de toute partie maigre est un espace de Baire.*

❹ *Montrer qu'un espace de Baire séparé et sans points isolés est non dénombrable.*

❶ Sinon, l'adhérence de A dans X est d'intérieur non vide : il existe donc un ouvert O de X tel que $\mathring{\overline{A}}^X \neq \emptyset$ et par conséquent, tout fermé de X contenant A contient O. Soit F un fermé de Y contenant A : il existe un fermé L de X tel que $F = L \cap Y$. $A \subset F = L \cap Y$ implique $A \subset L$ et par suite $O \subset L$. Ainsi, pour tout fermé F de Y contenant A : $O \cap Y \subset F$, donc

$$O \cap F \subset \overline{A}^Y.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que l'ouvert $O \cap F$ est non vide : si c'est le cas, comme O est un ouvert non vide de $\overline{A}^X$ on aurait $O \cap Y = \emptyset$ et $A \subset Y \implies O \cap A = \emptyset$ soit $O \subset (X \setminus \overline{A}^X)$ ce qui est absurde !

❷ Soit $A \subset Y$ une partie maigre de Y. A est donc contenue dans un réunion dénombrable de fermés (de Y) d'intérieur vide (dans Y) i.e.

$$A \subset \bigcup_n F_n, \qquad F_n = \overline{F_n}^Y, \qquad \mathring{F}_n = \emptyset.$$

Avec ❶ les F_n sont rares dans X et comme $A \subset \cap_n \overline{F_n}^X$ est maigre dans X comme réunion dénombrable d'ensembles rares (dans X).

❸ Soit $Y \subset X$ une partie maigre d'un espace de Baire X. Supposons que $Z = X \setminus Y$ ne soit pas un espace de Baire, i.e. il existe une suite $(F_n)_n$ de fermés (de Z) d'intérieur vide tels que $Z = \cup_n F_n$, autrement dit Z est maigre dans Z et vu ❷, Z est maigre dans X. Ceci est absurde car l'espace de Baire $X = Y \cup Z$ serait maigre comme reunion de deux ensembles maigres. CQFD.

❹ Soit X un espace de Baire séparé et sans points isolés, les singletons sont alors fermés d'intérieur vide et X ne peut être dénombrable (sinon $X = \cup_n \{a_n\} \dots$). ❏

Exercice 115 (Un espace de Baire $A \subset \mathbb{R}$ non dénombrable et de mesure nulle)
Soit $\{a_n\}$ une partie dénombrable dense dans $[0,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$O_n(\varepsilon) =]a_n - 2^{-n}\varepsilon,\, a_n + 2^{-n}\varepsilon[, \quad O_\varepsilon = [0,1] \cap \bigcup_{n\geq 0} O_n(\varepsilon).$$

Montrer que $A = \bigcap_{p\geq 1} O_{1/p}$ est un espace de Baire non dénombrable de mesure de Lebesgue nulle.

➪ Par sa définition, O_ε est un ouvert de $[0,1]$; contenant la suite $\{a_n\}$, il est aussi dense. Comme ***« dans un espace de Baire le complémentaire de toute partie maigre est encore de Baire »*** (voir l'exercice précédent) : pour montrer que A est de Baire, il sera suffisant de montrer que son complémentaire (dans $[0,1]$) est maigre (i.e. réunion dénombrable d'ensembles rares). Or

$$[0,1] \setminus A = \bigcup_{p\geq 1} [0,1] \setminus O_{1/p} = \underbrace{\bigcup_{p\geq 1}\left([0,1] \setminus \bigcap_{n\geq 1} O_n(1/p)\right)}_{\text{fermé de } [0,1] \text{ car } \cap \text{ de fermés}} := \bigcup_{p\geq 1} F_p$$

les fermés $F_p = [0,1] \setminus O_{1/p}$ sont visiblement d'intérieur vide (sinon l'ouvert $O_{1/p}$ éviterai un ouvert ce qui est absurde puisqu'il est dense car contenant la suit dense $\{a_n\}$) : A est bien un espace de Baire.

➪ Pour montrer que A n'est pas dénombrable on s'appuie sur le résultat suivant ***« un espace de Baire séparé et sans points isolés est non dénombrable »*** (voir l'exercice précédent). Montrons donc que A est séparé et sans points isolés.

➪ Soient $x \neq y$ dans $A = \cap_p O_{1/p}$ et posons $\delta = |x-y|$. Le diamètre de $O_n(1/p)$ vaut $2/p2^n$ qui est $< \delta$ dès que p est suffisament grand et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour un tel choix de p, il existera $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in O_{n_x}(1/p)$, alors $y \notin O_{n_x}(1/p)$; mais comme $y \in A$ il existe $n_y \neq n_x \in \mathbb{N}$ tel que $y \in O_{n_y}(1/p)$: A est bien séparé.

➪ A contenant la suite dense $\{a_n\}$ est sans points isolés.

➪ A est enfin de mesure de Lebesgue nulle car pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lambda(A) \leq \lambda(O_\varepsilon) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(0_n(\varepsilon)) = \sum_{n\geq 0} 2.2^{-n}\varepsilon = 2\varepsilon.$$

D'où le résultat. ❑

Exercice 116 (Baireries : sur les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ séparément continues)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une séparément continue. Si f est nulle sur une partie dense de $\mathbb{R}^2$, montrer que f est identiquement nulle.

Sinon, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $|f(a,b)|=c>0$. L'application $y\mapsto f(a,y)$ étant par hypothèse continue sur $\mathbb{R}$ donc au point b, il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$(✘)\qquad |f(a,y)|\geq c/2,\qquad \forall\, y\in]b-\varepsilon,b+\varepsilon[.$$

Si on pose pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$

$$E_k=\{y\in]b-\varepsilon,b+\varepsilon[\ :\ |f(x,y)|\geq c/4,\ \forall\, x\in]a-1/k,a+1/k[\},$$

on aura, avec (✘)

$$]b-\varepsilon,b+\varepsilon[=\bigcup_{k\geq 1}E_k.$$

Par le théorème de Baire, l'un au moins des ensembles E_k, disons E_m est non rare (i.e. $\overset{\circ}{\overline{E_m}}\neq\emptyset$) et il existe un intervalle $]\alpha,\beta[\subset\overset{\circ}{\overline{E_m}}$. Il n'est maintenant pas difficile de vérifier que

$$(✔)\qquad |f(x,y)|\geq c/4,\qquad \forall\,(x,y)\in]a-1/m,a+1/m[\times]\alpha,\beta[$$

ce qui fourni la contradiction désirée.

Pour vérifier (✔), soit $(x,y)\in]a-1/m,a+1/m[\times]\alpha,\beta[$. Comme $y\in]\alpha,\beta[\subset\overset{\circ}{\overline{E_m}}\subset\overline{E_m}$, il existe une suite $(y_n)_n$ dans E_m convergente vers y et la continuité de $x\mapsto f(x,y)$ implique

$$\left(\lim_{n\to\infty}(x,y_n)=(x,y)\quad\&\quad(x,y_n)\in]a-1/m,a+1/m[\times]\alpha,\beta[\right)\Longrightarrow(|f(x,y)|\geq c/4).$$

soit (✔). ❏

Exercice 117 (Applications linéaires dans un espace vectoriel normé)
On considère les deux normes sur $\mathbb{R}[X]$ définies pour $P=\sum_k a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ par

$$N_1(P)=\sum_k|a_k|,\qquad N_2(P)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P(x)e^{-|x|}\right|.$$

Dans les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}[X],N_1)$, $(\mathbb{R}[X],N_1)$ étudier la continuité des applications

$$T\ :\ \begin{cases}\mathbb{R}[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]\\ P\longmapsto T(P)=P(X+1)\end{cases}\qquad L_Q\ :\ \begin{cases}\mathbb{R}[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]\\ P\longmapsto L(P)=PQ\end{cases}$$

ℹ Que N_1,N_2 soient deux normes sur $\mathbb{R}[X]$ ne mérite ici aucune précision (ne pas oublier tout de même de justifier que $N_2(P)\neq+\infty$....).

❶ On a pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$

$$N_1(X^n)=1\quad\text{et}\quad N_1(T(X^n))=N_1((X+1)^n)=\sum_{k=0}^n C_n^k=2^n$$

l'existence d'une constante $C>0$ telle que $N_1(T(P))\leq CN_1(P)$ est donc sans espoir : T est un endomorphisme discontinu de $(\mathbb{R}[X],N_1)$.

❷ Écrivons pour $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\begin{aligned} N_2(T(P)) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|P(x+1)e^{-|x|}\right| \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|P(y)e^{-|y-1|}\right| \quad \text{où } y = x+1, \\ &\leq e \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|P(y)e^{-|y|}\right| = eN_2(P) \end{aligned}$$

où l'inégalité est justifiée car $|y-1| \geq |y|-1$ et donc $-|y-1| \leq 1-|y|$. T est donc un endomorphisme continu de $(\mathbb{R}[X], N_2)$ de norme inférieure ou égale à e.

❸ Soit $Q = \sum_{k=0}^d b_k X^k$, comme

$$L_Q(P) = \sum_{k=0}^d b_k L_{X^k}(P) \tag{1}$$

il est suffisant, pour démontrer la continuité de L_Q, d'établir celle des applications L_{X^n}, $n \in \mathbb{N}$. Or,

$$N_1(L_{X^n}(P)) = N_1(X^n P) = N_1(\sum_k a_k X^{n+k}) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k| = N_1(P). \tag{2}$$

i.e. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ L_{X^n} \in \mathscr{L}_c((\mathbb{R}[X], N_1))$. De là, (1) et (2) donnent, pour tout polynôme P

$$N_1(L_Q(P)) \leq \sum_{k=0}^d |b_k| N_1(L_{X^k}(P)) = N_1(Q)N_1(P).$$

L_Q est donc un endomorphisme continu de $(\mathbb{R}[X], N_1)$ de norme inférieure ou égale à $N_1(Q)$ (et en fait égale en considérant $P=1$).

❹ Il reste à étudier la continuité de L_Q pour la norme N_2. Commencons par un petit calcul, pour $N \in \mathbb{N}^\star$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^N e^{-|x|}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|x^N e^{-|x|}\right| = N^N e^{-N}$$

où la première égalité résulte de la parité ou imparité de $x \mapsto x^N e^{-|x|}$, la seconde étant une banale étude de fonction. Il en résulte aussitot que pour $n, m \in \mathbb{N}^\star$

$$\frac{N_2(L_{X^n}(X^m))}{N_2(X^m)} = \frac{(n+m)^{n+m}e^{-n-m}}{m^m e^{-m}} = \left(1+\frac{n}{m}\right)^m (n+m)^n e^{-m} \underset{m\to\infty}{\sim} m^n$$

et $n \geq 1$ implique que $\lim_{m\to\infty} m^n = +\infty$: les applications L_{X^n} sont donc discontinues pour tout $n \geq 1$.
Une combinaison linéaire d'applications discontinues n'ayant aucun raison d'être discontinue, on ne peut en déduire immédiatement l'éventuelle discontinuité de $L_Q = \sum_{k=0}^d b_k L_{X^k}$. Toutefois nous n'en sommes plus trés loin car pour Q de degré supérieur ou égal à 1 et

$n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{N_2(L_Q(X^n))}{N_2(X^n)} &= \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(b_0 + b_1 x + \cdots + b_d x^d)x^n e^{-|x|}\right|}{n^n e^{-n}} \\ &\geq \frac{\left|(b_0 + b_1 n + \cdots + b_d n^d)n^n e^{-n}\right|}{n^n e^{-n}} \underset{n\to\infty}{\sim} |b_d| n^d \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ car } d \geq 1.\end{aligned}$$

L_Q est donc discontinue pour la norme N_2 dés que Q est non constant. Si Q est constant, $L_Q = \lambda I_{\mathbb{R}[X]}$: elle est continue. ❑

Exercice 118 (Sur la norme d'une forme linéaire) [10], *2005.*
Soient E un espace vectoriel normé, $\psi \in E'$ une forme linéaire continue non identiquement nulle sur E. Soit $e \in E$ tel que $\psi(e) \neq 0$. Montrer que

$$|||\psi||| = \frac{|\psi(e)|}{\text{dist}(\text{e}, \ker(\psi))}.$$

On peut commencer par remarquer que $\psi(e) \neq 0$ et $\ker(\psi)$ fermé assurent que $\text{dist}(\text{e}, \ker(\psi)) > 0$.
Pour $x \in \ker(\psi)$ nous avons

$$|\psi(e)| = |\psi(e - x)| \leq |||\psi|||\, \|e - x\|,$$

soit, en passant à la borne inférieure lorsque x décrit $\ker(\psi)$

$$|\psi(e)| \leq |||\psi|||\text{dist}(\text{e}, \ker(\psi)).$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, par définition de la norme $|||\psi|||$, il est équivalent d'établir

(✘) $$\forall\, y \in E, \quad |\psi(y)| \leq \frac{|\psi(e)|}{\text{dist}(\text{e}, \ker(\psi))}\|y\|.$$

Cette formule évidente si $\psi(y) = 0$, est aussi homogène en y : il est donc suffisant (quitte à remplacer y par $y\psi(e)/\psi(y)$) de l'établir pour $y \in E$ vérifiant $\psi(y) = \psi(e)$. Dans ce cas, $y - e \in \ker(\psi)$ qui implique (classique) $\text{dist}(\text{e}, \ker(\psi)) = \text{dist}(\text{y}, \ker(\psi)) \geq \|\text{y}\|$, et

$$|\psi(y)| \leq |\psi(y)|\frac{\|y\|}{\text{dist}(\text{y}, \ker(\psi))} = |\psi(y)|\frac{\|y\|}{\text{dist}(\text{e}, \ker(\psi))}$$

d'où (✘), ce qui fallait démontrer. ❑

Exercice 119 (Applications linéaires continues et compacité) [10], *19 ? ?.*
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide (i.e. $\exists a > 0 \ :\ B(0, a) \subset K$) ; et soit $L := \{u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d) \ :\ u(K) \subset K\}$. Montrer que L est une partie compacte de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$.
L'hypothèse $\exists\, a > 0 \ :\ B(0, a) \subset K$ est-elle nécessaire ?

🛈 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ est de dimension finie (d^2), il est donc suffisant de montrer que L est fermé bornée dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$.

➪ L **est borné :** $B^f(0,a) \subset K$ car K est fermé ; comme K est aussi borné, il existe $b > 0$ tel que $K \subset B^f(0,b)$. Par conséquent

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad : \quad u\left(a\frac{x}{\|x\|}\right) \in K \subset B^f(0,b)$$

où encore

$$\left(\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad : \quad \|u(x)\| \leq \frac{a}{b}\|x\|\right) \Rightarrow \left(|||u||| \leq \frac{a}{b}\right).$$

i.e. $L \subset B^f_{L(\mathbb{R}^d)}(0, \frac{a}{b})$.

➪ L **est fermé :** Soit $(u_n)_n$ une suite dans L qui converge vers $u \in L(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \in K$; par conséquent $u(x) = \lim_n u_n(x) \in K$ puisque K est fermé : $u \in L$.

➪ Si K est d'intérieur vide, la propriètè peut être fausse : par exemple, si $K \subset H = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ (hyperplan de $\mathbb{R}^d$) toute affinité d'hyperplan fixe H et de vecteur directeur $e_d = (0, \dots, 0, 1)$ conserve K et est donc dans L, mais l'ensemble de ces affinités n'est visiblement pas bornée (considérer u_n definie par $u_n(e_i) = e_i$, $(1 \leq i \leq d-1)$ et $u_n(e_d) = ne_d$). ❑

Exercice 120 (Trois preuves du théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique)
Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$, montrer qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
❶ *Commencer par montrer qu'il existe une suite d'applications affines par morceaux et 2π-périodiques qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers f puis conclure. Conclure.*
❷ *En utilisant le théorème de Fejèr.*
❸ *([17]) Une troisième approche plus constructive. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$f_n(x) := (f \star u_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)u_n(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$$u_n(t) := c_n(1+\cos(t))^n,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_n^{-1} = \int_0^{2\pi}(1+\cos(t))^n dt.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un polynôme trigonométrique.
b) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

❶ Soient $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, considérons la subdivision σ_n de pâs constant $2\pi/n$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$; alors $2\pi/n \leq \delta$ assure que l'application 2π-périodique continue f_n, égale à f en chaque point de la subdivision et affine par morceaux sur $[0, 2\pi]$ vérifie $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. En outre, chaque application f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux : la suite des sommes partielles de Fourier $(S_k(f_n))_k$ est donc (avec le théorème de Dirichlet) une suite (de polynômes trigonométriques) qui converge uniformément vers f_n. Comme

$$\|f - S_k(f_n)\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n - S_k(f_n)\|_\infty$$

le résultat suit.

❷ Les sommes partielle de Fourier de toute application $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ convergent au sens de Césaro uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f (c'est le théorème de Fejèr). D'où le résultat.

❸ ➪ a) On vérifie sans peine la continuité et la 2π-périodicité des applications f_n qui implique que $(f \star u_n)(x) = (u_n \star f)(x)$ sur $\mathbb{R}$. Les applications u_n étant visiblement des polynômes trigonométriques de degré n, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^{2\pi} f(x-t)u_n(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)u_n(x-t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ik(x-t)}dt \\ &= \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ikx}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k 2\pi c_k(f)e^{ikx} \end{aligned}$$

➪ b) Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)dt = 1$, on peut écrire si $0 < \delta < \pi$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t) - f(x))u_n(t)dt\right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t) - f(x)|u_n(t)dt + \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)2\|f\|_\infty u_n(t)dt \qquad (✖) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ par continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que $|x-y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Avec un tel choix comme u_n est paire et d'intégrale égale à 1 sur $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} u_n(t)dt + \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)2\|f\|_\infty u_n(t)dt \\ &\leq \varepsilon\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)dt + 4\|f\|_\infty\int_{\delta}^{\pi} u_n(t)dt = \varepsilon + 4\|f\|_\infty\int_{\delta}^{\pi} u_n(t)dt \qquad (✔) \end{aligned}$$

Comme le cosinus, u_n décroit sur $[\delta, \pi]$ et donc

$$\int_{\delta}^{\pi} u_n(t)dt \leq \pi c_n(1 + \cos(\delta))^n,$$

il ne reste plus qu'a majorer convenablement c_n i.e. minorer c_n^{-1} :

$$\begin{aligned} c_n^{-1} = 2\int_0^{\pi}(1+\cos(t))^n dt &\geq 2\int_0^{\pi}(1+\cos(t))^n\sin(t)dt \\ &= 2\left[-\frac{(1+\cos(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi} = \frac{2^{n+2}}{n+1}. \end{aligned}$$

Soit finalement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \pi\|f\|_\infty\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^n(n+1) \leq 2\varepsilon \quad \text{si } n \geq n_\varepsilon$$

(car $(1+\cos(\delta))/2 \in]0,1[$ assure que le second terme tends vers 0 avec n). En resumé nous avons

$$\forall \varepsilon,\ \exists n_\varepsilon\ :\ n \geq n_\varepsilon \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La suite de polynômes trigonométriques $(f_n)_n$ est donc bien uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers f ❑

CHAPITRE 4

CONTINUITÉ

Exercice 121 (Les algèbres $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ sont-elles isomorphes ?) [10]-*2006.*

Existe-t-il un isomorphisme d'algèbres entre $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$?

Supposons qu'il existe un tel isomorphisme :

$$\phi : \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),$$

et observons que les éléments inversibles des algèbres $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ sont les fonctions qui ne s'annulent pas sur $[0,1]$.

➲ Désignons par 1 la fonction constante égale à 1, on a

$$\phi(1) = \phi(1 \cdot 1) = \phi(1)^2$$

l'application continue $\phi(1)$ vérifie donc $\phi(1)^2 - \phi(1) = 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires on a $\phi(1) = 1$ ou $\phi(1) = 0$ et cette dernière possibilité est à exclure puisque ϕ est un isomorphime : $\phi(1) = 1$. Il en résulte immédiatement que la restriction de ϕ aux applications constantes est l'identité. Il en résulte aussi que $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\phi(f)$ est inversible dans $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

➲ On note e la fonction $e : t \mapsto t$. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = e$.
La fonction f ne prend que des valeurs positives. En effet si $\alpha < 0$ est une valeur prise par f alors $t \mapsto f(t) - \alpha$ n'est pas inversible dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et par conséquent son image par ϕ non plus. Mais $t \mapsto t - \alpha$ est inversible dans $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, donc $f \geq 0$ et on peut donc considérer $g = \sqrt{f} \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ qui doit vérifier

$$\forall t \in [0,1],\ \phi(g)^2(t) = t \quad \text{et} \quad \phi(g) \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),$$

soit $\phi(g)(t) = \sqrt{t} \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ ce qui est absurde. D'où la contradiction. ❏

Exercice 122 (Automorphisme d'algèbre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$) [10]

Soit K un compact de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que tout automorphisme d'algèbre unitaire de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ est une isométrie pour la norme uniforme.

Comme dans l'exercice précédent, les fonctions inversible de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ sont celle qui ne s'annulent pas sur K et ϕ unitaire assure que f inversible équivaut à $\phi(f)$ où $\phi(f^{-1})$ inversible.

Notons ϕ un tel morphisme et soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$. Il existe $x_0 \in K$ tel que $|f(x_0)| = \sup_{x\in K}|f(x)| = \|f\|_\infty$ et quitte à considérer $-f$ on peut supposer que $\|f\|_\infty = f(x_0)$. L'application $g := f - f(x_0)\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur K) est par conséquent non inversible dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$, il en donc de même de son image $\phi(g) = \phi(f) - f(x_0)\mathbf{1}$. Ainsi, il existe $x_1 \in K$ tel que $\phi(g)(x_1) = 0$ i.e. $\phi(f)(x_1) = f(x_0)$ qui implique $\|\phi(f)\|_\infty \geq \|f\|_\infty$. L'inégalité inverse s'obtient de la même manière en considérant cette fois ϕ^{-1}. ❑

Exercice 123 (Sous-algèbres de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$) [15]

Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Il suffit de remarquer que pour toute application non constante $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(f^n)_n$ est libre. En effet, une relation de liaison $\lambda_0 + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_d f^d = 0$ assure que le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_d X^d$ s'annule sur l'image de f qui est un intervalle non réduit à un point d'après le théorème des valeurs intermédiaires et les hypothèses sur f : P est donc le polynôme nul. La seule sous-algèbre de dimension finie dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est celle des fonctions constantes, elle est de dimension 1. ❑

Exercice 124 (Propriété des valeurs intermédiaires et monotonie impliquent la continuité)

Montrer que toute application strictement monotone $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est continue.

Sans perdre de généralité supposons f strictement croissante. Soit $c \in]a,b[$, on a donc :

$$\sup_{a\leq x<c} f(x) := f(c_-) \leq f(c) \leq f(c_+) = \inf_{c<x\leq b} f(x).$$

Supposons un instant que $f(c) < f(c_+)$. Par définition de $f(c_+)$ il existe une suite $(x_n)_n \subset]c,b]$ qui vérifie

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} x_n = c, \\ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(c_+). \end{cases}$$

f étant croissante

$$f(x_n) \geq f(c_+) > f(c), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

mais la propriété des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe

$$d \in]c,b[\ \text{ tel que } \ f(d) = f(c_+).$$

de sorte que

(✔) $$\inf_{c<x<d} f(x) \geq \inf_{c<x\leq b} f(x) = f(d).$$

D'autre part, avec la stricte monotonie

(✘) $$\inf_{c<x<d} f(x) < f(d),$$

les formules (✔) et (✘) sont contradictoires et par conséquent $f(c_+) = f(c)$. On procède de même pour $f(c_-)$ et les extrémités a, b : f est bien continue. ❑

Exercice 125 (Baireries) *Soit* $f\ :\ ]0,+\infty[$ *une application continue telle que*

$$\forall\, x > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0.$$

A-t-on

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0 \quad ?$$

Définissons pour $\varepsilon > 0$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$F_k = \{0\} \cup \bigcap_{n\geq k} \left\{ x > 0\ :\ \left| f\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \varepsilon \right\}.$$

f étant continue, chaque ensemble F_k est fermé et vu les hypothèses sur f

$$\bigcup_{k\geq 1} F_k = [0, +\infty].$$

On peut donc appliquer le théorème de Baire : un au moins des F_k, disons F_{k_0} possède un intérieur non vide. Il existe donc $a > 0,\ \delta > 0, k_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$]a-\delta, a+\delta[\subset F_{k_0}$$

quitte à diminuer δ on peut toujours supposer que $a \leq \frac{\delta}{k_0}$.

Soit alors $0 < x < \delta$ et $n = \left[\frac{x}{a}\right]$, alors $a - \delta \leq a - x \leq nx < a < a + \delta$ et $n \geq k$ si bien que $nx \in F_{k_0}$ qui implique

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{nx}{n}\right)\right| \leq \varepsilon,$$

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < x < \delta$ implique $|f(x)| \leq \varepsilon$ i.e.

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0,$$

et la réponse est oui. ❑

Exercice 126 (L'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$) [5]
Déterminer suivant leurs propriétés les fonctions $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$(\bigstar) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle ($\bigstar$) sera dite additive.

❶ Toutes les applications linéaires $f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$ sont additives, mais comme nous le verrons, sous l'hypothèse de l'existence d'une base de Hamel de $\mathbb{R}$ (i.e. avec l'axiome du choix) on peut construire d'autres solutions qui seront très fortement discontinues.

❷ *Si f est additive, alors $f(qx) = qf(x),\ \forall\,(q,x) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$.* En effet, si $x\in\mathbb{R}$, nous avons $f(2x) = f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$ et par une récurrence élémentaire $f(nx) = nf(x),\ \forall\,n\in\mathbb{N}$. En outre de $f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0)$ nous avons $f(0)=0$, puis $0 = f(0) = f(x-x) = f(x)+f(-x)$ soit $f(-x) = -f(x),\ \forall\,x\in\mathbb{R}$ et finalement $f(nx) = nf(x),\ \forall\,n\in\mathbb{Z}$. En remplaçant maintenant x par x/n : $f(x) = nf(\frac{x}{n})$ soit $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$ et enfin, en remplaçant x par mx : $f(\frac{mx}{n}) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{m}{n}f(x)$.
❸ *Si f est continue et additive sur $\mathbb{R}$, alors $f(x) = ax = f(1)x$ (i.e. f est linéaire).* Par la seconde étape $f(x) = xf(1),\ \forall\,x\in\mathbb{Q}$ et par continuité, cette égalité s'étend à tout $\mathbb{R}$.
❹ *Si f additive, est continue en au moins un point $c\in\mathbb{R}$ alors f est linéaire.* f continue au point c implique $\lim_{\varepsilon\to0}(f(c+\varepsilon)-f(c)) = 0 = \lim_{\varepsilon\to0} f(\varepsilon) \implies$ (f continue à l'origine). Alors vu que pour tout réel x : $f(x+\varepsilon)-f(x) = f(\varepsilon)$, f est donc continue en x, donc sur $\mathbb{R}$ et finalement linéaire vu (3).
❺ *Si f additive est bornée sur un intervalle alors f est linéaire.* On peut même encore affaiblir cette dernière hypothèse en ne demandant à f d'être bornée seulement sur une partie E de $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble $\widetilde{E} := \{x-y,\ x,y\in\ E\}$ contienne un voisinage de l'origine (par exemple l'ensemble de Cantor $C-C = [-1,1]$). Supposons donc qu'il existe $\delta>0$ tel que $\{|t|<\delta\}\subset\widetilde{E}$, il existe $x,y\in E$ tels que $t = x-y$.
Si $|f(x)|\leq M$ sur E, nous avons pour tout $t\in]-\delta,\delta[$: $|f(t)| = |f(x-y)| = |f(x)-f(y)| \leq 2M$; par suite pour $|u|\leq\frac{\delta}{n}$ nous aurons $|f(u)| = n^{-1}|f(nu)| \leq \frac{2M}{n}$ si bien que f est continue à l'origine et donc linéaire par l'étape (4). on peut aussi conclure de la manière suivante : si $x\in\mathbb{R}$, soit $r\in\mathbb{Q}$ tel que $|x-r|<\delta n^{-1}$, nous avons : $|f(x)-xf(1)| = |f(x-r)+(r-x)f(1)| \leq \frac{2M}{n}+\frac{\delta|f(1)|}{n}$, n étant quelconque $f(x) = xf(1)$.
❻ *Si le graphe de f additive n'est pas partout dense dans $\mathbb{R}^2$ alors f est linéaire.* Pour cela considérons deux points $(x_1,x_2),\ (y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ non proportionnels, i.e. tels que $x_1y_2\neq x_2y_1$. Pour tous réels $a,b\in\mathbb{R}$, et étant donné $\varepsilon>0$ il existe alors deux rationnels r et s tels que $|rx_1+sx_2-a|<\varepsilon$ et $|ry_1+sy_2-b|<\varepsilon$ (car le discriminant du système $ux_1+vx_2 = a$ & $uy_1+vy_2 = b$ est $x_1y_2-x_2y_1\neq0$ et $\mathbb{Q}^2$ dense dans $\mathbb{R}$). Supposons donc f non linéaire, il existe deux réels x_1,x_2 tels que $\frac{f(x_1)}{x_1}\neq\frac{f(x_2)}{x_2}$ et vu la remarque précédente pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon>0$ il existe $(r,s)\in\mathbb{Q}^2$ tel que $|f(rx_1+sx_2)-b| = |rf(x_1)-sf(x_2)-b|<\varepsilon$ et $|rx_1+sx_2-a|<\varepsilon$; autrement dit le point du graphe de f : $(rx_1+sx_2,\ f(rx_1+sx_2))$ est à une distance plus petite que ε de (a,b) : le graphe de f est donc bien dense dans $\mathbb{R}^2$.
On peut aussi procéder de la manière suivante : si f n'est pas linéaire pour montrer que son graphe est dense dans $\mathbb{R}^2$ vu que $f(x+y) = f(x)+f(y),\ x,y\in\mathbb{R}$ et $f(r) = rf(1),\ r\in\mathbb{Q}$ il est suffisant de montrer que l'image de tout voisinage de l'origine est dense dans $\mathbb{R}$ ou de manière équivalente dense dans $\mathbb{Q}$: soient $q\in\mathbb{Q}_+^\star,\ 0<\varepsilon<1$. Nous savons (6), que f est non bornée sur $]0,\varepsilon[$, supposons par exemple $\sup_{0<x<\infty} f(x) = +\infty$, il existe alors un entier $n\geq q/\varepsilon$ et $s\in]0,\varepsilon[$ tels que $n+1\geq f(s)>n$ si bien que $f(qs/n) = \frac{q}{n}f(s)$ vérifie $q+\varepsilon>\frac{q(n+1)}{n}\geq f(qs/n)\geq q$ avec $\frac{qs}{n}\in]0,\varepsilon[$. En résumé, pour tous $\varepsilon>0$, $q\in\mathbb{Q}_+^\star$ nous avons construit $s\in]0,\varepsilon[$ vérifiant $|f(s)-q|<\varepsilon$ (et si $q<0$ on applique ce qui précède à $-q$ et on utilise l'imparité de f) $f(]0,\varepsilon[)$ est donc dense dans $\mathbb{Q}$ et par transitivité, dans $\mathbb{R}$.
❼ *Existence de fonction sous-additives non linéaires.* Avec l'axiome du choix, on peut considérer $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (de dimension non-dénombrable), il existe donc une famille (non dénombrable $\mathscr{H} = \{e_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{R}$ telle que pour réel x s'écrive de manière

unique sur la forme $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ où les x_i sont dans $\mathbb{Q}$ et sont nuls, sauf peut-être un nombre fini d'entre-eux (ie $x = \sum_{k=1}^{n_x} x_{i_k} e_{i_k}$) c'est une **base de Hamel**.
On considère alors la fonction f définie sur $\mathscr{H}$ de la manière suivante : soit $h \in \mathscr{H}$ et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathscr{H} \setminus \{h\}, \\ 1 & \text{si} \quad x = h. \end{cases}$$

et, pour un réel arbitraire

$$x = x_{i_1} e_{i_1} + \cdots + x_{i_n} e_{i_n} \quad : \quad f(x) := x_{i_1} f(e_{i_1}) + \cdots + x_{i_n} f(e_{i_n}).$$

Vu la définition d'une base de Hamel, f est parfaitement définie[1] et il est facile de vérifier qu'elle ne peut être linéaire puisque pour tout $x \in \mathscr{H} \setminus \{h\}$:

$$0 = \frac{f(x)}{x} \neq \frac{f(h)}{h} = 1.$$

❸ *Du même tonneau : les fonctions mid-convexes.* Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite mid-convexe si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Toute fonction convexe est mid-convexe et il n'est pas difficile de démontrer qu'une fonction mid-convexe continue est convexe. L'existence de fonctions mid-convexes qui ne soient pas convexes dépend encore une fois de l'axiome du choix. L'axiome du choix étant admis, considérons une base de Hamel $(b_i)_i$ de $\mathbb{R}$ et soit encore une fois f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x = \sum_{i\in I_x} a_k b_k \quad : \quad f(x) = \sum_{i\in I_x} a_i f(b_i)$$

f est mid-convexe mais en choisissant des valeurs convenables pour $f(b_i)$ il n'est pas difficile de faire en sorte que f ne soit pas convexe. ❑

Exercice 127 (Les fonctions mid-convexes) [5], [43].

❶ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue ; montrer que f est convexe sur I si, et seulement si elle est mid-convexe, i.e.*

$$(\text{✘}) \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y), \quad \forall\, x, y \in I.$$

❷ *Existe-t-il des applications mid-convexes mais non convexes ?*

❶ Toute application convexe est bien entendu mid-convexe[2] ; pour la réciproque, classique mais plus délicate, on propose deux solutions :

[1] avec cette construction il est même clair que toute application $g : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction additive sur $\mathbb{R}$
[2] Ou encore J-convexe en hommage à J.L.W.V.Jensen qui introduit cette notion en 1906.

➪ **Première solution :** C'est la plus classique, mais aussi peut être la plus délicate à présenter pour un oral, elle consiste à prouver (✘) sur une partie dense de I puis de la prolonger à tout l'intervalle par continuité. On procède par étapes en démontrant successivement

$$(1) \qquad f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} x_j\right) \leq \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} f(x_j), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x_j \in I.$$

$$(2) \qquad f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x_j \in I.$$

$$(3) \qquad f\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)f(y), \qquad \forall\, m,n \in \mathbb{N}^\star,\ x,y \in I.$$

Par densité[3] de $\{\frac{m}{2^n},\ m,n \in \mathbb{N}^\star\}$ dans $[0,1]$, la continuité de f sur I permet d'étendre (3) à tout $p \in [0,1]$ i.e.

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y), \qquad \forall\, x,y \in I,\ p \in [0,1].$$

f est bien convexe sur I.

➪ **Seconde solution :** Elle (voir [16]) repose sur le théorème des valeurs intermédiaires. Si f n'est pas convexe il existe $a < c < b$ tels que le point $(c, f(c))$ soit au dessus de la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$; et quitte à retrancher à f la fonction affine (donc convexe donc ne modifiant pas la quantité $f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(y)$....) $x \mapsto f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on peut supposer que $f(a) = f(b) = 0$ et dans ce cas $f(c) > 0$.
Alors, l'ensemble $\{\, x \in [a,c]\ :\ f(x) = 0\}$ est non vide (il contient a) majoré et fermé (f est continue) : il admet donc un plus grand élément u qui est strictement plus petit que c car $f(c) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires et la définition de u, f est strictement positive sur $]u,c]$. De la même manière, on démontre l'existence d'un point $v \in]c,b[$ tel que f soit strictement positive sur $[c,v[$. Mais alors $f(\frac{u+v}{2}) > 0$ alors que $f(u) = f(v) = 0$ ce qui exclu la réalisation de (✘) sur l'intervalle.

❷ Avec l'axiome du choix, on peut construire des fonctions mid-convexes non convexes, ce sont des objets pathologiques nulle part continus donc le graphe est dense dans $\mathbb{R}^2$, nous les avons deja rencontrés (et construits) dans l'exercice précédent, question ❽. ❏

Exercice 128 (L'équation fonctionnelle $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$ dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.)

Montrer que les solutions continues sur $\mathbb{R}$ et non identiquement nulles de l'équation fonctionnelle

$$(✘) \qquad f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

sont de la forme $f(x) = f(1)^{x^2}$.

[3] La densité est immédiate : pour tout intervalle $]a,b[\subset [0,1]$ considérer $n \geq 1$ tel que $b - a > \frac{1}{2^n}$, alors, par le principe des tiroirs, un multiple de $\frac{1}{2^n}$ se trouve forcément dans $]a,b[$.

➪ f n'étant pas identiquement nulle, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$ et comme

$$f(x)f(a) = f(\sqrt{x^2 + a^2}) = f(-x)f(a),$$

il en résulte que

$$f(x) = f(-x) = f(|x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

et il est donc suffisant d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$.

➪ Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ que

$$f(x\sqrt{n}) = f(x)^n, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^\star.$$

L'assertion est clairement vraie pour $n = 1$, si on la suppose vraie au rang $n \geq 1$, alors

$$f(x\sqrt{n+1}) = f(|x|\sqrt{n+1}) = f(\sqrt{(x\sqrt{n})^2 + x^2}) = f(x\sqrt{n})f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$$

d'où la propriété au rang $n + 1$.

➪ On a alors pour $p, q \in \mathbb{Q}^\star$

$$f(p) = f(|p|) = f(1 \cdot \sqrt{p^2}) = f(1)^{p^2},$$

mais aussi

$$f(1)^{p^2} = f(|p|) = f\left(\frac{p}{q}\sqrt{q^2}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)^{q^2},$$

soit finalement

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{p^2/q^2} \quad \textbf{si} \quad f(1) > 0.$$

La formule (✘) est vérifiée sur $\mathbb{Q}$ et donc sur $\mathbb{R}$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de f) lorsque $f(1) > 0$. Il reste donc à examiner les autres cas :

⇝ Si $f(1) = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $\mathbb{Q}$ puis sur $\mathbb{R}$ et ce cas est exclu.
⇝ Supposons enfin $f(1) < 0$, la formule établie plus haut donne pour $p, q \in \mathbb{Q}^\star$ avec p pair et q impair

$$f\left(\frac{p}{q}\right)^{q^2} = f(1)^{p^2}$$

qui implique $f(p/q) > 0$ puis (toujours par densité-continuité) $f \geq 0$ et $f(1) \geq 0$ ce qui est contradictoire. ❑

🛈 **Remarque :** On peut aussi vérifier aisément que l'application g définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ (si cela à bien un sens) par $g(x) = \log f(\sqrt{x})$ est solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy $g(x + y) = g(x) + g(y)$ étudiée dans l'exercice précédent. Étant comme f continue nous aurons $g(x) = xg(1)$ puis $f(x) = f(1)^{x^2}$. Bien entendu, pour que cet argument tienne parfaitement la route il faut s'assurer que g soit bien définie sur $\mathbb{R}_+$ i.e. $f(\sqrt{x}) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$ ce que nous avons effectivement vérifié dans l'autre démonstration.

Exercice 129 (Continuité et connexité : le théorème de Borsuk-Ulam) [42]
Soit f une application continue du cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe sur le cercle deux points diamétralement opposés (antipodaux) en lesquels f prends la même valeur.

Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ une application continue, considérons $g : S^1 \to \mathbb{R}$ définie par $g(z) = f(z) - f(-z),\ z \in S^1$. Comme S^1 est un connexe de $\mathbb{R}^2$ et que g est continue, $g(S^1)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. En outre vu que $g(-z) = -g(z)$, cet intervalle est symétrique par rapport à l'origine : $0 \in g(S^1)$. Il existe donc $z \in S^1$ tel que $f(z) = f(-z)$ d'où le résultat.

🛈 **Remarques :** ➪ Une telle fonction n'est donc pas injective et par conséquent S^1 n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$ (pour un tel résultat on peut plus classiquement si un tel homéomorphisme existe considérer sa restriction à S^1 moins un point (qui reste connexe !) mais dont l'image ne le reste plus...).

➪ On peut aussi considérer (c'est en fait la même preuve..) la fonction $g : \theta \in [0, \pi] \mapsto g(\theta) = f(e^{i\theta}) - f(e^{i(\theta+\pi)})$, vu que $g(0) = -g(\pi)$ il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.

➪ En guise « d'application », sur tout méridien terrestre il existe donc à chaque instant deux point antipodaux en lesquels la température est la même. On peut aussi démontrer qu'à chaque instant il existe sur terre deux point antipodaux pour lesquels température et pression sont identiques.

➪ Une autre belle application est le « problème de gâteau » : pour tout gâteau connexe borné (dans $\mathbb{R}^2$...) il existe deux perpendiculaires qui le divisent en quatre parts égales. Voir l'exercice ci-dessous.

Exercice 130 (Continuité et composition) [34], *19 ? ?*
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et deux fonctions

$$g : I \longrightarrow J \quad \& \quad f : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

on suppose g continue sur I et $f \circ g$ continue sur I ; montrer que f est continue sur $g(I)$.

Soit donc $y \in g(I)$, et supposons f discontinue en y : il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(y_n)_n \subset g(I)$ tels que

$$(\text{✘}) \qquad \lim_n y_n = y \quad \text{et} \quad |f(y_n) - f(y)| > \varepsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Il existe d'autre part $\alpha \in I$ et $(x_n)_n \subset I$ vérifiant

$$g(\alpha) = y \quad \& \quad g(x_n) = y_n$$

(il faut ici se garder de croire que la suite $(x_n)_n$ est nécessairement convergente ou même admet une sous-suite convergente, mais les pré-images $g^{-1}(\{y_n\})$ nous laissent suffisament de place pour construire une nouvelle suite elle convergente et ceci par l'intervention judicieuse du théorème des valeurs intermédiaires).

Quitte à considérer une sous-suite supposons $(y_n)_n$ monotone et même décroissante (même raisonnement si la suite est croissante). Nous avons donc dans $g(I)$

$$g(\alpha) = y \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0 = g(x_0), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

et dans I

$$\alpha \leq x_0$$

(on peut bien entendu avoir l'inégalité contraire, mais le raisonnement est le même) Les deux formules précédentes et le théorème des valeurs intermédiaires assurent pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un réel $x'_n \in [\alpha, x_0]$ vérifiant $g(x'_n) = g(x_n) = y_n$. De cette nouvelle suite inclue dans le compact $[\alpha, x_0]$ nous sommes donc assurés de pouvoir extraire un sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$ de limite $l \in [\alpha, x_0] \subset I$.

Par continuité de g sur I

$$\lim_k g(x'_{n_k}) = g(l)$$

mais d'un autre côté, nous avons aussi

$$\lim_k g(x'_{n_k}) = \lim_k g(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = y = g(\alpha)$$

ainsi

$$g(l) = g(\alpha).$$

Et enfin, par continuité de $f \circ g$ sur I, donc au point l :

$$\lim_k f(y_{n_k}) = \lim_k f \circ g(x_{n_k}) = \lim_k f \circ g(x'_{n_k}) = f \circ g(l) = f \circ g(\alpha) = f(y).$$

Il suffit maintenant de remarquer que les deux extrémités de cette formule contredisent (✘), d'où le résultat.

❑

🛈 **Remarque :** par contre si $f \circ g$ et f sont continues g n'a aucune raison de l'être : il suffit par exemple de considérer

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Exercice 131 (Autour des valeurs intermédiaires) [25]
Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prenant exactement deux fois chaque valeur ?

Supposons qu'une telle fonction existe et soient $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = b$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, $f(x) \neq b$ et par suite on a ou bien $f(x) > b$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$ ou bien $f(x) < b$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$. Dans le premier cas, il existe un unique $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $c = f(x_0) = \max\{f(x),\ x \in [x_1, x_2]\}$. En effet, sinon f va prendre sur $[x_1, x_2]$ au moins trois fois certaines valeurs (faire un dessin si le max est atteint en deux points distincts, c'est le TVI). Ainsi il doit exister exactement un réel x_0' en dehors de $[x_1, x_2]$ tel que $f(x_0') = f(x_0) = c > b$. Mais alors, toujours par le théorème des valeurs intermédiaires tous les réels de $]b, c[$ seront atteints au moins trois fois. Contradiction. On procède de manière analogue si $f < b$ sur $]x_1, x_2[$. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Voir aussi [5], pages 87-90.
➪ Il existe par contre des fonctions prenant exactement trois fois chaque valeurs, il suffit par exemple si

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -3 \leq x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 < x < 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

de considérer la fonction f définie par

$$f(x) = g(x - 6n) + 2n \text{ si } 6n - 3 \leq x \leq 6n + 3$$

Pour vous en convaincre représentez graphiquement f, vous observez une sorte de dent de scie inclinée qui semble visiblement répondre au problème...

Exercice 132 (Le théorème des valeurs intermédiaires) [25]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que $\forall\, q \in \mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{q\})$ est fermé, montrer que f est continue.

Supposons que f soit discontinue en un point $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors une suite $(x_n)_n$ convergente vers x telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$, une suite d'entiers $n_k > k$ vérifiant

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout entier k on a $f(x_{n_k}) \geq f(x) + \varepsilon > f(x)$ ou bien $f(x_{n_k}) \leq f(x) + \varepsilon < f(x)$. L'une au moins de ces deux inégalités est réalisée pour une infinité de k, sans perdre de généralité et quitte à extraire une sous-suite supposons que la première soit vérifiée pour tout k. Considérons alors $q \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) + \varepsilon > q > f(x)$. Nous avons alors $f(x_{n_k}) > q > f(x)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ et f vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k \in (x, x_{n_k})$ tel que $f(y_k) = q$, ce qui ne veut rien dire d'autre que la suite $(y_k)_k$ convergente vers x est incluse dans $f^{-1}(\{q\})$ fermé de $\mathbb{R}$: $x \in f^{-1}(\{q\})$ i.e. $f(x) = q$ ce qui est bien entendu absurde. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Une fonction continue sur un intervalle vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque bien entendu est incorrecte, pour en fournir un exemple simple il suffit de se souvenir (voir un autre exercice) du théorème de Darboux qui dit qu'une fonction dérivée vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires et de construire une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée non continue, l'exemple standart étant

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

➪ On peut aussi contruire ([5],pages 79-80) une fonction nulle part continue mais vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, un exemple toutefois bien délicat et fortement déconseillé pour l'oral...
➪ pour en savoir plus la lecture de l'article de J.B. Hiriart-Urruty « *Que manque-t-il à une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires pour être continue ?* » ([10], ref. exacte ? ?) est fortement conseillée.

Exercice 133 (Sur les points de discontinuité d'une bijection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$)
Montrer qu'une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^\star$ possède au moins un ensemble dénombrable de points de discontinuité.

❶ Il faut commencer par remarquer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. En effet, f continue et bijective sur $\mathbb{R}$ sera strictement monotone, par exemple strictement croissante ; dans ce cas en considérant $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$ on aurait $f(x) > 0$ pour $x > x_0$ et $f(x) < 0$ pour $x < 0$ ce qui est bien sûr absurde puisque $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\star$. f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.
❷ Supposons maintenant que f ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. f est alors strictement monotone sur chaque intervalle $]-\infty, x_1[,\ ]x_1, x_2[,\ \dots,]x_n, +\infty[$ et par le théorème des valeurs intermédiaires $f(]-\infty, x_1[)$, $f(]x_1, x_2[)$, $\dots$, $f(]x_n, +\infty[)$ sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints, donc

$$\mathbb{R}_+^\star \setminus \left(f(]-\infty, x_1[) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} f(]x_i, x_{i+1}[) \cup f(]x_n, +\infty[) \right)$$

possède au moins $n+1$ éléments mais de l'autre côté

$$\mathbb{R} \setminus \left( ]-\infty, x_1[\cup \bigcup_{i=1}^{n-1}]x_i, x_{i+1}[\cup]x_n, +\infty[\right) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

f ne peut donc être bijective. ❑

Exercice 134 (Sur la continuité de l'application réciproque)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall n \geq 1 \,:\, f(2n) = n,\ f(2n+1) = \frac{1}{2n+1},\ f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2(n-1)}\ (n \neq 1),$$

et $f(x) = x$ pour tout autre réel positif ; on prolonge enfin f sur $\mathbb{R}$ par imparité. Montrer que f est bijective, continue à l'origine avec f^{-1} discontinue en $x = 0$.

Que f soit bijective, c'est clair, on a tout fait pour. f est aussi continue à l'origine car

$$f(0) = 0 \quad \& \quad |f(x)| \leq |x|.$$

Enfin, puisque

$$f^{-1}(\frac{1}{2n+1}) = 2n+1,$$

f^{-1} est bien discontinue à l'origine. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Cet exemple est un garde-fou contre la tentation d'affirmer que l'application réciproque d'une application continue en un point est continue en l'image de ce point : le théorème standart du cours impose à f d'être **bijective et continue** sur **tout** un intervalle ouvert I pour pouvoir affirmer que f^{-1} sera continue sur $f(I)$. En outre la construction est facile à mémoriser : pour que f^{-1} soit discontinue à l'origine il suffit de construire une suite ne tendant pas vers zéro telle que son image par f tende vers zéro ; ayant envoyé tous les nombres pairs sur les entiers nous pouvons faire ce que nous voulons des impairs qui sera notre suite, reste plus qu'à bricoler un peu pour conserver la bijectivité...
➪ Quitte à modifier légérement f (considérer f^3 à la place de f), on peut même produire un exemple où f est dérivable à l'origine (f^3 est dérivable en $x = 0$ car $|f(x)| \leq |x| \Longrightarrow f^3(x) = o(x^2)$ à l'origine).

Exercice 135 (Sur la continuité de l'application réciproque, suite)
Soit f une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}$. Montrer que f est une bijection continue dont l'application réciproque f^{-1} est partout discontinue.

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ étant tous deux dénombrables, une telle bijection existe. Soit $a \in \mathbb{Z}$, pour tout $\varepsilon > 0$ si $0 < \eta < 1$: $(z \in \mathbb{Z}\ \&\ |z - a| < \eta) \Longrightarrow z = a$ et par suite $|f(z) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. f est donc continue sur $\mathbb{Z}$.
Par contre si $b \in \mathbb{Q}$ et $0 < \varepsilon < 1$ il existe pour tout $\eta > 0$ un rationnnel $c \in \mathbb{Q} \bigcap (]a - \eta, a + \eta[\setminus\{a\})$. alors f^{-1} étant injective $|f^{-1}(a) - f^{-1}(c)| \geq 1 > \varepsilon$, i.e. f^{-1} est discontinue au point a. ❑

🛈 **Remarque :** C'est cette fois-ci la non-connexité de l'intervalle de départ (ici $\mathbb{Z}$) qui rend possible la non-continuité de l'application réciproque.

Exercice 136 (Continuité, topologie)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Si l'image réciproque par f de tout compact est compacte, montrer que f est fermée (i.e. l'image par f de tout fermé est un fermé).

Soit donc F un fermé de $\mathbb{R}$ et $b \in \overline{f(F)}$ il s'agit donc de montrer que $b \in f(F)$ i.e. qu'il existe $a \in F$ tel que $f(a) = b$.
Il existe une suite $(b_n)_n$ dans $f(F)$ (i.e. une suite $(a_n)_n$ dans F) telle que $\lim_n b_n = \lim_n f(a_n) = b$, il faut se garder de croire que la suite $(a_n)_n$ est nécessairement convergente, (ce qui nous permettrait de conclure sans utiliser l'hypothèse sur f) mais on va voir qu'elle admet une sous-suite convergente. Considérons le compact $K = \{f(a_n),\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}$, $f^{-1}(K)$ est donc une partie compacte contenant la suite $(a_n)_n$: on peut donc extraire de $(a_n)_n$ une sous-suite $(a_{n_k})_k$ convergente de limite a. Par construction la suite $(a_{n_k})_k$ est incluse dans F fermé : $a \in F$. f étant continue

$$f(a) = \lim_k f(a_{n_k}) = \lim_k b_{n_k} = b$$

C.Q.F.D. ❑

Exercice 137 (Continuité)
Existe-t-il une application continue f de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\exp(f(z)) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}^\star \qquad ?$$

Supposons qu'une telle fonction existe. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(f(e^{ix})) = e^{ix} \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \exp(f(e^{ix}) - ix) \equiv 1,$$

mais vu les hypothèses sur f et les propriétés de l'exponentielle complexe

$$g(\mathbb{R}) \subset 2i\pi\mathbb{Z},$$

la partie connexe $g(\mathbb{R})$ (g est continue) est inclue dans l'ensemble discret $2i\pi\mathbb{Z}$: g est donc constante

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ :\ g \equiv 2iN\pi$$

et par suite l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$h(x) := f(e^{ix}) = ix + 2iN\pi$$

est clairement non bornée. Mais tout ceci est absurde puisque

$$h(\mathbb{R}) = f(\mathbb{U}) := \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\}$$

est compact (et donc borné) comme image continue d'un compact. Contradiction. ❑

🛈 **Remarque :** le logarithme népérien $\log : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ n'admet aucun prolongement continu à $\mathbb{C}^\star$. On sait toutefois qu'en ôtant à $\mathbb{C}$ une demi-droite issue de l'origine un tel prolongement existe (et même une infinité)

Exercice 138 (Théorème du point fixe : quelques limites)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{-x} & \textit{si } x \geq 1 \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

montrer que f réduit strictement les distances et toutefois ne possède aucun point fixe.

On vérifie facilement que f est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = 0$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et un calcul élémentaire montre $f'(x) \in [0, 1[$. Avec le théorème des valeurs intermédiaires, si $x \neq y$ il existe $c \in (x, y)$ tel que

$$|f(x) - f(y)| = |f'c)| \cdot |x - y| < |x - y|$$

f réduit donc strictement les distances, mais bien entendu, l'équation $f(x) = x$ est sans solution. ❑

🛈 **Remarque :** le théorème du point fixe ne s'applique pas ici, en effet, f n'est pas contractante (i.e. $\exists\, 0 < k < 1 \ : \ \forall\, x \neq y \in \mathbb{R} \ : \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$) elle l'est localement mais pas globalement (car $f'(x) \to 1_-$ lorsque $x \to +\infty$).

Exercice 139 (Propriétés topologiques de l'ensemble des points de discontinuité d'une application) [27]
Soient (X, d_1), (Y, d_2) deux espaces métriques.

❶ *Soient $\emptyset \neq A \subset X$ et $f : A \to Y$. Pour $x \in \overline{A}$ on pose*

$$o_f(x,\delta) := \mathrm{diam(f(A \cap B(x,\delta)))}, \quad \delta \in \mathbb{R}_+^\star.$$

L'oscillation de f au point x est définie par

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} o_f(x,\delta).$$

Montrer que f est continue en $a \in A$ si et seulement si $o_f(a) = 0$. Montrer enfin que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{\, x \in \overline{A} \ :\ o_f(x) \geq \varepsilon\}$ est fermé dans X.
❷ *Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une application $f : X \to Y$ est un G_δ (i.e. une intersection dénombrable d'ouverts). Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est un F_σ (i.e. une réunion dénombrable de fermés).*
❸ *Montrer que tout F_σ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
❹ *Soit A un F_σ d'un espace métrique X. Existe-t-il une application $f : X \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité soit précisément A ?*
❺ *Soient X un espace métrique complet et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est limite simple sur X d'une suite de fonctions continues alors l'ensemble des points de discontinuité de f est maigre dans X (i.e. réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide) ; en déduire que l'ensemble des points de contuité de f est dense dans X.*
❻ *Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?*

❶ Supposons f continue au point $a \in A$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \in B_{\delta_2}(f(a), \varepsilon/2)$ pour tout $x \in B_{\delta_1}(a,\delta) \cap A$. Par conséquent $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $x, y \in B_{\delta_1}(a,\delta) \cap A$ soit $o_f(a) = 0$.
Réciproquement si $o_f(a) = 0$, alors étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ implique $\mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(a,\delta))} < \varepsilon$ i.e. $d_1(x,a) < \delta$ implique $d_2(f(a), f(x)) \leq \mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(a,\delta))} < \varepsilon$.

Soient $B = \{\, x \in \overline{A} \ :\ o_f(x) \geq \varepsilon\}$ et une suite $(x_n)_n \subset B$ convergente dans X vers un point adhérent $a \in \overline{B}$. Puisque $B \subset \overline{A}$ nécéssairement $a \in \overline{A}$ et $o_f(x)$ est donc bien défini. En outre, pour tout $\delta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_{\delta_1}(x_n, \delta/2) \subset B_{\delta_1}(a,\delta)$ et par conséquent

$$\mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(a,\delta))} \geq \mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(x_n,\delta/2))} \geq \mathrm{o_f(x_n)} \geq \varepsilon$$

soit $o_f(a) \geq \varepsilon$ i.e. $a \in B$; $\{\, x \in \overline{A} \ :\ o_f(x) \geq \varepsilon\}$ est fermé dans (X, δ_1).

❷ L'ensemble C des points de continuité de f est donc l'ensemble $\{\, x \in X \ :\ o_f(x) = 0\}$ soit

$$C = \bigcap_{n \geq 1} \{\, x \in X \ :\ o_f(x) < \frac{1}{n}\},$$

intersection dénombrable d'ouverts d'après la question précédente : C est bien un G_δ et par passage au complémentaire, l'ensemble $X \setminus C$ des points de discontinuité de f est bien un F_σ.

❸ Soit $A = \cup_{n\geq 1} F_n$ un F_σ. Quitte à remplacer F_n par $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ on peut supposer que la suite de fermés $(F_n)_n$ est une suite croissante pour l'inclusion. Si $A = \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ qui est discontinue sur tout $\mathbb{R}$ convient. Si $A \neq \mathbb{R}$, considérons la fonction

$$g_A(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n \in K_x := \{k \in \mathbb{N} \ : \ x \in F_k\}} 2^{-n} & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

et posons alors

$$f_A(x) = g_A(x) \left(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \frac{1}{2} \right).$$

g_A et donc f_A est bien définie sur $\mathbb{R}$; nous allons vérifier que l'ensemble des points de discontinuité de f_A est précisément A.

➪ Soit $x \in \mathring{A}$, on peut alors construire deux suites $(x_n)_n \in \overline{\mathring{A}} \cap \mathbb{Q}$, $(y_n)_n \in \mathring{A} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ toutes deux convergentes vers x. Vu sa définition, $g_A(x) > 0$ si $x \in A$, et vu celle de f_A : $f_A(x_n) > 0$, $f_A(y_n) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ si bien que f_A continue au point x implique $f_A(x) = 0$ ce qui est absurde puisque $x \in A$: f_A est donc discontinue sur l'intérieur de A.
On procède identiquement si $x \in A \cap \partial A$: $f_A(x) \neq 0$ mais on peut approcher x par une suite $(z_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus A$ soit $f_A(z_n) = 0$ d'où la discontinuité.
$A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$ la fonction f_A est bien discontinue sur A.
➪ Sur $\mathbb{R} \setminus A$: $f_A \equiv 0$. Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R} \setminus A$, si $(x_k)_k \subset A$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier k_n tel que $k \geq k_n \implies x_k \notin F_n$ (en effet, sinon, il existerai une infinité de x_k dans au moins un F_n soit $x \in \overline{F}_n = F_n \subset A$!). Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k_n \in \mathbb{N} \ : \ k \geq k_n \implies g_A(x_k) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{2^n}$$

qui assure que $\lim_{k\to+\infty} g_A(x_k) = 0 = g_A(x)$: g_A est bien continue au point x et donc sur $\mathbb{R} \setminus A$.

❹ Non, par exemple toute fonction définie sur un espace métrique discret est continue.

❺ On considère une suite $(f_n)_n$ d'applications continues sur X et simplement convergente sur X vers f. Posons pour $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon(m) = \{x \in X \ : \ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}, \quad A(\varepsilon) = \bigcup_{m\geq 1} \mathring{A_\varepsilon}(m).$$

Nous allons vérifier que $C := \cap_{n\geq 1} A_{1/n}$ est l'ensemble des points de discontinuité de f :
Supposons pour commencer que f soit continue en un point $x \in X$. Puisque $f(x) = \lim_n f_n(x)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par continuité de f et f_m en x il existe une boule $B(x, r)$ telle que

$$\forall y \in B(x, r) \quad : \quad |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |f_m(y) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

En regroupant ces trois inégalités il vient

$$|f(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, y \in B(x,r),$$

autrement dit, on a l'inclusion $(A_\varepsilon(m))^\circ \subset A_\varepsilon$; ε etant arbitraire : $x \in C$.
Réciproquement, soit $x \in C = \cap_{n\geq 1} A_{1/n}$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier m tel que $x \in C := \cap_{m\geq 1}(A_m(\varepsilon/3))^\circ$. il existe donc une boule $B(x,r)$ telle que

$$|f(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, y \in B(x,r),$$

avec l'inégalité triangulaire et la continuité de f_m, on déduit facilement la continuité de f au point x.

➪ Il nous reste à montrer que $X \setminus C$ est maigre. Pour cela considérons pour $m \in \mathbb{N}$

$$F_m(\varepsilon) = \{x \in X \ : \ |f_n(x) - f_{m+k}(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Les applications f_n étant continues, $F_m(\varepsilon)$ est fermé ; et par convergence simple vers f sur X nous avons

$$X = \cup_{m\geq 1} F_m(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_m(\varepsilon) \subset A_m(\varepsilon).$$

par conséquent

$$\bigcup_{m\geq 1} (F_m(\varepsilon))^\circ \subset A_\varepsilon.$$

Alors $X \setminus \bigcup_{m\geq 1}(F_m(\varepsilon))^\circ$ est maigre : en effet, visiblement fermé ; il est aussi d'intérieur vide, ceci résulte du fait que pour tout $F \subset X$ l'ensemble $F \setminus \mathring{F}$ est d'intérieur vide et de l'inclusion

$$X \setminus \bigcup_{m\geq 1} (F_m(\varepsilon))^\circ \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m(\varepsilon) \setminus (F_m(\varepsilon))^\circ.$$

Maintenant, il faut remarquer que comme $X \setminus A_\varepsilon \subset X \setminus \bigcup_{m\geq 1}(F_m(\varepsilon))^\circ$, l'ensemble $X \setminus A_\varepsilon$ est aussi de première catégorie (maigre). Il reste enfin (!!) à remarquer l'inclusion

$$X \setminus C = X \setminus \bigcap_{n\geq 1} A(1/n) = \bigcup_{n\geq 1} (X \setminus A_{1/n})$$

qui nous permet d'affirmer que $X \setminus C$ est aussi maigre.

Avec les notations de la question précédente nous avons

$$X \setminus A(1/k) \subset X \setminus \bigcup_{m\geq 1} (F_m(1/k))^\circ \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m(1/k) \setminus (F_m(1/k))^\circ$$

si bien que

$$\bigcup_{k\geq 1} X \setminus A(1/k) \subset \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} F_m(1/k) \setminus (F_m(1/k))^\circ.$$

$X \setminus C$ est inclu dans une réunion dénombrable d'ensembles maigre : C contient donc une intersection d'ouverts denses, par le théorème de Baire, C est dense dans X.

❻ Si une telle fonction existe, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ serait un F_σ d'intérieur vide, donc maigre et par suite $\mathbb{R} = (\mathbb{Q}) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est lui aussi maigre comme réunion de deux ensembles maigres ce qui est absurde au vu du théorème de Baire. ❏

🛈 **Remarque :** Il n'y a par contre aucune obstruction à l'existence d'une fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble de discontinuité est $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ étant un F_σ un tel objet est construit dans la question ❸ et on trouvera dans l'exercice ci-dessous un autre exemple beaucoup plus classique.

Exercice 140 (Une application discontinue sur $\mathbb{Q}$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^\star,\ pgcd(p,q) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^\star$, discontinue sur $\mathbb{Q}^\star$.

❶ Soit $x \in \mathbb{Q}^\star$, il existe $q \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f(x) = \frac{1}{q} > 0$ mais aussi une suite $(x_n)_n$ d'irrationels de limite x soit

$$\lim_n f(x_n) = 0 \neq \frac{1}{q} = f(x)$$

f est donc bien discontinue sur $\mathbb{Q}^\star$.
❷ Soient maintenant $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ et $q_0 \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$. L'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$ avec $q \leq q_0$ tels que $|x - \frac{p}{q}| < 1$ est fini (la distance entre deux tels éléments est au moins $\geq \frac{1}{q_0}$...) il existe donc $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[$ ne possède que des rationnels à dénominateur $> q_0$ et

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(y)| \leq \varepsilon.$$

❑

🛈 **Remarques :** La seconde étape résulte aussi (très bon exercice sur les suites et sous-suites) du fait suivant (en fait le même) : « *si une suite de rationnels $(p_n/q_n)_n$ converge vers un irrationnel alors $\lim_n q_n = +\infty$* ».

Exercice 141 (Continuité ordinaire et continuité au sens de Cesàro)

On dira qu'une suite $(x_n)_n$ de nombres réels converge vers $x \in \mathbb{R}$ au sens de Césaro si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x$$

et on écrira $x_n \to x$ (C). Il est bien connu que la convergence usuelle implique la convergence au sens de Cesàro et que la réciproque esr fausse. On dira qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro au point x, si $x_n \to x$ (C) implique $f(x_n) \to f(x)$ (C).

❶ *Etudier la continuité au sens de Cesàro des applications $f(x) = ax+b$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2$ sur leur domaine de définition*

❷ *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue au sens de Cesàro en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.*

➪ *Montrer qu'on peut toujours supposer que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$.*

➪ *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $a,\ b,\ -(a+b),\ a,\ b,\ -(a+b), a,\ b,\ -(a+b),\ \dots$ converge au sens de Cesàro vers 0. En déduire que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.*

➪ *Montrer que $f(qx) = qf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Q}$.*

➪ *Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers 0. Montrer qu'il existe une suite de réels $(y_n)_n$ telle que $x_n = n^{-1}(y_1 + \cdots + y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.*

➪ *Montrer que f est continue à l'origine.*

➪ *En déduire que f est de la forme $f(x) = ax + b$.*

❶

❷ Soit f une fonction continue au sens de Cesàro au point x_0.

➪ Quitte à considérer $g = f - f(x_0)$ on peut supposer que $f(x_0) = 0$ et quitte à remplacer $g(x)$ par $h(x) = g(x + x_0)$ on peut supposer que $x_0 = 0$. Nous considérerons donc dans la suite une application f continue au sens de Cesàro à l'origine et vérifiant $f(0) = 0$.

➪ Soient a, b deux réels quelconques, de manière évidente, la suite

$$a,\ b,\ -(a+b),\ a,\ b,\ -(a+b), a,\ b,\ -(a+b,\ \dots$$

converge au sens de Cesàro vers 0. f étant par hypothèse continue au sens de Cesàro à l'origine, il en est donc de même pour la suite

$$f(a),\ f(b),\ f(-(a+b)),\ f(a),\ f(b),\ f(-(a+b)), \dots$$

Mais cette derière converge au sens de Cesàro vers $f(a) + f(b) + f(-(a+b))$. Nous avons donc $f(0) = 0 = f(a) + f(b) + f(-(a+b))$, soit

$$f(a) + f(b) = -f(-(a+b)), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

En choisissant $b = 0$ il vient

$$f(a) = -f(-a), \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

qui nous donne finalement

$$f(a)+f(b)=f(a+b), \quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}.$$

ℹ Nous venons donc de démontrer que toute fonction continue au sens de Cesàro en au moins un point vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy : $f(a)+f(b)=f(a+b), \quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$, une équation que nous avons étudiée dans un autre exercice (voir ....). Nous savons en particulier que f sera de la forme $f(x)=ax+b$ dès qu'elle sera continue en au moins un point ; mais ici c'est au sens de Cesàro que f est continue et il n'est donc pour le moment pas possible de conclure... Les deux prochaines questions vont justement établir l'hypothèses manquante à savoir la continuité de f à l'origine.

➪ L'existence de la suite $(y_n)_n$ revient à résoudre les équations

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=nx_n, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^\star.$$

Soit

$$y_n=nx_n-(n-1)x_{n-1}, \quad n\in\mathbb{N}^\star$$

(avec la convention $x_0=0$). ❏

➪ Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

on à $y_n\to 0$ (C) et f étant continue au sens de Cesàro en 0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}=0.$$

Comme f satisfait l'équation fonctionelle de Cauchy

$$f(x_n)=f\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)=\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}$$

et finalement

$$\lim_n f(x_n)=\lim_n\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}=0,$$

f est donc continue à l'origine.

➪ Il est maintenant facile de conclure : f est continue à l'origine et vérifie l'équation fonctionelle de Cauchy : elle est donc de la forme $f(x)=ax+b$.

ℹ La continuité au sens de Cesàro est donc une propriété beaucoup plus contraignante que la continuité usuelle ; ce résultat n'était à priori, absolument pas prévisible. En effet, les relations éventuelles entre continuité ordinaire et continuité au sens de Cesàro ne sont pas évidentes : il y a plus de suites (C)-convergentes, mais d'un autre coté, la (C)-convergence est plus faible que la convergence usuelle ; autrement dit, une fonction continue au sens de Cesàro doit sur beaucoup plus de suites faire quelque chose moins fort que la continuité ordinaire.

Exercice 142 (Des petits « o ») [19]
Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$. *Si*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \textit{et} \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x),\ (x \to 0),$$

montrer que $\quad f(x) = o(x),\ (x \to 0)$.

Soit $\varepsilon > 0$, vu la seconde hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(\text{✘}) \qquad 0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x) - f(x/2)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons nous $y \in]0, \delta[$, comme on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$f(y) = (f(y) - f(y/2)) + (f(y/2) - f(y/4)) + \dots + \big(f(y/2^{n-1}) - f(y/2^n)\big) + f(y/2^n),$$

on en déduit avec (✘)

$$\begin{aligned}|f(y)| &\leq \sum_{j=1}^{n} |f(y/2^{j-1}) - f(y/2^j)| + |f(y/2^n)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{y}{2^j}\varepsilon + |f(y/2^n)| \\ &\leq \varepsilon y(1 - 2^{-n}) + |f(y/2^n)| \\ &\leq \varepsilon y + |f(y/2^n)|\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. De là, comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, en faisant tendre n vers l'infini il reste

$$|f(y)| \leq \varepsilon y.$$

Résumons nous : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < y < \delta$ tel que $|f(y)/y| \leq \varepsilon$; autrement dit $f(x) = o(x)$ CQFD. ❑

Exercice 143 (L'équation fonctionnelle $f^2(x) = \int_0^x (f^2(t) + f'^2(t))\,dt + 2007$.) [28]
Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$(\text{✘}) \qquad f^2(x) = \int_0^x \big(f^2(t) + f'^2(t)\big)\,dt + 2007, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les deux fonctions de part et d'autre de l'égalité (✘) seront égales si elles ont même dérivée et coïncident à l'origine. Dérivons (✘), on tombe sur

$$2f(x)f'(x) = f^2(x) + f'^2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou encore $(f - f')^2(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$, soit $f = f'$ et finalement $f(x) = Ce^x,\ x \in \mathbb{R}$. Enfin l'évaluation à l'origine donne $f^2(0) = 2007$; les solutions de l'équation fonctionnelle (✘) sont les deux fonctions $f(x) = \pm\sqrt{2007}e^x$. ❑

Exercice 144 (Encore quelques équations fonctionnelles)
[10], *2008.*

❶ *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x) + f(2x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.*
❷ *Soient $a, b, c > 0$ deux à deux distincts. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

❶ a) Soit f une solution de l'équation fonctionnelle, clairement $f(0) = 0$, et en remplacant x par $x/2$ on a pour tout x réel : $f(x) + f(x/2) = 0$ soit $f(x) = -f(x/2) = f(x/2^2) = \cdots = (-1)^k f(x/2^k),\ k \in \mathbb{N}$. De là, par continuité de f à l'origine

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} (-1)^k f(x/2^k) = f(0) = 0,$$

f est donc identiquement nulle. Réciproquement la fonction identiquement nulle vérifie l'équation fonctionnelle, c'est donc l'unique solution.

Remarques : On a seulement utilisé la continuité à l'origine, et on peut remplacer 2 par tout autre réel strictement positif.

❷ Sans perdre de généralité, supposons $a > b > c$ et soit f une solution de l'équation, comme dans la première question on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= -f\left(\frac{bx}{a}\right) - f\left(\frac{cx}{a}\right) \\ &= f\left(\frac{b^2x}{a^2}\right) + 2f\left(\frac{bcx}{a^2}\right) + f\left(\frac{c^2x}{a^2}\right) \\ &= -f\left(\frac{b^3x}{a^3}\right) - 3f\left(\frac{b^2cx}{a^3}\right) - 3f\left(\frac{bc^2x}{a^3}\right) - f\left(\frac{c^3x}{a^3}\right) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{b^kc^{n-k}x}{a^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte d'une récurrence élémentaire sur n. f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut dériver cette dernière expression à tout ordre :

$$(\bigstar) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall N, n \in \mathbb{R}\ :\ f^{(N)}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{b^kc^{n-k}}{a^n}\right)^N f^{(N)}\left(\frac{b^kc^{n-k}x}{a^n}\right).$$

Fixons x dans $\mathbb{R}$, comme $a > b > c > 0$ on a $|b^kc^{n-k}x/a^n| < |b^nx/a^n| \leq |x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Donc, avec $(\bigstar)$ nous avons pour tout $x \in \mathbb{R},\ n, N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f^{(N)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{b^kc^{n-k}}{a^n}\right)^N \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \\ &\leq \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{b}{a}\right)^{nN} = \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \left(\frac{2b^N}{a^N}\right)^n \end{aligned}$$

Fixons N suffisament grand pour que $0 < 2b^N/a^N < 1$ et $x \in \mathbb{R}$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(N)}(x)| \leq \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \left(\frac{2b^N}{a^N}\right)^n,$$

on en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $f^{(N)}(x) = 0$ pour tout réel x : f est donc un polynôme $f(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$. L'équation fonctionnelle s'écrit alors

$$a_d(a^d + b^d + c^d)x^d + \cdots + a_1(a + b + c) + 3a_0 = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a, b, c étant strictement positifs : la seule alternative est $a_d = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. f est donc identiquement nulle. Réciproquement la fonction identiquement nulle vérifie l'équation fonctionnelle, c'est donc l'unique solution. ❑

Exercice 145 (Une inéquation fonctionnelle)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Q}\ :\ |f(x) - f(q)| \leq |x - q|^2.$$

Soit f une solution éventuelle. Pour $a < b$ deux rationnels, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ posons $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Il est clair que les réels a_i sont rationnels et l'inégalité triangulaire nous donne

$$|f(a) - f(b)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \leq 7 \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a_{i-1}|^2 = 7\frac{(b-a)^2}{n}.$$

En faisant tendre maintenant n vers $+\infty$ on en déduit que $f(a) = f(b)$: f est donc constante sur $\mathbb{Q}$.
Montrons que est constante sur $\mathbb{R}$: On a déja $f(q) = r$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$; pour $x \in \mathbb{R}$ considérons une suite de rationnels $(q_n)_n$ qui converge vers x, alors

$$|f(x) - r| = |f(x) - f(q_n)| \leq 7|x - q_n|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

i.e. $f(x) = r$: f est bien constante. Réciproquement, il est facile de vérifier que les fonctions constantes sont solutions du problème. ❑

CHAPITRE 5

DÉRIVABILITÉ

Exercice 146 (Existence d'un opérateur « à la dérivée de Dirac » sur $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$) [15]

Déterminer les formes linéaires D sur $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$D(fg) = f(0)D(g) + D(f)g(0), \quad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

$\mathbf{1}$ désignant la fonction constante $x \mapsto \mathbf{1}(x) = 1$ nous avons $D(\mathbf{1}.\mathbf{1}) = D(\mathbf{1}) = D(\mathbf{1}) + D(\mathbf{1})$, soit $D(\mathbf{1}) = 0$ et par suite D est nulle sur toutes les applications constantes. Comme pour toute $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f = (f - f(0)) + f(0) \;\Rightarrow\; D(f) = D(f - f(0))$ il est suffisant de se concentrer sur la restriction de D sur les applications nulles à l'origine ; pour une telle application $D(f^2) = 0$ si bien que pour $f \geq 0$: $D(f) = D((\sqrt{f})^2) = 0$. Dans le cas général, comme il est toujours possible d'écrire f comme différence de deux fonctions continues, positives et nulles à l'origine ($f = \max\{f(x), 0\} - \max\{-f(x), 0\}$) on a encore $D(f) = 0$ et la seule forme linéaire qui convienne est la forme identiquement nulle. ❏

Exercice 147 (Deux fonctions f, g dérivables telles que $f'g'$ ne soit pas une dérivéee) [49]

Montrer qu'il existe deux fonction dérivables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'g'$ ne soit pas une dérivée.

Considérons[1] les applications $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

[1] Wilkosz W. *Fundamenta Mathematicae*, (2)-1921.

g est continue sur $\mathbb{R}$, c'est donc une dérivée. Par conséquent, $h := g - f'$ est une dérivée : il existe donc une application dérivable $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$H'(x) = h(x) = g(x) - f'(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Considérons alors

$$h^2(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \cos(2/x)}{2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

nous allons vérifier que h^2 n'est pas une dérivée et répond donc à notre problème. Supposons qu'il existe une application dérivable $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $D' = h^2$, en notant $\tilde{H}(x) = H(x/2)$ nous avons

$$\tilde{H}'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(2/x)}{2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

qui implique

$$D'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \tilde{H}'(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \tilde{H}'(x) & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$D'(x) - \tilde{H}'(x) = \Big(D(x) - \tilde{H}(x)\Big)' = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mais il est bien connu (cf autre exo) qu'une dérivée ne peut avoir une discontinuité de première espèce : contradiction et l'application h^2 est bien sans primitive. ❏

Exercice 148 (Dérivation)
Soit $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0.$$

Si l'une des quatre applications $f^{(i)}, 0 \leq i \leq 3$ n'est pas de signe constant le problème est trivial. Supposons donc f, f', f'', f''' de signe constant, alors f et f'' sont de même signe. Pour cela, si $f'' > 0$ la formule de Taylor-Lagrange nous donne pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c_x) > f(0) + xf'(0)$$

et $f(0) + xf'(0)$ est certainement positif pour x suffisament grand et du signe de $f'(0)$: f étant supposée de signe constant $f > 0$ sur $\mathbb{R}$(on procède de manière analogue si $f'' < 0$). Ainsi $f(x)f''(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ce même raisonnement vaut pour le couple f', f''' et le résultat est démontré. ❏

ℹ **Remarque :** L'hypothèse $\mathscr{C}^3$ est en fait superflue : trois fois dérivable suffit si l'on se souviens qu'une dérivée possède toujours la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice 149 (Approche matricielle du théorème des accroissements finis) [25]
Soient f, g, h trois fonctions continues sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On définit

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}$$

montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$, en déduire le théorème des accroissements finis puis la forme généralisée de ce théorème.

➪ F est clairement continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec

$$F'(x) = \det \begin{pmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}$$

et vu les propriétés classiques du déterminant $F(a) = F(b) = 0$. Le théorème de Rolle assure alors l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$.
➪ Avec $g(x) = x$ et $h \equiv 1$ il vient

$$F'(c) = \det \begin{pmatrix} f'(c) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{pmatrix} = 0$$

soit $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ i.e. le théorème des accroissements finis.
➪ Si maintenant on choisit $h \equiv 1$

$$F'(c) = \det \begin{pmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{pmatrix} = 0$$

nous donne

$$\exists\, c \in]a, b[\ : \ g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

version « forte » du théorème des accroissements finis. ❑

Exercice 150 (Comportement asymptotique du « point intermédiaire » dans la formule de Taylor-Lagrange) [25]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application n fois dérivable. Fixons $x \in \mathbb{R}$, alors pour $h > 0$ la formule de Taylor-Lagrange assure de l'existence d'un réel $\theta(h)$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta(h)h).$$

Si de plus $f^{(n+1)}(x)$ existe et est différent de zéro,montrer que

$$\lim_{h\to 0}\theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

Par Taylor-Young

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1})$$

et par Taylor-Lagrange

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta(h)h)$$

soit

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}$$

et

$$\theta(h) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}}{\frac{f^{(n)}(x+\theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{\theta(h)h}}$$

puisque $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ on peut passer à la limite dans cette dernière égalité et le résultat suit. ❑

Exercice 151 (Trois preuves du théorème de Darboux)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

❶ **Première démonstration :** Soient $x < y$ dans I, et les applications $\varphi, \psi : [x,y] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} & \text{si } t \in]x,y] \\ f'(x) & \text{si } t = x, \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(t)}{y-t} & \text{si } t \in [x,y[\\ f'(y) & \text{si } t = y, \end{cases}$$

vu les hypothèses sur f, φ et ψ sont continues sur $[x,y]$ et donc $I_\varphi := \varphi([x,y])$ et $I_\psi := \psi([x,y])$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Ils sont d'intersection non vide puisque $\varphi(y) = \psi(x)$, par conséquent $I_\varphi \cup I_\psi$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ (la réunion de deux connexes non disjoints est toujours connexe). Ainsi, pour tout réel $\lambda \in (f'(x), f'(y))$ il existe $t \in]x, y[$ tel que $\varphi(t) = \lambda$ ou $\psi(t) = \lambda$, si par exemple $\varphi(t) = \lambda$ (idem avec ψ) le théorème des accroissements finis nous assure qu'il existe $\zeta_t \in]x, y[$ tel que

$$\lambda = \varphi(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(\zeta_t).$$

finalement

$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda \in (f'(x), f'(y)) \quad \exists\, \zeta \in]x, y[\ :\ f'(\zeta) = \lambda$$

et f' possède bien la propriété des valeurs intermédiaires. CQFD

❷ **Seconde démonstration :** ➪ Supposons I sans borne supérieure (i.e. $I = [a, b[$ ou $]a, b[$). Considérons la partie connexe $\mathscr{C} = \{(x, y) \in I \times I\ :\ x \neq y\}$ l'application

$$\varphi\ :\ (x, y) \in \mathscr{C} \mapsto \varphi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

est visiblement continue, $\varphi(\mathscr{C})$ est donc connexe dans $\mathbb{R}$: c'est un intervalle, et par le théorème des accroissements finis $\varphi(\mathscr{C}) \subset f'(I)$. Inversement, vu la forme de I on a, pour tout $x \in I$

$$f'(x) = \lim_{y \to x,\, y > x} \varphi(x, y) \ \in\ \overline{\varphi(\mathscr{C})}$$

en resumé $\varphi(\mathscr{C})$ est connexe et

$$\varphi(\mathscr{C}) \subset f'(I) \subset \overline{\varphi(\mathscr{C})}$$

qui implique (cours sur les connexes) la connexité de $f'(I)$ qui assure notre résultat.
➪ On procéde de même si $I =]a, b]$ et si $I = [a, b]$ on écrit $[a, b] =]a, b] \cup [a, b[$.

❸ **Troisième démonstration :** soient

$$a, b \in I,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad f'(a) < \lambda < f'(b)$$

et

$$\varphi\ :\ x \in I \mapsto \varphi(x) = f(x) - \lambda x \in \mathbb{R}.$$

φ est dérivable sur I et il existe $\alpha, \beta \in]a, b[$ tels que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ (sinon φ est injective continue sur $]a, b[$ est strictement monotone, φ est dérivable : φ' est de signe constant ce qui est absurde puisque $\varphi'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ et $\varphi'(b) = f'(b) - \lambda > 0$...) on conclut alors avec le théorème de Rolle. ❑

Exercice 152 (Sur le point d'inflexion)
On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^5\left(\sin(x^{-1})+2\right) & \textit{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet en $x=0$ un point d'inflexion bien que $f''(0)=0$ sans toutefois garder un signe constant à droite et à gauche de l'origine.

On montre facilement que f est deux fois dérivable en $x=0$ avec $f'(0)=f''(0)=0$. En outre $x=0$ est bien point d'inflexion de f car f est >0 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et <0 sur $\mathbb{R}_-^\star$ alors que la tangente à l'origine au graphe de f est l'axe des abcisses. Toutefois, après un petit calcul on a au voisinage de l'origine $f''(x) = -x\sin(x^{-1}) + o(x)$ qui n'est bien sûr pas de signe constant sur aucun voisinage à droite (et à gauche) de zéro. ❑

ℹ **Remarque :** si f est deux fois dérivable au voisinage d'un point a et si sa dérivée seconde s'y annule en changeant de signe alors f admet un point d'inflexion en a. La réciproque est donc fausse.

Exercice 153 (Rolle sur $\mathbb{R}$)
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.

On se ramène au cas classique en posant si $x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = f(\tan(x))$ et $g(x) = l$ pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$. On conclut en appliquant le théorème de Rolle à g. ❑

Exercice 154 (Dérivabilité et accroissements finis)
Soit $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que $f'(a)$ est valeur d'adhérence de $f'(]a,b[)$.

Il faut donc montrer que $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0\ :\ \exists\zeta\in]a,a+\eta[$ tel que $|f'(a)-f'(\zeta)|\leq\varepsilon$. f étant dérivable (à droite)

$$(\text{✘}) \qquad \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0\ :\ \forall\,x\in]a,a+\eta[\ :\ \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \varepsilon,$$

mais pour un tel x le théorème des accroissements finis assure de l'existence d'un $\zeta \in]a,x[$ tel que $f(x)-f(a)=(x-a)f'(\zeta)$. Il ne reste plus qu'à reporter dans (✘) pour conclure. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ les discontinuités de l'application dérivée f' ne sont donc pas arbitraires, par exemple une discontinuité de première espèce (un saut) est proscrite pour une dérivée. Il faut d'ailleurs se souvenir du théorème de qui dit que f' possède la propriété des valeurs intermédiaires (on peut aussi traiter cet exercice avec Darboux).
➪ Tant que nous y sommes, il est essentiel pour la leçon sur la dérivabilité d'avoir un exemple d'une fonction dérivable en un point à dérivée non continue, l'exemple canonique étant

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(x^{-1}) & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Exercice 155 (Dérivabilité et accroissements finis)
Soit $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une application dérivable sur $]a,b[$ sauf peut être en un point $c\in]a,b[$. Si $f'(x)$ admet une limite l lorsque x tend vers c, montrer que f est dérivable en c et $f'(c)=l$.

Soit $a<x<c$, appliquons le théorème des accroissements finis à f sur $[x,c]$: il existe $x<\eta_x<c$ tel que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(\eta_x).$$

Mais

$$(x<\eta_x<c) \quad\Longrightarrow\quad \left(\lim_{x\to c_-}\eta_x=c\right)$$

donc, vu les hypothèses sur f :

$$\lim_{x\to c_-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c_-}f'(\eta_x)=\lim_{x\to c_-}f(x)=l.$$

f est donc dérivable à gauche au point c avec $f'_g(c)=l$, on fait de même à droite. ❑

Exercice 156 (Toute application convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante)
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que f est constante.

Si f n'est pas constante, on peut trouver $a\in\mathbb{R}$ tel que $f'(a)\neq 0$ et la formule de Taylor-Lagrange nous donne pour

$$x\in\mathbb{R},\ \exists\zeta_x\in(a,x)\quad:\quad f(x+a)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2}f''(\zeta_x)\geq f(a)+xf'(a)$$

la dernière inégalité résultant du fait que

$$(f \text{ deux fois dérivable et convexe}) \quad \Longrightarrow \quad (f'' \geq 0)\,.$$

Si par exemple $f'(a) > 0$ on obtient alors une contradiction en faisant tendre x vers $+\infty$ (et vers $-\infty$ si $f'(a) < 0$...) ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Si la fonction est seulement convexe le résultat bien entendu subsiste, il faut juste être un peu plus délicat : si f est non constante, soient $a < b$ vérifiant $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$ et pour tout $a < b < x$

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{x-b}{x-a}a + \frac{b-a}{x-a}x\right) \\ &\leq \frac{x-b}{x-a}f(a) + \frac{b-a}{x-a}f(x), \end{aligned}$$

soit

$$(\bigstar) \qquad \forall\, x > b > a, \qquad f(x) \geq \frac{x-a}{b-a}f(b) - \frac{x-b}{b-a}f(a).$$

Si $f(b) > f(a)$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(b) = f(a) + \delta$ et $(\bigstar)$ devient pour tout $x > b$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{x-a}{b-a}f(b) - \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{a-b}{b-a}\right)f(a) \\ &= \frac{x-a}{b-a}\left(f(b) - f(a)\right) + f(a) \\ &\geq \frac{x-a}{b-a}\delta + f(a) := h(x) \end{aligned}$$

la fonction h est non majorée sur $]b, +\infty[$, il en est donc de même pour f d'où la contradiction. On procède de manière analogue si $f(b) < f(a)$ en établissant pour $x < a < b$ avec $\delta := f(a) - f(b)$

$$f(x) \geq \frac{b-x}{b-a}\delta + f(b)$$

➪ Ce résultat ne subsiste plus si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle de la forme $(a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a)$), il suffit par exemple de considérer $f(x) = e^{-x}$ (resp. $f(x) = e^{x}$).

Exercice 157 (Régularité et existence de développement limité en un point)
Soit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tous points de $\mathbb{R}^\star$, qu'elle est continue et dérivable à l'origine et nulle part deux fois dérivable. Toutefois montrer que f admet à l'origine un développement limité à tout ordre.

Pour la continuité et la dérivabilité c'est classique. En outre pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = o(x^n)$ à l'origine : elle admet donc un développement limité à l'ordre n en ce point (la partie principale étant le polynôme nul...). ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Une fonction est continue en un point, si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre zéro en ce point ; elle y est dérivable si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Si une fonction est n fois dérivable en un point alors (Taylor-Lagrange ou Young) elle admet un développement limité d'ordre n en ce point et l'exemple précédent nous montre que pour $n \geq 2$ la réciproque est fausse.

➪ On a aussi pour $n = 2$ le contre-exemple canonique : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(x^{-1}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 158 (Parité, dérivabilité et développement limité)
On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) + \cos(x) & \textit{si } x > 0, \\ \cos(x) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas paire mais que tous ses développements limités de f à l'origine sont sans termes de degré impair.

Comme dans l'exercice précédent pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) + o(x^n) & \text{si } x > 0, \\ \cos(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

au voisinage de 0_+. Ainsi, f admet un développement limité à tout ordre à l'origine et c'est celui de la fonction cosinus : il est donc sans termes impairs.
Toufefois f n'est ni paire ni impaire puisque

$$|f(x) - f(-x)| = \exp(-\frac{1}{x^2}) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^\star.$$

❑

🛈 **Remarque :** f n'est donc pas développable en série entière à l'origine.

Exercice 159 (Convexité et Accroisements Finis)
Soit $f\ :\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ une application dérivable vérifiant :

$$\forall x \neq y \textit{ dans }]a,b[, \quad \exists !\ \zeta \in]a,b[\textit{ tel que } \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\zeta),$$

montrer que f est soit strictement convexe, soit strictement concave sur $]a,b[$.

Supposons au contraire que f ne soit ni strictement convexe, ni strictement concave sur $]a, b[$. Il existe alors deux réels $a < x_1 < x_2 < b$ tels que le segment reliant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ rencontre encore le graphe de f en au moins un point $(x_3, f(x_3))$ avec $a < x_1 < x_3 < x_2 < b$. Par hypothèse il existe deux uniques réels $y_1, y_2 \in]a, b[$ vérifiant

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(y_1) \quad \text{et} \quad \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(y_2),$$

et le théorème des accroissement finis nous assure que $x_1 < y_1 < x_3 < y_2 < x_2$, soit $y_1 \neq y_2$. D'un autre coté la colinéarité de $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ et $(x_3, f(x_3))$ assure que

$$f'(y_1) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(y_2),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse sur f. D'où le résultat. ❑

Exercice 160 (Zéros des dérivées d'une fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact) [10],*1991/92.*
Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^{(n)}$ admette au moins $n+1$ zéros sur $]-a, a[$.

Sans perdre de généralité on peut supposer $a = 1$ et f strictement positive sur $]-1, 1[$ (sinon $n = 0$ marche). Désignons par $Z(f^{(n)})$ le nombre (peut-être infini) de zéros de $f^{(n)}$ dans $]-1, 1[$. La régularité de f assure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad f^{(n)}(-1) = f^{(n)}(1) = 0$$

de telle sorte qu'en itérant le théorème de Rolle aux dérivées successives de f on a

$$Z(f^{k+1}) \geq Z(f^{(k)}) + 1$$

soit après une recurrence immédiate

$$Z(f^{(n+1)}) \geq Z(f^{(n)}) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, $Z(f^{(n)}) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ et la difficulté est de trouver un zéro supplémentaire.

La clé de cet exercice non trivial est le lemme suivant :

Lemme : *Soit f une telle fonction et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré d sans zéros sur $]-1, 1[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$Z((fP)^{(n+d)}) \geq Z(f^{(n)}) + d.$$

Preuve du lemme : Par une récurrence élémentaire, il est suffisant de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout α réel hors de $]-1, 1[$ on a en posant $g(x) = (x - \alpha) f(x)$:

$$Z(g^{(n+1)}) \geq Z(f^{(n)}) + 1.$$

Or

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(x) &= (x-\alpha)f^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x)\\ &= (x-\alpha)^{-n}\frac{d}{dx}\left((x-\alpha)^{n+1}f^{(n)}(x)\right)\end{aligned}$$

qui s'annule au moins une fois de plus sur $]-1,1[$. □

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre l'exercice proposé. Soit p un entier tel que

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p < \min\left(\frac{\mathrm{f}(0)}{\mathrm{f}(1/2)}, \frac{\mathrm{f}(0)}{\mathrm{f}(-1/2)}\right)$$

et posons $g(x) = (1-x^2)^{-p}f(x)$ avec $g(-1) = g(1) = 0$; par le lemme de division g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et par construction

$$g(-1) < g(-1/2), \quad g(-1/2) > g(0), \quad g(0) < g(1/2) \quad \text{et} \quad g(1/2) > g(1).$$

Il en résulte que g' s'annule au moins trois fois sur $]-1,1[$; le lemme permet alors d'affirmer que

$$Z(f^{(n+2p)}) \geq Z(g^{(n)}) + 2p$$

ce qui nous donne si $n = 1$

$$Z(f^{(2p+1)}) \geq 2p + 3.$$

Ainsi $f^{(m)}$ pour $m \geq 2p+1$ possède au moins $m+2$ zéros sur $]-1,1[$. ❑

Remarques : ➪ Cette solution nous laisse sur notre fin, en effet on ne comprends pas plus après sa lecture pourquoi ce mystérieux zéro supplémentaire va apparaitre et ne met pas vraiment non plus en évidence le role de la compacité du support de f qui est essentielle (la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$ mais on a $Z(f^{(n)}) = n$). Il serait vraiment trés intéressant d'avoir une autre preuve expliquant l'apparition de ce zéro supplémentaire.

➪ En observant un peu plus en détail cette solution, il n'est alors pas difficile de montrer que pour tout entier $k \geq 1$ les applications $f^{(n)}$ admettront au moins $n+k$ zéros dans $]-a,a[$.

➪ Le lemme de division est un outil essentiel pour beaucoup d'exercices d'analyse. Il dit en substance que (reprendre l'enoncé du Zuily et pourquoi la solution...........)

Exercice 161 (Sur l'inégalité de Kolmogorov $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1}$.) [25]
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que
$$M_k := \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad \forall\, k = 0, 1, 2.$$
❶ *On suppose que $I = \mathbb{R}$. Montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1}$.*

❷ *On suppose que $I = [-c, c],\ c \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que*

(✘)
$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{c} + (x^2 + c^2)\frac{M_2}{2c}, \quad \forall\, x \in [-c, c].$$

(✔)
$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1} \quad si \quad c \geq \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}.$$

❸ *On suppose que $I = (c, +\infty),\ c \in \mathbb{R}$. Montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_1}$.*

Exercice 162 (Une série et une fonction)
Soit $f \ : \ ]0, 1[\to \mathbb{R}_+^\star$ une application nulle en dehors d'une suite $(a_n)_n \subset]0, 1[$ de réels distincts. Soit $b_n = f(a_n)$.
❶ *Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge alors f est dérivable en au moins un point de $]0, 1[$.*
❷ *Montrer que pour toute suite $(b_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ telle que la série $\sum_n b_n$ diverge, il existe une fonction f définie comme plus haut est nulle part dérivable sur $]0, 1[$.*

❶ On commence par construire une suite $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ vérifiant
$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} c_n b_n < \frac{1}{2}.$$
Posons $B := \sum_{n\geq 1} b_n$ et désignons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par N_k le plus petit entier vérifiant
$$\sum_{n\geq N_k} b_n \leq \frac{B}{4^k}.$$
La suite $(N_k)_k$ est bien définie. On pose alors
$$c_n = \frac{2^k}{5B} \quad \text{pour tout} \quad N_k \leq n \leq N_{k+1},$$
il est clair que $c_n \to +\infty$ et
$$\sum_{n\geq 1} c_n b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} c_n b_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5B} \sum_{n\geq N_k} b_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5B}\frac{B}{4^k} = \frac{2}{5}.$$
On considère alors les intervalles $I_n =]a_n - c_n b_n, a_n + c_n b_n[$, la somme de leur longueurs est $2\sum_n c_n b_n < 1$: il existe donc un réel $x_0 \in]0, 1[$ qui n'est inclu dans aucun des intervalles I_n.

Nous allons montrer que f est dérivable en x_0. $x_0 \in]0,1[\setminus (\cup_n I_n)$ implique que $x_0 \neq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par conséquent $f(x_0) = 0$.
Soit $x \in]0,1[$, s'il existe $\in \mathbb{N}$ tel que $x = a_n$ alors

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \frac{f(a_n)}{|a_n - x_0|} \leq \frac{b_n}{c_n b_n} = \frac{1}{c_n}$$

sinon

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = 0.$$

Puisque $c_n \to \infty$ ces deux inégalités assurent que pour tout $\varepsilon > 0$ il n'existe qu'un nombre fini de réels $x \in]0,1[\setminus \{x_0\}$ tels que

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \geq \varepsilon.$$

f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

❷ Comme f est nulle sauf peut-être sur un ensemble dénombrable, si f est dérivable en un point x_0 on aura nécessairement $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Si $(b_n)_n$ ne tends pas vers zéro, il n'est pas difficile de construire une autre suite $(\beta_n)_n$ telle que $0 < \beta_n \leq b_n$, $\lim_n \beta_n = 0$ et $\sum_n \beta_n = \infty$. On construit alors la suite $(a_n)_n$ de telle sorte que les intervalles $I_n :=]a_n - \beta_n, a_n + \beta_n[$ rencontrent chaque point de $]0,1[$ une infinité de fois (ceci est possible puisque la somme des longueurs de intervalles est $\sum_n 2\beta_n = \infty$). Avec ce choix, pour tout $x_0 \in]0,1[$ vérifiant $f(x_0) = 0$ (si $f(x_0) \neq 0$ nous avons déja remarqué que f ne peut être dérivable en ce point) et tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_n < \varepsilon$ et $x_0 \in I_n$ qui implique

$$\left|\frac{f(xa_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}\right| \geq \frac{b_n}{\beta_n} \geq 1.$$

0 étant la seule valeur possible pour $f'(x_0)$, f n'est pas dérivable en x_0.

Exercice 163 (Un fameux théorème d'Émile Borel)
Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels et $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une application à support compact dans $]-2,2[$ égale à 1 sur $[-1,1]$. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_n)_n$ vérifiant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq 2^{-n}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq n-1.$$

Où $f_n(x) := \dfrac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x)$. En déduire l'existence d'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^\star, k \in \{0, \dots, n-1\}$. Avec la formule de Leibnitz

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^{k} C_k^p n(n-1)\dots(n-p+1) x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)$$

De plus $\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)=0$ pour $|x|\geq 2/|\lambda_n|$ d'où

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n^{(k)}(x)\right| &\leq \frac{|a_n|}{n!}\sum_{p=0}^{k} C_k^p\frac{n!}{(n-p)!}|x|^{n-p}|\lambda_n|^{k-p}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)|\\ &\leq n!\sum_{p=0}^{k}\frac{C_k^p}{(n-p)!}\left(\frac{2}{|\lambda_n|}\right)^{n-p}|\lambda_n|^{k-p}\sup_{\lambda_n x\in[-2,2]}|\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)|\\ &\leq \frac{|a_n|M_n}{|\lambda_n|^{n-k}}\sum_{p=0}^{k}\frac{C_k^p 2^{n-p}}{(n-p)!} \qquad (\text{✘})\end{aligned}$$

où $M_n:=\max_{0\leq k\leq n-1}\left(\sup_{\lambda_n x\in[-2,2]}|\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)|\right)$. D'autre part, avec les majorations grossières pour $0\leq p\leq k\leq n-1$:

$$C_k^p\leq k!\leq(n-1)!,\quad \frac{2^{n-p}}{(n-p)!}\leq 2^n$$

supposons en outre $|\lambda_n|\geq 1,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$, alors $1/|\lambda_n|^{n-k}\leq 1/|\lambda_n|$, et finalement (✘) devient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n^{(k)}(x)\right|\leq\frac{|a_n|M_n}{|\lambda_n|^{n-k}}\sum_{p=0}^{k}k!2^n\leq\frac{|a_n|M_n}{|\lambda_n|}2^n n!.$$

de cette dernière inégalité, nous avons

$$(✔_n)\qquad |\lambda_n|\geq\max\left(1,\ M_n|a_n|4^n n!\right)$$

qui implique

$$(✖)\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n^{(k)}(x)\right|\leq 2^{-n},\quad \forall\, 0\leq k\leq n-1.$$

En résumé, toute suite $(\lambda_n)_n$ de réels vérifiant ($✔_n$) convient.

Sous ces choix, considèrons l'application $f:=\sum_{n\geq 0}f_n$. L'inégalité (✖) (avec $k=0$) assure la normale convergence sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions définissant f qui est donction définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Maintenant, pour $k\geq 1$, en écrivant

$$\sum_k f_n^{(k)}=\sum_{n\geq k}f_n^{(k)}+\sum_{n>k}f_n^{(k)}$$

l'inégalité $\sup_{\mathbb{R}}|f_n^{(k)}|<2^{-n}$ pour $n>k$ implique que la série $\sum_n f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$; ainsi (c'est le théorème de Weierstrass sur la dérivation des séries de fonctions), f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver « sous le $\sum$ » :

$$\begin{aligned}f^k(x)&=\sum_{n=0}^{k}f_n^{(k)}(x)+\sum_{n>k}f_n^{(k)}(x)\\ &=\left(\sum_{n=0}^{k}+\sum_{n>k}\right)\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{a_n}{n!}C_k^p\left(x^n\right)^{(k)}\left(x^n\varphi(\lambda_n x)\right)^{(n-p)}\right),\quad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Maintenant, comme φ est constante égale à 1 sur $[-1,1]$, ses dérivées d'ordre supérieur à 1 sont identiquement nulles sur $]-1,1[$ donc en particulier à l'origine. De même

$$(x^n)^{(k)}\Big|_{x=0} = \begin{cases} n! & \text{si } \ n = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De là, pour évaluer $f^{(k)}(0)$, seul un terme n'est pas nul dans l'expression précédente, il reste précisément :

$$f^{(k)}(0) = \frac{a_k}{k!}\,(x^n)^{(k)}\,\varphi(\lambda_n x)\Big|_{x=0} = a_k,$$

et f possède bien les propriétés désirées. ❑

Exercice 164 ($\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k k^n = (-1)^{n+1} n!$)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k k^n = (-1)^{n+1} n!$$

On peut remarquer que $(e^{kx})^{(n)}_{x=0} = k^n \ldots$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k k^n &= -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{kx}\right) \\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-e^x)^n\right) \\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\ldots\right)^n \\
&= (-1)^{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n + n\frac{x^{n+1}}{2}+\ldots\right) \\
&= (-1)^{n+1} n!
\end{aligned}$$

❑

CHAPITRE 6

INTÉGRATION

Exercice 165 (Irrationalité de e (1)) [32]

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^x dx.$

➪ *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n + eb_n$.*

➪ *On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $e = p/q$, montrer que*

$$I_n \geq q^{-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

➪ *En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.*

➪ On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ et l'assertion est donc vraie pour $n = 0$ avec $a_0 = -1 = -b_0$. Supposons la propriété vrai au rang n avec $I_n = a_n + eb_n$, alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 e^x x^{n+1} dx = \left[e^x x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x (n+1) x^n dx \\ &= e - (n+1) I_n = e - (n+1)(a_n + eb_n) = -(n+1)a_n + e(1 - (n+1)b_n) \end{aligned}$$

soit la propriété au rang $n+1$, C.Q.F.D.

➪ Supposons que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$0 < I_n = a_n + eb_n = \frac{qa_n + pb_n}{q},$$

qui implique

$$qa_n + pb_n \geq 1$$

et par conséquent

$$(1) \qquad I_n \geq \frac{1}{q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'un autre coté, on a la majoration immédiate

$$(2) \qquad 0 < I_n \leq \int_0^1 ex^n dx = \frac{e}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) et (2) donnent

$$0 < \frac{1}{q} \leq \frac{e}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

qui est visiblement absurde : e est donc irrationel. ❏

🛈 Voir aussi pages 227 et 228 pour d'autres démonstrations de l'irrationalité de e.

Exercice 166 (Calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ (1))

On considère l'application $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$.

➪ *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

➪ *En déduire que* f *est solution d'une équation différentielle.*

➪ *Montrer que* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(on pourra introduire la fonction auxilliaire* $g(t) = e^{-t}f(t)\ldots$*).*

➪ Notons

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty g(x,t)dt$$

où $g(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$; c'est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad |g(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

f est donc (par convergence dominée) continue sur $\mathbb{R}_+$. De même pour la dérivabilité, nous avons pour $a > 0$

$$\forall x \geq a > 0 \quad : \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \left|-\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \left|\frac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2}\right|.$$

Toujours par convergence dominée, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$: $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$. En résumé

$$(✘) \qquad f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star \ : \quad f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}dt.$$

➪ Notons $I = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2}dt$. Avec (✘) nous avons pour tout $x > 0$

$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = f(x) - \int_0^\infty e^{-xt^2}dt \underset{u=t\sqrt{x}}{=} f(x) - \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

L'application $g(x) = e^{-x}f(x)$ vérifie

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = -e^{-x}\frac{I}{\sqrt{x}}.$$

Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \ : \quad g(x) = C - I\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

En outre

$$(1) \qquad \left(|g(x)| \leq e^{-x}|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \implies \left(\lim_{x\to\infty} g(x) = 0\right)$$

et

$$(2). \qquad g(x) = C - I\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \underset{u=\sqrt{t}}{=} C - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} C - 2I^2$$

(1) et (2) donnent $C = 2I^2$. On a donc

$$f(x) = e^x g(x) = 2Ie^x\left(I - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du\right) = 2Ie^x\int_{\sqrt{x}}^{\infty}, \quad \forall\, x > 0,$$

qui implique

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2I^2$$

et par continuité de f à l'origine

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

soit $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. ❑

Exercice 167 (Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt$ (1))

On considère l'application $f(x) := \int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}e^{-xt}dt$.

➪ *Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.*

➪ *En déduire une forme explicite de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.*

➪ *Montrer que f est continue à l'origine.*

➪ *En déduire que $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.*

➪ Écrivons $f(x) = \int_0^\infty g(x,t)dt$ où $g(x,t) = e^{-xt}\frac{sin(t)}{t}$. Pour $x = 0$, $f(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ et nous retrouvons l'intégrale (convergente[1]) de Cauchy ; pour $x > 0$, comme $|g(x,t)| \leq e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, f est encore bien définie : f est finalement définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a > 0$, nous avons

$$|g(x,t)| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

De ces deux inégalités, le théorème de continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres assure que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad f'(x) = -\int_0^\infty \sin(t)e^{-xt}dt.$$

🛈 **Remarque :** Il faut se garder, malgré les questions suivantes, de vouloir par ces théorèmes de domination obtenir la continuité de f à l'origine : en effet f est à l'origine définie

[1] Voir l'exercice ? ? ? ?

par l'intégrale de Cauchy qui est notoirement non absolument convergente et une domination de g dans un voisinage de l'origine impliquerai assurément l'absolue convergence. C'est pourquoi d'ailleurs les dominations n'ont lieu que sur $[a, +\infty[$...

➪ L'expression de $f'(x)$ que nous venons d'obtenir nous permet un calcul explicite : soit $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = -\int_0^\infty \sin(t)e^{-xt}dt &= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{it} - e^{-it}\right)e^{-xt}dt \\ &= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{t(i-x)} - e^{-t(i+x)}\right)dt \\ &= -\frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{t(i-x)}}{i-x}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-t(i+x)}}{i+x}\right]_0^\infty\right) \\ &= -\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{i-x} - \frac{1}{i+x}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(les deux termes « entre crochets » sont nuls à l'infini car par exemple $|\frac{e^{-t(i+x)}}{i+x}| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}} \to 0$ lorsque t tends vers $+\infty$....). En intégrant cette formule, il vient

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \;:\; \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f(x) = -\arctan(x) + C.$$

La constante C n'est pas difficile à déterminer, en effet la formule ci-dessus implique que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + C$$

et pour tout $x > 0$

$$|f(x)| \leq \int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

soit

$$-\frac{\pi}{2} + C = 0 \qquad \text{et} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Résumons nous :

$$(\text{✘}) \qquad f(x) = \begin{cases} -\arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0 \\ \int_0^\infty \dfrac{\sin(t)}{t}dt, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

➪ Il s'agit de montrer que

$$\lim_{x\to 0_+} |f(x) - f(0)| = \left|\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\left(e^{-xt} - 1\right)\right| dt = 0.$$

Cette limite n'est pas triviale, on va faire une intégration par parties : considérons pour $t > 0$, $G(t) = \int_t^\infty \frac{\sin(u)}{u}du$. G est dérivable et $G'(t) = -\frac{\sin(t)}{t}$, en outre la convergence de

$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ implique $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\left(e^{-xt} - 1\right) \\ &= -\int_0^\infty G'(t)\left(e^{-xt} - 1\right) \\ &= \left[G(t)\left(e^{-xt} - 1\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty G(t)xe^{-xt}dt \\ &\underset{u=xt}{=} -\int_0^\infty G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}du := -\int_0^\infty H(x,u)du \end{aligned}$$

et la fonction

$$H(x,u) = \begin{cases} G\left(\dfrac{u}{x}\right)e^{-u} & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^\star$ (la continuité en $(0,u)$ découle de $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$) ; elle est aussi dominée par

$$|H(x,u)| \leq e^{-u} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Donc par convergence dominée

(✔) $$\lim_{x\to 0_+} |f(x) - f(0)| = \lim_{x\to 0}\left|-\int_0^\infty H(x,u)du\right| = \left|-\int_0^\infty \lim_{x\to 0} H(x,u)du\right| = 0.$$

f est donc bien continue à l'origine.

➪ (✘) et (✔) donnent immédiatement

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

❑

Exercice 168 (Encore un calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$ (2))
Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

La semi-convergence de cette intégrale est classique. Remarquons que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{x}dx.$$

Nous allons successivement montrer

(✔) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

puis

$$(\text{✘}) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx\right)=0,$$

ce qui fournira la formule désirée.
Pour (✔), puisque pour tout $x\in]0,\pi/2[$

$$\frac{1}{2}+\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx)=\frac{\sin(2^{-1}(2n+1)x)}{2\sin(x/2)},$$

soit

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin(x)}=1+2\cos(2x)+2\cos(4x)+\cdots+2\cos(2nx),\quad x\in]0,\pi[$$

qui donne immédiatement (✔).
Pour la seconde on peut écrire

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}\sin((2n+1)x)dx$$

et cette dernière limite est nulle par le lemme de Riemann-Lebesgue ([47], page ? ? ?). D'où (✘). ❑

Exercice 169 (Toujours un calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^{+\infty}\frac{sin(t)}{t}dt$ (3))
Sachant que pour tout $a>0$

$$\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t+a}dt=\int_0^\infty\frac{e^{-at}}{t^2+1}dt,$$

montrer que

$$\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

On à immédiatement pour $a>0$

$$\lim_{a\to0_+}\frac{e^{-at}}{t^2+1}=\frac{1}{t^2+1}=f(t),\quad\forall\,t\in\mathbb{R}_+,\qquad\text{et}\qquad\left|\frac{e^{-at}}{t^2+1}\right|\leq f(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$$

donc, par convergence dominée

$$\lim_{a\to0_+}\int_0^\infty\frac{e^{-at}}{t^2+1}=\int_0^\infty\frac{1}{t^2+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Pour le terme de gauche, une convergence dominée est sans espoir car il est notoire (cf. exercice page 193) que

$$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \notin L^1(\mathbb{R}_+).$$

➪ On peut tout de même justifier l'inversion des deux limites « à la main » par exemple en remarquant que

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+a}dt - \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt\right| \leq \int_0^1 \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt + \int_1^\infty \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt$$

le premier terme du second membre tend vers zéro avec a par convergence dominée car l'intégrande converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ avec la domination

$$\frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)} \leq \frac{|\sin(t)|}{t} \in L^1([0,1]).$$

Pour le second terme, l'affaire est encore plus simple puisque

$$\int_1^\infty \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt \leq a\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \to_{a\to 0} 0.$$

➪ On peut aussi, sans convergence dominée écrire pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+a}dt - \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt\right| &\leq \int_0^\varepsilon \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt + \int_\varepsilon^\infty \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt \\ &\leq \int_0^\varepsilon \frac{\sin(t)}{t}dt + \int_\varepsilon^\infty \frac{a}{t^2}dt \\ &\leq \varepsilon + \frac{a}{\varepsilon} \qquad \forall\, a, \varepsilon > 0 \\ &\leq 2\sqrt{a} \qquad \forall\, a > 0 \text{ (on a fait } \varepsilon = \sqrt{a})\end{aligned}$$

d'où le résultat. ❑

🛈 **Remarque :** Voir l'exercice suivant pour démontrer :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+a}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t^2+1}dt, \forall\, a \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Exercice 170 (Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ (4))

Soient $f(x)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt,\ g(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2+1}dt.$

➪ *Montrer que* $f,g\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^\star)$ *(pour* f*, on pourra commencer par montrer que* $f(x)=\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt$*).*

➪ *Montrer que* f *et* g *sont solutions de l'équation différentielle* $y''+y=1/x$*.*

➪ *En déduire que* $f-g$ *est* 2π*-périodique (sur son domaine de définition).*

➪ *Montrer que* f *et* g *sont équivalentes à* $1/x$ *en* $+\infty$ *puis, que* $f=g$*.*

➪ *En déduire la valeur que* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt.$

➪ Ces intégrales impropres sont clairement convergentes pour tout $x\in\mathbb{R}_+$; posons pour $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$: $f(x,t)=\sin(xt)/t+x, g(x,t)=e^{-tx}/t^2+1$. Les dominations

$$\begin{aligned}
&|g(x,t)|\leq\frac{1}{1+t^2},\quad \forall\, t\in\mathbb{R}_+,\\
&\forall\, t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right|\leq\frac{te^{-at}}{1+t^2}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall\, x\geq a>0,\\
&\forall\, t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2}\right|\leq\frac{t^2e^{-at}}{1+t^2}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall\, x\geq a>0,
\end{aligned}$$

assurent par convergence dominée que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec

$$g'(x)=-\int_0^\infty\frac{te^{-xt}}{t^2+1}dt,\ g''(x)=\int_0^\infty\frac{t^2e^{-xt}}{t^2+1}dt,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}_+^\star.$$

On en déduit immédiatement que $g''(x)+g(x)=1/x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Pour f c'est un peu plus délicat car l'application $t\mapsto f(x,t)$ est notoirement non absolument intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et toute domination est veine, on commence donc par une intégration par parties pour obtenir une expression plus exploitable de f.

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t+x}dt=\left[\frac{1-\cos(t)}{t+x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt=\int_0^\infty\frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt$$

(afin d'alléger les calculs on a choisi $1-\cos(t)$ comme primitive de $\sin(t)$ choix qui annule le « terme entre crochets »). De là, si $h(x,t)=1-\cos(t)/(t+x)^2$ et pour $x\geq a>0$

$$\begin{aligned}
&\forall\, t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|=\left|-\frac{2(1-\cos(t))}{(t+x)^3}\right|\leq\frac{2}{(t+a)^3}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall\, x\geq a>0,\\
&\forall\, t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right|=\left|\frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}\right|\leq\frac{12}{(t+a)^3}\in L^1(\mathbb{R}_+),\quad \forall\, x\geq a>0,
\end{aligned}$$

ces dominations impliquent que $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$ avec

$$f''(x)=\int_0^\infty\frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}dt,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}_+^\star$$

et avec une intégration par parties

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \int_0^\infty \frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}dt = \left[-\frac{2(1-\cos(t))}{(t+x)^3}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt \\
&= \left[-\frac{\sin(t)}{(t+x)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}dt = \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{(t+x)^2} - \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt \\
&= \frac{1}{x} - f(x), \quad x>0.
\end{aligned}$$

➪ f et g sont solutions sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation $y''+y=1/x$, $f-g$ est donc solution de l'équation $y''+y=0$: c'est la restriction à $\mathbb{R}_+^\star$ d'une solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=0$ donc 2π-périodique.

➪ Soit $x>0$, vu ce qui précède

$$f(x) = \frac{1}{x} - \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt$$

et comme

$$\left|\int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt\right| \leq \int_0^\infty \frac{2dt}{(t+x)^3} = \frac{2}{x^2} = o(x^{-1})$$

i.e.

$$f(x) = \frac{1}{x} + o(x^{-1}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Pour g, on procède de même encore plus simplement.

➪ Sur $\mathbb{R}_+^\star$, $f-g$ est continue 2π-périodique et tends vers 0 en $+\infty$: elle est donc identiquement nulle et on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2+1}dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

➪ Pour conclure, voir l'exercice précédent. ❏

Exercice 171 (Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ (5))
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt$. Préciser le domaine de définition de F, étudier la continuite et l'existence des dérivées premières et secondes ; exprimer $F(x)$ en fonction de $C := \int_0^\infty \dfrac{\sin(t)}{t}dt$ et en déduire la valeur de C.

L'intégrale définissant F est clairement convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$: F est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire. Posons $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}$.

➩ Soit $a > 0$, pour $x \in [-a, a]$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on a

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(xt)}{t} \cdot \frac{1}{t^2+1}\right| \leq \frac{|x|}{t^2+1} \leq \frac{a}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

vu la régularité de f le théorème de continuité des intégrales à paramètres assure que $F \in \mathscr{C}^0([-a, a])$, et ceci pour tout $a > 0$: F est donc continue sur $\mathbb{R}$.

➩ $\partial_x f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{t^2+1}$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$

$$|\partial_x f(x,t)| = \left|\frac{\cos(xt)}{t^2+1}\right| \leq \frac{1}{t^2+1} \in L(\mathbb{R}),$$

par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt.$

➩ Pour l'existence de la dérivée seconde l'affaire est plus délicate, car

$$\left|\partial_x^2 f(x,t)\right| = \left|\frac{-t\sin(xt)}{t^2+1}\right| \underset{t\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin(xt)}{t}\right|,$$

et cette dernière n'est (comme $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$) pas intégrable en $+\infty$: toute tentative de domination (même locale) pour appliquer le théorème précédent est donc vaine. L'astuce constiste par une intégration par parties à écrire F' sous une forme acceptable pour justifier la dérivation sous l'intégrale :soit $x \in \mathbb{R}^\star$:

$$\begin{aligned} F'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt &= \left[\frac{\sin(xt)}{x(t^2+1)}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \neq 0$ on a

$$(\text{✘}) \qquad F'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt = \int_0^\infty \frac{2t\sin(xt)}{x(t^2+1)^2} dt$$

sous cette seconde forme, on va pouvoir appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, en effet soit $a > 0$, pour $x \geq a$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t}{x} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2}\right)\right| &\leq \left|\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2}\right| + \left|\frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right| \\ &\leq \frac{|2t|}{a^2(t^2+1)^2} + \frac{2t^2}{a(t^2+1)^2} \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

on peut donc dériver sous l'intégrale : F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et

$$F''(x) = \int_0^\infty \left(-\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2}\right) dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^\star.$$

Cette expression est un peu chargée, faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}F''(x) &= \int_0^\infty \left(-\frac{2t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{x^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right) dt \\ &= \left[\frac{\sin(xt)}{x^2(t^2+1)} - \frac{t\cos(xt)}{x(t^2+1)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{x\cos(xt)}{x^2(t^2+1)} - \frac{\cos(xt) - xt\sin(xt)}{x(t^2+1)} \right) dt \\ &= -\int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{t^2+1} dt.\end{aligned}$$

Il est intéressant à ce stade d'observer que nous retrouvons finalement la formule

$$F''(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^\star,$$

mais pour justifier une dérivation sous l'intégrale une transformation de F' (voir (✘)) à été nécessaire ; remarquez aussi que l'existence de $F''(0)$ reste ouverte. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \\ F''(x) &= -\int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{t^2+1} dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^\star.\end{aligned}$$

➪ Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$F(x) - F''(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt + \int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{x(t^2+1)} dt = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} dt = \begin{cases} C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ -C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star. \end{cases}$$

F est donc solution de l'équation différentielle $F - F'' = C$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $F - F'' = -C$ sur $\mathbb{R}_-^\star$ ce qui nous donne

$$F(x) = \begin{cases} ae^x + be^{-x} + C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ ce^x + de^{-x} - C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star. \end{cases}$$

(remarquez que ces équations impliquent $\lim_{0_+} F''(x) = C = -\lim_{0_-} F''(x)$ qui assurent si $C \neq 0$ que F'' admet à l'origine des limites à droite et à gauche différentes ce qui (propriété classique de l'application dérivéée, Darboux par exemple) nous permet d'affirmer que $F''(0)$ n'existe pas mais F' est tout de même dérivable à droite et à gauche en 0 avec $F''(0_+) = C = -F''(0_-)$...) F étant impaire, $a = -d, b = -c$ soit

$$F(x) = \begin{cases} ae^x + be^{-x} + C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ -be^x - ae^{-x} - C, & \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star \end{cases}$$

et F continue à l'origine avec $F(0) = 0$ implique

$$F(0) = 0 = \lim_{x \to 0_+} F(x) = a + b + C = \lim_{x \to 0_-} F(x) = -a - b - C$$

soit $a + b = -C$; de même, F' continue à l'origine avec $F'(0) = \pi/2$ donne $a - b = \pi/2$ i.e. $2a = \pi/2 - C, 2b = -C - \pi/2$ et finalement

(✔) $$F(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sh}(x) - C\mathrm{ch}(x) + C, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

➪ Il reste à évaluer C. Pour cela, montrons que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = C$. Soit $x > 0$,

$$F(x) - C = F''(x) = \int_0^\infty \left(-\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right) dt$$

(on a encore ici besoin de la première expression de F'' pour conclure facilement) pour $x \geq a > 0$, on a la domination

$$\left| -\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right| \leq \frac{2t}{a^2(t^2+1)^2} + \frac{2t^2}{a(t^2+1)^2} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Donc par le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{x\to+\infty} (F(x) - C) = \int_0^\infty \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2t}{x^2} \cdot \frac{\sin(xt)}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^2\cos(xt)}{x(t^2+1)^2} \right) dt = 0$$

soit avec (✔)

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = C \quad \text{et} \quad F(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - C \right) e^x + C$$

qui donnent

$$C = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

C.Q.F.D. ❏

Exercice 172 (Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ (5),)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)} \cos(x\sin(t))dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

En déduire que $\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

➪ Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt &= \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}e^{ix\sin(t)}dt\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}}dt\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n e^{-int}}{n!}dt\right)\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\int_0^{\pi/2}\operatorname{Re}\left(e^{-int}\right)dt\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2}\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1}\\
&= \frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\\
&= \frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{\pi}{2}-\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}dt.
\end{aligned}$$

Les deux échanges $\int\sum=\sum\int$ sont justifiés par la normale convergence des deux séries entières sur le domaine d'intégration (leur rayon de convergence étant infini).

➪ Une convergence dominée élémentaire[2] $\left(\left|e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))\right| \leq 1 \in L^1([0,\pi/2])\right)$ implique

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt = 0,$$

soit, vu la formule établie au dessus

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}dt\right)=0$$

[2] que l'on peut aussi éviter en coupant l'intégrale en deux...

on retrouve bien la valeur de l'intégrale de Cauchy $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$. ❑

Exercice 173 (Étude de la suite $(u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2})_n$ **)** [10].
Convergence et limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2}.$$

Ecrivons

$$u_n = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\right) = n\left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right)$$

où $f(t) = (1+t)^{-2}$. En posant pour $0 < x < 1$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, on peut écrire cette dernière expression sous la forme :

$$\begin{aligned} u_n = n\left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right) &= n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n F'(\frac{k}{n})dt\right) \\ &= f(0) - f(1) + n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F'(\frac{k}{n})\right) \\ &= f(0) - f(1) + n\left(\sum_{k=0}^{n-1} F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})\right) \end{aligned}$$

la formule de Taylor-Lagrange appliquée à F à l'ordre 2 nous assure que

$$F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2n^2}F''(\zeta_{n,k}) \quad \text{où} \quad \zeta_{n,k} \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$$

et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = f(0) - f(1) + \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F''(\zeta_{n,k}) = f(0) - f(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 F\text{"}(t)dt = \frac{3}{8}$$

la dernière limite étant justifiée puisque l'on y reconnaît la somme de Riemann de la fonction continue F'' associée à la subdivision $\{\frac{k}{n}\}_{k=0}^n$ en les points $\left(\zeta_{k,n} \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[\right)_k$. ❑

Exercice 174 (Autour du théorème des moments de Hausdorff)
❶ *Soit $f \in C([a,b])$ telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle (***théorème des moments de Hausdorff***).*
❷ **le théorème des moments de Hausdorff tombe en défaut sur $\mathbb{R}^+$:** *Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par*

$$f(x) = e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$$

➪ *Montrer que*

$$I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t} dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{où } \omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

➪ *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(pour cela, remarquer que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$...).
❸ *Soit $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^0([-a,a])$. Si*

$$\int_{-a}^{a} t^n f(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

montrer que f impaire sur $[-a,a]$. De même, si

$$\int_{-a}^{a} t^{2n+1} f(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

montrer que f paire sur $[-a,a]$.

❶ Soit f une telle fonction, avec la linéarité de l'intégrale on a

$$\int_a^b f(t)P(t)dt = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X],$$

mais par le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, et par convergence uniforme sur $[a,b]$

$$\int_a^b f^2(t)dt = \int_a^b \lim_n f(t)P_n(t)dt = \lim_n \int_a^b f(t)P_n(t)dt = 0$$

soit (f^2 est continue et positive) $f \equiv 0$.

❷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|t^n e^{-\omega t}\right| = t^n \exp(-\frac{t\sqrt{2}}{2}) \in L^1(\mathbb{R})$$

et l'intégrale I_n est bien convergente ; en outre, si $n \geq 1$ une intégration par parties donne

$$I_n = \omega^{-1} \left[-t^n e^{-\omega t}\right]_0^\infty + \frac{n}{\omega} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\omega t} dt = \frac{n}{\omega} I_{n-1}$$

soit

$$I_n = \frac{n!}{\omega^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Et puisque pour $n \geq 1$: $\omega^{4(n+1)} = (-1)^{n+1}$ au vu du calcul précédent

$$I_{4n+3} \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

sa partie imaginaire est donc toujours nulle i.e.

$$\begin{aligned} 0 = \mathsf{im}(I_{4n+3}) &= \int_0^\infty t^{4n+3} \exp(-\frac{t\sqrt{2}}{2}) \sin(\frac{t\sqrt{2}}{2}) dt \\ &= \int_0^\infty x^n \sin(x^{1/4}) \exp(-x^{1/4}) dx \quad (\text{poser } x = t^4/4) \\ &= \int_0^\infty x^n f(x) dx \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

d'où le contrexemple désiré.

❷ ➪ Commencons par remarquer que, vu les hypothèses sur f

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (f(t) + f(-t))\, t^{2n} dt &= \int_{-a}^a f(t) t^{2n} dt + \int_{-a}^a f(-t)(-t)^{2n} dt \\ &= 2 \int_{-a}^a f(t) t^{2n} dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{-a}^a (f(t) + f(-t))\, t^{2n+1} dt = \int_{-a}^a f(t) t^{2n+1} dt - \int_{-a}^a f(-t)(-t)^{2n+1} dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'application continue sur $[-a, a]$, $g(t) = f(t) - f(-t)$ vérifie donc

$$\int_{-a}^a f(t) t^n dt = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

elle est donc (vu ❶) identiquement nulle : f est bien impaire.

➪ La procédure est identique pour le second cas.

❑

🛈 **Remarques :** ➪ Pour la première question, on est pas obligé d'utiliser Weierstrass, on peut procéder de la manière suivante : soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ une application vérifiant $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale $\int_0^1 P(t) f(t) dt = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons un instant que f ne soit pas identiquement nulle sur $[0,1]$: par continuité, il existe $0 < c < 1$ tel que $f(c) \neq 0$ (et même $f(c) > 0$ quitte à remplacer f par $-f$) ; il existe aussi $0 < a < c < b < 1$ tels $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$, $\forall x \in [a, b]$. Alors, le polynôme $P(t) = 1 + (X-a)(b-X)$ vérifie $P(t) \geq 1$ sur $[a, b]$ et $0 \leq P(t) \leq 1$ sur $[0,1] \setminus [a, b]$. On a aussi $P' > 0$ sur $[0, a]$ par compacité de ce dernier intervalle, il existe $\lambda > 0$ tel que $P'(t) \geq \lambda > 0$. Ainsi, en posant $M = \sup_{[0,1]} |f(t)|$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^a P^n(t)f(t)dt \right| \leq M \int_0^a P^n(t)dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^a P'(t)P^n(t)dt$$
$$= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{P^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^a = \frac{1-(1-ab)^{n+1}}{\lambda(n+1)} \leq \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

et en procédant de même sur $[b, 1]$ on peut donc affirmer que

(✘) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^a P^n(t)f(t)dt = 0, \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \int_b^1 P^n(t)f(t)dt = 0.$$

Par contre, sur $[a, b]$, et avec ce choix de P nous avons

(✔) $$\int_a^b P^n(t)f(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt \geq \frac{b-a}{2} f(c) > 0.$$

Les formules (✘) et (✔) impliquent que $\int_0^1 P^n(t)f(t)dt > 0$ pour tout entier n suffisament grand, fait parfaitement absurde puisque $\int_0^1 Q(t)f(t)dt = 0, \quad \forall\, Q \in \mathbb{R}[X]$.

➪ Utilisez correctement le théorème de Weierstrass, en particulier sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$ toute fonction continue sur un compact K y est limite uniforme de polynômes en x et y (i.e. $\in \mathbb{C}[x, y]$) et non en $z = x + iy$ (i.e. $\in \mathbb{C}[z]$) . Le contre exemple canonique (bien connu des amateurs de fonctions holomorphes) étant la fonction continue sur $\mathbb{C}^\star$: $f(z) = z^{-1}$, pour laquelle il n'existe pas de suite de polynômes $(P_n)_n \subset \mathbb{C}[z]$ convergeant uniformément vers f sur le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}^\star$; en effet en passant par exemple en coordonnées polaires on vérifie facilement que

$$\int_{S^1} f(z)dz = 2i\pi \quad \text{alors que} \quad \int_{S^1} P_n(z)dz = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 175 (Étude de $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt, \quad J_\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha+\sin(t)}dt \quad \& \quad S_\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}, \ \alpha \in \mathbb{R}$)

Pour $2 > \alpha > 0$ étudier la convergence et l'absolue convergence des intégrales impropres ou séries

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt \quad \& \quad J_\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha + \sin(t)}dt \quad \& \quad S_\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

❶ Notons $f(t) = \sin(t)t^{-\alpha}$. I_α est une intégrale impropre à l'origine et à l'infini. À l'origine, f est équivalente à $t^{-\alpha+1}$ fonction positive, de type Riemann, intégrable en $t = 0$ puisque $-\alpha+1 < -1$. En outre $|f(t)| \leq t^{-\alpha}$ fonction intégrable à l'infini pour $\alpha > 1$: **la convergence absolue de I_α est donc établie pour $2 > \alpha > 1$.**

Reste donc le cas $0 < \alpha \leq 1$; vu ce qui précède (tout se passant bien à l'origine) il sera suffisant d'étudier la convergence sur $[1, +\infty[$. Pour cela on fait une intégration par parties (avec la convention habituelle qu'elle sera réellement correcte si deux termes parmi les trois existent, sinon, travailler sur $[1, A]$ puis faire tendre A vers $+\infty$...)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \left[\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

et

$$\left[\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^{+\infty} = -\cos(1), \qquad \left|\frac{\alpha\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \in L^1([1, +\infty[)$$

assurent alors **la convergence de I_α pour $0 < \alpha \leq 1$.**

Pour la convergence absolue en $+\infty$ si $0 < \alpha \leq 1$, le plus simple est de remarquer que

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \geq \left|\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}\right| \geq \frac{1}{t^\alpha} - \frac{\cos(2t)}{t^\alpha} = g(t) - h(t)$$

en raisonnant comme au dessus h est intégrable en $+\infty$ mais bien sûr g ne l'est pas, et l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| dt$ **diverge pour tout $0 < \alpha \leq 1$.**

Il est aussi classique de conclure par la minoration

$$\int_0^{(2n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| dt \geq \sum_{k=0}^n \int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}} \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| dt \geq \sum_{k=0}^n \int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2\left((2k+1)\pi\right)^\alpha} dt = \sum_{k=0}^n \frac{\pi\sqrt{2}}{4\left((2k+1)\pi\right)^\alpha}$$

cette dernière quantité tendant vers l'infini avec n comme somme partielle d'une série de terme général équivalent à $Ck^{-\alpha}$ donc divergente...

❷ Le problème est toujours à l'infini où notre fonction n'est pas de signe constant, donc pas question d'utiliser les équivalents, le dernier recours (le développement asymptotique) montre ici toute sa puissance

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha + \sin(t)} = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\left(\frac{1}{1 + t^{-\alpha}\sin(t)}\right) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\left(1 - \frac{\sin(t)}{t^\alpha} + o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha} - \frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

$$= g(t) + h(t) \qquad \text{où} \qquad g(t) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \qquad \text{et} \qquad h(t) = -\frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

vu 2) la fonction g est intégrable à l'infini pour tout $\alpha > 0$, par contre

$$h(t) \sim \frac{-\sin^2(t)}{t^{2\alpha}} = \frac{1}{2t^{2\alpha}} - \frac{\cos(2t)}{2t^{2\alpha}}$$

le sera si et seulement si $\alpha > 1/2$. La seconde intégrale est donc convergente si et seulement si $\alpha > 1/2$. Il est bien de remarquer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha + \sin(t)} \sim \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$$

la première étant intégrable si et seulement si $\alpha > 1/2$, et la seconde, si et seulement si $\alpha > 0$:
L'intégrabilité ne passe donc pas à l'équivalent lorsque les fonctions ne sont pas de signe constant.

❷ C'est la version série du second exemple et se traite de la même manière. ❑

🛈 **Remarques :** L'étude de la série donne

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

pour tout $\alpha > 0$ et comme plus haut, pour $0 < \alpha \leq 1/2$, $\sum_n u_n$ diverge, ce qui peut donner lieu à deux remarques :
➪ La première est un contre-exemple pour le théorème sur les équivalents lorsque les séries ne sont pas de signe constant (puisque la série de terme général $(-1)^n n^{-\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$).
➪ La seconde, est que $\sum_n u_n$ étant alternée, divergente et son terme général tendant vers zéro : $v_n = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right|$ ne décroit pas vers zéro (vu le théorème des les séries alternées). Toutefois $v_n \sim n^{-\alpha}$ i.e. la monotonie non plus ne passe pas à l'équivalent.

Exercice 176 (Une caractérisation de la fonction Gamma : le théorème de Bohr-Mollerup)
Soit pour

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

① *Montrer que* $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$, $x > 0$.

② *Montrer que*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt,\ x > 0.$$

③ *En déduire que*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ x > 0.$$

④ *Montrer que* $\log\Gamma$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

⑤ *Réciproquement soit* $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ *une application log-convexe vérifiant*

$$f(1) = 1 \quad et \quad \forall\, x > 0,\ f(x+1) = xf(x).$$

Montrer que $f = \Gamma$ *(théorème de Bohr-Mollerup)*

🛈 On suppose ici acquis (classique mais excellent exercice sur les intégrales à paramètres) le fait que $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ et que l'on peut dériver sous l'intégrale.

❶ Il suffit de faire n intégrations par parties en faisant tomber le degré de $(1-\frac{t}{n})^n$.

❷ Soit $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\mathbb{I}_{[0,n]}(t)$. La suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ vers $g(t) = t^{x-1}e^{-t}$ et pour $t > 0$, $n \geq 1$: $0 \leq f_n(t) \leq g(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Par convergence dominée le résultat suit.

❸ Il suffit de combiner les deux premières questions.

❹ $\log(\Gamma)'' = (\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2)\Gamma^{-2}$ avec $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} f_k(x,t)dt$ où $f_k(t) = \log^k(t)t^{x-1}e^{-t}$, $k = 0, 1, 2$. En écrivant $f_1(x,t) = g(t)h(t)$ avec $g(t) = \log(t)t^{(x-1)/2}e^{-t/2}$ et $h(t) = t^{(x-1)/2}e^{-t/2}$ si on remarque que g et $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)g(t)dt$, on a par Cauchy-Schwarz :

$$(\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2)(x) = \|g\|^2\|h\|^2 - \langle g, h\rangle \geq 0.$$

$\log(\Gamma)$ est donc convexe puisque de dérivée seconde positive.

❺ Soient $0 < x < y$ et $0 < t < 1$. On a $f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x)f^{1-t}(y)$ et en particulier, si $u = tx + (1-t)y$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ la formule $f(x+1) = xf(x)$ donne

$$\begin{aligned} f(u+n+1) = u(u+1)\dots(u+n)f(u) &\leq f(x+n+1)^t f(y+n+1)^{1-t} \\ &\leq (x(x+1)\dots(x+n)f(x))^t\,(y(y+1)\dots(y+n)f(y))^{1-t} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{u(u+1)\dots(u+n)f(u)}{n^u n!} \leq \left(\frac{x(x+1)\dots(x+n)f(x)}{n^x n!}\right)^t \left(\frac{y(y+1)\dots(y+n)f(y)}{n^y n!}\right)^{1-t}$$

et, vu ③, si n tend vers l'infini :

$$\frac{f(tx+(1-t)y)}{\Gamma(tx+(1-t)y)} \leq \left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right)^t \left(\frac{f(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-t}$$

La fonction f/Γ est donc log-convexe continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, mais aussi 1-périodique puique f est Γ satisfont à la même équation fonctionelle $g(x+1) = xg(x)$: la fonction $\log(f/\Gamma)$ est donc à la fois convexe et bornée : elle ne peut être que constante (voir l'exercice 3) et le tour est joué vu que $f(1) = \Gamma(1) = 1$. ❑

Exercice 177 (Sommes de Riemann et formule de Taylor)

① *Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

② *Si f est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et si f'' est bornée et intégrable sur $[0,1]$, montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{n}\right)\right) = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

❶ Commencons par observer que

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(t)dt\right) &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt\right)\\ &= n\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right)dt\\ &= n\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\zeta_k(t))\left(\frac{k}{n}-t\right)dt, \end{aligned}$$

Et si on pose pour $1\leq k\leq n$

$$m_k := \inf\left\{f'(x)\ :\ x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right\}$$
$$M_k := \sup\left\{f'(x)\ :\ x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right\}$$

on obtient

$$m_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-t\right)dt\leq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\zeta_k(t))\left(\frac{k}{n}-t\right)dt\leq M_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-t\right)dt$$

soit finalement

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n m_k\leq n\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\zeta_k(t))\left(\frac{k}{n}-t\right)dt\leq\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n M_k$$

mais

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n M_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n m_k$$

car on y reconnait dans les deux termes de gauche deux sommes de Riemann associées à la fonction f' sur $[0,1]$. C.Q.F.D.

❷ Pour la seconde limite, la technique est la même mais il faut bien entendu pousser plus loin le développement : avec Taylor-Lagrange, nous avons

$$f(x)-f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)=f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)+\frac{1}{2}f''(\zeta_i(x))\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} n^2\left(\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{n}\right)\right) &= n^2\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(f(t)-f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right)dt\\ &= n^2\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)dx\\ &\quad+\frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f''(\zeta_i(x))\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2dx. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que chacunes des intégrales

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)dx$$

s'annulent. Quant aux suivantes, en raisonnant comme dans la première partie

$$\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leq \frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f''\left(\zeta_i(x)\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx \leq \frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

où M_i (resp. m_i) désigne la borne supérieure (resp. inférieure) de f'' sur l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$. f'' étant continue on conclut rapidement comme plus haut. ❑

Exercice 178 (Autour de l'inégalité de Jensen)

① *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans I, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

② ***Cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen.*** *On suppose f strictement convexe (i.e. $x \neq y$ implique $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$), montrer que si*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

alors $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

③ *Supposons f Riemann intégrable sur $[a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Si φ est continue et convexe sur $[m,M]$, démontrer l'**inégalité de Jensen***

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\left(f(t)\right)dt.$$

❶ On procède par récurrence sur $n \geq 2$, la propriété étant vérifiée pour $n = 2$. Soit $n \geq 3$, et supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$, sans perdre de généralité supposons aussi $0 < \lambda_n < 1$; on peut alors écrire

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_n}x_j.$$

Avec cette représentation, la convexité de f et l'hypothèse de récurrence assurent que

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\right) &\leq \lambda_n x_n + (1-\lambda_n) f\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_n}x_n\right) \\ &\leq \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_n} f\left(x_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j, \end{aligned}$$

soit la propriété au rang n. L'inégalité de Jensen est démontrée.

❷ Supposons par l'absurde qu'il existe $n \geq 3$, $x_1, \dots, x_n \in I$ non tous égaux, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^\star$ de somme 1 tels que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

L'hypothèse sur les x_j assure que

$$\emptyset \neq S := \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \ : \ x_j \neq \max_{1\leq i\leq n} x_i\} \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}.$$

Posons

$$\lambda = \sum_{j\in S}\lambda_j, \quad x = \sum_{j\in S}\frac{\lambda_j}{\lambda}x_j, \quad y = \sum_{j\notin S}\frac{\lambda_j}{1-\lambda}x_j$$

si $x_{n_0} := \max_{1\leq i\leq n} x_i\}$, alors

$$y = \sum_{j\notin S}\frac{\lambda_j}{1-\lambda}x_j = x_{n_0}\sum_{j\notin S}\frac{\lambda_j}{1-\lambda} = \frac{x_{n_0}}{1-\lambda}\sum_{j\notin S}\lambda_j = x_{n_0}$$

et

$$x = \sum_{j\in S}\frac{\lambda_j}{\lambda}x_j < x_{n_0}\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j}{\lambda} = x_{n_0} = y$$

x est donc different de y : par stricte convexité de f nous avons

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Maintenant, avec l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) &= \lambda f\left(\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j}{\lambda}x_j\right) + (1-\lambda) f\left(\sum_{j\notin S}\frac{\lambda_j}{1-\lambda}x_j\right) \\ &\leq p\sum_{j\in S}\frac{\lambda_j}{\lambda}f(x_j) + (1-\lambda)\sum_{j\notin S}\frac{\lambda_j}{1-\lambda}f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j) \end{aligned}$$

les deux extrémités de ces inégalités nous donnent

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

d'où la contradiction désirée.

❸ φ étant convexe sur $[m, M]$, nous avons

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \varphi\left(f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ en invoquant la continuité de φ et les sommes de Riemann. ❑

Exercice 179 (Limite en 0, $\pm\infty$ de $\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$) [27]

Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

si de plus f est sans zéros dans $[a, b]$ déterminer les limites suivantes

$$\lim_{p\to 0} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad \& \quad \lim_{p\to-\infty} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

➪ Il existe $c \in [a, b]$ tel que $M := |f(c)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, on a immédiatement

$$(\bigstar) \qquad \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b M^p dt\right)^{1/p} = M(b-a)^{1/p},$$

De l'autre côté, par continuité de f et étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $|f(x)| \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$ sur $[\alpha, \beta]$. Alors

$$\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \geq \left(\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \geq (M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/p}$$

Ainsi, vu $(\bigstar)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq M(b-a)^{1/p}$$

d'où le résultat en faisant tendre p vers $+\infty$ ($\varepsilon > 0$ étant arbitraire).

➪ De la première limite on déduit aussitôt (si f est sans zéros) que

$$\lim_{p\to-\infty}\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = \min_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

➪ Reste la limite en zéro. On peu écrire

$$\log\left(\frac{\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}}{b-a}\right) = \frac{1}{p}\log\left(\frac{\int_a^b |f(t)dt|^p}{b-a}\right) = \frac{1}{p}\log\left(\frac{\int_a^b g(t,p)dt}{b-a}\right) := \frac{h(p)-h(0)}{p}$$

➪ vu les théorèmes classiques sur la continuité et la dérivabilité des intégrales à paramètres on vérifie sans peine que h est dérivable à l'origine, on peut dériver sous l'intégrale, si bien que

$$\lim_{p\to0}\log\left(\frac{\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} dt}{b-a}\right) = h'(0) = \int_a^b \log(f(t))dt.$$

❏

Exercice 180 (Étude de la suite $\left(\int_0^\infty n\log\left(1+n^{-\alpha}f^\alpha(t)\right)dt\right)_n$) ([10], 1999/00).

Pour $f\in L^1(\mathbb{R}_+),\ \alpha\geq1,\ n\geq1$ on pose

$$I_n := \int_0^\infty n\log\left(1+n^{-\alpha}f^\alpha(t)\right)dt.$$

Après avoir justifié l'existence de I_n, étudier la convergence de la suite $(I_n)_n$.

Notons $\varphi_n(t) = n\log\left(1+n^{-\alpha}f^\alpha(t)\right)$, remarquons que pour tout $\alpha\geq1$ et $t\geq0$:

$$1+t^\alpha \leq (1+t)^\alpha,$$

ainsi

$$(✘)\qquad 0\leq\varphi_n(t)\leq n\alpha\log\left(1+n^{-1}f(t)\right)\leq\alpha f(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$$

la dernière inégalité résultant de l'archi-classique $\log(1+u)\leq u$ sur $\mathbb{R}_+$ i.e. pour tout $n\in\mathbb{N}^\star, \varphi_n\in L^1(\mathbb{R}_+)$ et notre suite est bien définie.
Soit $x\in\mathbb{R}_+$ fixé, si $f(x)\neq0$ alors $\varphi_n(x)\sim n^{1-\alpha}f^\alpha(t)\to0$ pour $n\to\infty$ si $\alpha>1$. Ainsi pour $\alpha>1$ la suite $(\varphi_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Pour $\alpha=1$ elle est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$ vers f. Ceci et (✘) nous permet dans les deux cas d'appliquer le théorème de la convergence dominée, soit finallement

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ \int_0^\infty f(t)dt & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

❑

Exercice 181 (Le lemme de Cantor)
❶ *Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ deux suites de nombres réels telles que la suite de fonctions $(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Montrer que $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$ (**lemme de Cantor**).*

❷ *Montrer que la conclusion subsiste si la convergence simple à lieu seulement sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$).*

❶ Avec $x = 0$ on a déja $\lim_n a_n = 0$. Vu l'hypothèse, on a alors $\lim_n b_n \sin(nx) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; supposons que $(b_n)_n$ ne converge pas vers zéro : il existe alors $\varepsilon > 0$, une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ vérifiant pour tout k : $|b_{n_k}| \geq \varepsilon$. Mais alors, puisque $(b_{n_k} \sin(n_k x))_k$ converge simplement vers zéro sur $\mathbb{R}$ la suite $(\sin(n_k x))_k$ est nécessairement simplement convergente vers zéro sur $\mathbb{R}$, en outre $0 \leq \sin^2(n_k x) \leq 1 \in L^1([0, 2\pi])$. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_k \int_0^{2\pi} \sin^2(n_k x) dx = 0,$$

cependant, d'un autre côté on a aussi

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(n_k x) dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2n_k x)) \frac{dx}{2} = \pi$$

d'où la contradiction et $\lim_n b_n = 0$.

❷ **Cas général :** Supposons maintenant la convergence simple seulement sur un intervalle $[a, b]$. Si par exemple la suite $(a_k)_k$ ne converge pas vers 0, on considère comme dans la première partie $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(a_{n_k})_k$ tels que $|a_{n_k}| \geq \varepsilon$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f_{n_k}(x)| := \left| \frac{(a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} \right| \leq \left| \frac{(a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))^2}{\varepsilon^2} \right|.$$

et la suite $(f_{n_k})_k$ est simplement convergente sur $[a, b]$. En outre, vu l'inégalité (Cauchy-Schwarz par exemple) $ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$ nous avons aussi la domination :

$$|f_{n_k}(x)| \leq \frac{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} = 1, \quad \forall\, x \in [a, b],\ k \in \mathbb{N}.$$

Donc, par convergence dominée

$$(\bigstar). \qquad \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k}(x) dx = 0$$

Mais par un calcul direct

$$\begin{aligned}\int_a^b f_{n_k}(x)dx &= \frac{1}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}\int_a^b \left(a_{n_k}^2(1+\cos(2n_kx)) + b_{n_k}^2(1-\cos(2n_kx)) + 2a_{n_k}b_{n_k}\sin(2n_kx)\right)dx\\ &= \frac{b-a}{2} + \frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}\int_a^b \cos(2n_kx)dx + \frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\int_a^b \sin(2n_kx)dx\\ &:= \frac{b-a}{2} + \frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}I_k + \frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}J_k\end{aligned}$$

mais bien entendu

$$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} J_k = 0$$

et

$$\left|\frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{n_k}^2-b_{n_k}^2}{2(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)}I_k\right| + \left|\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}J_k\right| \leq \frac{1}{2}\left(|I_k|+|J_k|\right) = 0$$

soit

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}(x)dx = \frac{b-a}{2} > 0$$

contredisant ($\bigstar$) : l'affaire est donc entendue (on procède de même si c'est la suite $(b_n)_n$ ne converge pas vers zéro). ❑

Exercice 182 (Étude de $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log(t)}$)
On définit $F\ :\ ]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *par*

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log(t)}.$$

Montrer que F *est injective et préciser son image* $F(]1,+\infty[)$.

F est clairement dérivable sur $]1,+\infty[$ avec

$$F'(x) = \frac{x-1}{\log(x)}, \quad \forall\, x \in]1,+\infty[.$$

soit $F'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$: F est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et en particulier injective. Comme

$$F(x) \geq (x^2-x)\min\left\{\frac{1}{\log(t)}\ :\ \mathrm{x} \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{x}^2\right\} = \frac{\mathrm{x}^2-\mathrm{x}}{\log(\mathrm{x}^2)} \underset{\mathrm{x}\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

nous avons $F(]1,+\infty[) =]F(1_-),+\infty[$. Pour déterminer $F(1_-)$, le changement $t = e^u$ donne

$$F(x) = \int_{\log(x)}^{2\log(x)} \frac{e^u}{u}du$$

soit
$$x\log(2) = e^{\log(x)}\int_{\log(x)}^{2\log(x)}\frac{du}{u} < F(x) < e^{2\log(x)}\int_{\log(x)}^{2\log(x)}\frac{du}{u} = x^2\log(2)$$
qui assure $F(1_-) = \log(2)$: ainsi $F(]1,+\infty[) =]\log(2),+\infty[$. ❑

Exercice 183 (Optimisation et convexité)
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $f'' > 0$ sur $[a,b]$, déterminer la fonction affine $l(x) = \alpha x + \beta \leq f(x)$ sur $[a,b]$ minimisant $\displaystyle\int_a^b (f(t)-l(t))dt$.

Il est « clair » que $l(x) = f(x)$ pour au moins une valeur de x (sinon, ou pourrait déplacer le graphe de l verticalement ce qui réduirait la valeur de l'intégrale). Le graphe de l est donc tangent à celui de f et il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$l(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$$
On peut maintenant aussi remarquer que minimiser
$$\int_a^b (f(t)-l(t))dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b l(t)dt$$
équivaut à maximiser
$$\begin{aligned}\int_a^b l(t)dt &= \int_a^b (f'(c)t + f(c) - cf(c))dt \qquad a \leq c \leq b\\ &= \frac{f'(c)}{2}(b^2-a^2) + (b-a)(f(c)-cf'(c))\\ &= (b-a)\left(\frac{f'(c)}{2}(a+b) + f(c) - cf'(c)\right).\end{aligned}$$
Il s'agit donc de maximiser sur l'intervalle $[a,b]$ l'application
$$g(c) = \frac{f'(c)}{2}(a+b) + f(c) - cf'(c).$$
Or, $g'(c) = \dfrac{f''(c)}{2}(a+b-2c)$, mais $f'' > 0$: g' est donc du signe de $c \mapsto a+b-2c$. Ainsi g est croissante sur $[a,(a+b)/2]$ et décroissante sur $[(a+b)/2,b]$ son maximum est donc atteint au point médian $(a+b)/2$. L'inf de notre problème est donc réalisé par la tangente à la courbe au point $(a+b)/2$:
$$l(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$
❑

Exercice 184 (L'inégalité de Hardy $\int_0^T \left(x^{-1}\int_0^x f(u)du\right)^2 dx \leq 4\int_0^T f^2(x)dx$.) [10]-*2006.*

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$. Pour $x > 0$ on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et trouver une constante absolue $C > 0$ telle que

$$\int_0^\infty g^2(t)dt \leq 4\int_0^\infty f^2(t)dt.$$

- g est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x > 0$ on a avec Cauchy-Schwarz

$$|g(x)| = \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)dt\right| \leq \frac{1}{x}\left(\int_0^x dt\right)^{1/2}\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^{1/2} = \frac{\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^{1/2}}{\sqrt{x}}$$

comme $f \in L^2(\mathbb{R}_+$, il en résulte

$$(\text{✘}) \qquad g(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \text{pour } x \to 0.$$

g est intégrable à l'origine et donc sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$. On utilisera ultérieurement cette estimation.

- Soit $A > 0$, on va commencer par montrer l'inégalité sur $[0, A]$ i.e. $\int_0^A g^2(t)dt \leq 4\int_0^A f^2(t)dt$; on peut bien entendu supposer $\int_0^A f(t)dt \neq 0$ sinon il n'y a rien à démonter. Soit $0 < x < A$:

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx &= -\int_0^A \left(\frac{1}{x}\right)'\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx \\
&= -\left[\frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\right]_0^A + \int_0^A \frac{2f(x)}{x}\int_0^x f(t)dtdx \\
&= \int_0^A \frac{2f(x)}{x}\int_0^x f(t)dtdx - \frac{1}{A}\left(\int_0^A f(t)dt\right)^2 \\
&\leq 2\int_0^A \frac{f(x)}{x}\int_0^x f(t)dtdx, \quad \text{car } \frac{1}{A}\left(\int_0^A f(t)dt\right)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

où l'intégration par partie dans l'intégrale généralisée est légitime car deux termes parmi les trois existent, le terme « en crochets » étant nul à l'origine vu (✘). Maintenant de cette inégalité et toujours par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx &\leq 2\int_0^A f(x) \times \left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\right) dx \\
&\leq 2\left(\int_0^A f^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^A \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

soit puisque $\int_0^A f(t)dt \neq 0$

$$(\checkmark) \qquad \int_0^A g^2(t)dt = \int_0^A \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx \leq 4\int_0^A f^2(t)dt.$$

• Montrons que la constante 4 dans ($\checkmark$) est optimale. Pour cela, si elle est vérifiée pour un $C < 4$ on l'applique à $f(t) = t^{-\alpha},\ -1/2 < \alpha < 1/2$

$$\int_0^A \frac{dx}{x^2}\left(\int_0^x \frac{dt}{t^\alpha}\right)^2 dx = \frac{A^{1-2\alpha}}{(1-2\alpha)(1-\alpha)^2} \leq C\int_0^A \frac{dt}{t^\alpha} = C\cdot\frac{A^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}$$

qui donne

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} \leq C,$$

et en faisant tendre α vers $1/2$ on obtient $C \geq 4$: 4 est bien optimale dans ($\checkmark$).

• On a donc pour tout $A > 0$

$$0 \leq \int_0^A g^2(t)dt \leq 4\int_0^A f^2(t)dt \leq 4\int_0^\infty f^2(t)dt < \infty,$$

g^2 est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^\infty g^2(t)dt \leq 4\int_0^\infty f^2(t)dt.$$

La constante 4 est bien entendu encore optimale (reprendre le raisonnement précedent avec des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^\star$ nulles sur $[2, +\infty[$ et égales à $t^{-\alpha}$ sur $]0, 1]$ avec $|\alpha| < 1/2$).❑

Exercice 185 (Une formule de Ramanujan et le d.s.e. de la fonction tangente)

Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $|re(z) := \sigma| < 1$, on considère l'application

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{sh(zt)}{sh(t)}, & si\ t > 0, \\ z, & si\ t = 0. \end{cases}$$

❶ *Montrer que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ et vérifie*

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}.$$

❷ *Sachant que*[3]

$$\pi\, cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} tan(\frac{\pi z}{2}), \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |re(z)| < 1.$$

❸ *En développant f en série entière (pour la variable z) montrer que*

$$\frac{\pi}{2}\tan(\pi z/2) = \int_0^{+\infty} \frac{sh(zt)}{sh(t)} dt = 2\sum_{`\geq 0} \left(1 - 2^{-2n-2}\right) \zeta(2n+2) z^{2n+1}, \quad \forall\, |z| < 1.$$

❶ Comme $\lim_{t\to 0_+} f(t) = z = f(0)$, f est continue à l'origine et donc sur $\mathbb{R}_+$. En outre $|\sigma| < 1$ implique

$$|f(t)| = \left|\frac{e^{zt} - e^{-zt}}{2\text{sh}(t)}\right| \leq \frac{e^{|\sigma t|}}{|\text{sh}(t)|} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{(|\sigma|-1)t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

ainsi $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.
Pour $t > 0$, on peut écrire

$$f(t) = \text{sh}(zt)\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = 2e^{-t}\text{sh}(zt)\sum_{n\geq 0} e^{-2nt} = \sum_{n\geq 0} \left(e^{(z-2n-1)t} - e^{-(z+2n+1)t}\right) := \sum_{n\geq 0} u_n(t),$$

et les fonctions u_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car (toujours car $|\sigma| < 1$)

$$|u_n(t)| \leq e^{-2nt}\left|e^{(z-1)t} - e^{-(z+1)t}\right| \leq 2e^{-2nt}e^{(|\sigma|-1)t} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Un petit calcul nous donne

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

(bien remarquer que $|\sigma| < 1$ assure que $(2n+1)^2 - z^2 \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$). Ainsi, formellement

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} u_n(t)dt = \sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

il ne reste donc plus qu'à justifier l'échange $\int \sum = \sum \int$ ci-dessus. Pour cela, il faut être délicat car la condition suffisante « la série $\sum_n \int_{\mathbb{R}_+} |u_n(t)|dt$ converge » n'est pas ici réalisée[4] et il faut se ramener au cadre des suites de fonctions en posant

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(S_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ et vérifie

$$|S_n(t)| \leq |\mathrm{sh}(zt)| \sum_{k=0}^{n} e^{-(2k+1)t} \leq |\mathrm{sh}(zt)| \sum_{k\geq 0} e^{-(2k+1)t} = |f(t)| \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

L'hypothèse de domination est donc vérifiée et l'échange $\int \sum = \sum \int$ est justifié, CQFD.

❷ Il suffit d'un peu de patience et d'attention. Avec la question précédente nous avons pour $|\mathrm{re}(z)| < 1$ et $z \neq 0$ (si $z = 0$ il n'y a rien à démontrer)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)dt &= \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{n^2 - z^2} - \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n)^2 - z^2} \\
&= -\frac{2}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2} + \frac{2}{z} - \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{(2n)^2 - z^2} \\
&= -\frac{1}{z} - \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{z/2}{(z/2)^2 - n^2} \\
&= -\pi \mathrm{cotan}(\pi z) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{z}{(z/2)^2 - n^2}\right) \\
&= -\pi \mathrm{cotan}(\pi z) + \frac{\pi}{2}\mathrm{cotan}(\pi z/2) \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos^2(\pi z/2) - \cos(\pi z)}{\cos(\pi z/2)\sin(\pi z/2)} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin^2(\pi z/2)}{\cos(\pi z/2)\sin(\pi z/2)} = \frac{\pi}{2}\tan(\pi z/2).
\end{aligned}$$

❸ Pour $t \geq 0$ on a

$$f(t) = \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}(t)} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n+1} z^{2n+1}}{\mathrm{sh}(t)(2n+1)!} := \sum_{n\geq 0} h_n(t).$$

[4] un calcul élémentaire mais assez fastidieux donne $\int_{\mathbb{R}_+} |u_n(t) =$ ....

Les applications h_n sont clairement dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ et nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_n(t)dt &= \int_0^\infty \frac{t^{2n+1}z^{2n+1}}{\mathrm{sh}(t)(2n+1)!}dt\\ &= \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty \sum_{k\geq 0} t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt = \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty \sum_{k\geq 0} g_{n,k}(t)dt\\ &\underset{✘}{=} \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt\end{aligned}$$

il s'agit bien entendu de justifier l'échange $\int\sum = \sum\int$ signalé par le symbole ✘ : les fonctions $g_{n,k}$ étant postives, il est suffisant de montrer que la série $\sum_k \int_{\mathbb{R}_+} g_{n,k}(t)dt$ converge ce qui se vérifie facilement car aprés $2n+1$ intégrations par parties nous avons

$$\int_0^\infty g_{n,k}(t)dt = \int_0^\infty t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt = \frac{(2n+1)!}{(2k+1)^{2n+2}},$$

(les « termes entre crochets » étant nuls). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_n(t)dt &= \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-(2k+1)t}dt = \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\frac{(2n+1)!}{(2k+1)^{2n+2}}\\ &= 2z^{2n+1}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2n+2}} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n+2}}\right)\\ &= 2z^{2n+1}\left(1-2^{-(2n+2)}\right)\zeta(2n+2)\end{aligned}$$

Soit

$$\int_0^\infty |h_n(t)|dt \leq 2|z|^{2n+1}\zeta(2)$$

qui est pour $|z|<1$ le terme général d'une série convergente, ceci justifie l'échange $\int_{\mathbb{R}_+}\sum_n h_n = \sum_n \int_{\mathbb{R}_+} h_n$, et finalement

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}(t)}dt = \sum_{n\geq 0} 2\left(1-2^{-(2n+2)}\right)\zeta(2n+2)\cdot z^{2n+1}, \quad \forall\,|z|<1.$$

En particulier, avec la question précédente on a

$$\frac{\pi}{2}\tan(\pi z/2) = \sum_{n\geq 0} 2\left(1-2^{-(2n+2)}\right)\zeta(2n+2)\cdot z^{2n+1}, \quad \forall\,|z|<1,$$

c'est le développement en série entière de la fonction $D(0,1)\ni z\mapsto \dfrac{\pi}{2}\tan(\pi z/2)$. ❏

ℹ **Commentaire :** Il existe bien sûr des méthodes plus élémentaires pour déterminer le développement en série entière de la fonction tangente à l'origine, c'est ici juste une conséquence de la formule de Ramanujan $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}(t)}dt = \frac{\pi}{2}\tan(\pi z/2)$

Exercice 186 ($\Gamma'(1) = -\gamma$)

Montrer que

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)dt$$

pour en déduire que

$$\Gamma'(1) = -\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)\right).$$

(γ est la trés célèbre constante d'Euler) On pourra effectuer le changement de variables $u = 1 - t/n$ dans l'intégrale.

Il est considéré comme acquis[5] que la fontion Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \log^k(t)e^{-t}t^{x-1}dt, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

➪ Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions

$$f_n(x) = \log(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t) = \begin{cases} \log(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{pour} \quad t \in [0, n], \\ 0 & \text{si} \quad x > n. \end{cases}$$

La suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto \log(t)e^{-t}$ et l'inégalité classique $(1-t)^a \leq e^{-at}, a > 0, 0 \leq t \leq 1$, assure la domination

$$|f_n(t)| \leq |\log(t)|e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Le théorème de la convergence dominée peut donc s'appliquer :

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)dt = \lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} \log(t)e^{-t}dt = \Gamma'(1).$$

[5]Mais attention, vérifier les hypothèses de dérivation sous l'intégrale n'est pas compétement immédiat et doit être parfaitement maitrisé... !

➪ Posons $I_n = \int_0^n (1-t/n)^n \log(t)dt$, il nous reste à prouver que $\lim_n I_n = -\gamma$. Pour cela, on fait dans I_n le changement de variables $u = 1 - t/n$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)dt = \int_0^1 u^n \log(n(1-u))ndt \\
&= \int_0^1 u^n \log(n)ndt + \int_0^1 u^n \log(1-u)ndt \\
&= \frac{n\log(n)}{n+1} - n\int_0^1 u^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k}dt \\
&= \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} n\int_0^1 \frac{u^{n+k}}{k}du \\
&= \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{n}{k(n+k+1)} = \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty} J_N
\end{aligned}$$

où

$$J_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{n}{k(n+k+1)} = \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+1}\right).$$

Pour $N > n$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
J_N &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} - \dots - \frac{1}{N+n+1}\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\left[1 + \dots + \frac{1}{n} - \underbrace{\left(\frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+n+1}\right)}_{n+1 \text{ termes}}\right]
\end{aligned}$$

le groupe termes sur l'accolade est constitué de $n+1$ termes, indépendant de N : il tendra donc vers 0 avec N, soit

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \frac{n}{n+1}\left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

puis

$$I_n = \frac{n\log(n)}{n+1} - \lim_{N\to\infty} J_N = \frac{n\log(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left(\log(n) - \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)\right) = -\gamma.
\end{aligned}$$

❑

Exercice 187 ($\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt \leq \sqrt{8}\left(\int_{\mathbb{R}}|tf(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}$.) [43]
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt \leq \sqrt{8}\left(\int_{\mathbb{R}}|tf(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}.$$

🛈 Il n'y a bien sûr pas de raisons que $f \in L^1(\mathbb{R})$ assure la convergence des deux intégrales dans le terme de droite de l'inégalité. Dans le cas où au moins l'une de ces deux intégrales diverge on convient que l'inégalité s'écrit $\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt \leq +\infty$ et il n'y a rien à démontrer. On peut donc dorénavant, supposer que ces trois intégrales convergent.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, pour faire apparaitre un terme du type $tf(t)$, il convient d'isoler l'origine :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt &= \int_{[-x,x]}|f(t)|dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]}\frac{1}{|t|}|tf(t)|dt\\ &\leq \sqrt{2x}\sqrt{\int_{[-x,x]}|f(t)|^2dt} + \sqrt{\frac{2}{x}}\sqrt{\int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]}|tf(t)|^2dt}\\ &\leq \sqrt{2Ax} + \sqrt{\frac{2B}{x}} := \varphi(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star\end{aligned}$$

avec $A = \int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2dt,\ B = \int_{\mathbb{R}}|tf(t)|^2dt$, et où on a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les deux intégrales pour obtenir la seconde inégalité. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt \leq \inf_{x\in\mathbb{R}_+^\star}\varphi(x)$$

et déterminer cet infimum ne pose aucun problème puisque φ tends vers $+\infty$ lorsque x tends vers 0 et $+\infty$ et que sa dérivée ne s'annule qu'au point $x = \sqrt{B/A}$ soit $\varphi(\sqrt{B/A}) = \inf_{x\in\mathbb{R}_+^\star}\varphi(x) = \sqrt{8}A^{1/4}B^{1/4}$, soit l'inégalité demandée. ❑

Exercice 188 (Encore une petite inégalité) [27].
Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],[m,M])$ vérifiant $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq -mM(b-a).$$

Vu les hypothèses

$$\int_a^b (f(t)-m)(M-f(t))dt \geq 0.$$

Soit

$$(M+m)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f^2(t)dt - mM(b-a) = -\int_a^b f^2(t)dt - mM(b-a) \geq 0,$$

i.e.

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq -mM(b-a).$$

Q.E.D. ❑

Exercice 189 (Nature d'une intégrale impropre) [28]

Pour quels couples $(a,b)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}_+^\star$ *l'intégrale impropre*

$$\int_b^\infty\left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)dx$$

converge ?

L'intégrale est visiblement impropre uniquement en $+\infty$, en utilisant répétitivement le développement limité $\sqrt{1+t}=1+t/2+O(t^2)$ on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} &= x^{1/4}\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1}\\ &= x^{1/4}\sqrt{\frac{a}{2x}+O(x^{-2})}\\ &= \sqrt{\frac{a}{2}}x^{-1/4}(1+O(x^{-1}))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}} &= x^{1/4}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{b}{x}}}\\ &= x^{1/4}\sqrt{\frac{b}{2x}+O(x^{-2})}\\ &= \sqrt{\frac{b}{2}}x^{-1/4}(1+O(x^{-1})).\end{aligned}$$

Donc au voisinage de $+\infty$ l'intégrande est équivalent à la fonction de signe constant (toujours au voisinage de $+\infty$)

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right)x^{-1/4}+O(x^{-5/4}),$$

et comme $\int_b^\infty x^{-5/4}dx$ (car b>0) converge, notre intégrale sera convergente si et seulement si $\int_b^\infty(\sqrt{a/2}-\sqrt{b/2})x^{-1/4}dx$ converge soit, si et seulement si $a=b$ puisque $\int_b^\infty x^{-1/4}dx$ diverge. ❑

Exercice 190 (Une jolie intégrale....) [28]

$C(\alpha)$ désignant le coefficient de x^{2007} dans le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, calculer

$$\int_0^1 C(-t-1)\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\dots+\frac{1}{t+2007}\right)dt.$$

Nous connaissons le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ qui nous donne

$$C(\alpha)=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-2006)}{2007!}.$$

Donc $C(-t-1)=(t+1)(t+2)\dots(t+2007)/2007!$ et notre intégrande s'écrit

$$\begin{aligned}
C(-t-1)&\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\dots+\frac{1}{t+2007}\right)\\
&=\frac{(t+1)(t+2)\dots(t+2007)}{2007}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\dots+\frac{1}{t+2007}\right)\\
&=\frac{(t+2)\dots(t+2007)+(t+1)(t+3)\dots(t+2007)+(t+1)(t+2)\dots(t+2006)}{2007!}\\
&=\frac{d}{dt}\left(\frac{(t+1)(t+2)\dots(t+2007)}{2007!}\right).
\end{aligned}$$

Le calcul devient alors élémentaire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 C(-t-1)\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\dots+\frac{1}{t+2007}\right)dt&=\int_0^1\frac{d}{dt}\left(\frac{(t+1)(t+2)\dots(t+2007)}{2007!}\right)dt\\
&=\left[\frac{(t+1)(t+2)\dots(t+2007)}{2007!}\right]_0^1\\
&=\frac{2008!-2007!}{2007!}=2007.
\end{aligned}$$

❏

Moralité : Surtout ne pas se laisser impressionner !

Exercice 191 (Minore !) [19]

Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, si $f(1)=1$ et

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)},\quad \forall\, x\geq 1,$$

montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\leq 1+\frac{\pi}{4}.$$

Une telle fonction sera visiblement strictement croissante, par conséquent

$$f(x) > f(1) = 1, \quad \forall\, x > 1,$$

puis

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} < \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall\, x > 1.$$

Ainsi, pour $x > 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \int_1^x f(t)dt \\ &< 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} < 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} = 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

❑

Exercice 192 (Autour des sommes de Riemann) [10], *2008.*

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^{\star +})$.

❶ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, établir l'existence de $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que*

$$0 = a_{n,0} < \cdots < a_{n,n} = 1 \quad et \quad \forall\, i \in \{0, \dots, n-1\} \ : \ \int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt.$$

❷ *Déterminer la limite, quand n tends vers $+\infty$ de : $\dfrac{a_{n,0} + \cdots + a_{n,n}}{n+1}$.*

❶ f étant continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives l'application $F \ : \ [0,1] \ni x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continue, strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0, \int_0^1 f(t)dt]$: par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_{n,0}, \dots, a_{n,n}$ dans $[0,1]$ tels que

$$F(a_{n,k}) = \frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt, \quad k = 0, \dots, n.$$

et ces réels sont uniques.

❷ Vu ce qui précède, $F^{-1} \in \mathscr{C}([0, \int_0^1 f(t)dt], [0,1])$, la suite $(\frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt)_{k=0}^n$ est une subdivision de l'intervalle $[0, \int_0^1 f(t)dt]$, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,0} + \cdots + a_{n,n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt\right) = \int_0^{\int_0^1 f(u)du} F^{-1}(t)dt.$$

❑

Exercice 193 (Autour d'Hölder) [25]

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$*, s'il existe* $a > 0$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq a^{2/3},\ \forall x \in [0,1], \quad \textit{et} \quad \int_0^1 f(x)dx = a,$$

montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder que

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx \geq a^{2/3}.$$

D'aprés l'inégalité d'Hölder[6] nous avons pour $p > 1$

$$\begin{aligned} a = \int_0^1 f(x)^{\frac{1}{2p}+1-\frac{1}{2p}}dx &\leq \left(\int_0^1 \left[f(x)^{\frac{1}{2p}}\right]^p dx\right)^{1/p}\left(\int_0^1 \left[f(x)^{1-\frac{1}{2p}}\right]^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx\right)^{1/2p}\left(\int_0^1 \left[(a^{2/3})^{1-\frac{1}{2p}}\right]^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx\right)^{1/2p} a^{\frac{2p-1}{3p}} \end{aligned}$$

soit

$$a^{\frac{p+1}{3}} \leq \int_0^1 \sqrt{f(x)}dx, \quad \forall p > 1.$$

Comme $p > 1$ est arbitraire, le résultat suit en faisant tendre p vers 1. ❑

Exercice 194 (Calcul de l'intégrale de Cauchy $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ **(8))**

En intégrant $f(x,t) = e^{-xy}sin(x)$ *sur* $[\epsilon, T] \times [0,+\infty[$, $0 < \epsilon < T$, *calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$

Soient $0 < \varepsilon < T$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^T \frac{\sin(x)}{x}dx &= \int_\varepsilon^T \sin(x)\left(\int_0^\infty e^{-xy}dy\right)dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_\varepsilon^T \sin(x)e^{-xy}dx\right)dy \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-y\varepsilon}(\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon) - e^{-yT}(\cos T + y\sin T)}{y^2+1}dy \\ &= \int_0^\infty g_{\varepsilon,T}(y)dy \end{aligned}$$

[6] Si $f \in L^p(I)$, $g \in L^q(I)$ alors $fg \in L^1(I)$ et $\int_I |f(x)g(x)|dx \leq (\int_I |f(x)|^p dx)^{1/p}(\int_I |f(x)|^q dx)^{1/q}$ où $p > 1, q > 1$ conjugués, et donner une référence....

l'application ci-dessus du théorème de Fubini est justifiée par $|f(x,y)| \leq e^{-xy}$ et

$$\int_{\varepsilon}^{T} \left(\int_0^{\infty} e^{-xy} dy \right) dx = \int_{\varepsilon}^{T} \left[-\frac{e^{xy}}{x} \right]_0^{\infty} dx = \int_{\varepsilon}^{T} \frac{dx}{x} = \log \frac{T}{\varepsilon} < \infty.$$

pour tous $0 < \varepsilon < T$.

Maintenant, observons que pour $0 < \varepsilon \leq y$

$$|e^{-y\varepsilon}(\cos\varepsilon + y \sin\varepsilon)| \leq 1 + y\varepsilon e^{-y\varepsilon} \leq 1 + e^{-1},$$

de même, pour $T \geq 1$

$$|e^{-yT}(\cos T + y \sin T)| \leq e^{-yT}(1+y) \leq e^{-y}(1+y).$$

Ainsi pour $0 < \varepsilon \leq y \leq T$ et $T \leq 1$

$$|g_{\varepsilon,T}(y)| \leq \frac{\max\{(1+e^{-1}, e^{-y}(1+y)\}}{y^2+1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Il est donc légitime d'invoquer le théorème de la convergence dominée pour écrire

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \lim_{T \to +\infty} \int_0^{\infty} g_{\varepsilon,T}(y) dy = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\pi}{2},$$

d'autre part, comme

$$\int_{\varepsilon}^{T} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} g_{\varepsilon,T}(y) dy$$

nous avons finalement

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \lim_{T \to +\infty} \int_0^{\infty} g_{\varepsilon,T}(y) dy = \frac{\pi}{2}.$$

❑

CHAPITRE 7

SUITES ET SÉRIES

Exercice 195 (Convergence de $\sum_n a_n^{-3}$, où $|a_n - a_m| > 1,\ \forall\, m \neq n \in \mathbb{N}$) [10], [6].
Soit $(a_n)_n \subset \mathbb{C}^\star$ une suite de nombres complexes vérifiant

(✔) $$\forall\, m \neq n \in \mathbb{N} \quad : \quad |a_n - a_m| \geq 1.$$

Montrer que la série
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{a_n^3}$$
converge.

Considérons une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes vérifiant la propriété (✔). Posons pour tout entier k
$$S_k = \{n \in \mathbb{N} \ : \quad k < |a_n| \leq k+1\}.$$
Les disques fermés de centre a_n et de rayon $1/2$ sont par hypothèse deux à deux disjoints et pour tout $n \in S_k$
$$\overline{D}(a_n, 1/2) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ k - \frac{1}{2} \leq |z| \leq k + \frac{3}{2}\} = C(0, k-1/2, k+3/2).$$
(si $k = 0$, interpréter le second terme comme le disque $D(0, 3/2)$) soit, en sommant les aires
$$\mathrm{card}(S_k)\frac{\pi}{4} \leq \pi \left[\left(k+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 2\pi(2k+1)$$
si $k \in \mathbb{N}^\star$ et
$$\mathrm{card}(S_0)\frac{\pi}{4} \leq \pi\frac{9}{4}$$
si $k = 0$. Ainsi
$$\mathrm{card}(S_0) \leq 9 \quad \text{et} \quad \mathrm{card}(S_k) \leq 8(2k+1),\ \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$
Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$
$$\sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \frac{\mathrm{card}(S_k)}{k^3} \leq \frac{8(2k+1)}{k^3} \leq \frac{24}{k^2}$$

car $\overline{D}(a_n, 1/2) \subset C(0, k-1/2, k+3/2)$ implique $|a_n| \leq k$ et $k \geq 1 \implies 2k+1 \leq 3k$. De même S_0 étant fini, la somme $\sum_{n\in S_0} \frac{1}{|a_n|^3}$ est finie et finalement

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n\in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \sum_{n\in S_0} \frac{1}{|a_n|^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{k^2} < \infty$$

où la sommation par paquets dans le second terme est légitime puisque la série est à termes positifs et $(S_k)_{k\geq 0}$ une partition de $\mathbb{N}$. ❑

Exercice 196 (Convergence d'une série par sommation par paquets) [6]

$\alpha(n)$, $(n \in \mathbb{N})$ *désignant le nombres de* 0 *dans l'écriture décimale de* n *en base* 3. *Montrer que la série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha(n)}}{n^3}$$

converge si, et seulement si $|x| < 25$.

L'entier $n \in \mathbb{N}^\star$, admet exactement $k+1$ chiffres dans son écriture en base 3 si, et seulement si $3^k \leq n < 3^{k+1}$. Ainsi, si pour $x > 0$ on pose

$$S_k = \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} \frac{x^{\alpha(n)}}{n^3} \quad \text{et} \quad T_k = \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} x^{\alpha(n)},$$

alors, la série à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha(n)}}{n^3}$ sera convergente si, et seulement si la série $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ converge.

Maintenant, $3^k \leq n < 3^{k+1}$ implique que $3^{3k} \leq n^3 < 3^{3k+3}$ et donc

$$\frac{T_k}{3^{3k+3}} \leq S_k < \frac{T_k}{3^{3k}}.$$

Ainsi la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ équivaut à celle de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{3^{3k}}$.

Le nombre d'entiers n à $k+1$ chiffres en base 3 (i.e. $3^k \leq n < 3^{k+1}$) tels que $\alpha(n) = i$ est $C_k^i 2^{k+1-i}$ (il y a C_k^i possibililités pour choisir les i chiffres parmi les k (et pas $k+1$ car le premier ne peut etre égal à 0) puis sur les $k+1-i$ restant nous avons le choix entre 1 et 2 soit encore 2^{k+1-i} possibilités), par conséquent

$$T_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i 2^{k+1-i} x^i = 2(x+2)^k$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{3^{3k}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{27} \right)^k$$

série convergente si, et seulement si $|(x+2)/27| < 1$ i.e. (pour $x > 0$) si et seulement si $x < 25$. ❑

🛈 **Remarque :** Si on remplace « base 3 » par « base k », le même raisonnement assure la convergence pour $|x| < k^k - k + 1$ $(25 = 3^3 - 3 + 1 ...)$.

Exercice 197 (Divergence de la série $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$)
$\mathscr{P}$ désignant l'ensemble des nombres premiers, montrer que la série

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$$

diverge.

Notons $p_1, p_2, \dots$ la suite croissante des nombres premiers. Si la série $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$ converge, il existe un entier k tel que

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$$

et par suite

$$(\text{✘}) \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i\geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}.$$

Nous dirons que $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont les *petits nombres premiers*, les autres $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ seront les *grands nombres premiers*. Pour $N \in \mathbb{N}$, N_b sera le nombre d'entiers $n \leq N$ admettant au moins un grand nombre premier comme diviseur et N_s lui désignera le nombre d'entiers $n \leq N$ admettant uniquement des petits nombres premiers comme diviseur. Nous allons montrer que l'hypothèse de convergence de la série assure, pour un entier N convenablement choisi, l'inégalité $N_b + N_s < N$ d'où la contradiction désirée puisque bien entendu $N = N_b + N_s$.
Pour estimer N_b, remarquons que $E\left(\frac{N}{p_1}\right)$ est le nombre d'entiers $n \leq N$ multiples de p_1, la formule (✘) donne

$$(\text{✔}) \qquad N_b \leq \sum_{i\geq k+1} E\left(\frac{N}{p_i}\right) < \frac{N}{2}.$$

Considérons maintenant un entier $n \leq N$ n'admettant que des petits diviseurs premiers, et écrivons le sous la forme $n = a_n b_n^2$ où a_n est la partie « non carrée ». Chaque a_n se décompose donc en un produit de différents petits nombres premiers : il y a donc 2^k choix possibles pour a_n. Comme $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, il reste au plus $\sqrt{N}$ choix possibles pour b_n soit

$$(\bigstar) \qquad N_s \leq 2^k\sqrt{N}.$$

On choisit enfin N suffisamment grand pour que $2^k\sqrt{N} \leq N/2$ (i.e. $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$), par exemple $N = 2^{2k+2}$; la formule (✔) étant vraie pour tout N elle donne avec ($\bigstar$) : $N_b + N_s < N$ d'où la contradiction. ❑

🛈 **Remarque :** La divergence de la série $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$ est établie pour la première fois par L.Euler en 1748. La preuve ci-dessus est celle de P.Erdös (1938). Un corollaire immédiat est que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 198 (Si $(x_j)_j \subset \mathbb{R}_+$ et $\sum_j x_j = A$ alors $\sum_j x_j^2 \ \in]0, A^2[$) Putnam, 2000.
Soient $A \in \mathbb{R}_+, (x_j)_j \subset \mathbb{R}_+$; si $\sum_j x_j = A$ quelles sont les valeurs possibles pour $\sum_j x_j^2$?

Nous allons vérifier que l'ensemble des valeurs possibles pour la série $\sum_j x_j^2$ est l'intervalle ouvert $]0, A^2[$.

➪ Pour s'assurer que $\sum_j x_j^2 \subset]0, A^2[$ on peut remarquer (la série est bien entendu convergente et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$) que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=0}^{m} x_j\right)^2 = \sum_{j=0}^{m} x_j^2 + 2 \sum_{0\leq j<k\leq m} x_j x_k$$

si bien qu'on peut écrire

$$\sum_{j=0}^{m} x_j^2 \leq \left(\sum_{j=0}^{m} x_j\right)^2 - 2 \sum_{0\leq j<k\leq m} x_j x_k \leq A^2 - 2x_0x_1, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

soit, si m tends vers l'infini

$$\sum_{j\geq 0} x_j^2 \leq A^2 - 2x_0 x_< A^2.$$

➪ Il reste maintenant à s'assurer que toutes les valeurs de $]0, A^2[$ vont être atteintes : à cet effet, on considère la suite géométrique $(x_j)_j$ de raison d variable $(x_{j+1}/x_j = d)$. Alors

$$\sum_{j\geq 0} x_j = \frac{x_0}{1-d} \quad \text{et} \quad \sum_{j\geq 0} x_j^2 = \frac{x_0^2}{1-d^2} = \frac{1-d}{1+d}\left(\sum_{j=0}^{m} x_j\right)^2 = \frac{1-d}{1+d} A^2.$$

Vu cette dernière formule, lorsque d croit de 0 à 1 la quantité $(1-d)/(1+d)$ décroit de 1 à 0 et par conséquent $\sum_j x_j^2$ va prendre toutes les valeurs entre 0 et A^2. ❑

Exercice 199 (Formule de Wallis et applications) [14],

① *Établir la formule de Wallis (1655)*

(✘) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\frac{4.4}{3.5}\frac{6.6}{5.7}\cdots = \prod_{n\geq 1}\frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

② *En déduire que dans le jeu de pile ou face la probabilité p_n lors de $2n$ jets successifs d'obtenir n pile et n face satifait, quand n tends vers l'infini, à l'équivalent*

$$p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

③ *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss*

$$\int_0^{\infty}\exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

③ *En déduire la formule de Stirling (1730)*

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

④ *Du développement de Stirling*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

préciser la formule de Stirling

$$\frac{\pi}{2} - p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{8n}$$

On reprend in-extenso des extraits du remarquable ouvrage de P. Eymard & J.P. Lafon, [14].

❶ Elle est archi-classique et se trouve dans votre livre de chevet. Des intégrales de Wallis :

$$I_m = \int_0^{\pi/2}\sin^m(t)dt = \begin{cases} \dfrac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad m=2n,\\ \dfrac{2.4.6\dots(2n)}{3.5.7\dots(2n+1)} & \text{si} \quad m=2n+1\end{cases}$$

on tire

(✔) $$\frac{\pi}{2} = p_n\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$$

avec

$$p_n = \frac{2^2.4^2.6^2\dots(2n)^2}{(1.3)(3.5)\dots(2n-1)(2n+1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

donc, pour prouver (✘), il reste à vérifier que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Or, la suite $(I_n)_n$ est visiblement décroissante et par suite

$$✪ \qquad 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n},$$

ce qui achève la démonstration.

ℹ **Remarque :** en combinant (✔) et ✪ on a une première estimation de l'erreur

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - p_n \leq \frac{\pi}{4n}.$$

En fait, grâce à la formule de Stirling nous verrons que

$$\frac{\pi}{2} - p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{8n}$$

en d'autres termes le produit infini (✘) converge trés lentement.

❷ Avec les mêmes notations, nous pouvons écrire

$$p_n = \frac{2^2.4^2.6^2\dots(2n)^2}{1^2.3^2\dots(2n-1)^2}\frac{1}{2n+1} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{\left[(2n)!\right]^2}\frac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{4n}(n!)^4}{\left[(2n)!\right]^2}\frac{1}{2n}.$$

on peut donc réecrire la formule de Wallis sous la forme

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2}$$

ou encore

$$(\bigstar) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Par conséquent, la probabilité d'obtenir après $2n$ tirages d'un pièce de monnaie une nombre égal de pile et de face est

$$\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

ce qu'il nous fallait établir.

❸ On effectue dans l'intégrale de Gauss le changement de variables $t = \sqrt{n}x$

$$G := \int_0^\infty \exp(-t^2)dt = \sqrt{n}\int_0^\infty \exp(-nx^2)dx.$$

Des inégalités (exercice !)

$$0 \leq 1 - x^2 \leq e^{-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad x \geq 0,$$

on déduit

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq G \leq \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

et après les changements de variable $x = \sin(u)$ dans l'intégrale de gauche et $x = \tan(u)$ dans celle de droite on voit apparaitre nos intégrales de Wallis

$$\sqrt{n}I_{2n+1} \leq G \leq \sqrt{n}I_{2n-2}$$

soit

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \leq G \leq \sqrt{n}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2n}{2n-1}\frac{\pi}{2}$$

et quand n tends vers l'infini, les deux extrémités de cette formule tendent vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après (★), soit

$$G := \int_0^\infty \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

❹ La preuve se décline en deux étapes : on commence par montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

puis avec la formule de Wallis on vérifie que $C = \sqrt{2\pi}$.

Pour déterminer la valeur de la constante C on reporte l'équivalent $n! \underset{n\to\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ dans (★) ce qui nous donne

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}C^2 n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2}{n}}$$

soit $C = \sqrt{2\pi}$, la formule de Stirling est démontrée.

❹ A suivre (page 113, exercice 23) ❑

Exercice 200 (Série non commutativement convergente)
Exemple d'une série convergente dont un réarrangement des termes modifie la somme. Il y a beacoup de choses à dire et d'exemples plus simples.........

Il est bon de rappeler qu'il existe une constante (constante d'Euler) $\gamma > 0$ telle que

$$(\bigstar) \qquad x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Considérons alors

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

on a

$$\begin{aligned}
y_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}\right) \\
&= x_{2n} - x_n = \log(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n} - \log(n) - \gamma - \varepsilon_n \\
&= \log(2) + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \longrightarrow \log(2) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

la série $\sum_{n\geq 1} y_n$ est donc convergente et de somme $\log(2)$.
Groupons maintenant les termes en prenant alternativement deux termes positifs puis un terme négatif, par exemple pour les premiers termes :

$$1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{11},\ -\frac{1}{6}\dots$$

si on désigne par z_n la somme des n premiers termes de cette nouvelle suite

$$\begin{aligned}
z_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= x_{4n} - \frac{1}{2}(x_{2n} + x_n) \\
&= \log(4n) - \frac{1}{2}(\log(2n) + \log(n)) + \varepsilon_{4n} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{2n} + \varepsilon_n) \longrightarrow \frac{3}{2}\log(2) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

et la modification de l'ordre des termes a bien modifié la somme de la série. ❑

🛈 **Remarque :** ....

Exercice 201 (Suites numériques, calculs d'équivalents)
① *Soit* $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ *une suite convergente de limite* $l \in \mathbb{R}$. *On pose* $v_n = u_n - l$ *et on suppose qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} v_{n+1}^{\alpha} - v_n^{\alpha} = \lambda \neq 0.$$

Montrer que

$$u_n - l \underset{n\to\infty}{\sim} (n\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

② ***Application :*** *Soit la suite définie par* $0 < u_0 \leq 1$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$, *justifier la convergence de* $(u_n)_n$ *et déduire de ce qui précède que* $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

❶ $(v_n)_n$ converge vers zéro et si $\lim_{n\to\infty} v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha = \lambda$ on a par Cesaro :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}^\alpha - v_k^\alpha}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_n^\alpha}{n} - \frac{v_0^\alpha}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{v_n^\alpha}{n}\end{aligned}$$

soit vu que $\lambda \neq 0$:

$$u_n - l \underset{n\to\infty}{\sim} (n\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

❷ Passons à l'exemple : la suite $(u_n)_n$ est bien définie, décroissante minorée : elle est donc convergente vers la solution $l \in [0,1]$ de $\sin(l) = l$, soit $l = 0$. Pour voir si la méthode précédente s'applique écrivons

$$\begin{aligned}u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= \sin^\alpha(u_n) - u_n^\alpha\\ &= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \quad (\text{ car } \lim_n u_n = 0)\\ &= u_n^\alpha\left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) - u_n^\alpha\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{6}u_n^{\alpha+2} \qquad \text{si } \alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\alpha = -2$

$$\lim_n\ u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3}$$

et par suite $\quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$ ❑

🛈 **Remarque :** L'exemple précédent est assez classique, pour changer vous pouvez par exemple montrer que si $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+$, $S_n := \sum_{k=1}^n a_k^2$ et $\lim_n a_n S_n = 1$ alors $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^{-1/3}$.

Exercice 202 (Irrationalité de e (2))
On définit la fonction exponentielle comme la solution de l'équation différentielle $y' = y,\ y(0) = 1$. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour montrer que $e := y(1) \notin \mathbb{Q}$.

On raisonne par l'absurde en suppposant $e = p/q \in \mathbb{Q}$. Commencons par remarquer qu'en appliquant à la fonction exponentielle la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[0,1]$, il existe $u \in]0,1[$ tel que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{e^u}{3!},$$

et la fonction exponentielle étant strictement croissante

$$\frac{5}{2} < e < \frac{5}{2} + \frac{e}{6},$$

soit $5/2 < e < 3$. Il en résulte que si $e = p/q \in \mathbb{Q}$ nécessairement $q > 2$. Maintenant appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre q sur $[0,1]$, il existe $u_q \in]0,1[$ tel que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{e^{u_q}}{(q+1)!},$$

soit

$$q!\left(e - \left[1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!}\right]\right) = \frac{q!e^{u_q}}{(q+1)!}$$

qui implique

$$0 < \left| q!e - \sum_{k=0}^{q} q!k!^{-1} \right| < \frac{1}{q+1} < \frac{1}{3} < 1$$

ce qui est absurde puisque $e - \sum_{k=0}^{q} k!^{-1} \in \mathbb{Z}$, contradiction et $e \in \mathbb{Q}$. ❑

🛈 Voir aussi page 177 pour une autre preuve de l'irrationalité de e.

Exercice 203 (Irrationalité de e (3))
Soit $e := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!} + r_n$. *Montrer que*

$$\frac{1}{n+1} < n!r_n < \frac{1}{n}$$

en déduire que $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi$ *puis que* $e \notin \mathbb{Q}$.

On a

$$n!r_n = n! \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

i.e.

$$n!r_n > \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit aussi

$$n!r_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots = \frac{1}{n}$$

soit la double inégalité. De là on tire immédiatement

(★) $$\lim_{n\to\infty} n\, n!r_n = 1,$$

puis,

(✘) $$n\sin(2\pi e n!) = n\sin(2\pi n! r_n) = \frac{\sin(2\pi n! r_n)}{2\pi n! r_n} 2\pi r_n\, n! n \to 2\pi$$

la limite résultant de (★) et (✘) via $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. D'un autre côté, si $e \in \mathbb{Q}$: $\sin(2\pi e n!) = 0$ d'où le résultat. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ On peut donner une variante (plus classique, plus rapide) basée sur les mêmes inégalités : supposons que $e = \frac{p}{q}$ avec $q > 1$, vu ce qui précède

$$0 < q! \left| e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \right| = q! r_q < \frac{1}{q}$$

autrement dit

$$q! \left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \right) \in]0,1[$$

ce qui est visiblement absurde car

$$q! \left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \right) = q! \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \right) \in \mathbb{N}.$$

➪ Le même argument montre que pour toute suite $(\varepsilon_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (non identiquement nulle à partir d'un certain rang), le réel $\sum_{n\geq 0} \dfrac{\varepsilon_n}{n!}$ est irrationel.

➪ Voir aussi page 177 pour une autre preuve de l'irrationalité de e.

➪ Montrer que π est irrationnel est plus délicat, une démonstration est donnée dans l'exercice suivant.

Exercice 204 (Irrationalité de π^2 et donc de π) [14]
Montrer que π^2 est irrationel, en déduire que π est irrationel.

Considérons pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k,$$

il n'est pas difficile de vérifier les propriétés suivantes :

- ⇝ $c_k \in \mathbb{N}$ pour tout $n \leq k \leq 2n$,
- ⇝ $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}, \quad \forall\, x \in]0,1[$,
- ⇝ $f_n^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ ou si $k > 2n$,
- ⇝ $f_n^{(k)}(0) = \dfrac{k! c_k}{n!}$ si $n \leq k \leq 2n$.

Donc f_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières pour $x = 0$; comme de plus f_n est symétrique par rapport à $x = 1/2$, il en est de même si $x = 1$.
Supposons π^2 rationnel égal à $\dfrac{p}{q}$ et soit

$$g_n(x) = q^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right).$$

Les nombres $g_n(0)$ et $g_n(1)$ sont entiers et de plus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(g_n'(x)\sin(\pi x)-\pi g_n(x)\cos(\pi x)\right) &= \left(g_n''(x)+\pi^2 g_n(x)\right)\sin(\pi x)\\ &= q^n\pi^{2n+2}f_n(x)\sin(\pi x)\\ &= \pi^2 p^n\sin(\pi x)f_n(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\pi\int_0^1 p^n\sin(\pi x)f_n(x)dx=\left[\frac{g_n'(x)\sin(\pi x)}{\pi}-g_n(x)\cos(\pi x)\right]_0^1=g_n(0)+g_n(1)$$

est un entier. Mais de l'autre coté

$$0<\pi\int_0^1 p^n\sin(\pi x)f_n(x)dx<\frac{\pi p^n}{n!}$$

et $\dfrac{\pi p^n}{n!}$ est strictement plus petit que 1 pour n assez grand, d'où la contradiction ❑

ℹ **Remarque :** cette démonstration est due à Niven (1946), la preuve originale de l'irrationalité de π par Lambert date de 1766, il est chaudement recommandé de la consulter ([14], page 130).

Exercice 205 (Suites, équivalents)
Pour $n\geq 1$ on définit l'entier a_n comme le plus petit entier tel que

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n}>1.$$

Montrer que la suite $(a_n)_n$ est bien définie et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=e.$$

La divergence de la série harmonique (vers $+\infty$) assure l'existence de la suite $(a_n)_n$. On peut remarquer qu'une récurrence donne facilement pour tout $n>1$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}<1\qquad\&\qquad\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{3n-2}>1$$

i.e. $2n-1<a_n<3n-2$, donc si $\left(\frac{a_n}{n}\right)_n$ converge, sa limite sera dans l'intervalle $[2,3]$. Mais, vu la définition de a_n :

$$1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{a_n}$$

en comparant avec une intégrale

$$1-\frac{1}{n}<\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n}<\int_n^{a_n}\frac{dt}{t}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n-1}\leq 1$$

i.e.

$$1 - \frac{1}{n} < \log\left(\frac{a_n}{n}\right) < 1$$

le résultat suit en prenant l'exponentielle. ❑

Exercice 206 (Divergence de la série harmonique, preuve record ?)
Divergence de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Supposons quelle converge alors :

$$r := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots = r \quad !!$$

❑

Exercice 207 (Divergence de la série harmonique (suite)) *([10],1993/94).*
Soit $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ *montrer que* $\lim_n s_{2n} - s_n = \log(2)$. *Conclusion ?*

On peut écrire

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f(t) = \frac{1}{1+t},$$

on reconnaît là une somme de Riemann sur $[0, 1]$ associée à la fonction $f \in \mathscr{C}^0([0, 1])$ par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} - s_n = \int_0^1 f(t)dt = \log(2).$$

La suite $(s_n)_n$ ne vérifie pas le critère de Cauchy, la série harmonique est donc divergente.❑

🛈 Remarque : l'intérêt de cet exercice est bien entendu d'utiliser les sommes de Riemann, car la divergence de la série harmonique via le critère de Cauchy s'obtient classiquement (voir aussi l'exercice précédent) par

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 208 (Suites et sous-suites)
$(x_n)_n$ est une suite réelle bornée. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ vérifiant $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$; montrer que

$$\Big((e^{iax_n})_n \ \& \ (e^{ibx_n})_n \ \textit{convergent}\ \Big) \Longrightarrow ((x_n)_n \ \textit{converge}\ ).$$

Supposons $(x_n)_n$ divergente. Pour une suite bornée de réels divergente il n'y a qu'une alternative : elle possède deux sous-suites $(x_{s_n})_n, (x_{t_n})_n$ qui convergent vers deux limites distinctes l_1, l_2. Vu les hypothèses

$$e^{ial_1} = \lim_n e^{iax_{s_n}} = \lim_n e^{iax_{t_n}} = e^{ial_2}$$

il existe donc $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $ial_1 = ial_2 + 2ik_1\pi$ i.e. $a(l_1 - l_2) = 2k_1\pi$. De même avec la seconde suite il existe $k_2 \in \mathbb{N}$: $b(l_1 - l_2) = 2k_2\pi$. De ces deux relations on déduit aussitôt (car $l_1 - l_2 \neq 0$) que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k_1}{k_2}$ ce qui est bien sur absurde. ❑

Exercice 209 (Divergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$) [33]
Montrer que dans $\{x \in \mathbb{R} \ : \ \sin^2(x) \leq \frac{1}{2}\}$ on ne trouvera jamais trois entiers consécutifs. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$.

L'ensemble proposé est

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi] \cup [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$$

réunion disjointe d'intervalles de longueur < 2 donc ne contenant pas trois entiers consécutifs ; ils sont aussi séparés par des intervalles de longueur strictement plus grande que 1, donc contenant au moins un entier : l'assertion est donc claire.
Notre série étant à termes positifs, elle sera de même nature que celle de terme général $v_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$ et vu ce qui précède l'un des trois réels $\sin^2(3n), \sin^2(3n+1), \sin^2(3n+2)$ est supérieur ou égal à $1/2$ donc

$$v_n \geq \frac{1}{2(3n+2)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6n}$$

et par comparaison notre série diverge. ❑

Exercice 210 (Le critère de condensation de Cauchy)
Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs, établir l'équivalence

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \quad \textit{converge}\right) \iff \left(\sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n} \quad \textit{converge.}\right)$$

En déduire la nature des séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log(n))^\alpha},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\log(n)\log(\log(n))}\ \&\ \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\log(n)\left(\log(\log(n))\right)^2}$$

les a_n étant positifs, il suffit de montrer que les sommes partielles se dominent mutuellement, pour cela, posons

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \& \quad t_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}.$$

➪ Si $n < 2^k$ on peut écrire

$$\begin{aligned} s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + \cdots + a_7)\cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k \end{aligned}$$

i.e.

$$s_n < t_k, \quad \forall\, n < 2^k.$$

➪ Réciproquement, si $n > 2^k$ on écrit cette fois- ci

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{t_k}{2} \end{aligned}$$

soit

$$2s_n \geq t_k, \quad \forall\, n > 2^k$$

d'où le résultat suit. ❑

🛈 **Remarques & application :** ➪ C'est le **critère de condensation de Cauchy**, il est fortement conseillé de l'appliquer aux exemples proposées : c'est immédiat et très efficace.
➪ Le nombre 2 ne joue aucun rôle particulier dans l'énonçé précédent : ce résultat est en fait un cas particulier du [1]

Soient $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs, $(g_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers. S'il existe une constante $M > 0$ telle que

(✘) $$g_{k+1} - g_k \leq M(g_k - g_{k-1})$$

[1] K.Knopp, « Theory and Application of infinite series », Dover (1990), pages 120-121.

alors les deux séries

$$\sum_{k\geq 0} a_k \quad et \quad \sum_{k\geq 0}(g_{k+1}-g_k)a_{g_k}$$

sont de mêmes nature.

La condition (✘) signifie que les « lacunes » de la suite (g_k) ne croissent pas trop vite.

Exercice 211 (Suites, continuité)
Si $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^n f(t)dt = 0 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)dt = f(1)$$

➪ f continue est bornée sur $[0,1]$ donc

$$\left|\int_0^1 t^n f(t)dt\right| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 t^n dt = \frac{\|f\|_\infty}{n+1} \to 0.$$

➪ Pour la seconde limite, f étant continue en $t=1$

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\ :\ 1-\eta\leq t\leq 1 \Longrightarrow |f(t)-f(1)|\leq\varepsilon,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 t^n(f(t)-f(1))dt\right| &\leq\ n\left(\int_0^{1-\eta} t^n|f(t)-f(1)|dt+\int_{1-\eta}^1 t^n|f(t)-f(1)|dt\right)\\ &\leq\ n\left(\frac{2\|f\|_\infty(1-\eta)^{n+1}}{n+1}+\frac{\varepsilon}{n+1}\right)\leq 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad n\geq N_\varepsilon\end{aligned}$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)dt = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(1)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{nf(1)}{n+1} = f(1).$$

❑

Exercice 212 (Sur le nombre d'éléments d'une suite récurrente)
Soit $f\ :\ [a,b]\to[a,b]$ une application continue. Pour $x\in[a,b]$ on définit la suite $(x_n)_n$ par $x_0=x$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ et on note $T_x=\{x_n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$. Montrer que T_x fermé implique $\text{card}(T_x)<+\infty$.

On procède par contraposée : $x_n=x_m$ pour $n>m$ assure que T_x est fini et alors bien entendu fermé ; on peut donc sans perte de généralité supposer les x_n deux à deux distincts. $T_x=\{x_n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$ fermé dans $[a,b]$ est compact : il existe une sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$ de limite $a\in T_x$ et par continuité de f : $x_{n_k+1}=f(x_{n_k})\to f(a)$. Ainsi, sauf peut être pour un nombre fini, tous les éléments de T_x sont des points d'accumulation. On peut donc supposer, quitte à supprimer le nombre fini de points isolés, que tous les points sont d'accumulation. On peut.. ❑

Exercice 213 (Un exercice sur les séries numériques)

Soient $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum_n a_n$ converge, $(b_n)_n$ une suite bornée de réels posititifs. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1}(b_1+\dots+b_n)(a_n-a_{n-1})$$

converge.

Posons $u_n=(b_1+\dots+b_n)(a_{n-1}-a_n),\ n\geq 2$ et notons $S_N=\sum_{i=2}^N u_i$ ses sommes partielles. Soit $M>0$ tel que $|b_n|\leq M,\ \forall n\in\mathbb{N}$. La suite $(a_n)_n$ étant décroissante on a $0\leq u_n\leq M(a_{n-1}-a_n)\leq nM(a_{n-1}-a_n)$ d'où

$$0\leq S_N\leq M\sum_{i=2}^N n(a_{n-1}-a_n)=M\left(a_1+\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\leq M\left(a_1+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right).$$

La suite croissante $(S_N)_N$ est bornée, donc convergente, il en est donc de même de la série $\sum_{n\geq 1}(b_1+\dots+b_n)(a_n-a_{n-1})=-\sum_n u_n=-\lim_N S_N$. ❑

Exercice 214 (Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^n)}$) [34], *1984/7.*

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^n)}=\frac{7-\sqrt{5}}{2},$$

où $(F(n))_n$ est la suite de Fibonacci :

$$F(0)=0, F(1)=1,\quad F(n)=F(n-1)+F(n-2),\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}.$$

Il est bien connu (donner une référence, [33], [12]...) que

$$F(n)=\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}},\quad \text{avec } a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ ab=-1,$$

ce qui nous donne (avec l'identité remarquable $c^2-d^2=(c+d)(c-d)$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^n)}=1+\sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a^{2^n}-1}-\frac{1}{a^{2^{n+1}}-1}\right]=1+\frac{\sqrt{5}}{a^2-1}=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

aprés télescopage dans la seconde série. ❑

Exercice 215 (Divergence de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{\cos(\log(\log(n)))}{\log(n)}$) *Putnam (1949)*

En considérant les blocs $N_l = \{\, k \in \mathbb{N}\ :\ 2\pi l - \pi/3\ \leq \log(\log(k)) \leq 2\pi l\}$, *établir la divergence de la série* $\sum_{n\geq 2}\dfrac{\cos(\log(\log(n)))}{\log(n)}$.

L'indication est claire : si la série converge, par le critère de Cauchy elle ne peut admettre de blocs de termes consécutifs de somme arbitrairement grande. Observons donc les quantités

$$S_l = \sum_{k\in N_l}\frac{\cos(\log(\log(n)))}{\log(n)}.$$

(on peut remarquer que la croissance de $k \mapsto \log_2(k)$ assure que N_k est bien constitué d'éléments consécutifs) On peut aussi écrire

$$N_l = \{\, k \in \mathbb{N} : \exp(\exp(2\pi l - \pi/3)) \leq k \leq \exp(\exp(2\pi l))\}$$

et il en résulte

$$\begin{aligned}\sharp(N_l) &\geq \exp(\exp(2\pi l)) - \exp(\exp(2\pi l - \pi/3)) - 1\\ &= \exp(\exp(2\pi l)) - \exp(\alpha\exp(2\pi l)) - 1\end{aligned}$$

où $0 < \alpha = \exp(-\pi/3) < 1$. Ainsi, pour $k \in N_l$ on a la minoration

$$\frac{\cos(\log_2(k))}{\log(k)} \geq \frac{\cos(-\pi/3)}{\exp(2\pi l)} = \frac{1}{2\exp(2\pi l)},$$

d'où

$$S_l \geq \frac{\exp(\exp(2\pi l)) - \exp(\alpha\exp(2\pi l)) - 1}{2\exp(2\pi l)}.$$

Pour conclure il n'y a plus qu'à remarquer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x) - \exp(\alpha x) - 1}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{2x}\left[1 - \exp(x(\alpha - 1)) - \exp(-x)\right] = +\infty$$

(le terme entre crochets tendant vers 1 car $0 < \alpha < 1$). ❏

Exercice 216 (Calcul d'une somme de série) *Putnam 2001 où [6].*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[n]$ *désigne l'entier le plus proche de* $\sqrt{n}$. *Montrer que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{[n]} + 2^{-[n]}}{2^n} = 3.$$

ℹ Bien remarquer que $[n]$ est toujours bien défini car l'équation $\sqrt{n} = k + 1/2,\ k, n \in \mathbb{N}$ n'a pas de solutions.

Comme souvent dans ce genre d'exercice l'astuce consiste à sommer paquets (ce qui est parfaitement légitime puisque la série est à termes positifs...sous reserve de convergence...)

suivant les valeurs de $[n]$:

$$\begin{aligned}[n]=k &\Leftrightarrow k-1/2<\sqrt{n}<k+1/2\\ &\Leftrightarrow k^2-k+1/4<n<k^2+k+1/4\\ &\Leftrightarrow k^2-k+1\leq n\leq k^2+k \quad (\text{car } n\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{[n]}+2^{-[n]}}{2^n} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k}(2^k+2^{-k})2^{-n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(2^k+2^{-k})2^{-k^2+k-1}\sum_{n=0}^{2k-1}2^{-n}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(2^k+2^{-k})2^{-k^2+k-1}\cdot\frac{1-2^{-2k+2}}{1-2^{-1}}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(2^k+2^{-k})(2^{-k^2+k}-2^{-k^2-k})\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(2^{-k(k-2)}-2^{-k(k+2)})\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(k-2)}-\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(k+2)}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(k-2)}-\sum_{l=3}^{\infty}2^{-l(l-2)} \quad (l=k+2)\\ &= \sum_{k=1}^{2}2^{-k(k-2)}=2+1+3.\end{aligned}$$

C.Q.F.D. ❑

Exercice 217 (À propos du produit de Cauchy) [6].

❶ *Montrer que le produit de Cauchy des deux séries convergentes de termes général* $a_n=b_n=(-1)^{n+1}/\sqrt{n+1}$ *diverge.*

❷ *Montrer que le produit de Cauchy des deux séries grossièrement divergentes de termes généraux* $a_0=3,\ a_n=3^n,\ b_0=-2,\ b_n=2^n,\ n\in\mathbb{N}^\star$ *est absolument convergent.*

❶ Le terme général du produit de Cauchy des deux séries (convergentes car alternées) est

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}$$
$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}},$$

donc

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

d'où la grossière divergence du produit de Cauchy des deux séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$.

❷ Nous avons cette fois-ci $c_0 = -6$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 3 \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \cdot 3^{n-k} - 2 \cdot 3^n$$
$$= 3 \cdot 2^n + 3^n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 2 \cdot 3^n$$
$$= 3 \cdot 2^n + 3^n \cdot \frac{2/3 - (2/3)^n}{1 - 2/3} - 2 \cdot 3^n = 0,$$

d'où la convergence absolue du produit de Cauchy. ❑

🛈 **Remarque :** Le produit de Cauchy deux séries absolument convergentes est absolument convergent, le produit de Cauchy d'une série absolument convergente et d'une série convergente est convergent, pour le reste tout peut arriver comme on peut le vérifier dans les exemples précédents.

Exercice 218 ($e = \sum 1/k!$, une preuve élémentaire) *CMJ, 1-1994.*

Montrer que pour tout $x \in]0,1]$: $1 + ex > e^x > 1 + x$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{ex^{n+1}}{(n+1)!} > e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

et enfin que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Soit $0 < x \leq 1$, par le théorème des accroissement finis

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c, \quad c \in]0, x[,$$

d'où

$$1 + ex > e^x > 1 + x, \quad \forall\, x \in]0, 1].$$

Intégrons maintenant ces inégalités
$$\int_0^x (1+et)dt > \int_0^x e^t dt > \int_0^x (1+t)dt$$
on a
$$1+x+\frac{ex^2}{2} > e^x > 1+x+\frac{x^2}{2},\quad \forall\, x\in]0,1].$$
Une nouvelle intégration nous donne
$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{ex^3}{3!} > e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!},\quad \forall\, x\in]0,1],$$
et ainsi de suite ; on a donc pour tout entier n :
$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{ex^{n+1}}{(n+1)!} > e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
En particulier, $x=1$ donne
$$e-\frac{1}{(n+1)!} > 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} > e-\frac{e}{(n+1)!},\quad \forall\, n\in\mathbb{N},$$
et il ne reste plus qu'à faire tendre n vers l'infini pour conclure. ❏

ℹ **Remarque :** Bien entendu on peut encore mieux exploiter l'inégalité précédente que l'on peut réecrire sous la forme :
$$\frac{e}{(n+1)!} > e^x-\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} > \frac{1}{(n+1)!},\quad \forall\, n\in\mathbb{N},$$
soit
$$e^x=\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!},\quad \forall\, x\in]0,1].$$

Exercice 219 (Divergence « douce » de $\sum_k 1/k\log(k)\log(\log(k))$ par le TAF) *CMJ, 5-1986.*

Utiliser le théorème des accroissements finis pour établir la divergence de la série de terme général $1/k\log(k)\log(\log(k))$*. Estimer* $\sum_{m\leq k\leq n} 1/k\log(k)\log(\log(k))$*, conclusion ?*

Le théorème des accroissement finis appliqué à $x\mapsto \log(\log(\log(x)))$ sur l'intervalle $[k,k+1]$ assure que pour tout entier $k\geq 3$, il existe $c_k\in]k,k+1[$ tel que
$$\frac{\log(\log(\log(k+1)))-\log(\log(\log(k)))}{(k+1)-k}=\frac{1}{c_k\log(c_k)\log(\log(c_k))},$$
soit, pour tout $k\geq 3$
$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)\log(\log(k+1))} < \log(\log(\log(k+1)))-\log(\log(\log(k))) < \frac{1}{k\log(k)\log(\log(k))}.$$

En sommant ces inégalités pour $3 \leq m \leq k \leq n$ il vient

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} \frac{1}{k\log(k)\log(\log(k))} < \log(\log(\log(n+1))) - \log(\log(\log(m))) < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k\log(k)\log(\log(k))}.$$

Si $m = 3$, en faisant tendre n vers $+\infty$ l'inégalité de droite ci-dessus assure la divergence de notre série.
Il est trés intéressant de remarquer que l'inégalité de gauche nous donne des informations sur l'extrême lenteur de la divergence de la série, par exemple la somme des 9 millions de termes entre 10^6 et 10^7 est majorée par (i.e. pour $m = 10^6 - 1,\ n = 10^7 - 1$) :

$$\sum_{k=10^6}^{10^7} \frac{1}{k\log(k)\log(\log(k))} < \log(\log(\log(10^7))) - \log(\log(\log(10^6 - 1))) \approxeq 0.057.$$

En procédant de même tout ceci marche en itérant autant de fois le log que l'on veut, par exemple, on a aussi

$$\sum_{k=10^6}^{10^7} \frac{1}{k\log(k)} \approxeq 0.154 \text{ et } \sum_{k=10^6}^{10^7} \frac{1}{k} \approxeq 2.303.$$

❑

Exercice 220 () *xxxxxxxxx*

CHAPITRE 8

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS, SÉRIES ENTIÈRES ET DE FOURIER

Exercice 221 (Étude d'une série de fonctions) [10]-*2006.*

On considère une suite de fonctions $(f_n)_n \subset \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *vérifiant*

(✘) $$|f_n(x)f_m(x)| \leq 2^{-|n-m|}, \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N},\ x \in [0,1].$$

❶ *Montrer que la série de fonctions* $\sum_n f_n$ *converge simplement sur* $[0,1]$.

❷ *Montrer que la somme* $f = \sum_n f_n$ *est bornée sur* $[0,1]$.

❸ *La convergence est-elle uniforme sur* $[0,1]$ *?*

❶ Soit $x \in [0,1]$.

➲ Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0}(x) \neq 0$, avec (✘) on a

$$|f_n(x)f_{n_0}(x)| \leq 2^{-|n-n_0|}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

soit

$$|f_n(x)| \leq 2^{-n}\frac{2^m}{|f_{n_0}(x)|}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

d'où la convergence absolue de la série $\sum_n f_n(x)$ par critère de comparaison.

➲ Sinon $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la convergence au point x est évidente.

❷ Avec la question précédente la convergence simple est absolue et la suite $(|f_n|)_n$ vérifie aussi (✘) : comme $|\sum_n f_n| \leq \sum_n |f_n|$ il est donc suffisant de supposer les fonction f_n positives.
Soit $x \in [0,1]$ fixé, posons pour $k \in \mathbb{N}$

$$I_k = \left\{ n \in \mathbb{N}\ :\ \frac{1}{2^{k+1}} < f_n(x) \leq \frac{1}{2^k} \right\}.$$

Soient $n, p \in I_k$ on a

$$\frac{1}{2^{2k+2}} < f_n(x)f_p(x) \leq \frac{1}{2^{|n-p|}}$$

soit $|n-p| \leq 2k+2$ qui implique $\mathrm{card}(I_k) \leq 2k+2+1$. La série $\sum_n f_n(x)$ étant à termes positifs on peut sommer par paquets :

$$0 \leq f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\in I_n} f_k(x) \leq \sum_{n\geq 0}(2n+3)\cdot\frac{1}{2^n} = 10.$$

f est donc bornée par 10 sur $[0,1]$ (bien remarqer que nous n'avons pas utilisé la continuité des applications f_n).

❸ Montrons qu'en général il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$. Pour cela, considérons une suite strictement croissante $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < 1$ de limite 1 et les applications $f_n \in \mathscr{C}([0,1])$ définies de la manière suivante :

- $\rightsquigarrow$ $0 \leq f_n \leq 1$,
- $\rightsquigarrow$ $f_n \equiv 0$ sur $[0,1] \setminus [x_n, x_{n+1}]$ et $f_n(y_n) = 1$ où $y_n = (x_n + x_{n+1})/2$,
- $\rightsquigarrow$ f_n est affine sur $[x_n, y_n]$ et $[y_n, x_{n+1}]$.

Il n'est pas difficile de vérifier que la suite $(f_n)_n$ ainsi définie vérifie (✘), en effet les supports des applications f_n étant mutuellement disjoints

$$|f_n(x)f_m(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ |f_n(x)|^2 \leq 1 & \text{si } n = m \end{cases} \leq 2^{-|n-m|}, \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, comme (toujours par disjonction des supports)

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} f_k(x) = f_n(x) \quad \text{où} \quad x \in [x_n, x_{n+1}],$$

en particulier

$$f(y_n) = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$f(0) = 0, \quad \lim_n y_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_n f(y_n) = 1,$$

f est donc discontinue au point 1 et la convergence ne peut être uniforme sur $[0,1]$. ❑

🛈 **Remarque :** Dans l'exemple précédent, f est discontinue au point 1 en lequel toutes les applications f_n s'annulent ; il est en fait assez facile de vérifier qu'en un point $x \in [0,1]$ où il existe un entier n tel que $f_n(x) \neq 0$ la série $\sum_n f_n$ est normalement convergente sur un voisinage de x et f est par suite continue au point x.

Exercice 222 (Limite d'une suite via les séries entières)
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = \frac{1}{\mathrm{n}+1} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{k}}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}+2}.$$

Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}.$$

Par une recurrence immédiate $0 < a_n \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Le rayon de convergence de la série génératrice associée $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est donc supérieur ou égal à 1 et on nous demande de calculer $f(1/2)$. Avec la formule de récurrence

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}x^n$$
$$= \sum_{k\geq 0}a_k x^k\sum_{n\geq k}\frac{x^{n-k}}{n-k+2} = f(x)\sum_{m\geq 0}\frac{x^m}{m+2}.$$

Par conséquent comme $f(0)=1$ et $f(x)>0$ sur $]0,1[$:

$$\log(f(x)) = \log(f(x)) - \log(f(0)) = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \int_0^x \sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m+2}dt = \sum_{m\geq 0}\frac{x^{m+1}}{(m+1)(m+2)}$$

l'échange « intégrale/série » étant justifié par la normale convergence de la série entière sur $[0,x]\subset[0,1[$, ainsi

$$\log(f(x)) = \sum_{m\geq 0}\frac{x^{m+1}}{(m+1)(m+2)} = \sum_{m\geq 0}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{m+2}\right)$$
$$= 1 + \left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{m\geq 0}\frac{x^{m+1}}{m+1} = 1 + \left(1-\frac{1}{x}\right)\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

soit $\log(f(1/2)) = 1 - \log(2)$ et finalement $f(1/2) = e/2$. ❏

Exercice 223 (Séries entières et convergence uniforme)
Pour une série entière $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R\geq 1$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes
❶ *La série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $D(0,1)$.*
❷ *La série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$.*
❸ *La série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $C(0,1)$.*

➪ (❶ $\Longrightarrow$ ❷) : C'est la conséquence d'un corollaire presque immédiat (mais essentiel) du critére de Cauchy uniforme : *« Soient X un espace topologique, E un espace de Banach ; alors toute suite de fonctions $(f_n)_n\subset\mathscr{C}(X,B)$ qui converge uniformément sur une partie $Y\subset X$ converge encore uniformément sur $\overline{Y}$. »* Comme justification il suffit de remarquer que par continuité des applications f_n, le critère de Cauchy uniforme

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, n_\varepsilon\ :\ m,n\geq n_\varepsilon \implies \sup_{x\in Y}\|f_n(x)-f_m(x)\|_E\leq\varepsilon$$

implique

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, n_\varepsilon\ :\ m,n\geq n_\varepsilon \implies \sup_{x\in \overline{Y}}\|f_n(x)-f_m(x)\|_E\leq\varepsilon$$

➪ Les implications (❷ $\Longrightarrow$ ❸) et (❷ $\Longrightarrow$ ❶) sont évidentes.

➪ Il suffit donc par exemple d'établir (❸ $\Longrightarrow$ ❷) : Par convergence uniforme sur le cercle unité, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq n_\varepsilon \implies |s_n(e^{i\theta})| = |\sum_{n_\varepsilon}^n a_k e^{ik\theta}| < \varepsilon$.

On va effectuer une transformation d'Abel : soit $0 \leq r \leq 1$ et $n \geq n_\varepsilon + 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n_\varepsilon+1}^{n} a_k r^k e^{ik\theta}\right| &= \left|\sum_{n_\varepsilon+1}^{n} r^k (s_k(e^{i\theta}) - s_{k-1}(e^{i\theta}))\right| \\
&= \left|-r^{n_\varepsilon+1} s_{n_\varepsilon}(e^{i\theta}) + r^n s_n(e^{i\theta}) + \sum_{n_\varepsilon+1}^{n} s_k(e^{i\theta})(r^k - r^{k+1})\right| \\
&\leq \left|r^{n_\varepsilon+1} s_{n_\varepsilon}(e^{i\theta})\right| + \left|r^n s_n(e^{i\theta})\right| + \sum_{n_\varepsilon+1}^{n} (r^k - r^{k+1}) \left|s_k(e^{i\theta})\right| \\
&\leq \varepsilon \left[r^{n_\varepsilon+1} + r^n + \sum_{n_\varepsilon+1}^{n} (r^k - r^{k+1})\right] \\
&\leq 2\varepsilon r^{n_\varepsilon+1} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Le critère de Cauchy uniforme est donc bien vérifié sur $\overline{D(0,1)}$, soit ❷. ❑

🛈 **Remarque :** Le candidat à l'agrégation externe peut régler l'implication « délicate » (❸ $\Longrightarrow$ ❷) trés simplement en invoquant le principe du maximum.

Exercice 224 (Convergence uniforme et convergence continue) [25]
*Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide (ou plus généralement d'un espace vectoriel normé) et $(f_n)_n$ une suite d'applications de A dans $\mathbb{K}$. On dira que la suite $(f_n)_n$ **converge continuement** vers $f : A \to \mathbb{K}$ si pour tout $x \in A$, pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ convergente vers x la suite $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.*

❶ *Montrer que la convergence continue implique la convergence simple.*

❷ *Soit $(f_n)_n$ une telle suite, $x \in A$ et $(x_n)_n$ dans A convergente vers x. Montrer que pour toute sous-suite $(f_{n_k})_k$*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

❸ *Si $(f_n)_n$ converge continuement vers f sur A, montrer que f est continue sur A (**même** si les f_n ne sont pas continues !)*

❹ *Montrer que toute suite $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A vers une fonction $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{K})$ converge continuement sur A. La réciproque est-elle vraie ?*

❺ *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie compacte K. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- ➪ *La suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers $f \in \mathscr{C}^0(K)$.*
- ➪ *La suite $(f_n)_n$ est continuement convergente sur K vers f.*

❶ Si la suite $(f_n)_n$ converge continuement vers f s ur A et si pour $x \in A$ on considère la suite constante $x_n = x$ alors :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

i.e. $(f_n)_n$ est simplement convergente sur A vers f.

❷ Soit donc $(f_{n_k})_k$ une sous-suite de la suite $(f_n)_n$ et $(x_n)_n$ une suite dans A convergente vers $x \in A$. Considérons alors la suite $(y_m)_m$ définie par

$$y_m = \begin{cases} x_1 & \text{pour} \quad 1 \leq m \leq n_1, \\ x_2 & \text{pour} \quad n_1 < m \leq n_2, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ x_k & \text{pour} \quad n_k < m \leq n_{k+1} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La suite $(y_m)_m$ est bien entendu encore convergente vers x et on a donc

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x_m) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k).$$

❸ Avec la première question, si $(f_n)_n$ converge continuement vers f sur A, elle converge simplement sur A vers f. Montrons que f est continue sur A : soit $x \in A$, $(x_n)_n \subset A$ une suite convergente vers x. Pour tout $\varepsilon > 0$, par la convergence de $(f_n(x_1))_n$ vers $f(x_1)$ il existe n_1 (qui à priori dépend de x_1) tel que

$$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $n_2 > n_1$ tel que

$$|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En réitérant ce processus, on construit une suite strictement croissante d'entiers vérifiant

$$(1) \qquad |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Mais avec la question précédente $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$, si bien qu'il existe aussi un entier k_0 tel que

$$(2) \qquad |f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Finalement (1) et (2) assurent que

$$|f(x_k) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall\, k \geq k_0$$

et f est continue au point x, elle est donc continue sur A.

❹ ➪ Supposons maintenant que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers une fonction continue f (les fonctions f_n n'étant pas continues, l'hypothèse de continuité sur f est essentielle vu la question précédente) et montrons que la convergence est continue sur A. Soit donc $(x_n)_n \subset A$ une suite convergente vers $x \in A$. Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous avons

$$(3) \qquad |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{y\in A} |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Et par continuité de f

$$(4) \qquad |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq n_1.$$

Ainsi, pour $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, nous avons vu (3) et (4)

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où la convergence continue sur A.

➪ La réciproque est fausse. Considérons par exemple $A =]0,1[$ et $f_n(x) = x^n$. Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_n$ simplement convergente sur $]0,1[$ vers la fonction f identiquement nulle n'est pas uniformément convergente sur $]0,1[$. Toutefois cette suite converge continuement sur $]0,1[$ vers f car pour toute suite $(x_n)_n \subset]0,1[$ convergente vers $x \in]0,1[$ il existe $0 < a < 1$ tel que $0 < x_n < a$ de sorte que

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n)| \leq a^n$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0 = f(x).$$

❺ ➪ la condition nécéssaire ($\Rightarrow$) à été établie lors de la question précédente.

➪ Pour la condition suffisante ($\Leftarrow$), avec la question 2), nous savons déja que la limite f est continue sur K. Supposons maintenant que notre suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur K : il existe donc $\varepsilon_0 > 0$, une suite $(n_k)_k$ d'entiers et une suite $(x_k)_k$ dans K tels que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \ : \qquad |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0. \tag{5}$$

Comme K est compact on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que la suite $(x_k)_k$ converge vers $x \in K$. Avec la question 1), il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \forall\, n \geq N_0. \tag{6}$$

Par continuité de f, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \forall\, n \geq N_1, \tag{7}$$

si bien qu'en combinant (5), (6) et (7) on obtient pour n assez grand

$$\varepsilon_0 \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x)| + |f(x) - f(x_k)| \leq \frac{2\varepsilon_0}{3}$$

ce qui est absurde. ❑

Exercice 225 (Étude des séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} t^n f(t)$ et $\sum_{n\geq 0} (-1)^n t^n f(t)$) ([10] 1993/94 et 1997/98.)

❶ *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} t^n f(t)$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si f est dérivable en $t = 1$ avec $f(1) = f'(1) = 0$.*

❷ *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Étudier la simple puis uniforme convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n t^n f(t)$ sur $[0,1[$.*

❶ Notons pour $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n f(t) \end{cases}$$

➪ Remarquons qu'il y a bien sûr simple convergence sur $[0,1[$ de somme $\frac{f(t)}{1+t}$. En outre il y aura convergence en $t=1$ si, et seulement si, $f(1)=0$. En résumé la série est simplement convergente sur $[0,1]$ si, et seulement si, $f(1)=0$ et

$$\sum_{n\geq 0} t^n f(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{1+t} & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 0 & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

➪ Supposons $f(1)=0$ et désignons par R_n le reste d'ordre n de la série simplement convergente $\sum_{n\geq 0} f_n$. On a donc :

$$\begin{cases} R_n(t) & = & \sum_{k\geq n+1} t^k f(t) = \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} = -t^{n+1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}, \ t\in[0,1[\\ R_n(1) & = & 0 \end{cases}$$

⇝ Supposons f dérivable en $t=1$ avec $f'(1)=0$ et soit $\varepsilon>0$, il existe $0<\eta<1$ tel que

$$\forall\, t\in[1-\eta,1[, \qquad \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq \varepsilon,$$

de sorte que

(1) $$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, t\in[1-\eta,1[\quad : \quad |R_n(t)| \leq t^{n+1}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

D'autre part, l'application $t\mapsto \frac{f(t)-f(1)}{t-1}$ est bornée sur $[0,1-\eta,]$, il existe donc $M>0$ tel que

$$\forall\, t\in[0,1-\eta], \qquad \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq M$$

soit

(2) $$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, t\in[0,1-\eta] \quad : \quad |R_n(t)| \leq M(1-\eta)^{n+1}.$$

Puisque $0<\eta<1$, $\lim_{n\to+\infty}(1-\eta)^{n+1}M = 0$ si bien qu'en combinant (1), (2) et $R_n(1)=0$ on peut écrire

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, n\geq N \implies \sup_{t\in[0,1]} |R_n(t)| \leq \varepsilon$$

qui équivaut à l'uniforme convergence sur $[0,1]$ de $\sum_n f_n$.

⇝ Réciproquement, supposons la convergence uniforme sur $[0,1]$ et soit $\varepsilon>0$ fixé. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$n\geq N \implies |R_n(t)| \leq \varepsilon$$

soit

$$(3) \qquad \forall\, t \in [0,1] \;:\; \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq \varepsilon t^{-(N+1)}$$

et comme $\lim_{t\to 1_-} t^{-(N+1)} = 1$ il existe $0 < \eta < 1$ tel que

$$(4) \qquad 1-\eta < t \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq t^{-(N+1)} \leq 2$$

(3) et (4) nous donnent

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta \in]0,1[\quad : \quad \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq 2\varepsilon$$

i.e. f est dérivable en $t = 1$ et $f'(1) = 0$

En résumé, la série $\sum_{n\geq 0} t^n f(t)$ converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si f est dérivable au point $t = 1$ avec $f(1) = f'(1) = 0$.

❷ ➪ Pour $0 \leq t < 1$ la série est bien évidement convergente avec $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n f(t) = \frac{f(t)}{1+t}$. Pour $t = 1$ la série converge si et seulement si, $f(1) = 0$.

➪ Étudions maintenant la convergence uniforme sur $[0,1[$. Le reste de la série est

$$R_n(t) := \sum_{k\geq n+1} (-1)^k t^k f(t) = \frac{(-t)^{n+1} f(t)}{1+t},$$

si bien que ($\frac{1}{1+t}$ variant sur $[0,1[$ entre 1/2 et 1) la série converge uniformément sur $[0,1[$ si, et seulement si, la suite $(t^{n+1}f(t))_n$ tend uniformément vers zéro sur $[0,1[$. Supposons que f tende vers 0 en 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta < 1$ tel que

$$1-\eta < t < 1 \quad \Longrightarrow |f(t)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, f est bornée sur $[0, 1-\eta]$:

$$\exists\, M > 0 \;:\; \quad |f(t)| \leq M, \quad \forall\, t \in [0, 1-\eta]$$

soit

$$|R_n| \leq \frac{\max\{\varepsilon, M(1-\eta)^{n+1}\}}{1+t} \leq 2\varepsilon, \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

d'où la convergence uniforme sur $[0,1[$ et donc sur $[0,1]$ si on pose $f(1) = 0$.

➪ Supposons maintenant la convergence uniforme sur $[0,1[$, en particulier pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad |t^{n+1} f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0,1[$$

et posant $\eta = 1 - 2^{-\frac{1}{n+1}}$ on a $|f(t)| \leq 2\varepsilon,\ \forall\, t \in [1-\eta, 1[$, autrement dit

$$\lim_{t\to 1_-} f(t) = 0$$

➪ En résumé, la série converge uniformément sur $[0,1[$ si, et seulement si $\lim_{t\to 1_-} f(t) = 0$. Si par ailleurs $f(1) = 0$ la convergence est alors uniforme sur $[0,1]$. ❑

Exercice 226 (approximation, convergence uniforme)
Si une suite de polynômes converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa limite est un polynôme.

Soit $(P_n)_n$ une telle suite et f sa limite. La suite $(P_n)_n$ satisfait donc au critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$, en particulier avec $\varepsilon = 1$

$$(\exists N \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \ \& \ p \in \mathbb{N}\ ) \Longrightarrow \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |P_n(x) - P_{n+p}(x)| \leq 1\right)$$

en particulier pour $p \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_N - P_{N+p}$ borné sur $\mathbb{R}$ est constant

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \ : \ \exists\, C_p \in \mathbb{R} \ : \ P_N - P_{N+p} = C_p \qquad (8)$$

et puisque

$$\lim_p P_{N+p}(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

en faisant $x = 0$ dans (✘) on en déduit que la suite $(C_p)_p$ converge

$$\lim_p \left(P_N(0) - P_{N+p}(0)\right) = P_N(0) - f(0) = l = \lim_p C_p.$$

On passe alors à la limite sur p dans (✘) pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ arbitraire :

$$l = \lim_p C_p = \lim_p \left(P_N(x) - P_{N+p}(x)\right) = P_N(x) - f(x)$$

soit

$$f(x) = l + P_N(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

❑

Exercice 227 (Une caractérisation de la fonction sinus) [10] *(3)-2005/06*
Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une application 2π-périodique. Si $f'(0) = 1$ et $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ montrer que $f(x) = \sin(x)$.

❶ **Le cas 2π-périodique** **Première étape :** f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique on peut donc lui appliquer les relations bien connues reliant les coefficients de Fourier d'une fonction a ceux de ses dérivées :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad : \quad c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

qui impliquent

(✔) $$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad : \quad |c_n(f^{(k)})| = |n|^k |c_n(f)|.$$

Soit, vu les hypothèses sur f et ses dérivées :

(✘)
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad : \quad |c_n(f^{(k)})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt\right| \leq 1.$$

Supposons maintenant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que
$$|n_0| \geq 2 \quad \text{et} \quad |c_{n_0}(f)| > 0$$
alors vu (✔) :
$$\lim_{k\to+\infty} |c_{n_0}(f^{(k)})| = \lim_{k\to+\infty} {n_0}^k |c_{n_0}(f)| = +\infty$$
contredisant (✘), ainsi
$$c_n(f) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$$
et la série de Fourier de f est de la forme
$$c_{-1}(f)e^{-ix} + c_0(f) + c_1(f)e^{ix} = a\cos(x) + b\sin(x) + c \quad \text{où} \ \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$
f étant $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, les théorèmes classiques de convergence nous assurent que
$$f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c, \quad \forall\, x \in]-\pi, \pi[.$$

Seconde étape : Il ne reste plus qu'à exploiter les trois dernières hypothèses
$$f'(0) = 1, \quad \|f\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f'\|_\infty \leq 1$$
En effet, $f'(0) = 1$ implique $b = 1$ et, au voisinage de zéro
$$f'(x) = a\sin(x) - \cos(x) = -1 + ax + o(x)$$
qui sera, si $a \neq 0$, strictement plus petit que -1 lorsque x tendra vers zéro suivant le signe contraire de a : c'est contraire à l'hypothèse et donc $a = 0$. Regardant au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, on obtient $c = 0$, soit finalement
$$f(x) = \sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Q.E.D. ❏

ℹ **Remarque :** Sans la 2π-périodicité, on pourrai bien sûr envisager de réitérer le même raisonnement sur la fonction g 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et égale à f sur $]-\pi, \pi]$ pour en déduire que g puis f (car f est clairement développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et égale à g sur $]-\pi, \pi]$) coïncide avec la fonction sinus sur $]-\pi, \pi]$; mais malheureusement une obstruction apparait : g n'étant même plus continue (à priori) en les points de $\pi\mathbb{Z}$, les formules $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$: $c_n(g^{(k)}) = (in)^k c_n(g)$ ne sont plus valables. En effet elle s'obtiennent aprés k intégrations par parties dans $c_n(g^{(k)})$, les termes « entre crochets » disparaissant grâce au caractère continu (et la 2π périodicité) de g en $-\pi$ et π ; de ce fait, dans notre cas, la non continuité de g et à fortiori de ses dérivées en ces points va faire apparaitre à droite un polynôme en n qui (semble) rendre vain tout espoir de généralisation par cette méthode....

❷ **Le cas général** On va proposer deux solutions (ces deux solutions sont tirées du volume 116-3 de la RMS, [10]), l'une s'appuyant sur la théorie des fonctions holomorphes,

l'autre sur l'analyse fonctionnelle. Commencons par fixer quelques notations communes aux deux solutions.
Pour toute fonction bornée sur $\mathbb{R}$, on pose $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. L'espace vectoriel

$$\mathscr{E}_{\mathbb{C}} := \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ : \ \exists\, c > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)| \leq c\}$$

(on définit de même l'espace réel $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$) sera normé par $N(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f^{(n)}\|$; on désignera par $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel $\mathscr{E}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ des applications à valeurs réelles. Enfin, $\mathscr{B}$ désignera l'espace des fonctions entières f vérifiant

$$\exists\, c > 0 \ : \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq ce^{|\mathrm{Im}(z)|},$$

il est normé par $N_{\mathscr{B}}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-|\mathrm{Im}(z)|}$.

Notre objectif est alors le suivant

Théorème : *La solution dans $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ de $N(f) \leq 1$ & $f'(0) = 1$ est $f = \sin$.*

Résultats préliminaires :

Lemme 3.
$\rightsquigarrow$ *Pour toute application $f \in \mathscr{E}$, il existe une unique fonction entière $\tilde{f}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ est f. De plus, $\tilde{f} \in \mathscr{B}$ et $N_{\mathscr{B}}(\tilde{f}) \leq N(f)$.*
$\rightsquigarrow$ *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ (resp. $\tau \in \mathbb{C}$) et $f \in \mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{B}$) les translatés $x \mapsto f_t(x) = f(x+t)$ (resp. f_τ) restent dans $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{B}$).*
$\rightsquigarrow$ *De toute suite $(f_n)_n$ bornée de $(\mathscr{E}, N)$ il existe une application $f \in \mathscr{E}$ et une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telles que pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ la suite $(f_{n_k}^{(j)})_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $f^{(j)}$ (i.e. converge dans[1] $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$).*

Preuve : Les hypothèses sur f assurent qu'elle est la restriction à la droite réelle de la série entière

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

de rayon de convergence infini. En outre pour tout $x + iy \in \mathbb{C}$

$$|\tilde{f}(x+iy)| \leq \sum_{n\geq 0} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(iy)^n \right| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|y|}{n!} = e^{|y|}N(f)$$

soit $f \in \mathscr{B}$ et $N_{\mathscr{B}}(\tilde{f}) \leq N(f)$.
La seconde assertion est immédiate et la troisième se déduit du fait que toute partie bornée de $(\mathscr{E}, N)$ est bornée dans l'espace de Montel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. □

Première solution : Pour $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ posons

$$Q(f) = f(0)^2 + f'(0)^2, \quad R(f) = \|f^2 + f'^2\|.$$

[1] Pour la topologie usuelle de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ voir l'exercice ? ? ou [46], [47].

Il est clair que $Q(f) \leq R(f) \leq 2N(f)^2, \quad \forall\, f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}$, ce qui justifie la définition

$$\rho := \sup_{f\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}},\ N(f)\leq 1} R(f).$$

La démonstration repose sur la détermination de ρ et l'étude de $X := \{f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}} \ :\ N(f) \leq 1 \ \text{ et } \ Q(f) = \rho\}$, elle se divise en trois étapes.
On peut déja remarquer que $\rho \geq 1$ car l'application $x \mapsto \sin(x)$ est dans $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$.

☕ *L'ensemble X est non vide.*

En effet, considérons une suite $(f_k)_k$ d'éléments de $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ telle que

$$N(f_k) \leq 1,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} R(f_k) = \rho.$$

Quitte à remplacer chaque f_k par une de ses translatés (via le lemme, mais il faut être tout de même délicat car le « sup » peut être atteint « à l'infini »...) on peut supposer que $\lim_k Q(f_k) = \rho$. La troisième assertion du lemme assure alors de l'existence d'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et d'une application $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ telles que pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ la suite $(f_{n_k}^{(j)})_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $f^{(j)}$. Clairement, $f \in X$ qui est non vide. □

☕ *Soit $f \in X$. Si $f'(0) \neq 0$, alors $f''(0) = -f'(0)$ et $f' \in X$.*

Vu la définition de ρ et de X, pour toute $f \in X$, la fonction $g := f^2 + f'^2$ admet un maximum local en $x = 0$, soit $g'(0) = 0$ et le résultat suit. □

☕ $\rho = 1$.

Supposons par l'absurde que $\rho > 1$. Dans ce cas, pour tout $f \in X : f(0)f'(0) \neq 0$ (ne pas oublier que dans ce cas $Q(f) = f^2(0) + f'^2(0) > 1$ et $\max\{|f(0)|, |f'(0)|\} \leq 1$...) ; on peut donc, en invoquant la seconde étape, en déduire que

$$\forall\, f \in X,\ n \in \mathbb{N} \ :\quad f^{(n)} \in X \quad \text{et} \quad f^{n+2}(0) = -f^{(n)}(0).$$

Toutes les applications f étant développables en série entière, X est donc inclu dans le plan engendré par les fonctions sin et cos, mais sur ce plan Q et N^2 coïncident ce qui contredit l'assertion $\rho > 1$. □

Preuve du théorème : Considérons

$$Y = \{\, f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}} \ :\quad N(f) \leq 1 \ \text{ et } \ f'(0) = 1\,\}.$$

Vu ce qui précède, $Y \subset X$ et $\forall\, f_i n X \ :\ f(0) = 0$. Pour conclure, il suffit de montrer que

$$(f_i n Y) \implies (-f'' \in Y),$$

en effet, si tel est le cas on aura

$$\forall\, f \in Y,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ :\quad f^{(2n)}(0) = 0,\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

soit (f étant développable en série entière) $f = \sin$.
Soit donc $f_i n Y$. En considérant à nouveau $g = f^2 + f'^2$, comme g présente à l'origine un maximum local, donc $g''(0) \leq 0$ qui implique (pas clair encore...) $f'''(0) \leq -1$; et comme $N(f) \leq 1$ ceci implique $f'''(0) = -1$ i.e. $-f'' \in Y$, ce qu'il restait à établir. □

Seconde solution :

Exercice 228 (Approximations uniforme de la valeur absolue sur $[-1,1]$)
① *Utiliser les séries de Fourier pour approcher uniformément $f(x)=|x|$ sur $[-1,1]$ par des polynômes.*
② *Montrer que pour $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ et $|x|<1$*

$$(\bigstar)\qquad (1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

en déduire pour $|x|<1$ que

$$(\text{✘})\qquad |x| = 1-\frac{1}{2}(1-x^2)-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n$$

③ *Montrer que la suite de polynômes $(P_n)_n$ définie par*

$$P_0(x)=0,\quad P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}\left(x-P_n^2(x)\right),\quad n\in\mathbb{N}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers $g(x)=\sqrt{x}$. En déduire une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $f(x)=|x|$.

❶ $x\in[-1,1]$, on pose donc $x=\cos(t),\ t\in[-\pi,\pi]$. La fonction $g(t)=f(\cos(t))=|\cos(t)|$ est 2π-périodique continue et C^1 par morceaux : elle est donc développable en série de Fourier et sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Par parité

$$|\cos(t)| = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nt)+\frac{a_0}{2}\right)\qquad\text{uniformément en } t\in[-\pi,\pi].$$

Il est alors facile de vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\cos(nt)$ est un polynôme en $\cos(t)$ (écrire $\cos(nt)=\mathsf{re}\left((\cos(t)+i\sin(t))^n\right)$ et dans ce dernier terme les sinus apparaissent sous une puissance paire, il ne reste plus qu'à écrire $\sin^{2k}(t)=(1-\cos^2(t))^k\ldots$). Ainsi $|\cos(t)|$ est limite uniforme sur $[-\pi,\pi]$ de polynômes en $\cos(t)$, il ne reste plus qu'à remplacer $\cos(t)$ par x pour conclure.

❷ On peut obtenir la formule $(\bigstar)$ avec les séries entières en écrivant $(1+x)^\alpha=\exp(\alpha\log(1+x))$, on peut tout aussi bien le faire en montrant dans la formule de Taylor-Lagrange appliquée à $(1+x)^\alpha$ à l'ordre N, que le reste $r_N(x)$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini et ceci pour tout $x\in]-1,1[$ en effet

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-N)}{(N+1)!}x^{N+1}(1+x\theta_x)^{\alpha-N-1}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_N(x)\end{aligned}$$

où $0<\theta_x<1$. Or, pour tout $x\in]-1,1[$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-N)}{(N+1)!}x^{N+1} = 0$$

de sorte que pour s'assurer que $\lim_N r_N(x) = 0$, il suffit de montrer que la suite $\left((1+x\theta_x)^{\alpha-N-1}\right)_N$ est bornée. Et ceci lorsque $x \in [0,1[$ résulte des inégalités

$$\begin{cases} 1 \leq (1+x\theta_x)^\alpha \leq 2^\alpha & \text{si } \alpha \geq 0 \\ 2^\alpha \leq (1+x)^\alpha \leq (1+x\theta_x)^\alpha \leq 1 & \text{si } \alpha < 0 \\ (1+x\theta_x)^{-N} \leq 1 \end{cases}$$

d'où (★) pour $x \in [0,1[$ et donc sur $]-1,1[$ puisque le domaine de convergence d'une série entière est toujours une boule.
Pour obtenir (✘) il n'y a plus qu'à écrire

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$$

et appliquer (★) avec $\alpha = 1/2$.

❸ La troisième question est plus classique, consultez votre livre de chevet favori.

🛈 **Remarques :** ➪ On peut s'étonner d'un tel engoument pour approcher la valeur absolue : c'est un « tic historique » probablement du à la preuve trés ingénieuse que le jeune H.Lebesgue (23 ans) donne en 1898 du célèbre théorème de Weierstrass (toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est limite uniforme de polynômes), pour cela, il commence par observer qu'il est facile d'approcher une fonction continue par une application continue affine par morceaux, qu'un tel objet est combinaison linéaire de translations de $|x|$; les polynômes étant invariant par translation, il suffit donc d'approcher uniformément $|x|$ sur tout voisinage de l'origine. Ce que fit Lebesgue en exhibant justement celle de la seconde série (ce fut sa première publication...).

➪ Dans la seconde question, la théorie des séries entières assure la convergence uniforme (et même normale) seulement sur tout $[-a,a] \subset]-1,1[$. En fait comme pour les autres exemples, la convergence est uniforme sur $[-1,1]$, elle résulte de..................................... ❏

Exercice 229 ($f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m}\cos(m^2x)$ n'est pas développable en série entière) *Exemple d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor en $x=0$ admet un rayon de convergence nul :*
Soit

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m}\cos(m^2x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x),$$

montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas développable en série entière à l'origine.

Que f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que l'on puisse dériver sous la somme relève du théorème de Weierstrass, en effet les séries des dérivées de tout ordre sont normalement convergente sur

$\mathbb{R}$ car l'exponentielle « l'emporte » sur la puissance et les fonctions sin et cos sont bornées sur $\mathbb{R}$...

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R} \;:\; f^{(k)}(x) = \sum_{m\geq 0} f_m^{(k)}(x)$$

en particulier

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sum_{m\geq 0} e^{-m}(m^2)^{2n}.$$

Donc, sous réserve de convergence, la série de Taylor de f à l'origine est donnée par (les dérivées impaires de f sont nulles)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\left(\sum_{m\geq 0} e^{-m}(m^2)^{2n}\right).$$

en particulier

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}|f^{(2n)}(0)| &= \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\sum_{m\geq 0} e^{-m}m^{4n}\\ &\geq \left(\frac{|x|}{2n}\right)^{2n}\sum_{m\geq 0} e^{-m}m^{4n}\\ &\geq \left(\frac{|x|m^2}{2n}\right)^{2n} e^{-m}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

et si on prend $m = 2n$

$$\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}|f^{(2n)}(0)| \geq \left(\frac{|x|2n}{e}\right)^{2n} \geq 1 \quad \text{dès que} \quad n > \frac{e}{2|x|}$$

i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, le terme général de la série de Taylor de f à l'origine ne tend pas vers zéro dès que $x \neq 0$: la série diverge grossièrement, le rayon de convergence est donc nul. ❑

🛈 **Remarque :** voir aussi l'exercice ? ? ? pour l'exemple archi-classique d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ non développable en série entière à l'origine à série de Taylor à l'origine convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 230 (Développement en série de Fourier de $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$, série entière) ([10],1997/98).

Développer en série de Fourier la fonction $\qquad f(x) = \dfrac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}.$

f est clairement $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, elle admet donc un développement en série de Fourier de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ (Dirichlet). Il est sage de se persuader qu'un calcul direct des coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}\cos(nx)dx$$

est plus qu'incertain, voire déconseillé, voici donc deux méthodes qui donnent ce développement par des chemins détournés.

❶ **Première méthode :**

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} = \frac{2+e^{ix}+e^{-ix}}{2(4-e^{ix}-e^{-ix})} = \frac{2e^{ix}+e^{2ix}+1}{2(4e^{ix}-e^{2ix}-1)} = F(e^{ix}) \text{ où } F(X) = -\frac{X^2+2X+1}{2(X^2-4X+1)}$$

Les pôles de F sont $\alpha = 2-\sqrt{3}$ et α^{-1} et on peut (après avoir décomposé en éléments simples) développer F en puissance relatives de X, (on retrouve le développement en série de Laurent de la fonction méromorphe F sur $\mathbb{C}$ sur la couronne $C(0,\alpha,\alpha^{-1})$ pour ceux qui s'en souviennent)

$$\begin{aligned} F(X) &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha\sqrt{3}}{X(1-\frac{\alpha}{X})} - \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha X}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{|n|}X^n, \qquad \alpha < |X| < \alpha^{-1} \end{aligned}$$

le cercle unité étant clairement inclus dans la couronne $\{\alpha < |X| < \alpha^{-1}\}$ on peut faire $X = e^{ix}$ dans le développement précédent

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} = F(e^{ix}) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^{|n|}e^{inx} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\geq 1}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)^n\cos(nx),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Nous avons donc trouvé un développement en série trigonométrique de f sur $\mathbb{R}$, visiblement normallement convergente sur $\mathbb{R}$: **c'est** le développement en série de Fourier de f (la convergence uniforme sur un intervalle de longueur 2π permet de s'en assurer (échange justifié de somme et d'intégrale))

❷ **Seconde méthode :** nous savons que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$ qu'on peut aussi écrire

$$(4-2\cos(x))\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = 1+\cos(x)$$

la convergence étant normale sur $\mathbb{R}$ en réordonnant, on trouve

$$(4a_0-a_1-1)+(4a_1-a_0-a_2-1)\cos(x)+\sum_{n\geq 2}(4a_n-a_{n-1}-a_{n+1})\cos(nx) = 0$$

cette série trigonométrique étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$ ses coefficients sont nuls (c'est du cours) donc

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} 4a_0 - a_1 & = 1 \\ 4a_1 - a_0 - a_2 & = 1 \\ 4a_n - a_{n-1} - a_{n+1} & = 0, \quad \forall\, n \geq 2. \end{cases}$$

on retrouve un système classique à résoudre : son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 1 = 0$ la solution générale est $a_n = \lambda\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \mu\left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Comme $\lim_n a_n = 0$, λ est nul et $a_n = a_1\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, $n \geq 1$, enfin avec les deux premières équations de $(\bigstar)$ il vient $a_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $a_1 = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ et finalement

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\geq 1}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)^n \cos(nx).$$

❑

Exercice 231 (Inégalité de Bernstein via les séries de Fourier) A.Pommellet, [10]-6, 1992/93.

On appelle **polynôme trigonométrique** *toute application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *de la forme* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$, $a_k \in \mathbb{C}$ *; et toute application du type* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$, *avec* $a_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *est un* **polynôme trigonométrique généralisé**.
L'objectif de cet exercice est d'établir à l'aide des séries de Fourier la célèbre inégalité suivante, due au mathématicien russe BERNSTEIN *:*

(★) $\qquad \|P'\|_\infty \leq n\,\|P\|_\infty$ *pour tout polynôme trigonométrique* P.

Pour tout polynôme trigonométrique généralisé, on pose $\Lambda := \max_{-n\leq k\leq n} |\lambda_k|$, *on va montrer que*

(✘) $\qquad \|P'\|_\infty \leq \Lambda\,\|P\|_\infty$ *pour tout polynôme trigonométrique généralisé* P.

❶ *Montrer que* (✘) $\Longrightarrow$ (★).

❷ *Montrer que pour établir* (✘) *on peut toujours supposer que* $\Lambda = \frac{\pi}{2}$.

❸ *Soit* Ψ *la fonction numérique qui vaut* t *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\pi - t$ *sur* $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ *et qui est prolongée par* 2π*-périodicité sur* $\mathbb{R}$ *tout entier. Montrer que*

$$\Psi(t) = \sum_{l\geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} \sin\left((2l+1)t\right), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

❹ *Montrer que* $P'(t) = i\sum_{k=-n}^{n} a_k \Psi(\lambda_k) e i \lambda_k t$.

❺ *En déduire que* $\quad P'(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i(t+2l+1)\lambda_k} - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i(t-2l-1)\lambda_k}\right)$

❻ *Puis* $\quad \|P'\|_\infty \leq \dfrac{4}{\pi}\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}\right)\|P\|_\infty$ *et conclure.*

❶ C'est clair, car dans ce cas : $\Lambda = \max\{0, 1\ldots, n\} = n$.

❷ Si $\Lambda = 0$, P est constant et on a même égalité. Si $\Lambda > 0$ est différent de $\pi/2$ on fait le changement de variable $u = \frac{2}{\pi\Lambda} t$ et

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k t} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\frac{\pi\lambda_k}{2\Lambda}\frac{2\Lambda}{\pi}t} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\frac{\pi\lambda_k}{2\Lambda}u} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\tilde{\lambda}_k u} = \tilde{P}(u)$$

on a donc : $\tilde{P}(x) = P(\frac{\pi x}{2\Lambda})$ sur $\mathbb{R}$, et $\tilde{\Lambda} = \frac{\pi}{2}$ soit

$$\|P\|_\infty = \|\tilde{P}\|_\infty, \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2\Lambda}\|P'\|_\infty = \|\tilde{P}'\|_\infty$$

(on a ici implicitement utilisé la relation évidente $\widetilde{P'} = (\tilde{P})'$). Supposons maintenant (✘) vraie si $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, pour tout polynôme trigonométrique généralisé on aura

$$\|\tilde{P}'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|\tilde{P}\|_\infty, \quad \text{soit} \quad \frac{\pi}{2\Lambda}\|P'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|P\|_\infty$$

i.e.

(✘) $$\|P'\|_\infty \leq \Lambda\,\|P\|_\infty$$

Il ne reste donc plus qu'à établir (✘) *pour tout polynôme trigonométrique généralisé vérifiant* $\Lambda = \frac{\pi}{2}$.

❸ Ψ est continue, 2π périodique et C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet nous assure que la série de Fourier de Ψ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers Ψ. Et un calcul élémentaire nous donne

$$\Psi(t) = \sum_{l\geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} \sin\left((2l+1)t\right), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

❹ Soit donc $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$ un polynôme trigonométrique généralisé vérifiant $\Lambda = \frac{\pi}{2}$. La grande astuce consiste à remarquer qu'alors

$$\left(\Lambda = \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad (\lambda_k = \Psi(\lambda_k), \quad -n \leq k \leq n) \quad \text{puisque sur} \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \;:\; \Psi(t) = t$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
|P'(t)| &= \left|\sum_{k=-n}^{n} a_k i\lambda_k e^{i\lambda_k t}\right| \\
&= \left|\sum_{k=-n}^{n} ia_k \Psi(\lambda_k) e^{i\lambda_k t}\right| \\
&= \left|\sum_{k=-n}^{n} ia_k \left(\sum_{l\geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2}\sin\left((2l+1)\lambda_k\right)\right) e^{i\lambda_k t}\right| \\
&= \left|\sum_{l\geq 0}\sum_{k=-n}^{n} \frac{2(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} a_k \left(e^{i(t+2l+1)\lambda_k} - e^{i(t-2l-1)\lambda_k}\right)\right| \\
&\leq \sum_{l\geq 0} \frac{2}{\pi(2l+1)^2}\left(|P\left(t+2l+1\right)| + |P\left(t-2l-1\right)|\right) \\
&\leq \frac{4\|P\|_\infty}{\pi}\sum_{l\geq 0}\frac{1}{(2l+1)^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\|P\|_\infty, \quad \forall\, t\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

(dans la dernière inégalité on a utilisé $\sum \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ qu'on déduit de $\sum \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6}$...) soit $\|P'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|P\|_\infty$ d'où (✘) si $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, et d'où (✘) pour tout polynôme trigonométrique généralisé vu la question ❷, d'où l'inégalité de Bernstein par la question ❶. ❑

Exercice 232 (Une fonction continue non dérivable à l'origine mais développable en série de Fourier (1))

Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale à $\sqrt{x}$ sur $[0,\pi]$.

❶ *Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?*

❷ *Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, montrer que pour tout $x>0$*

$$G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt.$$

En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ existe, est finie et strictement positive.

❸ *Soit pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$. à l'aide de la question précédente montrer que $a_n = 0(n^{-3/2})$.*

❹ *Montrer sans Fejèr que f est développable en série de Fourier.*

❺ *Montrer avec Fejèr que f est développable en série de Fourier.*

❶ Non car en les points $2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ f n'est pas dérivable et n'admet pas de dérivée à droite et à gauche (ailleurs f est continue et $\mathscr{C}^\infty$ sauf en les points $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou f n'est pas dérivable mais admet une dérivée à droite et à gauche).

❷ C'est une bestiale intégration par parties faisant apparaître une intégrale généralisée (avec la régle habituelle qu'elle marche si deux termes parmi les trois existent : en zéro pas problème — faire un DL—) il en résulte (le premier terme à droite tend vers zéro car majoré par $1/2|x|$ et $\frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}$ est intégrable en l'infini puisque majoré en module par $1/|x|^2$) que $\lim_{x\to\infty} G(x)$ existe et vaut $\int_0^\infty \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2} dt = C > 0$.

❸ On a :

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{t}\cos(nt)dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{n\pi}} \frac{u}{\sqrt{n}}\cos(u^2)\frac{2u\,du}{n} \quad \text{(avec le changement } u = \sqrt{nt}) \\
&= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}} u^2\cos(u^2)du \\
&= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\left(\left[\frac{u\sin^2(u)}{2}\right]_0^{\sqrt{n\pi}} - \int_0^{\sqrt{n\pi}} \frac{\sin(u^2)}{2}du\right) \\
&= -\frac{2}{\pi n^{3/2}}G(\sqrt{n\pi}) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2C}{\pi n^{3/2}} \quad \text{(d'après la question précédente).}
\end{aligned}$$

❹ Vu ce qui précède, la série de Fourier de f : $S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, par suite $S_f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$; la convergence normale nous dit aussi que $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ est la série de Fourier de S_f i.e. les deux fonctions continues f et S_f ont les mêmes coefficients de Fourier : donc $f = S_f$ (par exemple via Parseval appliqué à $f - S_f$...) i.e.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx),$$

f est donc bien développable en série de Fourier.

❺ Le théorème de Féjer[2] assure que les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction f continue convergent au sens de Césaro vers f, c'est donc ici le cas, mais la série de Fourier de f est aussi convergente sur $\mathbb{R}$ et la convergence usuelle implique la convergence au sens de Césaro et vers la même limite : le résultat suit. ❑

[2]Voir par exemple....

Exercice 233 (Une fonction continue non dérivable à l'origine mais développable en série de Fourier (2))

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

❶ *Montrer que* $f \in \mathscr{C}_0^{2\pi}$.

❷ *Montrer que* f *est développable en série de Fourier sur* $\mathbb{R}$.

❸ *On va montrer que* f *n'est pas dérivable à l'origine.*

- *Montrer que* $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$, $\forall\, x \in [0, \pi/2]$.
- *Soit* $x \in]0, \pi/2[$, *pour* $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$ *(E est la partie entière...) montrer que*

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(kx)}{kx}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1} \frac{\sin(kx)}{k^2}\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\sin(kx)}{k^2} := \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + R_N(x).\end{aligned}$$

- *Montrer que* $R_N(x) = \sum_{k\geq N+1} \frac{\varphi_n(x)}{x}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$ *où* $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.
- *Montrer que pour* $x \in]0, \pi/2[$:

$$|\varphi_n(x)| \leq \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}.$$

- *En déduire que pour* $x \in]0, \pi/2[$ *et* $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$:

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{\pi}{N^2x^2}.$$

- *En déduire que* f *n'est pas dérivable à l'origine.*

❶ Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin(nx)/n^2| = 1/n^2$ la série converge normalement sur $\mathbb{R}$: f est donc continue sur $\mathbb{R}$, elle bien entendu 2π-périodique.

❷ La série définissant f est une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbb{R}$: c'est donc la série de Fourier de f.

Pour justifier ce dernier point, si $f(x) = \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikx}$ où la convergence est uniforme sur un intervalle de longueur au moins 2π, il s'agit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\alpha_k = c_k(f)$. Nous avons

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l e^{ilt}e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)t}dt = \alpha_k$$

où l'inversion $\int\sum = \sum\int$ est justifiée par l'uniforme convergence de la série sur $[0, 2\pi]$) la série de Fourier de f.

❸ • C'est une inégalité classique (inégalité de Jordan) souvent fort utile. Pour la démontrer on peut étudier la fonction ou mieux, invoquer la concavité de $h : x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, \pi/2]$ qui implique que h est au dessus de la corde reliant $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$ i.e. la droite d'équation $y = 2x/\pi$.

• Soit $x \in]0, \pi/2[$, pour $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$

$$(1 \leq k \leq N) \quad \Longrightarrow \quad \left(0 < kx \leq \mathrm{E}(\pi/2x)x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

on peut donc appliquer l'inégalité de Jordan

$$\frac{\sin(kx)}{kx} \geq \frac{2kx}{\pi kx} = \frac{2}{\pi}, \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, N\},$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(kx)}{kx}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1} \frac{\sin(kx)}{k^2}\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1} \frac{\sin(kx)}{k^2}.\end{aligned}$$

• C'est une « banale » transformation d'Abel.

• Pour $x \in]0, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x)| &= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{e^{ikx}}\right)\right| \leq \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right|\\ &= \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}\right|\\ &\leq \frac{2}{|2i\sin(x/2)|}\\ &\leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}\end{aligned}$$

où l'on a appliqué encore une fois l'inégalité de Jordan dans la dernière inégalité.

• D'où

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + R_n(x) \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - |R_n(x)| \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}|\varphi_n(x)|\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\pi}{x}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{\pi}{N^2x^2}
\end{aligned}
$$

.

• Si x tends vers zéro, $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$ tends vers $+\infty$ et N^2x^2/π tends vers $4/\pi$ de telle sorte que dans l'inégalité précédente le terme de droite tends vers l'infini avec N qui implique à son tour $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = +\infty$: f n'est pas dérivable à l'origine. ❏

Exercice 234 (Une fonction continue dont la série de Fourier diverge à l'origine)

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ *définie sur* $[0,\pi]$ *par*

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x}{2}\right].$$

❶ *Montrer que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge normalement sur* $[0,\pi]$.

On désigne alors par f *la fonction paire, continue,* 2π*-périodique sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant pour tout* $x\in[0,\pi]$: $f(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

❷ *Montrer que* $f\in\mathscr{C}^0_{2\pi}$.

❸ *On pose pour* $p,k\in\mathbb{N}$, $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(pt)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)dt$, *et pour tout entier* $q\in\mathbb{N}$: $T_{q,k}=\sum_{p=0}^q I_{p,k}$.

a) *Calculer, pour* p,k *entiers naturels l'intégrale* $I_{p,k}$.

b) *Pour* $q,k\in\mathbb{N}$, *déterminer un réel positif* c_k *tel que* $T_{q,k} = c_k + \displaystyle\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1}$.

c) *En déduire que* $T_{q,k}\geq 0$ *pour tout couple* (q,k) *d'entiers.*

d) *Déterminer un équivalent simple de* $\sum_{k=0}^N \dfrac{1}{2k+1}$ *au voisinage de* $+\infty$.

e) *En déduire que* $T_{k,k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\log(k)}{2}$.

❹ *Montrer que pour tout* $p\in\mathbb{N}^\star$, $a_p(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}I_{p,2^{n^3}-1}$.

❺ *Montrer que pour tout* $p\in\mathbb{N}^\star$, $S_{2^{p^3}-1}(f)(0) \geq -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi p^2}T_{2^{p^3}-1,2^{p^3}-1}$ *(on pourra remarquer que* $\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{l=1}^N a_l(f) = -\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{l=0}^N a_l(f)\ldots$*).*

❻ *En déduire que la suite* $(S_n(f)(0))_n$ *diverge.*

❶ La convergence normale est évidente ($\|f_n\|_\infty = 1/n^2$) la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est donc une fonction continue sur $[0,\pi]$.

❷ Par parité et prolongement 2π-périodique, $\lim_{x\to-\pi_+} f(x) = \lim_{x\to\pi_+} f(x) = \lim_{x\to\pi_-} f(x)$: f est donc bien continue en les points $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ce qui était le seul point douteux.

❸ a) De la formule $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$ on tire

$$\begin{aligned}
I_{p,k} &= \int_0^\pi \cos(pt)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}+p\right)t\right)+\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}-p\right)t\right)\right]dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left(\left(\frac{2k+1}{2}+p\right)t\right)}{\frac{2k+1}{2}+p}+\frac{\cos\left(\left(\frac{2k+1}{2}+p\right)t\right)}{\frac{2k+1}{2}-p}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2(k+p)+1}+\frac{1}{2(k-p)+1}
\end{aligned}$$

b) On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
T_{q,k} = \sum_{p=0}^q I_{p,k} &= \sum_{p=0}^q \frac{1}{2(k+p)+1}+\sum_{p=0}^q \frac{1}{2(k-p)+1} \\
&= \sum_{j=k}^{k+q}\frac{1}{2j+1}+\sum_{j=k-q}^{k}\frac{1}{2j+1} \\
&= \frac{1}{2k+1}+\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1} \\
&= c_k+\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1}
\end{aligned}$$

avec $c_k = \dfrac{1}{2k+1} > 0$.

c) Si $k \geq q$ il est évident que $T_{q,k} \geq 0$.
Maintenant, si $k < q$ il suffit de remarquer que

$$\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1} = \sum_{j=k-q}^{q-k}\frac{1}{2j+1}+\sum_{j=q-k+1}^{k+q}\frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2(q-k)+1}+\sum_{j=q-k+1}^{k+q}\frac{1}{2j+1} \geq 0$$

puisque $q-k+1 \geq 0$.

d) Par décroissance de $x \mapsto (2x+1)^{-1}$ sur $\mathbb{R}_+$ on peut écrire pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$

$$\int_1^N \frac{dt}{2t+1} \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \leq \int_0^N \frac{dt}{2t+1},$$

soit

$$\frac{\log(2N+1)-\log(3)}{2} \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\log(2N+1)}{2}$$

qui implique $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1}\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{\log(N)}{2}$.

e) Avec (15-b) et (15-d)

$$T_{k,k}=\frac{1}{2k+1}+\sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{2j+1}\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{\log(2k)}{2}\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{\log(k)}{2}.$$

❹ Soit $p\in\mathbb{N}^\star$

$$\begin{aligned}a_p(f)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(pt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n\geq1}f_n(t)\cos(pt)dt\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq1}\int_0^{\pi}f_n(t)\cos(pt)dt\qquad\text{(par NCV (question 13) sur }\ [0,\pi])\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq1}\int_0^{\pi}\frac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\frac{t}{2}\right]\cos(pt)dt\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}I_{p,2^{n^3-1}}.\end{aligned}$$

❺ De l'égalité précédente et sachant que (15-c) les quantités $T_{p,k}$ sont toujours positives, on a pour tout $p\geq1$

$$a_p(f)\geq\frac{2}{\pi n^2}I_{p,2^{n^3-1}},\quad\forall\,n\in\mathbb{N}^\star.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}S_{2^{N^3-1}}(f)(0)&=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{2^{N^3-1}}a_n(f)=-\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=0}^{2^{N^3-1}}a_n(f)\\&\geq-\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=0}^{2^{N^3-1}}\frac{2}{\pi N^2}I_{n,2^{N^3-1}}\\&=-\frac{a_0(f)}{2}+\frac{2}{\pi N^2}T_{2^{N^3-1},2^{N^3-1}}\end{aligned}$$

❻ L'équivalent obtenu en (15-e) nous donne

$$\frac{2}{\pi N^2}T_{2^{N^3-1},2^{N^3-1}}\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{2}{\pi N^2}\frac{\log(2^{N^3-1})}{2}\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{N^3\log(2)}{\pi N^2}=\frac{N\log(2)}{\pi}.$$

Cette dernière quantité tendant vers $+\infty$ avec N, on a avec la question (17)

$$\lim_{N\to\infty}S_{2^{N^3-1}}(f)(0)=+\infty.$$

La suite $(S_n(f)(0))_n$ est donc divergente : f n'est pas développable en série de Fourier à l'origine. ❑

Exercice 235 (Séries de Fourier, dérivation) [10], 2003.
Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Avec les séries de Fourier, montrer que

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}.$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ il existe une unique fonction $\tilde{f}$ impaire, 2-périodique dont la restriction à $[0,1]$ est f. On vérifie sans peine que cette fonction est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et même $\mathscr{C}^2$ par morceaux). Calculons ses coefficients de Fourier (complexes), bien entendu $c_0(\tilde{f}) = 0$ et pour $n \in \mathbb{Z}^\star$ une intégration par parties donne

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2i\pi n}\int_{-1}^{1} \tilde{f}'(t)e^{-int}dt$$

une seconde intégration par parties est licite puisque $\tilde{f}'$ est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux :

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2i\pi n}\left[\frac{\tilde{f}'(t)e^{-int}}{-i\pi n}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2(i\pi n)^2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}''(t)e^{-int}dt = -\frac{c_n(\tilde{f}'')}{\pi^2 n^2}$$

(le terme « entre crochets » est nul car $\tilde{f}'$ est paire). Vu la régularité de $\tilde{f}$, les théorèmes classiques nous assurent que la série de Fourier de $\tilde{f}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ avec pour somme $\tilde{f}$, soit

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\pi x} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{c_n(\tilde{f}'')}{n^2}e^{in\pi x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En particulier

$$\forall\, x \in [0,1] \quad : \quad |f(x)| = |\tilde{f}(x)| \leq \frac{1}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{|c_n(\tilde{f}'')}{n^2}$$

soit en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($\sum_{n\geq 1} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}$)

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0,1] \quad : \quad |f(x)|^2 &\leq \frac{1}{\pi^4}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} |c_n(\tilde{f}'')|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{1}{n^4} \\ &\leq \frac{2}{\pi^4}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} |c_n(\tilde{f}'')|^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{45}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} |c_n(\tilde{f}'')|^2\end{aligned}$$

$\tilde{f}''$ étant 2-périodique et continue par morceaux, on peut lui appliquer le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |\tilde{f}''(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} |c_n(\tilde{f}'')|^2,$$

si bien que pour tout $x \in [0,1]$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{45}\|f''\|_2^2$$

soit

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}$$

d'où le résultat. ❑

Exercice 236 (Séries entières, déterminant, systèmes linéaires) *(http://problemoftheweek...)*
Soit a, b, c, d des nombres complexes, si $d \neq 0$ et soit la suite $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que

$$\frac{az+b}{z^2+cz+d} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \ldots$$

pour $|z|$ assez petit. Montrer que la quantité

$$\frac{det\begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2}\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3}\end{pmatrix}}$$

est indépendante de n lorsque $abc - b^2 - ad^2 \neq 0$.

❶ **Solution 1 :** De l'égalité

$$az + b = (z^2 + cz + d)\sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

on tire

$$c_0 = \frac{b}{d}, \quad c_1 = \frac{ad-bc}{d^2} \quad \text{et} \quad dc_{n+2} + cc_{n+1} + c_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
c_{n+1}c_{n+3} - c_{n+2}^2 &= c_{n+1}\left(-\frac{c}{d}c_{n+2} - \frac{1}{d}c_{n+1}\right) - c_{n+2}^2 \\
&= -\frac{c}{d}c_{n+1}c_{n+2} - c_{n+2}^2 - \frac{1}{d}c_{n+1}^2 \\
&= c_{n+2}\left(-\frac{c}{d}c_{n+1} - c_{n+2}\right) - \frac{1}{d}c_{n+1}^2 \\
&= \frac{1}{d}\left(c_{n+2}c_n - c_{n+1}^2\right) \\
&\ldots \\
&= \frac{1}{d^{n+1}}\left(c_2c_0 - c_1^2\right).
\end{aligned}$$

➪ Ainsi pour $c_2c_0 - c_1^2 \neq 0$ i.e. $abc - b^2 - a^2d \neq 0$:

$$\frac{\det\begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3}\end{pmatrix}} = d$$

est bien indépendant de n.

➪ Et pour $abc - b^2 - a^2d = 0$ on a

$$\det\begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3}\end{pmatrix} = 0$$

et le quotient n'est pas défini.

❷ **Solution 2 :** Toujours de l'égalité

$$az + b = (z^2 + cz + d)\sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

comparant les coefficients de z^{n+2} et z^{n+3} des deux cotés on tire

$$\begin{cases} c_n + cc_{n+1} + dc_{n+2} & = 0 \\ c_{n+1} + cc_{n+2} + dc_{n+3} & = 0 \end{cases}$$

En considérant ces deux égalités comme un système linéaire d'inconnues c et d, les régles de Kramer donnent

$$d = \frac{\det\begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3}\end{pmatrix}}$$

pourvu que le dénominateur ne s'annule pas, i.e.

$$\det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3}\end{pmatrix} = abc - b^2 - a^2d \neq 0.$$

❑

Exercice 237 (Étude de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\exp(-n^a)$) [10], *2003/04.*
Pour $a > 0$, x réel quelconque, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\exp(-n^a)$.

❶ *Montrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

❶ *Pour quelles valeurs de a, f est-elle développable en série entière au voisinage de tout point ?*

❶ Posons $u_n(x) = e^{inx}e^{-n^a}$. La fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et si $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$${u_n}^{(k)}(x) = (in)^k e^{inx}e^{-n^a}.$$

Notant $||\ ||_\infty$ la norme uniforme sur $\mathbb{R}$, on a donc $||{u_n}^{(k)}||_\infty = n^k e^{-n^a}$. Par croissance comparée il vient, à k fixé : $||{u_n}^{(k)}||_\infty = o(1/n^2)$ quand $n \to +\infty$ de sorte que $\sum_{n\geqslant 1} {u_n}^{(k)}$ coverge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Ceci étant vrai pour tout k, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et il en va de même de sa partie imaginaire f.

❷ Soit $g(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{inx}e^{-n^a}$ de sorte que f=Im (g). Si $(x,h)\in\mathbb{R}^2$ est tel que la série double :

$$\sum_{n\geqslant 1,\, k\geqslant 1} e^{-n^a}\frac{(n|h|)^k}{k!}$$

converge, le calcul suivant est justifié :

$$g(x+h) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n^a}e^{inx}\left(\sum_{k\geq O}\frac{(inh)^k)}{k!}\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1}(in)^k e^{-n^\alpha}e^{inx}\right)\frac{h^k}{k!} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}h^k.$$

Or, si $a>1$, la relation :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{(n|h|)^k}{k!} = e^{n|h|},$$

la positivité des $e^{-n^a}(n|h|)^k/k!$ et la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} e^{n|h|}e^{-n^a}$ (immédiate par exemple par la règle de d'Alembert) établissent bien la convergence de la série double susmentionnée. Il s'ensuit que :

$$\forall (x,h)\in\mathbb{R}^2,\qquad g(x+h) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}h^k.$$

Prenant les parties imaginaires, on obtient :

$$\forall (x,h)\in\mathbb{R}^2,\qquad f(x+h) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k.$$

Si $a=1$, la série double précédente converge pourvu que $|h|<1$ (toujours par la règle de d'Alembert). Ainsi :

$$\forall (x,h)\in\mathbb{R}\times]-1,1[,\qquad f(x+h) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k.$$

Dans ce cas, on peut par ailleurs observer que :

$$g(x) = \frac{e^{(ix-1)}}{1-e^{(ix-1)}}.$$

Montrons enfin, si $0<a<1$, que la série :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}h^k$$

ne converge pour aucune valeur de h dans $\mathbb{R}^*$. Les arguments donnés dans a) prouvent que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f^{(4k+1)}(x) = \sum_{n\geqslant 0} n^{4k+1}e^{-n^a}\cos(nx).$$

En particulier :

$$f^{(4k+1)}(0) = \sum_{n \geqslant 0} n^{4k+1} e^{-n^a}.$$

Soit, si $k \in \mathbb{N}$: $n_k = E\left((4k+1)^{1/a}\right)$. Alors :

$$f^{(4k+1)}(0) \geqslant {n_k}^{4k+1} e^{-{n_k}^a} \geqslant \left((4k+1)^{1/a} - 1\right)^{4k+1} e^{-(4k+1)}.$$

D'où, vu que $1/a > 1$:

$$\frac{f^{(4k+1)}(0)}{(4k+1)!} \geqslant \frac{(4k)^{(4k+1)/a} e^{-(4k+1)}}{(4k+1)!}.$$

Si :

$$u_k = \frac{(4k)^{(4k+1)/a} e^{-(4k+1)}}{(4k+1)!},$$

u_{k+1}/u_k tend vers $+\infty$ par un calcul immédiat. Il en résulte aussitôt que :

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{f^{(4k+1)}(0)}{(4k+1)!} h^{4k+1}$$

ne converge que pour $h = 0$ puis, compte tenu de la convergence absolue d'une série entière en tout point du disque ouvert de convergence, que :

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k$$

ne converge que pour $h = 0$.
En conclusion, f est développable en série entière au voisinage de tout point si et seulement si $a \in]0, 1]$.

🛈 **Remarque :** Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles qu'il existe r dans $]0, 1[$ vérifiant $c_n = O(r^{|n|})$ quand $n \to \pm\infty$. On peut démontrer que l'application qui à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique associe la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier exponentiels induit une bijection de l'espace des fonctions 2π-périodiques analytiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ sur $\mathscr{E}$, la bijection réciproque associant à $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la fonction :

$$x \mapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Avec cette caractérisation, le résultat de l'exercice est immédiat. ❏

Exercice 238 (Séries entières, comportement au bord)
Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence égal à* 1. *On suppose que* $\forall\, n \geq 1\ :\ a_n \geq 0$. *Si la série* $\sum_n a_n$ *diverge, montrer que* $\lim_{x \to 1_-} \sum_n a_n x^n = +\infty$.

Vu les hypothèses, $\forall\, A > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ :\ a_0 + a_1 + \cdots + a_m > A + 1$ et par continuité de $x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ il existe $0 < \delta_A < 1$ tel que pour tout $x \in]1-\delta_A, 1[$: $a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m > A$. Tout étant positif, à fortiori $\sum_n a_nx^n \geq a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m > A$. En résumé

$$\left(\forall\, A > 0,\ \exists\, \delta_A \in]0,1[\ :\ \forall\, x \in]1-\delta_A, 1[,\ \sum_n a_nx^n > A\right) \Longrightarrow \lim_{x \to 1_-} \sum_n a_nx^n = +\infty.$$

❏

Exercice 239 (Séries de Fourier : histoires d'unicité) [27],
Montrer que pour tout $a \neq 0$

$$e^{ax} = \begin{cases} \dfrac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a\cos(nx) - n\sin(nx)}{a^2+n^2}\right), & 0 < x < 2\pi \\ \dfrac{e^{a\pi}-1}{a\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n e^{a\pi} - 1\}\dfrac{a\cos(nx)}{a^2+n^2}, & 0 < x < \pi \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{1-(-1)^n e^{a\pi}\}\dfrac{n\sin(nx)}{a^2+n^2}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

et préciser les sommes de ces trois séries à l'origine.

La fonction f définie par $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et $f(0) = \frac{1+e^{2a\pi}}{2}$, prolongée sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité vérifie les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet : la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ vers f ; ce qui donne après un petit calcul la première formule. Pour la seconde il suffit de considèrer la fonction g 2π-périodique, paire et égale à f sur $[0, \pi]$. Pour la dernière, considèrer la fonction h 2π-périodique, impaire et égale à f sur $]0, \pi[$ et vérifiant $h(0) = h(\pi) = h(-\pi) = 0$. Jordan-Dirichlet s'appliquant au trois fonctions, les trois séries convergent à l'origine respectivement vers $f(0), g(0), h(0)$. ❏

ℹ **Remarque :** Moralité, ce n'est pas parce qu'une série trigonométrique converge vers une fonction qu'elle est la série de Fourier de cette fonction, surtout si le domaine de convergence est un intervalle de longueur strictement plus petite que 2π. Une condition suffisante pour pouvoir affirmer une telle chose que l'on recontre souvent est « la convergence uniforme sur un intervalle de longueur supérieure ou égale à 2π ».

Exercice 240 (SON et SCV) *On considère une suite* $(f_n)_n \subset \mathscr{C}^0([0,1])$ *vérifiant*

$$\int_0^1 f_n(t)f_m(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad n = m \\ 1 & \text{sinon} \qquad n \neq m \end{cases}$$

et

$$\sup\{|f_n(x)| \ : \ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Montrer que la suite $(f_n)_n$ *n'admet pas de sous-suite* $(f_{n_k})_k$ *simplement convergente sur* $[0,1]$.

➪ On commence par remarquer qu'on ne pert pas en généralité en supposant que $\overline{\text{vect}\{f_n\}}_{L^2} = L^2([0,1])$: en effet, si ce n'est pas le cas on rajoute à la suite $(f_n)_n$ une suite $(g_n)_n$ vérifiant les mêmes hypothèses mais aussi $\overline{\text{vect}\{f_n\} \cup \{g_m\}}_{L^2} = L^2([0,1])$ (une telle suite (g_n) existe : considérer pour cela la base hilbertienne ....).

➪ Supposons maintenant qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une application $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telles que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x), \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, la seconde hypothèse sur la suite $(f_n)_n$ nous permet d'appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}(t)f_m(t)dt = \int_0^1 f(t)f_m(t)dt,$$

soit

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad : \quad \int_0^1 f(t)f_m(t)dt = 0$$

et par conséquent $f = 0_{L^2}$ est donc nulle presque partout. Mais toujours par convergence dominée

$$1 = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}^2(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt,$$

tout ceci est absurde et l'exercice est terminé. ❏

Exercice 241 (Fonction 2π-périodique continue à coefficients de Fourier positifs) [10], *115/4.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π périodique et continue. On suppose tous ses coefficients de Fourier $(c_k(f),\ k \in \mathbb{Z})$ positifs ; montrer que f est développable en série de Fourier.
Pour cela
❶ *Montrer que pour tout $0 < r < 1$*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2} f(t)dt := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(t)dt$$

❷ *En déduire que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} \le \|f\|_\infty.$$

❸ *En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge et conclure.*

❶ Soit $0 < r < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}r^{|n|}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t)e^{-int}r^{|n|}dt \qquad \text{par NCV sur } [0,2\pi] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-int}r^n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{int}r^n\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{1-re^{-it}} + \frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}dt
\end{aligned}$$

❷ En considérant $f \equiv 1$ la formule précédente se resume à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)P_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = c_0(f) = 1.$$

De là, pour $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(t)dt \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|P_r(t)dt \le \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = \|f\|_\infty.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ nous pouvons donc écrire

$$0 \le \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)r^{|n|} \le \|f\|_\infty, \qquad \forall\, r \in]0,1[,$$

soit, si r tends vers 1_-

$$0 \leq \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \leq \|f\|_\infty, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

❸ Les coefficients de Fourier de f étant positifs, la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)$ en découle ; elle entraine la normale convergence sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de f.
Il ne reste plus qu'à se souvenir que si la série de Fourier d'une application $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$ converge uniformément sur un intervale de longueur supérieure à 2π c'est nécessairement vers f (poser $g = \sum_{\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$, montrer que $c_k(f) = c_k(g), \ \forall k$, et en déduire via Parseval de $f - g \equiv 0$). ❑

Exercice 242 ($\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dx)^2dy + \int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dy)^2dx \leq (\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy)^2 + \int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2dxdy$) *Putnam (2005), [34] 2005/8.*
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$, montrer que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx \leq \left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 + \int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2dxdy.$$

Considèrons pour $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f}(n,m) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-2i\pi(nx+my)}dxdy$$

les coefficients de Fourier de f. En particulier

$$\widehat{f}(0,0) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy. \tag{1}$$

La fonction $x \mapsto \int_0^1 f(x,y)dy$ est une fonction dont la série de Fourier est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n,0)e^{-2i\pi nx}$. De carré intégrable sur $[0,1]$, on peut lui appliquer la formule de Parseval

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n,0)\right|^2. \tag{2}$$

De même

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(0,m)\right|^2. \tag{3}$$

En appliquant Parseval dans $L^2([0,1]^2)$ à $(x,y) \mapsto f(x,y)$ on a aussi

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2dxdy = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n,m)\right|^2. \tag{4}$$

Avec $(1),(2),(3)$ et (4) on a

$$\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2+\int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2dxdy-\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2dy$$
$$-\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}\sum_{m\in\mathbb{Z}^\star}\left|\widehat{f}(n,m)\right|^2\geq 0$$

Q.E.D. ❑

Exercice 243 (Calcul de $\int_0^\pi \cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(\mathrm{x}))\cos(\mathrm{nx})\mathrm{dx}, \mathrm{n}\in\mathbb{N}$, via Fourier)

Utiliser les séries de Fourier pour évaluer l'intégrale

$$I_n=\int_0^\pi \cos(\cos(x))ch(\sin(x))\cos(nx)dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Tout calcul direct semble déraisonnable, on contourne cette difficulté en utilisant comme dans l'exercice ? ? ? ? ? ? les séries de Fourier. L'application régulière $f(x)=\cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))$ est 2π-périodique paire, son coefficient de Fourier a_n vérifie donc

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}I_n.$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer a_n. Pour cela écrivons

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))=\cos(\cos(x))\cos(i\sin(x))\\&=\frac12\left[\cos(\cos(x)+i\sin(x))+\cos(\cos(x)-i\sin(x))\right]\\&=\frac12\left[\cos(e^{ix})+\cos(e^{-ix})\right]=\sum_{k=0}^\infty\frac{e^{2ikx}+e^{-2ikx}}{2}\frac{(-1)^k}{(2k)!}=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cos(2kx).\end{aligned}$$

Cette dernière série étant normalement convergente sur $[0,2\pi]$, c'est la série de Fourier de f, par conséquent

$$I_n=\int_0^\pi\cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))\cos(nx)dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{si}\quad n=2k\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Q.E.D. ❑

Exercice 244 (Preuve du théorème des moments de Hausdorff par les séries de Fourier)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi])$ telle que

$$\int_0^{2\pi} t^n f(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{int} f(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et en déduire que $f \equiv 0$.

Notons $\widetilde{f}$ la fonction 2π-périodique paire continue sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $]0,2\pi]$; ses coefficients de fourier complexes sont donnés par

$$c_n(\widetilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Mais par normale convergence sur $[0,2\pi]$ de la série entière $e^{int} = \sum_{k\geq 0}\frac{(int)^k}{k!}$ on peut écrire

$$c_n(\widetilde{f}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(int)^k}{k!}\right)dt = \sum_{k\geq 0}\frac{(in)^k}{2\pi(2k)!}\int_0^{2\pi} t^k f(t)dt = 0$$

vu les hypothèses sur f : les coefficients de Fourier de l'application $\widetilde{f}$ continue sur $[0,2\pi]$ et 2π-périodique sont tous nuls, comme corollaire de la formule de Parseval[3] elle est donc identiquement nulle et par suite f. Modulo translation et homothétie le résultat en découle sur tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. ❑

Exercice 245 ($\sum_{k=0}^n C_{2n+2}^{2k+1} = 2^{2n+1}(2n+1)(2n+2)$ via les séries entières)
Calculer de deux manières différentes le développement en série entière à l'origine de $f(x) = \sin^2(x)$ pour en déduire

(✘) $$\sum_{k=0}^n C_{2n+2}^{2k+1} = 2^{2n+1}(2n+1)(2n+2), \quad n \in \mathbb{N}^\star.$$

[3] voir par exemple......

f est bien entendu développable en série entière en $x = 0$ et on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{2(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

soit

$$(1) \qquad \sin^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

D'un autre coté, on peut écrire

$$f(x) = \sin^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}c_n x^{2n}$$

où par produit de Cauchy

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+2}^{2k+1},$$

donc

$$(2) \qquad \sin^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+2}^{2k+1}\right)x^{2n}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, (1) et (2) donnent

$$\sum_{k=0}^{n}C_{2n+2}^{2k+1} = 2^{2n+1}(2n+1)(2n+2), \quad n \in \mathbb{N}^\star,$$

soit (✘), Q.E.D. ❑

ℹ **Remarque :** Il n'est pas difficile d'établir directement (✘) par dénombrement car $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+2}^{2k+1}$ représente le nombre de parties de cardinal impair dans un ensemble de cardinal pair $2n+2$. a vérifier

CHAPITRE 9

CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercice 246 (Calcul différentiel, extréma, fonctions harmoniques) [10],1994/95, EX. 247.
Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soit f une application de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\overline{\Omega}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et enfin harmonique sur Ω. Montrer que

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} f(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} f(x).$$

Ω est borné, donc $\overline{\Omega}$ est compact : f continue, atteint donc son suprémum en au moint un point α. Supposons par l'absurde que

$$\sup_{x\in\partial\Omega} f(x) = f(\beta) < f(\alpha)$$

(car la frontière $\partial\Omega$ est fermée bornée donc aussi compacte) et posons pour

$$x = {}^t(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi(x) = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{d} x_i^2.$$

Clairement

$$\Delta\varphi(x) = 2d.$$

considérons maintenant pour $\varepsilon > 0$, la fonction définie sur $\overline{\Omega}$ par

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x).$$

la quantité

$$M = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(x)$$

est bien finie par continuité de φ sur le compact $\overline{\Omega}$. Si bien que

$$\sup_{x\in\partial\Omega} f_\varepsilon(x) \leq f(\beta) + \varepsilon.M$$

et

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} f_\varepsilon(x) \geq f(\alpha).$$

Puisque $f(\alpha) > f(\beta)$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $f(\beta) + \varepsilon.M < f(\alpha)$; les deux dernières inégalités nous donnent alors

$$\sup_{x\in\partial\Omega} f_\varepsilon(x) \leq f(\beta) + \varepsilon.M < f(\alpha) \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} f_\varepsilon(x)$$

soit

$$\sup_{x\in\partial\Omega} f_\varepsilon(x) < \sup_{x\in\overline{\Omega}} f_\varepsilon(x).$$

En d'autres termes pour un tel ε, le suprémum de f_ε sur $\overline{\Omega}$ est atteint en un point γ de Ω. Ω étant ouvert γ est un maximum local :

$$d^2 f_\varepsilon(x)(h,h) = \sum_{1\leq i,j\leq d} \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \leq 0, \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^d.$$

En particulier le choix $h = h^i = (0,\dots,0,1,0\dots,0) \in \mathbb{R}^d$ pour $1 \leq i \leq d$ implique :

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) \leq 0$$

en contradiction avec

$$\Delta f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \Delta f(x) + 2d\varepsilon = 2d\varepsilon > O.$$

Le résultat est démontré. ❑

🛈 **Remarque :** La preuve est à peine plus simple si Ω est une boule : soit pour $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x-a\|^2.$$

Nous avons

$$dg_\varepsilon(x) = df(x) + 2\varepsilon\langle x-a, \mathbf{1}\rangle \quad \text{et} \quad d^2 g_\varepsilon(x) = d^2 f(x) + 2\varepsilon I_d,$$

(où $\mathbf{1} = {}^t(1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^d$ et $I_d \in M_d(\mathbb{R}^d)$ est la matrice identité). Comme par hypothèse

$$\Delta(f) = \mathrm{tr}(d^2 f) = 0$$

nous avons

$$\mathrm{tr}(d^2 g_\varepsilon(x)) = \Delta(g_\varepsilon)(x) = 2d\varepsilon > 0$$

si bien que $d^2 g_\varepsilon(x)$ admet toujours au moins une valeur propre strictement positive en chaque point de la boule ouverte $B(a,r)$ (g_ε harmonique est de classe $\mathscr{C}^2$ (en fait alors $\mathscr{C}^\infty$) sa matrice Hessienne est donc symétrique réelle et ses valeurs propres sont réelles...). Mais f et donc g_ε est continue sur le compact $\overline{B(a,r)}$: g_ε y admet donc un maximum x_0 qui, vu ce qui précède se trouvera nécessairement sur la frontière de B. En outre sur la frontière de la boule $\varepsilon\|x-a\|^2 = \varepsilon r^2$, cette quantité étant constante x_0 ne dépend pas de ε i.e.

$$\exists\, x_0 \in \partial B \quad : \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ x \in B \qquad f(x) + \varepsilon\|x-a\|^2 \leq f(x_0) + \varepsilon\|x_0 - a\|^2,$$

il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers zéro pour conclure.

Exercice 247 (Calcul différentiel, espaces vectoriels normés, polynômes) ([10], 2000/01, EX. 52).
On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme uniforme sur $[0,1]$ et on considère l'application $f\ :\ \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(P) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{1+k^2P^2(k^{-1})}$$

① *Préciser le domaine de définition de f et vérifier que c'est un ouvert de $\mathbb{R}[X]$.*
② *Montrer que f est différentiable sur cet ouvert.*

🛈 **Rappel :** *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, une application $f : E \to F$ est différentiable au point $a \in E$ s'il existe une application linéaire* ***continue*** *$L = df(a) : E \to F$ verifiant*

$$\lim_{h\to 0_E} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

❶ Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, posons $u_k(P) = \dfrac{1}{1+k^2P(k^{-1})^2}$.

➪ Si $P(0) \neq 0$, alors

$$u_k(P) = \frac{1}{1+k^2(P(0)+0(k^{-1}))^2} = \frac{1}{1+P^2(0)k^2(1+0(k^{-1})} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{P(0)^2k^2} \quad (k\to+\infty)$$

Avec le critère de comparaison des séries à termes positifs, $f(P)$ est bien définie.

➪ Supposons maintenant que $P(0) = 0$. $P \equiv 0$ la série $\sum_k u_k(P)$ diverge grossièrement ; sinon soit $d := \inf\{\nu\ :\ P^{(\nu)}(0) \neq 0\}$ la valuation de P. La formule de Taylor assure que

$$P(k^{-1}) = \frac{P^{(d)}(0)}{d!}\frac{1}{k^d} + o(k^{-d}) \quad (k\to\infty)$$

ainsi, lorsque k tends vers $+\infty$

$$u_k(P) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{P^{(d)}(0)}{d!}\right)^2 \dfrac{1}{k^{2(d-1)}} + o\left(\dfrac{1}{k^{2(d-1)}}\right)} \longrightarrow \begin{cases} (1+P'(0)^2)^{-1}, & \text{si } d=1,\\ 1, & \text{si } d>1.\end{cases}$$

Et la série $\sum_k u_k(P)$ diverge grossièrement.

➪ En résumé, le domaine de définition de f est

$$\mathscr{D}_f = \{P \in \mathbb{R}[X]\ :\ P(O) \neq 0\}.$$

C'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$ par l'application linéaire $\varphi\ :\ \mathbb{R}[X] \ni P \mapsto \varphi(P) = P(0)$. Puisque

$$|\varphi(P)| = |P(0)| \leq \|P\| := \sup_{[0,1]} |P(t)|,$$

φ est continue et $\mathscr{D}_f = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est ouvert dans $\mathbb{R}[X]$.

❷ Soit $P \in \mathscr{D}_f$ et étudions la différentiabilité de f au point P. Soit $H \in \mathscr{D}_f$ de norme suffisament petite pour que $P+H \in \mathscr{D}_f$. Il s'agit de trouver une application $L \in \mathscr{L}_c(\mathscr{D}_f, \mathbb{R})$ telle que

$$f(P+H) - f(P) = L(H) + o(\|H\|_\infty),$$

deviner L n'est pas immédiat, un petit **interlude divinatoire** est nécéssaire :

➪ on est donc conduit à étudier la quantité

$$\begin{aligned}
u_k(P+H) - u_k(P) &= \frac{1}{1+k^2(P+H)^2(k^{-1})} - \frac{1}{1+k^2P^2(k^{-1})} \\
&= -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1}) + k^2H^2(k^{-1})}{(1+k^2(P+H)^2(k^{-1}))(1+k^2P^2(k^{-1}))} \\
&= -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1}) + k^2H^2(k^{-1})}{(1+k^2P^2(k^{-1})^2)} \\
&\quad + \frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1+k^2P^2(k^{-1}))} - \frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1+k^2(P+H)^2(k^{-1}))(1+k^2P^2(k^{-1}))} \\
&= L_k(H) + R \quad \text{avec} \quad L_k(H) = -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1+k^2P^2(k^{-1}))^2} = -2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})u_k^2(P)
\end{aligned}$$

notre choix pour $L_k(H)$ purement subjectif peut être motivé par exemple parce qu'il faut d'une part chercher quelque chose de linéaire en H et, d'autre part si $\|H\|$ tends vers zéro

$$-\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1+k^2(P+H)^2(k^{-1}))(1+k^2P^2(k^{-1}))} \underset{\|H\|\to 0}{\sim} -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1+k^2P^2(k^{-1})^2)} = L_k(H).$$

On peut aussi motiver notre choix en utilisant sans aucune rigueur la formule classique mais toujours d'une importance stratégique :

$$(f \text{ différentiable en } a) \Longrightarrow \left(df(a)h = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} \right).$$

En effet, pour le cas qui nous interesse

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tH)-f(P)}{t} &= \lim_{t\to 0} \sum_{k\geq 1} \frac{u_k(P+tH)-u_k(P)}{t} \\
&= \sum_{k\geq 1} \lim_{t\to 0} \frac{u_k(P+tH)-u_k(P)}{t} \\
&= \sum_{k\geq 1} -2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})u_k^2(P) = \sum_{k\geq 1} L_k(H) = L(H)
\end{aligned}$$

où bien entendu l'échange $\lim \sum = \sum \lim$ n'a pas été justifié. Résumons nous : nous avons un candidat suspect pour $df(P)(H)$ c'est

$$(\bigstar) \qquad L_P(H) = \sum_{k\geq 1} -2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})u_k^2(P)$$

pour montrer que c'est bien lui (i.e. $L_P = df(P)$), il va falloir successivement montrer que la série définissant L_P est bien convergente sur $\mathscr{D}_f$, qu'alors L_P est une application (linéaire) **continue** de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ et qu'enfin $f(P+H) - f(P) - L_P(H) = o(\|H\|_\infty)$ (ou justifier l'échange $\lim\sum = \sum\lim$ dans ce qui précède...). Au travail.

➪ Soit $P \in \mathscr{D}_f$, nous avons comme dans la première partie

$$k^2u_k^2(P) \sim \frac{1}{k^2P^4(0)}$$

de sorte que la série $\sum_{k\geq 1} k^2u_k^2(P)$ converge. Notons $C = \sum_{k\geq 1} k^2u_k^2(P)$, pour tout $H \in \mathscr{D}_f$ nous avons

$$|2k^2P(k^{-1})u_k^2(P)H(k^{-1})| \leq 2\|P\|_\infty\|H\|_\infty k^2u_k^2(P), \quad k \in \mathbb{N}^\star$$

ce qui, par critère de comparaison des séries à termes positifs assure que la série définissant L_P est bien absolument convergente sur $\mathscr{D}_f$. En outre il résulte aussi de cette inégalité :

$$\forall\, H \in \mathscr{D}_f \quad : \quad |L_P(H)| \leq 2C\|P\|_\infty\|H\|_\infty$$

qui assure la continuité de L_P sur $\mathscr{D}_f$ (la linéarité est évidente).

➪ Montrons maintenant que $f(P+H) - f(P) - L_P(H) = o(\|H\|_\infty)$. C'est un calcul assez fastidieux.

$$f(P+H) - f(P) - L_P(H) = \sum_{k\geq 1} u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2P(k^{-1})u_k^2(P)H(k^{-1}).$$

et pour $k \in \mathbb{N}^\star$

$$u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2P(k^{-1})u_k^2(P)H(k^{-1}) = \left(-1 + 3k^2P^2(k^{-1}) + 2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})\right)k^2H(k^{-1})u_k^2(P)u_k(P+$$

donc

$$|u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2P(k^{-1})u_k^2(P)H(k^{-1})| \leq k^2u_k^2(P)u_k(P+H)\left(1 + k^2(3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty\|H\|_\infty)\right)$$

et comme $0 < u_k(P+H) \leq 1$

$$|u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2P(k^{-1})u_k^2(P)H(k^{-1})| \leq k^2u_k^2(P)\left(1 + k^2u_k(P+H)(3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty\|H\|_\infty)\right).$$

Mais

(✔)

$$\frac{1}{k^2u_k(P+H)} = \frac{1 + k^2(P(k^{-1}) + H(k^{-1}))^2}{k^2} \geq (P(k^{-1}) + H(k^{-1}))^2 \geq (|P(k^{-1})| - |H(k^{-1})|)^2$$

et par continuité de P à l'origine, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq N$ implique $|P(k^{-1})| \geq \dfrac{|P(0)|}{2}$ et comme H peut être choisi de norme arbitrairement petite, imposont $\|H\|_\infty \leq \dfrac{|P(0)}{4}$. Alors pour $k \geq N+1$

$$|P(k^{-1}) - H(k^{-1}))| \geq \frac{|P(0)}{2} - \|H\|_\infty \geq \frac{|P(0)|}{4}$$

soit, avec (✔) :

$$k^2u_k(P+H) \leq \frac{16}{|P(0)|^2}$$

par conséquent, ($C = \sum_{k\geq 1} k^2 u_k^2(P)$)

$$|f(P+H)-f(P)-L_P(H)| \leq \sum_{k\geq 1} |u_k(P+H)-u_k(P)+2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})u_k^2(P)|$$

$$\leq \|H\|_\infty^2 \left\{ C + (3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty\|H\|_\infty)\left(\sum_{k=1}^N k^4u_k^2(P)u_k(P+H) + \sum_{k\geq N+1} k^4u_k^2(P)u_k(P+H)\right)\right\}$$

$$\leq \|H\|_\infty^2 \left\{ C + (3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty\|H\|_\infty)\left(\sum_{k=1}^N k^4u_k^2(P)u_k(P+H) + \frac{16}{|P(0)|^2}C\right)\right\}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$f(P+H)-f(P)-L_P(H) = o(\|H\|_\infty)$$

lorsque H tends vers 0 dans $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$: f est donc différentiable au point P et la différentielle de f au point P est la forme linéaire continue $df(P) = L_P$:

$$H \mapsto -\sum_{k\geq 1} \frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{\left(1+k^2P^2(k^{-1})\right)^2}.$$

Remarques : ➪ Ouf ! et si quelqu'un a plus simple : qu'il se manifeste !

➪ En dimension infinie, il ne faut sutout pas oublier l'hypothèse de continuité pour l'application linéaire dans la définition de la différentiabilité sans laquelle par exemple toute application linéaire discontinue (il en existe toujours en dimension infinie...c'est un autre exercice) serait automatiquement différentiable ! Certains auteurs imposent plutot à f d'être continue au point a dans la définition de la différentiabilité, l'application linéaire est alors automatiquement continue.

Exercice 248 (Extrémas en dimension plus grande que 2 : attention aux idées reçues !)

❸ *Considérons une application $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Si f admet un point critique qui est un un extrema local (maximum ou minimum local) mais non global, doit-elle posséder au moins un autre point critique ? (d'après J.M.Ash & H.Sexton « A surface with one local minimum », Math.Mag. (19 ? ?) 58-3, pp. 147-149 and I.Rosenholtz & L.Smylie « The only critical point in town », Math.Mag. (19 ? ?) 58-3, pp. 149-150).*

❷ *Dans $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$, $(d \geq 1)$ donner l'exemple d'un polynôme à coefficients réels minoré sur $\mathbb{R}^d$ sans atteindre sa borne inférieure.*

❶ La réponse est oui si $d = 1$ et de manière à priori plus surprenante non si $d \geq 2$.

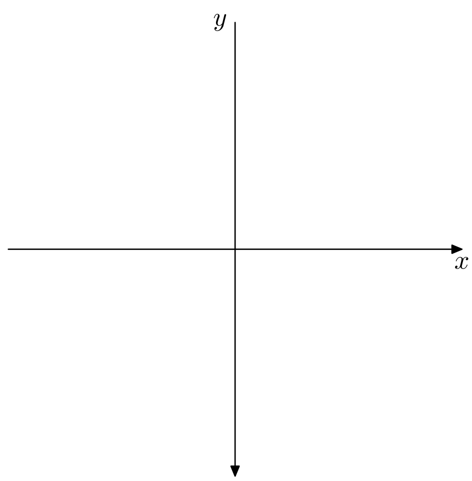
➪ Si $d = 1$. Soit donc $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ présentant (sans perdre de généralité...) à l'origine un minimum local. Par exemple $f(0) = 0$, $f(x) > 0$, $\forall\, 0 < |x| < \delta$. $x = 0$ n'étant pas un minimum global, il existe $a \in \mathbb{R}$, disons $a > 0$, tel que $f(a) < 0$.Soit $f(a)f(\delta/2) < 0$, par le théorème de valeurs intermédiaires il existe $b > 0$ tel que $f(b) = 0$, soit $f(0) = f(b) = 0$;

le théorème de Rolle assure alors de l'existence d'un réel $c \in]0, b[$ tel que $f'(c) = 0$ et nous avons bien construit un second point critique pour f.

➪ Pour un contre-exemple en deux variables, considérons la fonction $\mathscr{C}^\infty$

$$f(x, y) = \frac{-1}{1+x^2} + (2y^2 - y^4)\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour localiser les points critiques et préciser leur nature sans trop de calculs considérons les sections du graphe de f à $x = c =$ constante : l'application $f_c(y) = f(c, y) = -a + (2y^2 - y^4)(e^c + a)$ présente (voir figure 1) trois points critiques $y = 0$, $y = 1$ et $y = -1$. Ainsi, les éventuels points critiques de f se trouveront sur les sections $y = 0$, $y = 1$ et $y = -1$ (vu qu'ailleurs, $\partial_y f \neq 0$). Sur $y = \pm 1$, $f(x, \pm 1) = e^x$ soit $\partial_x f = e^x > 0$. Sur $y = 0$, $f(x, 0) = \frac{-1}{1+x^2}$ soit $\partial_x f(x, 0) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule si, et seulement si $x = 0$. f admet donc un unique point critique : $(0, 0)$.



$f(0, 0) = -1 > -17 = f(0, 2)$: (O, O) n'est donc pas un minimum global. Il nous reste à vérifier que $(0, 0)$ est néanmoins un minimum local, pour cela il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -1 + \frac{x^2}{1+x^2} + y^2(2 - y^2)\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= f(0, 0) + \left[\frac{x^2}{1+x^2} + y^2(2 - y^2)\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)\right] \\ &> f(0, 0) \quad \text{pour } (x, y) \in D((0, 0), \sqrt{2}) \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

❷ Il suffit de considérer dans $\mathbb{R}[X, Y]$ le polynôme

$$p(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2$$

qui est clairement positif sur $\mathbb{R}^2$; toutefois l'axe $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0 \}$ et l'hyperbole $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1 \}$ n'ayant aucun points communs notre polynôme ne prends jamais la valeur 0. Mais

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad p(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) = \varepsilon^2$$

si bien que

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} p(x,y) = 0$$

et ne sera jamais atteind. ❑

🛈 **Remarque :** ➪ Moralité : comme toujours se méfier du passage en plusieurs variables, nombreuses propriétés, vraies en une variable ne passent plus dès deux variables !

➪ Le second exemple est un petit garde-fou contre la tentation d'étendre à plusieurs variables la propriété classique en une variable (idem dans $\mathbb{C}[z]$)

$$\forall\, p \in \mathbb{R}[x],\ \deg(p) \geq 1 \quad : \quad \lim_{|x|\to+\infty} |p(x)| = +\infty$$

alors que le polynôme à deux variables considéré plus haut est constant sur l'axe des ordonnées.

Exercice 249 (Théorème de d'Alembert-Gauss, topologie, calcul différentiel)

① *Soit $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :*

▷ $\{\, a \in \mathbb{R}^n\ :\ df(a) \notin GL_n(\mathbb{R})\,\}$ *est fini.*

▷ *L'image réciproque par f de tout compact K de $\mathbb{R}^n$ est compacte.*

Alors f est surjective si $n \geq 2$.

② *En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.*

❶ Supposons $n \geq 2$ et notons

$$A = \{a \in \mathbb{R}^n\ :\ df(a) \notin GL_n(\mathbb{R}^n)\},\quad \Omega_2 = \mathbb{R}^n \setminus f(A)\quad \text{et}\quad \Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2).$$

➪ Par hypothése A est fini, donc $f(A)$ aussi et par suite Ω_2 est ouvert ; f étant continue, il en est de même pour Ω_1

On vérifie facilement que $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus f(A)$, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ si bien que l'on peut encore considérer la restriction $f\ :\ \Omega_1 \to \Omega_2$ que l'on notera toujours f.

➪ Avec la seconde hypothèse, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ de tout compact K dans Ω_2 est (Ω_2 est ouvert, donc K est aussi un compact de $\mathbb{R}^n$) un compact de Ω_1 ; par un résultat standart[1] f est fermée (ie l'image de tout fermé de Ω_1 est un fermé de Ω_2) : en particulier $f(\Omega_1)$ est **fermé** dans Ω_2.
Montrons que $f(\Omega_1)$ est **ouvert** dans Ω_2 : soit donc $y \in f(\Omega_1)$ et $x \in \Omega_1$ tel que $f(x) = y$. Par construction, $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$, étant en dimension finie c'est un homéomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$; par le théorème d'inversion locale, il existe donc deux ouverts U, V de $\mathbb{R}^n$ avec $x \in U \subset \Omega_1$, $y \in V$ tels que f induise un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de U sur V. Donc $V = f(U) \subset \Omega_2$ et $f(\Omega_1)$ est ouvert.

[1] Monier ? ?

➪ Ω_2 est $\mathbb{R}^n$ privé d'un nombre fini de points : il est[2] connexe par arcs et donc **connexe**. Ainsi, $f(\Omega_1)$ est à la fois ouvert, fermé et non vide dans Ω_2 connexe : $f(\Omega_1) = \Omega_2$.

➪ Il est maintenant temps de conclure : soit $y \in \mathbb{R}^n$ il y a alors deux alternatives

- ▷ ou bien $y \in f(A)$,
- ▷ ou bien $y \in \Omega_2 = f(\Omega_1)$,

dans tous les cas, y admet un antécédent : f est bien **surjective**.

🛈 **remarque :** Si $n = 1$, f peut ne pas être surjective comme le montrer l'exemple de f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. On a $A = \{0\}$ et (exercice classique) $\left(\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty\right) \iff$ $(\forall\, K$ compact , $f^{-1}(K)$ est compact) ; les deux hypothèses sont donc bien vérifiées mais f n'est pas surjective.

❷ Observons comment le théorème de d'Alembert-Gauss en découle : associons à tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1

$$P(z = x+iy) = Q(x,y) + iR(x,y) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{avec} \quad Q = \mathrm{re}(P) \ \text{ et } \ R = \mathrm{im}(P)$$

l'application

$$\varphi \quad : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \longmapsto \ \varphi(x,y) = (Q(x,y), R(x,y)) \in \mathbb{R}^2$$

on va montrer que φ satisfait deux aux hypothèses de la première question, si bien quelle sera surjective et l'origine admettra un antécédent i.e. $\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(a,b) = 0$ soit $P(a+ib) = R(a,b) + iQ(a,b) = 0$; P admet donc au moins un zéro dans $\mathbb{C}$ et le théorème de d'Alembert-Gauss est donc démontré.

➪ Commencons par remarquer $|\varphi(x,y)| = |P(z)|$ et par conséquent

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} |\varphi(x,y)| = \lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$$

φ étant continue sur $\mathbb{R}^2$, un exercice classique[3] nous assure que la seconde propriété est satisfaite par φ.

➪ Pour la première, la matrice jacobienne de φ est (avec les équations de Cauchy-Riemann $\partial_x Q = \partial_y R$, $\partial_y Q = -\partial_x R$ qui, rappelons-le sont faciles – i.e. ne nécessitent aucun recours à la $\mathbb{C}$-dérivabilité – à établir pour un polynôme) nous avons

$$J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x Q & \partial_y Q \\ \partial_x R & \partial_y R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x Q & -\partial_x R \\ \partial_x R & \partial_x Q \end{pmatrix}$$

soit[4]

$$|J_\varphi(x,y)| = |\partial_x Q(x,y)|^2 + |\partial_x R(x,y)|^2 = |P'(z)|^2,$$

si bien que

$$\{\, X \in \mathbb{R}^2 \ : \ d\varphi(X) \notin GL_2(\mathbb{R}) \,\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P'(a+ib) = 0\}$$

et finalement

$$\mathrm{card}\{\, X \in \mathbb{R}^2 \ : \ d\varphi(X) \notin GL_2(\mathbb{R}) \,\} = \mathrm{card}\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P'(a+ib) = 0\} \leq \text{degré}(P) - 1 < +\infty$$

---

[2] c'est ici qu'on utilise le fait que $n \geq 2$!

[3] exercice 1-24, Analyse MP (exercices) J.M.Monier - Dunod - 1997, Monier le fait pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais le résultat et la preuve subsistent pour une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

[4] voir la formule (★) page trois

soit (1) ❑

Exercice 250 (Théorème de d'Alembert-Gauss, calcul différentiel, optimisation)

① *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ est continue et vérifie $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$, alors il existe $z^\star \in \mathbb{C}$ tel que $f(z^\star) = \inf_{z\in\mathbb{C}} f(z)$.*

② *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $n \geq 2$ fois dérivable telle que*

- ▷ *φ présente en 0 un minimum.*
- ▷ *Il existe $p \in \{2, \dots, n\}$ tel que $\varphi^{(p)}(0) \neq 0$.*

Alors, si k désigne le premier entier ≥ 2 (2 car $\varphi'(0) = 0$) pour lequel $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$, on a nécessairement $\varphi^{(k)}(0) \geq 0$.

③ *En déduire une nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.*

❶ et ❷ sont classiques.

❸ Soit $P(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré $d \geq 1$. On pose $f(z) = |P(z)|^2$ (comme le dit JBHU, le carré est important pour lisser les choses... le module au carré ou norme euclidienne, à le bon gout d'être différentiable). On a

$$\begin{aligned} f(z) = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right| &\geq \left(|a_d|.|z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|.|z|^k\right)^2 \\ &\geq |a_d|.|z|^{2d}\left(1 + 0\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \to +\infty \text{ quand } |z| \to +\infty. \end{aligned}$$

Vu (1), il existe $z^\star \in \mathbb{C}$ minimisant f sur $\mathbb{C}$. Il s'agit maintenant de montrer que $z^\star$ fait notre affaire, à savoir $P(z^\star) = 0$. Pour cela, on commence par se ramener à l'origine en considérant

$$Q(z) := P(z + z^\star) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_d z^d = b_0 + \cdots + b_s t^s + \cdots + b_d t^d$$

(s est le premier entier non nul pour lequel $b_1 = \cdots = b_{s-1} = 0,\ b_s \neq 0$) et l'objectif est de démontrer que 0 est racine de Q, c'est à dire $b_0 = 0$. Pour cela, si $\theta \in [0, 2\pi[$, considérons

$$\varphi_\theta \ : \ t \in \mathbb{R} \ \mapsto \ \varphi_\theta(t) := \left|Q(te^{i\theta})\right|^2,$$

ce n'est rien d'autre que « la restriction » de f à la droite passant par l'origine des complexes d'argument θ. Bien entendu, φ_θ présente en $z = 0$ un minimum et ce, **quel que soit** $\theta \in [0, 2\pi[$ (en particulier $\varphi'_\theta(0) = b_1 e^{i\theta} = 0 \Longrightarrow b_1 = 0$). En outre

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(t) &= \left(b_0 + b_s t^s e^{is\theta} + \cdots + b_d t^d e^{id\theta}\right)\left(\overline{b_0} + \overline{b_s} t^s e^{-is\theta} + \cdots + \overline{b_d} t^d e^{-id\theta}\right) \\ &= |b_0|^2 + \left(b_s \overline{b_0} e^{is\theta} + b_0 \overline{b_s} e^{-is\theta}\right) t^s + \text{ des termes en } t^k \text{ avec } k > 2s \\ &= |b_0|^2 + 2t^s \text{re}\left(\overline{b_0} b_s e^{is\theta}\right) + \text{o}(t^s). \end{aligned}$$

Par suite

$$\varphi_\theta^{(k)}(0) = 0, \text{ si } k = 1 \dots s-1 \quad \text{et} \quad \varphi_\theta^{(s)}(0) = 2s!\text{re}\left(\overline{b_0} b_s e^{is\theta}\right)$$

et vu (2), (bien remarquer que s est indépendant de θ et ≥ 2) :

$$(\text{✘}) \qquad \forall\,\theta \in [0, 2\pi[\quad : \quad \varphi_\theta^{(s)}(0) \geq 0.$$

Supposons $b_0 \neq 0$ (b_s est différent de zéro par construction), avec $\overline{b_0}b_s = |\overline{b_0}b_s|e^{i\rho}$ nous avons

$$\begin{aligned} 2\mathrm{re}\left(\overline{b_0}b_se^{is\theta}\right) &= 2\mathrm{re}(|\overline{b_0}b_s|e^{i\rho}e^{is\theta}) \\ &= 2\left|\overline{b_0}b_s\right|\cos(s\theta + \rho) \end{aligned}$$

puisque $\left|\overline{b_0}b_s\right| > 0$ le dernier terme va décrire l'intervalle $]-\left|\overline{b_0}b_s\right|, \left|\overline{b_0}b_s\right|[$ lorsque θ varie de 0 à 2π si bien qu'il ne peut éviter de prendre des valeurs < 0 contredisant (✘) : la seule alternative est donc que $b_0 = 0$ et le théorème est démontré. ❑

🛈 **Remarque :** Cette démonstration nous a été communiquée par notre collègue de l'université Paul Sabatier de Toulouse, J.B. HIRIART-URRUTY, qui lui-même la tient du livre de Alexeev-Tikhomirov-Fomine , « Commande optimale », Editions Mir (1982).

Exercice 251 (Inversion locale et globale)
Il s'agit de quelques exemples et contre-exemples canoniques autour du théorème d'inversion globale que l'on trouve dans l'excellent ouvrage de F.Rouvière, [41].

❶ *Soit $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et*

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de Ω mais que ce n'est pas un difféomorphisme global. Expliciter des ouverts U, V aussi grands que possible et tels que $f : U \to V$ soit un difféomorphisme global.

❷ *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$ mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de l'origine. Commentaire ?

❶ La matrice jacobienne de f

$$J_f(a, b) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

de déterminant $4(x^2+y^2) \neq 0$ sur Ω (ou bien, avec l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, f est l'application $z \mapsto z^2$ holomorphe sur $\mathbb{C}^\star$ et $J_f(x, y)$ est l'écriture matricielle de la multiplication $f'(z) = 2z$) dans tous les cas, le théorème d'inversion locale s'applique à f (qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω) : pour tout $a \neq 0$ il existe deux ouvert $U \subset \Omega$, $V \subset \mathbb{R}^2$ tels que f soit un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur V. Vu que $f(z) = z^2$ il existe donc sur V une determination de classe $\mathscr{C}^1$ (elle est même holomorphe, voir un cours sur le logarithme complexe) de la racine carrée.
L'inversion locale n'est pas globale (i.e. on ne peut avoir $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) car f n'est pas injective ($f(z) = f(-z)$), l'ouvert maximal ne pourra contenir deux points opposés dans

le plan complexe ; après un petit calcul on vérifie que le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{re}(z) > 0\}$ convient ainsi que tout demi-plan deduit de celui-ci par une rotation autour de l'origine, l'ouvert d'arrivée étant alors $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ou dans les autres cas $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite issue de l'origine (encore une fois le lecteur connaissant le logarithme complexe ne sera pas surpris par ces solutions).

❷ f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et puisqu'au voisinage de l'origine $f(x) = x + o(x^2)$, elle est aussi dérivable à l'origine avec $f'(0) = 1$. Toutefois f n'est pas injective au voisinage de l'origine (c'est du aux oscillations rapides générées par le sinus) ; précisément pour tout entier pair $k \geq 2$

$$f\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{2k-1}{k(2k+1)^2} > 0$$

et

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = f\left(\frac{1}{k}\right) < f\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$$

si bien que toute valeur comprise entre $f\left(\frac{1}{k}\right)$ et $f\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$ sera atteinte deux fois sur l'intervalle $]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. f n'est donc injective sur aucun voisinage de l'origine. ❑

🛈 **Remarque :** Le théorème d'inversion locale ne s'applique pas ici car f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$, dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ à l'origine, et donc à fortiori sur aucun voisinage de l'origine.

Exercice 252 (Déterminant et calcul différentiel) [41]
On note

$$\varphi \ : \ A \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \varphi(A) := \det(A) \in M_d(\mathbb{C})$$

l'application déterminant.
① *Montrer que* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(M_d(\mathbb{C}))$.
② *À l'aide de la comatrice, calculer pour* $(i,j) \in \{1,2,\dots,d\}^2$ *et* $A \in GL_d(\mathbb{C})$ *la dérivée partielle* $\frac{\partial\varphi(A)}{\partial x_{i,j}}$ *pour en déduire* $d\varphi(A)$.
③ *Une autre méthode pour calculer* $d\varphi(A)$.
- ➪ *Calculer* $d\varphi(I_d)$.
- ➪ *En déduire* $d\varphi(A)$ *pour* $A \in GL_d(\mathbb{C})$.
- ➪ *Conclure.*

❶ $M_d(\mathbb{C})$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé canonique (dimension finie), l'application déterminant, polynomiale en les n^2 coefficients de A est $\mathscr{C}^\infty$.
❷ Pour $A = ((a_{ij}))_{ij} \in M_d(\mathbb{C})$, m_{ij} désigne le ij-ième cofacteur. En développant par rapport à la i-ème ligne

$$\det(A) = \sum_{l=1}^{d} a_{il} \cdot m_{il}$$

pour tout $1 \leq l \leq d$, m_{il} ne dépend pas de a_{ij} si bien que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{ij}}(A) = m_{ij}.$$

Et finalement, (φ étant différentiable)

$$d\varphi(A)(H) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{ij}}(A) h_{ij} = \sum_{ij} m_{ij} h_{ij} = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A) H).$$

❸ ➪ Pour $H \in M_d(\mathbb{R})$, vu un résultat classique du cours on peut écrire

$$d(\varphi)(I_d)(H) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(A + tH) - \varphi(A)}{t}, \qquad (✘)$$

et $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_d$ désignant les valeurs propres de H

$$\begin{aligned} \varphi(I_d + tH) &= \det(I_d + tH) \\ &= \prod_{i=1}^{d} (1 + t\lambda_i) \\ &= 1 + t \cdot \mathrm{tr}(H) + o(t) \\ &= \varphi(I_d) + t \cdot \mathrm{tr}(H) + o(t) \end{aligned}$$

soit, vu (✘) : $d\varphi(I_d)(H) = \mathrm{tr}(H)$. ➪ Lorsque $A \in GL_d(\mathbb{C})$ on se ramène facilement à la situation précédente

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det(A) \det(I_d + A^{-1}H) \\ &= \det(A) \left(1 + \mathrm{tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|\right) \\ &= \det(A) + \mathrm{tr}(\det(A) A^{-1} H) + o(\|H\|) \\ &= \det(A) + \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A) H) + o(\|H\|) \qquad \text{car } A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A) I_d \end{aligned}$$

i.e.

$$(✔) \qquad d\varphi(A)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A)H), \ \forall A \in GL_d(\mathbb{C}).$$

➪ $GL_d(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M_d(\mathbb{C})$ (voir [38] [39] ou bien l'exercice ? ? ?) on peut donc, par continuité $A \mapsto d\varphi(A)$ prolonger à tout $M_d(\mathbb{C})$ la formule (✔) ci-dessus i.e. lien !

$$d\varphi(A)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A)H), \ \forall A, H \in M_d(\mathbb{C}).$$

❑

Exercice 253 (Matrices et calcul différentiel) [41]
Calculer la différentielle de l'application $\varphi : A \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \varphi(A) = A^2 \in M_d(\mathbb{C})$.
Même question avec $\psi : A \mapsto {}^tA \cdot A$.

Toutes ces applications sont bien sûr différentiables. On a pour A et H dans $M_d(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\varphi(A+H)-\varphi(A) &= AH+HA+H^2 &&= L(H)+o(\|H\|)\\ \psi(A+H)-\psi(A) &= {}^tAH+{}^tHA+{}^tHH &&= L'(H)+o(\|H\|)\end{aligned}$$

vu que $L, L' \in \mathscr{L}(M_d(\mathbb{C}))$ par définition de l'application différentielle

$$L = d\varphi(A) \quad \& \quad d\psi(A) = L'.$$

Remarque : on peut aussi retrouver la différentielle de ψ en considérant les applications

$$\begin{aligned} B\ : \quad (X,Y)\in M_d(\mathbb{C})^2 &\mapsto \quad B(X,Y) = {}^tXY \in M_d(\mathbb{C})\\ \omega\ : \quad X\in M_d(\mathbb{C}) &\mapsto \quad \omega(X) = (X,X)\in M_d(\mathbb{C})^2\end{aligned}$$

en effet, B étant bilinéaire on a :

$$dB(X,Y)(H,K) = B(X,K)+B(H,Y)$$

de même, ω étant linéaire $d\omega(X)=\omega$. Enfin $\psi = B\circ\omega$ et finalement par composition

$$d\psi(A)(H) = dB(\omega(A))\circ d\omega(A)(H) = dB(A,A)(\omega(H)) = dB(A,A)(H,H) = {}^tAH+{}^tHA$$

❑

Exercice 254 (Extrémas et convexité) *([3], sujet 8.)*
① ***(préliminaire)*** *Soit $f\ :\ U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U d'un espace vectoriel normé E. Soit $a\in U$ tel que $Df(a)=0$ et $D^2f(a)(u,u)\geq 0$ pour tout x dans un vosinage V de a et pour tout $u\in E$. Montrer que f présente un minimum local au point a.*

Dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ des suites de réels de carré intégrable on pose pour $x=(x_n)_{n\geq 1}\in l^2(\mathbb{N})$:

$$g(x) = (x_n^2)_{n\geq 1},\quad f(x) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{x_n^2}{n} - x_n^3\right).$$

② *Montrer que $g\in\mathscr{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}),l^2(\mathbb{N}))$ et préciser $dg(x)(h),\ \forall\, x,h\in l^2(\mathbb{N})$*
③ *Exprimer $f(x)$ en fonction de g et du produit scalaire.*
④ *Montrer que $f\in\mathscr{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}),\mathbb{R})$.*
⑤ *Préciser $Df(x),\ \forall\, x\in l^2(\mathbb{N})$ et vérifier que la suite nulle 0_{l^2} est un point critique de f.*
⑥ *Calculer $D^2f(x),\ \forall\, x\in l^2(\mathbb{N})$ et vérifier que*

$$\forall h\in l^2(\mathbb{N})\setminus\{0_{l^2}\}\ :\ D^2f(0_{l^2})(h,h)>0.$$

⑦ *Soit $\varepsilon>0$ et $x_\varepsilon=(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n=0\ \forall\, n\neq n_0 := E(2/\varepsilon)+1$ et $x_{n_0}=\varepsilon/2$. Montrer que $f(x_\varepsilon)<0$. Calculer $\|x_\varepsilon\|_2$ et en déduire que l'origine 0_{l^2} n'est pas un minimum local de f. Commentaire ?*

❶ Soit $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset V$. La formule de Taylor avec reste intégral ([41], théorème 6.3 page 279) assure que pour tout $h \in E$ vérifiant $[a, a+h] \subset U$

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) = f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} D^2 f(a+th)(h,h)dt$$

Alors $\|h\| < \delta$ implique $[a, a+h] \subset V$, et l'hypothèse sur $D^2 f$ assure la positivité du terme de droite dans la formule de Taylor. Soit

$$f(b) \geq f(a), \quad \forall\, b \in B(a,\delta),$$

le point a est bien un minimum local de f.

❷ Il est clair que $g(x) \in l^2(\mathbb{N})$ pour tout $x \in l^2(\mathbb{N})$. En outre pour $x, h \in l^2(\mathbb{N})$

$$g(x+h) - g(x) = (2x_n h_n)_n + (h_n^2)_n := L(h) + \frac{1}{2} Q(h,h).$$

L'inégalité immédiate $|x_n| \leq \|x\|_2,\ n \in \mathbb{N}$ implique que

$$\|L(h)\|_2 \leq \|x\|_2 \|h\|_2, \quad \|Q(h,h)\|_2 \leq \|h\|_2^2,$$

ces inégalités assurent que L (resp. Q) est une application linéaire (resp. bilinéaire) **continue** de $l^2(\mathbb{N})$ (resp. $l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N})$) dans $l^2(\mathbb{N})$: g est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $l^2(\mathbb{N})$ et

$$Dg(x)(h) = L(h), \quad D^2 g(x)(h,h) = Q(h,h) \quad D^k g(x)(h^k) \equiv 0, \forall k \geq 3.$$

❸ et ❹Il faut commencer par noter que la série définissant f est certainement convergente pour tout $x \in l^2(\mathbb{N})$. Alors

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} x_n^2 \left(\frac{1}{n} - x_n \right) = \langle g(x), \omega - x \rangle, \quad \text{où} \quad \omega = (n^{-1})_n \in l^2(\mathbb{N}).$$

Le produit scalaire dans $l^2(\mathbb{N})$ est une application bilinaire continue (Cauchy-Schwarz) donc $\mathscr{C}^\infty$; g étant aussi $\mathscr{C}^\infty$ sur $l^2(\mathbb{N})$, f le sera par composition.

❺ Par composition

$$Df(x)(h) = \langle dg(x)(h), x - \omega \rangle - \langle g(x), h \rangle = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2x_n}{n} - 3x_n^2 \right) h_n, \quad x, h \in l^2(\mathbb{N}).$$

En particulier

$$Df(0_{l^2(\mathbb{N})}) = 0, \quad \forall\, h \in l^2(\mathbb{N}),$$

et l'origine $0_{l^2(\mathbb{N})}$ de $l^2(\mathbb{N})$ est bien un point critique de f.

❻ Pour calculer $D^2 f(x)(h,h)$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(x_n + h_n)^2}{n} - (x_n + h_n)^3 \right) - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x_n^2}{n} - x_n^3 \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2x_n}{n} - 3x_n^2 \right) h_n + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2 + \sum_{n \geq 1} h_n^3 \\ &= Df(x)(h) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2 + o(\|h\|^2_{l^2(\mathbb{N})}) \end{aligned}$$

par unicité, la partie quadratique est $D^2f(x)(h,h)$, soit

$$D^2f(x)(h,h) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - 3x_n\right)h_n^2, \quad \forall\, x,h \in l^2(\mathbb{N}),$$

en particulier

$$D^2f(0_{l^2(\mathbb{N})})(h,h) = \sum_{n\geq 1}\frac{h_n^2}{n} > 0, \quad \forall\, h \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0_{l^2(\mathbb{N})}\}.$$

❼ On a

$$f(x_\varepsilon) = \frac{x_{n_0}^2}{n_0} - x_{n_0}^3 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 (n_0^{-1} - \frac{\varepsilon}{2}) < 0$$

vu le choix de n_0. Et comme

$$\|x_\varepsilon\| = |x_{n_0}| = \frac{\varepsilon}{2}$$

on a

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in l^2(\mathbb{N}) \text{ tel que } \quad \|x_\varepsilon\|_2 < \varepsilon \quad \text{et} \quad f(x_\varepsilon) < 0 = f(0),$$

l'origine n'est donc pas un minimum local. ❑

🛈 **Remarques :** ➪ Pour calculer la différentielle de f il est bien entendu plus raisonnable d'utiliser les théorèmes de composition :

$$f(x) = \langle g(x), h(x)\rangle = b \circ \psi(x) \quad \text{où} \quad b(x,y) = \langle x,y\rangle,\ \psi(x) = (g(x), l(x)),$$

de sorte que par bilinéarité de b

$$Df(x)(h) = Db(g(x),l(x))(Dg(x)(h), Dl(x)(h)) = b(Dg(x)(h), l(x)) + b(g(x), Dl(x)(h))$$

➪ En le point critique $x = 0_{l^2}$ les conditions nécessaires

$$Df(0) = 0 \quad \text{et} \quad D^2f(0)(h,h) \geq 0, \quad \forall\, h \in l^2(\mathbb{N})$$

(et même ici $D^2f(0)(h,h) > 0, \quad \forall\, h \neq 0$) pour présenter un minimum local ne sont donc pas suffisantes au contraire de ce qui se passe en **dimension finie**. La question ❶ donne une condition suffisante : il faut la positivité de D^2f localement au voisinage du point critique. Une condition portant uniquement sur le point critique est par exemple

$$\exists\, \alpha > 0 \quad : \quad D^2f(0)(h,h) \geq \alpha\|h\|^2, \quad \forall h.$$

CHAPITRE 10

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 255 (Étude de $y' = y(y-1)$) [10]
Trouver les solutions maximales de l'équation différentielle

$$(\bigstar) \qquad y' = y(y-1)$$

L'application $f(x,y) = y(y-1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, l'équation différentielle satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. En particulier deux solutions qui coincident en un point coincident en tout point où elles sont toutes deux définies et deux solutions maximales égales en un point sont égales. Comme visiblement les constantes 0 et 1 sont solutions sur $\mathbb{R}$ de notre équation il en résulte que tout autre solution maximale de $(\bigstar)$ ne prends jamais les valeurs 0 et 1. Le théorème des valeurs intermédiaires nous garantit alors qu'une telle solution est à valeurs dans l'un des trois intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Soit y une solution maximale vérifiant $y(x_0) = y_0$, on a alors :

$$y' = y(y-1) \iff \frac{y'}{y(y-1)} = 1 \iff \int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{u(u-1)} = x - x_0$$

comme $\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}$, il existe une constante λ telle que

$$\log\left(\frac{y(x)-1}{y(x)}\right) = x + \lambda$$

vu les remarques préliminaires, la fonction $x \mapsto \frac{y(x)-1}{y(x)}$ est de signe constant, on a donc $\frac{y(x)-1}{y(x)} = \mu e^x$ soit

$$y(x) = \frac{1}{1-\mu e^x}, \quad \mu \in \mathbb{R}^\star.$$

Si $\mu < 0$, $x \mapsto \frac{1}{1-\mu e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une solution maximale à valeurs dans $]0,1[$. Par contre, si $\mu > 0$ on obtient deux solutions évidemment maximales $x \mapsto \frac{1}{1-\mu e^x}$ définie sur $]-\infty,-\log\mu[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$ et $x \mapsto \frac{1}{1-\mu e^x}$ définie sur $]-\log\mu,+\infty[$ et à valeurs dans $]-\infty,0[$ ❑

Exercice 256 (Étude de $y' = y^2\sin^2(y)$) [10]
Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle

$$(\bigstar) \qquad y' = y^2\sin^2(y)$$

sont bornées et définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La fonction $f(x,y) = y^2\sin^2(y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale φ de $(\bigstar)$ vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$ et définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$.
Il y a des fonctions constantes solutions de notre équation, ce sont les fonctions $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Considérons maintenant une solution maximale φ non constante définie sur un intervalle $]a,b[$; vu ce qui précède, $\varphi(]a,b[) \subset \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(]a,b[) \subset]k_0\pi,(k_0+1)\pi[$ et toute solution maximale est bornée.
Supposons $b < +\infty$, la fonction φ étant croissante ($y' = y^2\sin^2(y) \geq 0$...) et majorée, φ admet une limite finie en b prolongons ainsi continuement φ à $]a,b]$. Le prolongement ψ est continu sur $]a,b]$, $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ et $\psi'(x)$ admet une limite $\big($égale à $\psi^2(b)\sin^2(\psi(b))\big)$lorsque x tends vers b_-. Dans ces conditions, il est classique que ψ est $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ contradisant la maximalité de φ. La seule alternative est donc $b = +\infty$. On montre de même que $a = -\infty$.

🛈 **Remarque :** La fonction φ croissante majorée a une limite l en $+\infty$. Si $l \notin \pi\mathbb{Z}$ $\lim_{x\to+\infty}\varphi'(x) = l^2\sin^2(l) > 0$ ce qui est absurde puisque φ est bornée (exercice...) : ainsi $l \in \pi\mathbb{Z}$, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = l = (k_0+1)\pi,\ \lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = k_0\pi$. ❑

Exercice 257 (Étude de $xy' = x + y^2$) [10]
On considère l'équation différentielle

$$(\bigstar) \qquad xy' = x + y^2, \quad x \in \mathbb{R}_+^\star$$

❶ *Montrer que les solutions sont définies sur des intervalles bornés.*
❷ *Montrer que toute solution maximale possède un intervalle de définition qui est soit de la forme $]a,b[$, $a > 0$ (étudier alors le comportement de la solution en a et b) soit de la forme $]0,b[$ (étudier alors le comportement de la solution en 0 et b).*

❶ Soit (I,φ) une solution de $(\bigstar)$ et a un point intérieur à I (donc $a > 0$). Pour $x \in I\cap]a,+\infty[$:

$$\forall\, t \in [a,x] \quad : \quad \frac{1}{t} \leq \frac{\varphi'(t)}{t+\varphi^2(t)} \leq \frac{\varphi'(t)}{a+\varphi^2(t)}$$

en intégrant sur $[a,x]$

$$\log\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\arctan\left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{a}}\right) - \arctan\left(\frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}}\right)\right) \leq \frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

si bien que

$$\forall\, x \in I\cap]a,+\infty[\quad : \quad x \leq a e^{\frac{\pi}{\sqrt{a}}}.$$

I est donc majoré et finalement borné.

❷ L'application $(x,y) \longmapsto \frac{1}{x}(x+y^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$; le théorème de Cauchy-Lipschtiz assure donc que les solutions maximales de $(\bigstar)$ sont définies sur des intervalles ouverts. Vu la question précédente ils sont donc de la forme $I=]a,b[$ avec $a>0$ ou $]0,b[$ avec $0<b<+\infty$.
Soit donc (I,φ) une solution maximale, $\forall\, t\in I\ :\ \varphi'(t)>0$, φ est donc strictement croissante sur I et admet donc aux extrémités de l'intervalle des limites (finies ou infinies).
Au voisinage de b : si φ admet une limite finie L au point b, alors $\varphi'(t)=\frac{1}{t}(t+\varphi^2(t))$ admet en b la limite $l=\frac{1}{b}(b+L^2)$ et le théorème de prolongement des applications de classe $\mathscr{C}^1$ vous assure que si on prolonge φ au point b en posant $\varphi(b)=L$, φ est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ avec $\varphi'(b)=\frac{1}{b}(b+L^2)=\frac{1}{b}(b+\varphi^2(b))$ si bien que $(]a,b],\varphi)$ est encore solution de $(\bigstar)$ contredisant bien évidemment la maximalité de $(]a,b[,\varphi)$. Nécessairement : $\lim_{t\to b_-}\varphi(t)=+\infty$.
Le même raisonemment montrer que si $I=]a,b[$ avec $a>0$, alors $\lim_{t\to a_+}\varphi(t)=-\infty$
Supposons maintenant que $I=]0,b[$, soit $\eta\in I$ et $x\in]0,\eta]$. On a

$$\forall\, t\in[x,\eta]\quad:\quad t\varphi'(t)\geq\varphi^2(t)$$

soit

$$\forall\, t\in[x,\eta]\quad:\quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}\geq\frac{1}{t}$$

et en intégrant sur $[x,\eta]$

$$\forall\, x\in]0,\eta]\quad:\quad \frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{\varphi(\eta)}\geq\log\left(\frac{\eta}{x}\right)$$

mais le terme de droite tends vers $+\infty$ lorsque x tends vers 0_+, il en est donc de même du terme de gauche ce qui nécessite $\lim_{t\to 0_+}\varphi(t)=0$. ❑

Exercice 258 (Étude de $y'=\exp(-xy)$) *([10]-107).*
Montrer que la solution maximale f du problème de Cauchy

$$y'=\exp(-xy),\qquad y(0)=0\qquad(\mathscr{E})$$

est impaire, définie sur $\mathbb{R}$ et admet en $+\infty$ une limite $l\in[1,1+e^{-1}]$.

➪ Redevable du théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy $(\mathscr{E})$ admet une solution maximale f définie sur un **intervalle ouvert** I contenant l'origine.
➪ Pour $x\in -I$ posons $g(x)=-f(-x)$, g est encore solution de $(\mathscr{E})$, f étant maximale : $-I\subset I$ et $f_{/-I}=g$ soit $-I=I$ & $f=g$ i.e. f est **impaire** et $I=]-\alpha,\alpha[$ avec $0<\alpha\leq+\infty$.

Si $\alpha<+\infty$ de $f'(x)=\exp(-xf(x))$ sur I on peut dire que f est strictement croissante sur I. On peut aussi dire que $0\leq f'(x)\leq 1$, avec $f(0)=0$, et si on intègre cette inégalité sur $[0,x]$ il vient :

$$\forall\, x\in I,\ x\geq 0\implies 0\leq f(x)\leq x.\qquad(\bigstar)$$

f est donc croissante sur $I = [-\alpha, , \alpha]$, majorée par α, elle admet donc une limite en α_- vérifiant

$$0 \leq \lim_{x \to \alpha_-} f(x) = \lambda \leq \alpha$$

Il suffit maintenant de poser $f(\alpha) = \lambda$ et de vérifier (sans peine) que ce prolongement qui est C^1 fournit une solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-\alpha, \alpha]$ qui contredit la maximalité de f (en effet par Cauchy-Lipschitz, un tel phénomène assure que la solution maximale est définie sur un intervalle ouvert J contenant strictement $]-\alpha, \alpha]$ (et donc I) ce qui contredit la définition de f...). En conclusion, la solution maximale est bien définie sur $\mathbb{R}$.

➪ Soit $x \geq 1$, f strictement croissante, positive sur $[1, +\infty[$ implique

$$0 < f'(x) \leq \exp(-xf(1)).$$

f' est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ et par suite f admet une limite l en $+\infty$ ($f(x) = \int_0^x f'(t)dt$...). Alors

$$(f'(x) = \exp(-xf(x)) \quad \& \quad f(x) < l,\ \forall\, x \geq 1) \Longrightarrow (f'(x) > \exp(-xl),\ x \geq 1)$$

et

$$\Longrightarrow \quad \left(l = \int_0^\infty f'(t)dt > \int_0^\infty \exp(-tl)dt = \frac{1}{l} \right) \Longrightarrow \quad l > 1$$

Enfin, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 1$:

$$x > a \quad \Longrightarrow f'(x) < \exp(-x)$$

i.e.

$$1 - l = \int_a^\infty f'(t)dt < \int_a^\infty e^{-t}dt = e^{-a}$$

mais, vu (★), $1 = f(a) \leq a$, et finalement

$$l \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

❏

Exercice 259 (Domaine de définition des solutions maximales de $X'(t) = X^2(t)$ à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$.) [10]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Existe-t-il une solution $t \mapsto M(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, de :

$$\frac{dM}{dt} = M^2 \ ; \ M(0) = A \ ?$$

La fonction $M \mapsto M^2$ de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ est de type polynomial, donc $\mathscr{C}^1$ par rapport à M considérée comme un $2n^2$-uplet de réels. Le problème posé est de Cauchy et admet une et une seule solution maximale. Il reste à voir si cette solution est définie sur $\mathbb{R}$. Calculons cette solution.
Dans le cas du problème de Cauchy en dimension 1 : $\frac{dy}{dt} = y^2$; $y(0) = a$, on trouve aisément $y = a(1 - ta)^{-1}$. On peut donc se demander si $t \mapsto A(1 - tA)^{-1}$ est solution. Posons $\Phi(t) = A(I - tA)^{-1}$.
Cette fonction Φ est définie sur un intervalle entourant 0 : le plus grand qui ne contient aucun inverse de valeur propre de A. Les coefficients de Φ sont fonctions rationnelles de t et Φ est donc mieux que $\mathscr{C}^1$. De plus $\Phi(0) = A$. Enfin $\Phi(t)(I - tA) = A$; dérivons : $\Phi'(t)(I - tA) - \Phi(t)A = 0$; donc

$$\Phi'(t) = \Phi(t)A(I - tA)^{-1} = \Phi(t)^2.$$

La solution cherchée est bien :

$$t \mapsto A(I - tA)^{-1}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A ne possède aucune valeur propre réelle non nulle.
➪

Exercice 260 (Résolution de l'équation $f(x) = 1 - \int_0^x (t + x)f(x - t)dt.$ **)** [10], *109-(9/10).*
Trouver les applications $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$(✘) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - \int_0^x (t + x)f(x - t)dt.$$

Le changement de variable $u = x - t$ assure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et légitimise une dérivation de l'équation (✘) qui devient

$$f'(x) + xf(x) + 2\int_0^x f(u)du = 0, \qquad \& \quad f(0) = 1.$$

La fonction $F(x) = \int_0^x f(u)du$ est classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $F' = f$. Il est donc équivalent de résoudre l'équation différentielle

$$(✔) \qquad \begin{cases} F''(x) + xF'(x) + 2F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F'(0) = 1. \end{cases}$$

La recherche d'un solution développable en série entière $\sum_n a_n x^n$ de cette dernière conduit aux relations

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = 1$$

qui elles même conduisent à

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

soit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n+1} = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

L'application $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ vérifie (✔) et le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que c'est la seule. Par conséquent, la seule solution continue f du problème (✘) est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = F'(x) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

❑

Exercice 261 (L'équation fonctionnelle de d'Alembert $2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$)

Déterminer les solutions continues de l'équation fonctionnelle de d'Alembert

(✘) $$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

➲ Si une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle (✘) alors, en faisant $x = y = 0$ il vient $2f(0)^2 = 2f(0)$ soit $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. De là si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 = 2f(x)f(0) = f(x+0) + f(x-0) = 2f(x),$$

f est donc identiquement nulle.

ℹ Nous excluons dorénavant ce cas, et supposons donc que $f(0) = 1$.

➲ Si $f(0) = 1$, pour $x = 0$ l'équation (✘) devient

$$2f(y) = 2f(y)f(0) = f(0+y) + f(0-y) = f(y) + f(-y)$$

i.e.

$$f(y) = f(-y), \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

f est donc paire.

➲ f étant supposée continue sur $\mathbb{R}$, elle y est locament intégrable ; par conséquent, on a pour tout $t > 0$

$$\int_{-t}^{t} 2f(x)f(y)dy = \int_{-t}^{t} f(x+y)dy + \int_{-t}^{t} f(x-y)dy,$$

soit, aprés un changement de variable dans les intégrales de droite

(1) $$2f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy = 2\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Remarquons que dans (1), le second membre est une fonction dérivable de la variable x, il en donc de même pour le terme de gauche et f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En réitérant ce processus, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis de proche en proche $\mathscr{C}^\infty$. Il est donc légitime de dériver (1) :

$$2f'(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy = 2\left[f(x-t) - f(x-t)\right]$$

qui donne pour $x = 0$

$$(2) \qquad 2f'(0)\int_{-t}^{t} f(y)dy = 2\left[f(-t) - f(-t)\right] = 0, \quad \forall\, t > 0, .$$

car f est une fonction paire ; mais aussi comme $f(0) = 1$, la continuité de f nous assure qu'il existe $t > 0$ tel que

$$(2) \qquad \int_{-t}^{t} f(y)dy > 0.$$

Si dans (3), on choisit $t > 0$ assez petit pour que (2) soit valide, on en déduit

$$f'(0) = 0.$$

Dérivons maintenant deux fois (✘) par rapport à la variable y, on obtient

$$2f(x)f''(y) = f''(x+y) + f''(x-y)$$

qui pour $y = 0$ donne

$$2f(x)f''(0) = 2f''(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En posant $C = f''(0)$, les solutions de l'équation fonctionnelle (✘) sont aussi solutions de l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}) \quad \begin{cases} f''(x) & = Cf(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(0) & = 0, \\ f'(0) & = 1. \end{cases}$$

Suivant C on a trois types de solutions

$$f(x) = \begin{cases} C_1x + C_2 \quad \text{si} \;\; C = 0 \\ C_1\mathrm{sh(cx)} + \mathrm{C_2ch(cx)} \quad \text{si} \;\; \mathrm{C > 0 \text{ avec } c = \sqrt{C}} \\ C_1\sin(cx) + C_2\cos(cx) \quad \text{si} \;\; C < 0 \;\; \text{avec} \;\; c = \sqrt{-C}. \end{cases}$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1,\; f'(0) = 0$, les solutions de $(\mathscr{E})$ sont finalement

$$f \equiv 0, \quad f \equiv 1, \quad f(x) = \mathrm{ch(cx)}, \quad \mathrm{f(x) = \cos(cx)}.$$

Réciproquement, on montre qu'elles sont bien des solutions de l'équation fonctionnelle (✘). ❏

Sixième partie

ANALYSE 2

CHAPITRE 11

FONCTIONS HOLOMORPHES

Exercice 262 (Baireries dans $\mathscr{O}(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert non vide et distinct de $\mathbb{C}$. Pour $a \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega,\ r \in \mathbb{R}_+^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on note :

$$\mathscr{E}_n := \{\, f \in \mathscr{O}(\Omega)\ :\ |f(z)| \leq n,\ \forall\, z \in D(a,r) \cap \Omega \,\}.$$

❶ *Pour $f \in \mathscr{E}_n$, si $(z_k)_k$ est une suite dans Ω convergente vers a on pose*

$$f_k(z) = 2n + \frac{z - z_k}{z - a}\,(f(z) - 2n) = f(z) + \frac{z_k - a}{z - a}(2k - f(z)), \quad z \in \Omega.$$

Montrer que la suite $(f_k)_k$ converge vers f dans $\mathscr{O}(\Omega)$.

❷ *Montrer que $\mathscr{E}_n$ est d'intérieur vide dans $\mathscr{O}(\Omega)$.*

❸ *Montrer que $\mathscr{E}_n$ est fermé dans $\mathscr{O}(\Omega)$.*

❹ *En déduire que l'ensemble $\mathscr{O}(\Omega) \cap L^\infty(D(a,r))$ est maigre dans $\mathscr{O}(\Omega)$.*

❺ *Montrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ analytiquement prolongeables à un ouvert strictement plus grand que Ω est un partie maigre de $\mathscr{O}(\Omega)$. En déduire que $\mathscr{G} := \mathscr{O}(\Omega) \setminus \mathscr{F}$ est non maigre et partout dense.*

❻ *Montrer que $\mathscr{O}(\Omega) = \mathscr{G} + \mathscr{G}$ (considérer pour $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ l'application $T_f\ :\ \mathscr{G} \ni g \mapsto f - g \in \mathscr{O}(\Omega)$ ....).*

❶ Il est suffisant de montrer que la suite $(f_k)_k$ converge uniformément sur toute boule fermée $\overline{B(b,\delta)} \subset \Omega$. Comme $a \in \partial\Omega$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$|z - a| \geq \delta_0,\ \forall\, z \in \overline{B(b,\delta)}\ ;$$

il existe aussi une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{z \in \overline{B(b,\delta)}} |2n - f(z)| \leq C.$$

Ces deux inégalités impliquent que

$$\begin{aligned} |f_k(z) - f(z)| &= \left|\frac{z_k - a}{z - a}\right| \cdot |2n - f(z)| \\ &\leq |z_k - a| \cdot \frac{C}{\delta_0} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

pour tout $z \in \overline{B(b,\delta)}$. on a donc

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z \in \overline{B(b,\delta)}} |f_k(z) - f(z)| = 0$$

la suite $(f_k)_k$ est bien uniformément convergente vers f sur tout disque $\overline{B(b,\delta)}\subset\Omega$ i.e. $f_k\to f$ dans $\mathscr{O}(\Omega)$.

❷ Vérifions que pour toute fonction $f\in\mathscr{E}_n$ on a $f_k\notin\mathscr{E}_n$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Pour cela on peut écrire

$$\begin{aligned}|f_k(z)| &\geq -|f(z)|+\left|\frac{z-z_k}{z-a}\right|\cdot|f(z)-2n|\\ &\geq -|f(z)|+\left|\frac{z-z_k}{z-a}\right|\cdot(2n-f(z)),\quad \forall\, z\in\Omega\\ &\geq -p+\left|\frac{z-z_k}{z-a}\right|\cdot(2n-n),\quad \forall\, z\in D(a,r)\cap\Omega\\ &\geq -p+\left|\frac{z-z_k}{z-a}\right|\cdot n \underset{z\to a}{\longrightarrow}+\infty,\end{aligned}$$

les applications f_k ne sont donc pas bornées sur $D(a,r)\cap\Omega$: $f_k\notin\mathscr{E}_n$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Mais comme $f_k\to f$ dans $\mathscr{O}(\Omega)$, la fonction f n'est pas intérieure à $\mathscr{E}_n$; f étant arbitraire, chaque ensemble $\mathscr{E}_n$ est d'intérieur vide.

❸ Une suite $(g_k)_k\subset\mathscr{E}_n$ convergente dans $\mathscr{O}(\Omega)$ vers une fonction g converge en particulier simplement sur Ω et donc sur $D(a,r)\cap\Omega$. Ainsi, $\forall\, z\in D(a,r)\cap\Omega$,

$$\left(|g_k(z)|\leq n\quad \&\quad \lim_k g_k(z)=g(z)\right)\Longrightarrow |g(z)|\leq n$$

soit $g\in\mathscr{E}_n$ qui est bien fermé dans $\mathscr{O}(\Omega)$.

❹ Vu ce qui précède,

$$\mathscr{O}(\Omega)\cap L^\infty(D(a,r))=\{\, f\in\mathscr{O}(\Omega) \text{ et bornes sur } \mathrm{D(a,r)}\cap\Omega\,\}=\bigcap_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}\mathscr{E}_{\mathrm{n}}$$

est maigre dans $\mathscr{O}(\Omega)$ comme réunion des ensembles rares $\mathscr{E}_n$.

❺ Soit $f\in\mathscr{F}$, il existe un domaine $\Delta_f\underset{\neq}{\supset}\Omega$ tel que $f\in\mathscr{O}(\Omega)$; il existe donc $a\in\partial\Omega, r>0$, tels que $\overline{D}(a,r)\subset\Delta_f$ et par suite f est bornée sur $D(a,r)$, donc sur $D(a,r)\cap\Omega$: il existe donc $n\in\mathbb{N}$ tel que $f\in\mathscr{E}_{n,a}:=\{\, f\in\mathscr{O}(\Omega)\ :\ |f(z)|\leq n,\ \forall\, z\in D(a,r)\cap\Omega\,\}$. On considère alors une partie dénombrable dense $A\subset\partial\Omega$ et la suite $(D_n)_n$ des disques centrés en $a\in A$ à rayons rationnels et enfin les ensembles

$$\mathscr{E}_n^l:=\{\, f\in\mathscr{O}(\Omega)\ :\ |f(z)|\leq n,\ \forall\, z\in D_l\cap\Omega\,\}.$$

Vu ce qui précède, les ensembles $\mathscr{E}_n^p$ sont rares et $\mathscr{F}\subset\bigcup_{n,l}\mathscr{E}_n^l$ est donc maigre.
$\mathscr{O}(\Omega)$ étant un espace de baire, $\mathscr{F}$ maigre implique que $\mathscr{G}=\mathscr{O}(\Omega)\setminus\mathscr{F}$ est non maigre et partout dense.

❻ Soit $f\in\mathscr{O}(\Omega)$ et considérons l'application Λ_f $\mathscr{O}(\Omega)\ni g\mapsto\Lambda_f(g)=f-g$. C'est un isomorphisme topologique de $\mathscr{O}(\Omega)$ et par conséquent $\Lambda_n(\mathscr{G})$ est une partie non maigre de $\mathscr{O}(\Omega)$; en particulier $\Lambda_n(\mathscr{G})\cap\mathscr{G}\neq\emptyset$. Il existe donc $g\in\mathscr{G}$ tel que $h=\Lambda_f(g)=f-g\in\mathscr{G}$. f étant arbitraire, on a bien $\mathscr{O}(\Omega)=\mathscr{G}+\mathscr{G}$. ❑

Exercice 263 (Calcul de $\zeta(2)$ par la méthode des résidus) *Appliquer convenablement le théorème des résidus à la fonction méromorphe $f(z) = \pi z^{-2}cotan(\pi z)$ pour en déduire la valeur de $\zeta(2) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.*

L'ensemble des pôles de f est $\mathbb{Z}$ et après un calcul classique, le résidu de f à l'origine vaut $\text{res}(f,0) = -\frac{\pi^2}{3}$ et en un entier $n \in \mathbb{Z}^\star$: $\text{res}(f,n) = \frac{1}{n^2}$.
Soit γ_N ($N \geq 1$) le contour rectangulaire de sommets $(\pm 1 \pm i)(N+\frac{1}{2})$, par le théorème des résidus

$$(\bigstar) \qquad -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} f(z)dz := I_n.$$

Maintenant pour $\pi z = x + iy \in \mathbb{C}$ un petit calcul nous donne

$$|\text{cotan}(\pi z)|^2 = \frac{\cos^2(x) + \text{sh}^2(y)}{\sin^2(x) + \text{sh}^2(y)},$$

soit, si z parcourt les cotés verticaux de γ_N

$$|\text{cotan}(\pi z)|^2 = \frac{\text{sh}^2(y)}{\sin^2(x) + \text{sh}^2(y)} < 1$$

alors que sur les cotés horizontaux

$$|\text{cotan}(\pi z)|^2 = \frac{1 + \text{sh}^2(\pi(N+\frac{1}{2}))}{\text{sh}^2(\pi(N+\frac{1}{2}))} = \coth^2(\pi(N+\frac{1}{2})) \leq \coth^2(\frac{\pi}{2})$$

si bien que $z \mapsto |\text{cotan}(\pi z)|$ est uniformément (en N))bornée sur tout contour γ_N par $\coth(\frac{\pi}{2})$ et par suite

$$\forall N \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad |f(z)| \leq \frac{\pi\coth(\frac{\pi}{2})}{(N+\frac{1}{2})^2}, \quad \forall\, z \in \gamma_N.$$

Estimation qui assure

$$|I_N| \leq \frac{8\pi\coth(\frac{\pi}{2})(N+\frac{1}{2})}{2\pi(N+\frac{1}{2})^2} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad N \to +\infty.$$

avec ($\bigstar$) on tire aussitot $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. ❑

Exercice 264 (Le théorème de Rolle version holomorphe) J.C. EVARD & F. JAFARI « A complex Rolle's theorem », [34], 99, 1992 ou plus simplement [2].

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert convexe $D \subset \mathbb{C}$, pour $a \neq b \in D$ vérifiant $f(a) = f(b)$, montrer qu'il existe

$$z_1, z_2 \in]a,b[= \{\, a + t(b-a),\ 0 < t < 1 \,\}$$

vérifiant

$$re(f'(z_1)) = im(f'(z_2)) = 0.$$

Si $a = a_1 + ia_2,\ b = b_1 + ib_2$ considérons l'application φ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \langle\, f(a+t(b-a)), b-a\,\rangle_{\mathbb{C}} = \mathrm{re}\,(f(a+t(b-a))\,(b_1-a_1) + \mathrm{im}\,(f(a+t(b-a))\,(b_2-a_2),$$

vu les hypothèses, φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\varphi(0) = \varphi(1)$; par Rolle, il existe donc $t_1 \in]0,1[$ vérifiant $\varphi'(t_1) = 0$ et par un calcul classique :

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(t_1) &= (b_1-a_1)\big(\partial_x\mathrm{re}(f)(a+t_1(b-a))(b_1-a_1) + \partial_y\mathrm{re}(f)(a+t_1(b-a))(b_2-a_2)\big) \\ &\quad + (b_2-a_2)\big(\partial_x\mathrm{im}(f)(a+t_1(b-a))(b_1-a_1) + \partial_y\mathrm{im}(f)(a+t_1(b-a))(b_2-a_2)\big) \end{aligned}$$

si bien qu'avec les équations de Cauchy-Riemann il reste (avec $z_1 = a + t_1(b-a)$...)

$$0 = \varphi'(t_1) = ((b_1-a_1)2 + (a_2-b_2)2)\,\partial_x\mathrm{re}(f)(z_1)$$

a et b étant distincts on a donc $\partial_x\mathrm{re}(f)(z_1) = 0$ avec $z_1 \in]a,b[$. Il reste encore une fois à utiliser Cauchy-Riemann pour remarquer que $\mathrm{re}(f')(z) = \mathrm{re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right) = \mathrm{re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right) = \partial_x\mathrm{re}(f)(z)$ et conclure. Pour la partie imaginaire on remplace f par $-if$. ❑

ℹ **Remarques :** ➪ Le théorème de Rolle est faux pour une fonction à valeurs vectorielles : par exemple la fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ (ou bien $f(t) = e^{it}$) définie par $f(t) = (\cos(t),\sin(t))$ qui vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais sa différentielle n'est jamais nulle sur $[0,2\pi]$.

➪ Pour $f\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe ce résultat négatif à fortiori subsiste (c.f. $f(z) = e^z$ où $|f'(z)| = |e^z| \neq 0$) toutefois comme le précise cet exercice, l'holomorphie (si f est seulement $\mathscr{C}^\infty$ c'est sans espoir) permet de conserver le résultat pour les parties réelles et imaginaires de la fonction. ❑

Exercice 265 (Une preuve « presque holomorphe » du théorème de Cayley-Hamilton) *D'après C.H.McCarty, [34], 19 ? ?*

❶ *Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe, $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que*

$$\forall\, r \geq R\ :\ A^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^{k+1}\left(re^{it}Id - A\right)^{-1} dt.$$

❷ *En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.*

❶ Si nous munissons $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\| := \max\{|a_{i,j}|,\ 1 \leq i,j \leq n\},\ A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{C})$, on vérifie par une récurrence élémentaire que

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}),\ k \in \mathbb{N}^\star\ :\ \|A^k\| \leq n^{k-1}\|A\|^k.$$

Ces inégalités assurent que le rayon de convergence de la série entière $\sum_k \|A^k\|z^k$ est supérieur ou égal à $(n\|A\|)^{-1}$ et par suite, la série de matrices $\sum_k \zeta^{-(k+1)}A^k$ converge dans $M_n(\mathbb{C})$ normalement sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,n\|A\|)}$. On vérifie alors (classiquement)

$$(\zeta I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\zeta^{-(k+1)}A^k\right) = \lim_{N\to\infty}\left(I_n - \zeta^{-(N+1)}A^{N+1}\right) = I_n,\ \forall\,|\zeta| > n\|A\|.$$

Autrement dit

$$\begin{cases}\zeta I_n - A \in GL_n(\mathbb{C}), \quad \forall\, |\zeta| > n\|A\| \\ (\zeta I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{-(k+1)} A^k, \quad \forall\, |\zeta| > n\|A\|.\end{cases}$$

La normale convergence sur tout cercle $C(0,r)$, $r > n\|A\|$ assure l'échange $\int \sum = \sum \int$ ci-dessous

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \zeta^k(\zeta I_n - A)^{-1} d\zeta &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \zeta^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} \zeta^{-(l+1)} A^l\right) d\zeta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} A^l \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \zeta^{k-l-1} d\zeta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} A^l \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta}\right)^{k-l-1} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} r^{k-l} A^l \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-l)} d\theta \\ &= A^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

❷ Cette formule étant vérifiée pour tout entier k, la linéarité de l'intégrale nous assure que

$$P(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} P(\zeta)(\zeta I_n - A)^{-1} d\zeta, \quad \forall\, P \in \mathbb{C}[z], \quad r > n\|A\|.$$

(remarquer l'analogie avec la formule de Cauchy $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \dfrac{f(u)}{u-z} du$, $|z| < r$, ici $\|A\| \leq n\|A\| < r$....)
En particulier pour le polynôme caractéristique de A : $P(z) = P_A(z) = \det(zI_n - A)$ (ou $\det(A - zI_n)$ selon l'usage)

$$P_A(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} P_A(\zeta)(\zeta I_n - A)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \det(\zeta I_n - A)(\zeta I_n - A)^{-1} d\zeta,$$

comme

$$(\zeta I_n - A)^{-1} = [\det(\zeta I_n - A)]^{-1}\, {}^t\mathrm{com}(\zeta I_n - A) = [\det(\zeta I_n - A)]^{-1}\left((C_{i,j}(\zeta))\right)$$

où $C_{i,j}(\zeta)$ est le cofacteur d'indice j, i de $\zeta I_n - A$, **donc** un polynôme en ζ, donc d'**intégrale nulle** sur tout cercle $C(0,r)$, nous avons finalement

$$P_A(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} ((C_{i,j}(\zeta))) d\zeta = 0$$

i.e.

$$P_A(A) = 0, \quad \forall\, A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Le théorème de Cayley-Hamilton est bien démontré. ❑

Exercice 266 (Une fonction entière prenant des valeurs réelles sur deux droites sécantes)
On suppose qu'une fonction entière non constante f ne prends que des valeurs réelles sur deux droites sécantes du plan complexe.
Montrer que l'angle formé par ces deux droites est un multiple rationel de π.

Si les deux droites s'intersectent au point a, quitte à considérer $g(z) = f(z+a) - f(z)$, on peut supposer que $a = f(a) = 0$.
On a alors $f(z) = bz^n(1+o(1))$ lorsque $z \to 0$ avec $b \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. En particulier, f est sans zéros sur un voisinage épointé de l'origine (ou bien, invoquer les zéros isolés). Soient $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ les vecteurs directeurs de nos deux droites, pour $t \in \mathbb{R}$ $f(te^{i\alpha})$ et $(te^{i\beta})$ sont réels ; il en est donc de même de

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(te^{i\alpha})}{f(te^{i\beta})} = \lim_{t\to 0} \frac{ce^{in\alpha}t^n(1+o(1))}{ce^{in\beta}t^n(1+o(1))} = e^{in(\alpha-\beta)}$$

i.e. $in(\alpha-\beta) \in i\pi\mathbb{Z}$, finalement $\alpha - \beta \in \pi\mathbb{Q}$. ❑

Exercice 267 (Une fonction entière non constante mais bornée sur toute droite passant par l'origine.) Bak & Newman, C.Zuily ref. ? ?
On pose pour $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t} dt.$$

❶ *Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{C}$.*
❷ *Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et y vérifie $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.*
❸ *On désigne par* $\log$ *la fonction logarithme définie dans le demi-plan $U = \{z = x+iy\ :\ x+y > 0\}$ qui coïncide avec le logarithme usuel sur le demi-axe réel positif et par $w \mapsto w^w$ la fonction holomorphe sur U égale à $\exp(w\log(w))$. Soient enfin C_r et C_ε les quarts de cercles de rayon respectivement r et ε centrés à l'origine dans le premier quadrant. En intégrant la fonction $w \mapsto \dfrac{\exp(wz)}{w^w}$ sur le contour ci-contre, montrer que*

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{\exp(itz)}{\exp(it\log(t) - t\frac{\pi}{2})} - \lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw.$$

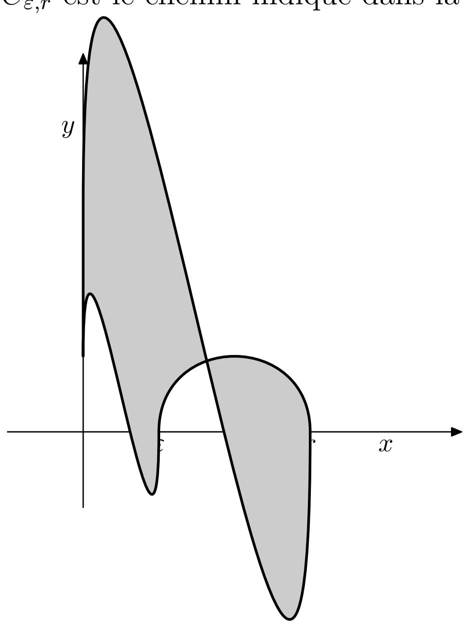
❹ *Pour $z = x+iy$ avec $y = \frac{\pi}{2} + C$ où $C > 0$. Montrer que la première intégrale est majorée par C^{-1} et en déduire que $|f(z)| \leq C^{-1}$. Montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour $|Im(z)| \geq \pi$.*
❺ *Soit $g(z) = f(z - 2i\pi)$. Montrer que g est bornée sur toute demi-droite issue de l'origine et holomorphe sur $\mathbb{C}$.*
❻ *Montrer que* $\lim_{|z|\to\infty} |g(x+2i\pi)| = +\infty$.

❶ et ❷ L'intégrale impropre définissant f est clairement convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ (l'intégrande se prolonge continuement à l'origine et est un $o(t^{-2})$ à l'infini) : f est donc bien définie sur $\mathbb{C}$. Pour les mêmes raisons, on peut localement appliquer le théorème de continuité et dérivation des intégrales à paramètres ([48], théorème 1.16.1) pour affirmer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (on peut aussi invoquer ce théorème pour montrer que f est continue sur $\mathbb{C}$ puis conclure avec celui de Moréra ; ou enfin encore développer f en une série entière de rayon de convergence infini). La formule $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ est elle immédiate.

❸ Pour $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ posons $w^w = \exp(w \log(w))$ où log est la détermination principale du logarithme. La fonction $g\ :\ w \mapsto \dfrac{\exp(wz)}{w^w}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, le théorème de Cauchy assure que pour tous $0 < \varepsilon < r$

$$\int_{C_{\varepsilon,r}} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = 0$$

où $C_{\varepsilon,r}$ est le chemin indiqué dans la figure ci-dessous.



Soit

$$\int_{C_{\varepsilon,r}} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = \int_{[\varepsilon,r]} + \int_{C_r} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{[ir,i\varepsilon]} = 0, \quad \forall\ 0 < \varepsilon < r.$$

Bien évidemment

$$\int_{[\varepsilon,r]} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = \int_\varepsilon^r \frac{\exp(tz)}{t^t} dt \quad \underset{\substack{r \to 0 \\ \varepsilon \to 0}}{\longrightarrow} \quad \int_\varepsilon^r \frac{\exp(tz)}{t^t} dt = f(z)$$

et

$$\int_{[ir,i\varepsilon]} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = -\int_\varepsilon^r \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t) + i\pi/2)} idt \quad \underset{\substack{r \to 0 \\ \varepsilon \to 0}}{\longrightarrow} \quad \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t) + i\pi/2)} idt.$$

Sur le contour C_ε nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{\exp(wz)}{w^w}dw\right| &= \left|\int_0^{\pi/2}\frac{\exp\left\{\varepsilon(\cos(\theta)+i\sin(\theta))(x+iy)\right\}}{\exp\left\{\varepsilon(\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\log(\varepsilon)+i\theta)\right\}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leq \int_0^{\pi/2}\frac{\exp\left\{\varepsilon(x\cos(\theta)-y\sin(\theta))\right\}}{\exp\left\{\varepsilon(\log(\varepsilon)\cos(\theta)-\theta\sin(\theta))\right\}}\varepsilon d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi/2}\exp\left\{\varepsilon\cos(\theta)(x-\log(\varepsilon))\right\}\exp\left\{\varepsilon\sin(\theta)(\theta-y)\right\}\varepsilon d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} g_{x,y}(\varepsilon,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} C\varepsilon d\theta = \frac{C\pi\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

par continuité $(\varepsilon,\theta)\mapsto g_{x,y}(\varepsilon,\theta)$ sur le compact $[0,1]\times[0,2\pi]$ (ou, au choix par convergence dominée) ; en conséquent

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\exp(wz)}{w^w}dw = 0$$

et finalement

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{r\to\infty}\int_{C_{\varepsilon,r}} g(w)dw = 0 = f(z) - \int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t)+i\pi/2)}idt + \lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{\exp(wz)}{w^w}dw$$

d'où la formule désirée

$$(✔) \qquad f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t)+i\pi/2)}idt - \lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{\exp(wz)}{w^w}dw.$$

❹ Soit $z = x+iy = x+i(\pi/2+C)$, $(C>0)$ un nombre complexe de partie imaginaire strictement plus grande que $\pi/2$. Le premier terme à droite dans (✔) est majoré par C^{-1}

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t)+i\pi/2)}idt\right| &\leq \int_0^\infty |\exp(itz)|\exp(t\pi/2)dt \\
&\leq \int_0^\infty \exp\left\{-t(y-\pi/2)\right\}dt \\
&\leq \int_0^\infty \exp(-Ct)dt = \frac{1}{C}.
\end{aligned}$$

Pour le second terme

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_r}\frac{\exp(wz)}{w^w}dw\right| &\leq \int_0^{2\pi}\left|\frac{\exp\{r(\cos\theta+i\sin\theta)(x+i(\pi/2+C))\}}{\exp\{r(\cos\theta+i\sin\theta)(\log r+i\theta)\}}ire^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leq \int_0^{\pi/2} r\exp\{r\cos\theta(x-\log r)\}\exp\{r\sin\theta(\theta-C-\pi/2)\}\,d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi/2} r\exp\{r\sin\theta(\theta-\pi/2-C)\}\,d\theta \qquad \text{dès que} \qquad \log r > x \\
&\leq \int_0^{\pi/2} r\exp\{-Cr\sin\theta\}\,d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi/2} r\exp\left\{-\frac{2Cr\theta}{\pi}\right\}d\theta \qquad \text{car} \quad \sin(\theta)\geq\frac{2\theta}{\pi} \text{ sur } [0,\pi/2] \\
&\leq \frac{\pi}{2C}\left[1-e^{-Cr}\right] \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\pi}{2C}.
\end{aligned}$$

On a donc pour $r > r_0$

$$\left|\int_{C_r}\frac{\exp(wz)}{w^w}dw\right| \leq \frac{\pi}{C}.$$

Ces deux majorations assurent qu'il existe une constante $C' > O$ telle que

$$(\text{✘}) \qquad |f(z)| \leq C', \qquad \forall\, z\in\mathbb{C} \quad \text{vérifiant} \quad |\text{im}(z)| > \pi/2.$$

f est en particulier bornée en dehors de la bande horizontale $\{z\in\mathbb{C} \;:\; |\text{im}(z)|\leq\pi\}$.

❺ Vu ce qui précède, la fonction entière $g(z) = f(z-2i\pi)$ est bornée en dehors de la bande horizontale $\{z\in\mathbb{C} \;:\; \pi\leq\text{im}(z)\leq 3\pi\}$; l'intersection de toute droite complexe passant par l'origine avec cette bande étant compacte, g est bien bornée sur une telle droite et vérifie donc la propriété désirée.

❻ On a pour $x\in\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
|g(x+2i\pi)| = |f(x)| &= \int_0^\infty \frac{e^{xt}}{t^t}dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{t^t}dt = \int_0^1 e^{t(x-\log(t))}dt \\
&\geq \int_0^1 e^{tx}dt = \left[\frac{e^{tx}}{x}\right]_0^1 = \frac{e^x-1}{x}
\end{aligned}$$

soit

$$\lim_{x\to\infty}|g(x+2i\pi)| = +\infty.$$

❑

Exercice 268 (Sur $\mathscr{O}(\Omega)$, les topologies de la convergence compacte et L^1_{loc} coïncident)
Soit Ω un ouvert du plan complexe. Montrer que sur $\mathscr{O}(\Omega)$ la topologie induite par $L^1_{loc}(\Omega)$ coïncide avec la topologie usuelle de la convergence compacte sur Ω.

La topologie usuelle sur l'espace $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est la topologie de la convergence compacte $\mathscr{T}_c$ sur Ω, i.e. (c.f. [46] où exo ? ?) la topologie engendrée par la famille de semi-normes $(\|.\|_K)_{K\in\mathscr{K}(\Omega)}$. $(\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{T}_c)$ est un espace de Fréchet (i.e. un espace localement convexe métrisable complet) et une suite $(f_n)_n$ dans $\mathscr{O}(\Omega)$ converge vers $f_i n\mathscr{O}(\Omega)$ si, et seulement si elle converge uniformément sur tout compact de Ω.
Toute application $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ étant localement intégrable, $\mathscr{O}(\Omega)$ se plonge naturellement dans $L^1_{loc}(\Omega)$ espace des classes de fonctions localement intégrable sur Ω et induit donc sur $\mathscr{O}(\Omega)$ la topologie $\mathscr{T}_{1,loc}$. Sur $(L^1_{loc}(\Omega), \mathscr{T}_{1,loc})$ la topologie est engendrée par les semi-normes

$$\|f\|_{1,K} := \int_K |f(z)|dxdy, \quad K \in \mathscr{K}(\Omega).$$

Montrer que sur $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ les deux topologies $\mathscr{T}_c$ et $\mathscr{T}_{1,loc}$ coïncident équivaut à montrer que l'identitité

$$i \ : \ (\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{T}_c) \longrightarrow (\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{T}_{1,loc})$$

est un isomorphisme topologique.

De toute évidence, nous avons pour tout $K \in \mathscr{K}(\Omega)$

$$\|f\|_{1,K} == \int_K |f(z)|dxdy \leq \lambda(K)\|f\|_{\infty,K}, \qquad \forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega).$$

(où $\lambda(K) = \int_K dxdy$ est la mesure de Lebesgue de K) Cette inégalité assure la continuité de $i \ : \ (\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{T}_c) \longrightarrow (\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{T}_{1,loc})$, soit $\mathscr{T}_{1,loc} \subset \mathscr{T}_c$.

Pour l'autre inclusion, nous aurons besoin de l'égalité de la moyenne planaire locale :

$$\forall \ \overline{D(a,r)} \subset \Omega, \ \forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \ : \quad f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(x+iy)dxdy.$$

(pour une démonstration, passer en polaires dans l'intégrale et penser à la formule de Cauchy) Montrer inclusion $\mathscr{T}_c \subset \mathscr{T}_{1,loc}$ équivaut à établir la continuite de $i^{-1} \ : \ (\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{T}_{1,loc}) \longrightarrow (\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{T}_c)$ i.e.

(✘) $\qquad \forall\, K \in \mathscr{K}(\Omega), \ \exists\, L \in (\Omega), \ C_K > 0 \ : \quad \|f\|_{\infty,K} \leq C_K \|f\|_{1,L}, \quad \forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega).$

Soit donc $K \in \mathscr{K}(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathrm{dist}(K, \partial\Omega) > 2\varepsilon.$$

Avec ce choix, $L := K + \overline{D(0,\varepsilon)} = \{z \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}(z,K) \leq \varepsilon\}$ est un compact de Ω vérifiant

$$\forall\, z \in K, \ \overline{D(z,\varepsilon)} \subset L \subset \Omega,$$

si bien qu'avec la formule de la moyenne nous avons pour tout $z \in K$ et $f \in \mathscr{O}(\Omega)$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\overline{D(z,\varepsilon)}} f(x+iy)dxdy \right| \leq \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\|f\|_{1,\overline{D(z,\varepsilon)}} \leq \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\|f\|_{1,L}$$

soit (✘), Q.E.D. ❑

Exercice 269 (Une fonction entière universelle) *(C.Blair & L.A.Rubel, [34], 5-1983).*
Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que l'ensemble $\{f^{(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ de toute les dérivées de f soit dense dans l'ensemble des fonctions entières $\mathscr{O}(\mathbb{C})$. Une telle fonction est dire « universelle ».

🛈 **Rappel :** *La topologie usuelle sur $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ est la topologie de la convergence compacte. Il s'agit donc de montrer qu'il existe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, tout $\varepsilon > 0$ et toute application $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, il existe un entier N tel que $\sup_{z\in K} |f^{(N)}(z) - g(z)| < \varepsilon$.*

Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une énumération de tous les polynômes à coefficients rationnels. Soit I l'opérateur intégral définit sur $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ par

$$I(h)(z) = \int_0^z h(w)dw,$$

Les itérés $I \circ I \circ \cdots \circ I$ (k fois) seront notés I^k comme le veut la tradition. Notre fonction va être de la forme suivante :

$$f = \sum_{n\geq 1} I^{k_n}(P_n)$$

où la suite d'entiers $(k_n)_n$ vérifie les propriétés suivantes :

- ⇝ $k_n > k_j + \deg(P_j), \quad 1 \leq j \leq n-1.$
- ⇝ En notant $H_n = I^{k_n}(P_n)$

$$(✘) \qquad |H_n^{(j)}(z)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k_{n-1} \ \text{ et } \ |z| \leq n.$$

Si cela peut être fait, la série définissant f convergera uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ (avec la seconde propriété) et par conséquent $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$; toujours par (✘) elle pourra être dérivée terme à termes. En outre, (encore (✘)) on aura

$$f^{(k_n)}(z) = P_n(z) + E_n(z), \quad \text{et} \quad |E_n(z)| \leq 2^{-(n-1)}, \quad \forall\, |z| \leq n.$$

Si tel est le cas, la fonction f possède bien les propriétés désirées : en effet, la suite des sommes partielles de la série série de Taylor de toute fonction entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ converge uniformément vers g sur tout compact de $\mathbb{C}$, comme sur tout compact tout polynôme est uniformément approchable par des polynômes à coefficients rationnels, $\mathbb{Q}[z]$ est dense dans $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence compacte. Ainsi, pour $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ et K compact il existe $N \in \mathbb{N}$ suffisament grand pour que

$$\sup_{z\in K} |f(z) - P_N(z)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad K \subset \{z \ : \ |z| \leq N\},$$

de telle sorte que

$$\sup_{z\in K} |f(z) - f^{(K_N)}(z)| \leq \sup_{z\in K} |f(z) - P_N(z)| + \sup_{|z|\leq N} |E_N(z)| \leq \varepsilon + 2^{-(N+1)}$$

d'où le résultat.

Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à montrer que la suite $(K_n)_n$ peut être choisie vérifiant (✘). Pour cela, si on remarque que $I(z^r) = z^{r+1}/(r+1)$ on a

$$\left|I^k(z^r)\right| = \left|\frac{z^{r+k}}{(r+1)\dots(r+k)}\right| \leq |z|^r \frac{|z|^k}{k!} \leq R^r \frac{R^k}{k!}, \quad \forall\, z \in \overline{D(0,R)}.$$

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la suite $(I^k(z^r))_k$ converge uniformément vers 0 sur tout disque $\{z\ :\ |z| \leq R\}$ (i.e. converge vers 0 dans $\mathscr{O}(\mathbb{C})$). Il en est de même pour $I^k(P_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ comme combinaison linéaire finie de $I^k(z^r)$ ainsi que de leur dérivées $\left(I^k(z^r)\right)^{(d)}$ par continuité de la dérivation dans $\mathscr{O}(\mathbb{C})$. Il est donc possible de choisir K_n assez grand pour que (✘) soit réalisée. ❑

Exercice 270 (L'équation $f^2 + g^2 = 1$ dans $\mathscr{O}(\mathbb{C})$) [34], *1981-5.*
Montrer que les solutions de l'équation

(✘) $$f^2 + g^2 = 1, \qquad f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$$

sont $f = \cos(h),\ g = \sin(h)$ *où* $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

Si $f = \cos(h),\ g = \sin(h)$ avec $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ alors $f^2 + g^2 = 1$. Réciproquement, soient $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ vérifiant (✘), comme

$$\left(f^2 + g^2 = 1\right) \iff ((f - ig)(f + ig) = 1)\,,$$

$f + ig$ est donc une fonction entière sans zéros sur $\mathbb{C}$, il existe donc ([48], corollaire 1-14-4) une fonction entière h telle que $f + ig = e^h$. Mais alors

$$f - ig = \frac{1}{f + ig} = e^{-h},$$

soit

$$\begin{aligned} f &= \frac{e^h + e^{-h}}{2} = \operatorname{ch}(h) = \cos(ih) = \cos(-ih) \\ g &= \frac{e^h - e^{-h}}{2i} = \frac{1}{i}\operatorname{sh}(h) = \frac{1}{i}\left[-i\sin(ih)\right] = -\sin(ih) = \sin(-ih), \end{aligned}$$

où encore, en posant $H = -ih \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, $f = \cos(H),\ g = \sin(H)$. Q.E.D. ❑

Exercice 271 (Comportement au voisinage d'un point singulier essentiel isolé et non isolé)

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \setminus \{a\} \subset \mathbb{C}$.

❶ *On suppose le point a est isolé (i.e. que f st holomorphe sur un un disque épointé $D(a,r) \setminus \{a\} \subset \Omega \setminus \{a\}$) et qu'il existe une suite $(r_n)_n \subset]0,r[$ décroissante vers 0 telle que f soit bornée sur chaque cercle $C(a,r_n)$. Montrer que f présente au point a une singularité virtuelle (i.e. sur prolonge holomorphiquement au point a).*

❷ *Montrer que le résultat précédent tombe en défaut si le point a n'est plus isolé (au sens où f admet une suite de pôles $(a_n)_n \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ qui converge vers a.)*

❶ Supposons[1] qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{|z-a|=r_n} |f(z)| \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le principe du maximum à la fonction holomorphe f sur chaque couronne $C(0, r_n, r_{n+1}) := \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; r_{n+1} < |z-a| < r_n \}$ on déduit immédiatement que

$$\sup_{0<|z-a|<r_0} |f(z)| \leq M.$$

Il est alors classique que f présente au point a une singularité virtuelle.

❷ Considèrons une suite $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_n |a_n|$ soit convergente et la fonction

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-n}.$$

Soient $R > 0,\ z \in D(0,R)$. Si on laisse de cotés les premiers termes de la série dont le pôle est à l'intérieur du disque $D(0,R)$, les autres termes (disons pour $n \geq n_0$) seront holomorphes sur ce disque et, pour $|z| < R$, $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_n}{z-n} \right| \leq \frac{|a_n|}{n-|z|} < \frac{|a_n|}{n_0+1-R} = C|a_n|.$$

Cette inégalité assure la normale convergence et donc l'holomorphie de la série $\sum_{n>n_0} \frac{a_n}{z-n}$ sur $D(0,R)$. $R > 0$ étant arbitraire, f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ admettant pour pôles les entiers $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $n,k \in \mathbb{N}^\star$, pour $z \in C(0, k+\frac{1}{2})$ on a

$$|z-n| \geq \Big| |z| - n \Big| = |k + \frac{1}{2} - n| \geq \frac{1}{2},$$

i.e.

$$\frac{1}{|z-n|} \leq 2, \quad \forall\, z \in C(0, k+\frac{1}{2}), \text{ et } \ n \in \mathbb{N}^\star$$

et on a finalement

$$\max_{|z|=k+\frac{1}{2}} |f(z)| \leq 2 \sum_{n\geq 1} |a_n|, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$

[1] G.Julia, « Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé », Gauthier-Villars (1924).

f est donc bornéee sur les cercles $C(0, k + \frac{1}{2})$ et, en remplacant z par $1/z$ on obtient une fonction méromorphe

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n z}{1 - nz}$$

admettant pour pôles les points $1/n$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$ et l'origine comme point singulier essentiel. Toutefois, vu ce qui précède, son module reste borné sur les cercles de rayon $r_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1}$ ce qui nous fourni l'exemple désiré. ❏

🛈 **Remarque :** Toutefois, malgré l'exemple ci-dessus, le comportement au voisinage d'un point singulier essentiel et des plus chaotique : f prends chaque valeur sauf peut être une, une infinité de fois, c'est le théorème[2] de Casorati-Weierstrass.

[2] Voir par exemple [48], page ? ? ou [2], page ? ?

CHAPITRE 12

ANALYSE FONCTIONNELLE

Exercice 272 ($L^2([0,1])$ est maigre dans $L^1([0,1])$)

Démontrer que $L^2([0,1])$ est maigre dans $L^1([0,1])$

❶ *En considérant les ensembles $I_n = \left\{ f \in L^2([0,1]) \ : \ \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq n \right\}$.*

❷ *En considérant l'injection canonique $i \ : \ L^2([0,1]) \ \hookrightarrow \ L^1([0,1])$.*

❸ *En considérant les fonctionnelles $\Lambda_n \ : \ L^1([0,1]) \ni f \mapsto \ \Lambda_n(t) = \int_0^1 f(t) g_n(t) dt$ où $g_n(t) = n\mathbf{1}_{[0,n^{-3}]}(t)$.*

🛈 Par Cauchy-Schwarz, $\|f\|_2 \leq \|f\|_1, \ \forall f \in L^2([0,1]) \ : \ L^2([0,1])$ est donc inclu dans $L^1([0,1])$ et l'injection canonique $i \ : \ L^2([0,1]) \ \hookrightarrow \ L^1([0,1])$ est continue.

❶ L'inclusion $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ assure que $L^2([0,1]) = \bigcup_n I_n$.
⇝ Montrons que I_n est fermé dans $L^1([0,1])$ (I_n est fermé dans $L^2([0,1])$: c'est la boule $B^f_{L^2}(0,n)$...). Soit donc $f \in \overline{I_n}^{L^1}$, il existe une suite $(f_k) \subset I_n$ telle que $\lim_k f_k = f$ dans $L^1([0,1])$ et quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer[1] que la suite $(f_k)_k$ est simplement convergente presque partout sur $[0,1]$. Alors, $f_k^2 \to f^2$ est simplement convergente presque partout sur $[0,1]$ et par le lemme de Fatou[2]

$$\int_0^1 \liminf_k f_k^2(t) dt \leq \liminf_k \int_0^1 f_k^2(t) dt \leq n.$$

Ainsi, $h := \liminf_k f_k^2 \in L^1([0,1])$ et $\int_0^1 |h(t)| dt_l eqn$ i.e. $h \in I_n$; comme $h = f^2$ presque partout n en déduit que $f^2 \in L^1([0,1])$ et $\int_0^1 f^2(t) dt \leq n$ i.e. $f \in I_n$: I_n est bien fermé dans $L^1([0,1])$.

⇝ Montrons maintenant que les I_n sont d'intérieur vide dans $L^1([0,1])$. I_n est inclu dans $L^2([0,1])$ qui est un sous-espace vectoriel strict de l'espace métrique $L^1([0,1])$ donc d'intérieur vide dans $L^1([0,1])$ et il en est donc de même pour I_n. ✘ lien !!

⇝ Nous sommes maintenant en mesure de conclure : $L^2([0,1]) = \bigcup_n I_n$ est donc réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, dans l'espace de Baire $L^1([0,1])$: $L^2([0,1])$ est donc maigre dans $L^1([0,1])$, c'est le théorème de Baire.

[1] [47], prop. 2.13.6.
[2] [47], th.2.9.6.

❷ Comme nous l'avons remarqué en préambule, l'injection canonique entre les deux espaces de Frechets

$$i \ : \ (L^2([0,1]), \|\cdot\|_2) \hookrightarrow (L^1([0,1]), \|\cdot\|_1)$$

est continue : par le théorème de l'application ouverte $i(L^2([0,1])) = L^2([0,1])$ est soit égal à $L^1([0,1])$ soit maigre dans $L^1([0,1])$. Comme $L^2([0,1]) \underset{\neq}{\subset} L^1([0,1])$ (considérer $t \mapsto t^{-1/2}$...) $L^2([0,1])$ est bien maigre dans $L^1([0,1])$.

❸ Pour $f \in L^1([0,1])$

$$|\Lambda_n(f)| = \left| \int_0^{n^{-3}} nf(t)dt \right| \leq n\|f\|_1,$$

les formes linéaires Λ_n sont donc continues sur $L^1([0,1])$ ($\Lambda_n \in L^1([0,1])'$). Avec Banach-Steinhaus [46], si l'on pose

$$\mathscr{C} = \left\{ f \in L^1([0,1]) \ : \ (\Lambda_n(f))_n \text{ est bornée } \right\}$$

alors, ou bien $\mathscr{C}$ est maigre dans $L^1([0,1])$ ou bien $\mathscr{C} = L^1([0,1])$. Cette dernière alternative est exclue, pour s'en convaincre, considérons les applications $f_\alpha(t) = t^{-\alpha} \in L^1([0,1])$, $(\alpha < 1)$, par un calcul élémentaire

$$\Lambda(f_\alpha) = \frac{n^{3\alpha-2}}{1-\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

pour $2/3 < \alpha < 1$. $\mathscr{C}$ est donc maigre dans $L^1([0,1])$. Maintenant, pour $f \in L^2([0,1])$

$$|\Lambda_n(f)| = \left| \int_0^{n^{-3}} nf(t)dt \right| \underset{CS}{\leq} \left(\int_0^{n^{-3}} f^2(t)dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{n^{-3}} n^2(t)dt \right)^{1/2} \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{n}}$$

soit

$$\forall f \in L^2([0,1]) \ : \quad \lim_n \Lambda_n(f) = 0.$$

Autrement dit $L^2([0,1])$ est inclu dans $\mathscr{C}$ maigre dans $L^1([0,1])$, il est aussi maigre dans $L^1([0,1])$. ❏

Exercice 273 (Une bijection linéaire continue dont l'application réciproque est discontinue) [34]

On munit l'espace $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ des fonctions entières de la norme

$$\|f\| = \sup_{|z|=1} |f(z)|, \quad f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}).$$

Considérons l'opérateur $L : \mathscr{O}(\mathbb{C}) \to \mathscr{O}(\mathbb{C})$ définit par $L(f)(z) = f(z/2)$.

❶ *Montrer que L est une bijection et vérifie $\|L(f) - L(g)\| \leq \|f - g\|, \quad \forall f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.*
❷ *Pour $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ on pose $f_n(z) = f(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^n$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ puis, que L^{-1} est discontinue au point f.*
❸ *$(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ est-il un espace de Banach ? Donner une preuve directe de ce résultat.*

① $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ est bien un espace vectoriel normé, la seule assertion non trivialle à savoir $\|f\| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ résulte du théorème des zéros isolés.
Toute fonction entière $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ se développe en série entière sur tout le plan complexe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{donc} \quad L(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n, \quad z_i n\mathbb{C},$$

et l'unicité d'un tel développement assure l'injectivité de l'opérateur L. En outre, pour $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ on a $L(g) = f$ où $g(z) = f(2z)$: L est donc un isomorphisme algèbrique de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.
Pour $f = \sum_n a_n z^n, g = \sum_n b_n z^n \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\|L(f) - L(g)\| &= \sup_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} z^n \right| \\
&= \sup_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \left(\frac{z}{2}\right)^n \right| \\
&\leq \sup_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n \right| \\
&= \|f - g\|.
\end{aligned}$$

où la première inégalité est justifiée par le principe du maximum. L est bien continue sur $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.

② Soit donc $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, la suite $(f_n(z) = f(z) + (z/2)^n)_n$ converge vers f dans $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ car

$$\|f - f_n\| = \sup_{|z|=1} \left|\frac{z}{2}\right|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Mais

$$\|L^{-1}(f) - L^{-1}(f_n)\| = \sup_{|z|=1} \left|\frac{2z}{2}\right|^n = 1$$

et par suite L^{-1} est discontinue au point f donc en tout point de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.

③ $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ ne peut être un espace de Banach car dans ce cas nous aurions pu appliquer le théorème de l'application ouverte à L et en déduire la continuité de L^{-1}.
On peut d'ailleurs vérifier directement que $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ n'est pas complet en considérant la suite de fonctions entières de terme général $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z}{2}\right)^k$: pour tout $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|f_{n+p} - f_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} \leq \sum_{k \geq n+1} 2^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

c'est donc une suite de Cauchy dans $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$. Si elle converge vers f dans $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$, alors, vu le choix de la norme, elle sera simplement convergente sur le cercle unité vers f, i.e.

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = \frac{2}{2-z}, \quad \forall\, |z| = 1.$$

f serait alors une fonction entière égale (encore les zéros isolés) à la fonction holomorphe $f(z) = \frac{2}{2-z}$ sur le disque $D(0,2)$: tout ceci est absurde et $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ n'est pas un espace de Banach. ❑

Exercice 274 (Étude d'un opérateur sur $L^2([0,1])$)
Pour $f \in L^2([0,1])$ et $x \in [0,1]$ on pose

$$T(f)(x) = ie^{i\pi x}\left\{\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt - \int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right\}.$$

❶ *Montrer $T(f) \in \mathscr{C}([0,1])$ pour tout $f \in L^2([0,1])$.*

❷ *Montrer que que pour tout $f \in L^2([0,1])$ et $x \in [0,1]$: $|T(f)(x)| \leq \|f\|_{L^2}$. En déduire que T est un endomorphisme continu de $L^2([0,1])$.*

❸ *Montrer que pour toute suite $(f_n)_n$ dans la boule unité de $L^2([0,1])$ faiblement convergente vers $f \in L^2([0,1])$, la suite $(T(f_n))_n$ est simplement convergente vers $T(f)$. Puis montrer que $T(f_n)$ converge vers $T(f)$ dans $L^2([0,1])$.*

❹ *Montrer que T est un opérateur compact de $L^2([0,1])$.*

❺ *Montrer que 0 est une valeur spectrale.*

❻ *Montrer que T est un opérateur hermitien i.e.*

$$\langle T(f), g\rangle_{L^2} = \langle f, T(g)\rangle_{L^2}, \quad \forall\, f, g \in L^2([0,1]).$$

En déduire que les éventeulle valeurs propres de T sont réelles.

❼ *Montrer que si f est continue, $T(f)$ est continuement dérivable. Si de plus f est un vecteur propre associé à une eventuelle valeur propre non nulle, montrer que f vérifie une équation différentielle simple. Comparer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$ en déduire les valeurs propres non nulles de T puis son spectre.*

① La fonction $t \mapsto e^{-i\pi t}f(t)$ est intégrable sur $[0,1]$ (car $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ par Cauchy-Schwarz) donc $x \mapsto \int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt$ sont continues sur $[0,1]$ et par suite $T(f)$.

② La linéarité est évidente. Nous avons pour tout $f \in L^2([0,1])$ et $x \in [0,1]$

$$|T(f)(x)| \leq \left|\int_0^x e^{-i\pi t}f(t)dt\right| + \left|\int_x^1 e^{-i\pi t}f(t)dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|dt + \int_x^1 |f(t)|dt = \|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$

(la dernière inégalité est Cauchy-Schwarz) Ainsi

$$\|T(f)\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |T(f)(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \|f\|_{L^2}^2 dt\right)^{1/2} = \|f\|_{L^2}$$

T est donc un endomorphisme continu de $L^2([0,1])$ de norme ≤ 1.

③ Soit $(f_n)_n$ une suite dans la boule unité de $L^2([0,1])$ faiblement convergente vers f dans $L^2([0,1])$. L'inégalité $|T(f)(x)| \leq \|f\|_{L^2}$ établie dans la question précédente assure que les formes linéaires sur $L^2([0,1])$ définies par $f \mapsto T(f)(x)$ sont continues ; la suite $(f_n)_n$ étant faiblement convergente vers f, nous avons donc $\lim_n T(f_n)(x) = T(f)(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ d'où la simple convergence de $(T(f_n))_n$ vers f sur $[0,1]$.

Il en résulte que $\lim_n |T(f_n)(x) - T(f)(x)|^2 = 0$ sur $[0,1]$ et $|T(f)(x)| = \lim_n |T(f_n)(x)| \leq \lim_n \|f_n\|_{L^2} \leq 1$. Par conséquent nous avons la domination

$$|T(f_n)(x) - T(f)(x)|^2 \leq 4 \in L^1([0,1])$$

et

$$\lim_n |T(f_n)(x) - T(f)(x)|^2 = 0 \quad \text{sur } [0,1].$$

On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée

$$\lim_n \|T(f_n) - T(f)\|_{L^2} = \lim_n \left(\int_0^1 |T(f_n)(x) - T(f)(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \lim_n |T(f_n)(x) - T(f)(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 0$$

i.e. $\lim_n T(f_n) = T(f)$ dans L^2.

④ Il faut montrer que toute suite $(g_n)_n$ dans l'image par T de la boule unité de $L^2([0,1])$ admet une sous-suite convergente dans $L^2([0,1])$. Soit donc une telle suite, il existe une suite $(f_n)_n$ dans la boule unité de $L^2([0,1])$ telle que $g_n = T(f_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. La boule unité de $L^2([0,1])$ étant ([46], Théorème ? ? page ? ?) faiblement compacte, elle admet une sous-suite $(f_{n_k})_n$ faiblement convergente vers f dans $L^2([0,1])$. Avec la question précédente, $g_{n_k} = T(f_{n_k})$ converge vers $T(f)$ dans $L^2([0,1])$.

⑤ D'aprés la première question $T(L^2([0,1])) \subset \mathscr{C}^0([0,1]) \underset{\neq}{\subset} L^2([0,1])$, T n'est pas surjectif : 0 est bien une valeur spectrale.

⑥ Soient $f, g \in L^2([0,1])$ et posons $k(x,t) = \mathbf{1}_{[0,x]}(t) - \mathbf{1}_{[x,1]}(t)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle T(f), g \rangle = \int_0^1 T(f)(x)\overline{g(x)}dx &= \int_0^1 \left(ie^{i\pi x} \int_0^1 k(x,t)e^{-i\pi t} f(t)dt \right) \overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 ie^{i\pi x - i\pi t} k(x,t) f(t)\overline{g(x)}dtdx \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{\left(-ie^{i\pi t} \int_0^1 e^{-i\pi x} k(x,t) g(x) dx \right)} dt \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{\left(ie^{i\pi t} \int_0^1 e^{-i\pi x} k(t,x) g(x) dx \right)} dt \quad \text{car } k(x,t) = -k(t,x) \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{T(g)(t)}dt = \langle f, T(g) \rangle.
\end{aligned}$$

Les deux applications de Fubini sont justifiées car $F(x,t) = ie^{i\pi x - i\pi t} k(x,t) f(t)\overline{g(x)} \in L^2([0,1] \times [0,1])$. T est donc bien hermitien et ses valeurs propres sont alors nécessairement réelles (l'écrire).

⑦ ➪ Si f est continue sur $[0,1]$ il est clair que $T(f) \in \mathscr{C}^1([0,1])$. On peut donc écrire

$$T(f)'(x) = i\pi T(f)(x) + ie^{i\pi x}\left[e^{-i\pi x}f(x) + e^{-i\pi x}f(x)\right] = i\pi T(f)(x) + 2if(x).$$

➪ Soit λ une valeur propre non nulle de T et f_λ un vecteur propre associé. $T(f_\lambda) = \lambda \cdot f_\lambda$, donc $f_\lambda = \lambda^{-1}T(f_\lambda) \in \mathscr{C}^0([0,1])$: f_λ est donc continue et par suite $T(f_\lambda)\mathscr{C}^1([0,1])$. Les sous-espaces propres de T (si T admet des valeurs propres seront donc toujours inclus dans $\mathscr{C}^1([0,1])$. On a donc avec l'égalité ci-dessus

$$f_\lambda' = \lambda^{-1}T(f_\lambda)' = i\pi\lambda^{-1}T(f_\lambda) + 2i\lambda^{-1}f_\lambda = i\left[2\lambda^{-1} + \pi\right]f_\lambda$$

soit

$$f_\lambda' = i\left[2\lambda^{-1} + \pi\right]f_\lambda,$$

qui nous donne

$$(\text{✘}) \qquad f_\lambda(x) = \lambda e^{i\omega x} \quad \text{où} \quad \omega = 2\lambda^{-1} + \pi.$$

➪ Maintenant on peut remarquer qu'on a toujours

$$T(f)(0) = -ie^{i\pi 0}\int_0^1 e^{-i\pi t}f(t)dt = ie^{i\pi}\int_0^1 e^{-i\pi t}f(t)dt = T(f)(1)$$

soit $f_\lambda(0) = f_\lambda(1)$ qui implique avec (✘) que $e^{i\omega} = 1$. Sachant que les valeurs propres de T sont réelles, on a finalement

$$\omega = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\pi(k - 1/2)} := \lambda_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement un calcul élémentaire montre que les applications f_{λ_k} sont bien des vecteurs propres de T associées aux valeurs propres λ_k.
➪ Le spectre de T est donc l'adhérence de la famille $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ soit $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. ❑

Exercice 275 (Un espace vectoriel topologique non localement convexe)
Pour $0 < p < 1$*, on considère l'espace* $L^p([0,1])$ *des classes de fonctions mesurables* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty.$$

① *Montrer que* $L^p([0,1])$ *est un sous-espace vectoriel des classes de fonctions mesurables.*

On pose alors pour $f, g \in L^p([0,1])$ $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt.$

② *Montrer que* d *est une distance invariante par translation sur* $L^p([0,1])$ *et que cette distance définit une topologie d'e.v.t.*

③ *Soient* $f \in L^p([0,1])$, $\varepsilon > 0$*, montrer qu'il existe un entier* $n \geq 1$*, des fonctions* $f_1, \dots, f_n$ *dans* $L^p([0,1])$ *telles que*

$$d(f_i, 0) \leq \varepsilon \quad \& \quad f = \frac{f_1 + \cdots + f_n}{n}.$$

④ *En déduire que le seul voisinage convexe de l'origine dans* $L^p([0,1])$ *est* $L^p([0,1])$*, que* $L^p([0,1])' = \{0\}$ *(dual topologique) ; et enfin que* $L^p([0,1])$ *n'est pas un espace vectoriel topologique localement convexe.*

❶ & ❷ L'inégalité de Minkowsky $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ valable pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ si $p \in]0,1[$ nous assure que $L^p([0,1])$ est un sous-espace vectoriel et que d vérifie l'inégalité triangulaire. Les autres propriétés sont évidentes et $(L^p([0,1]), d)$ est un espace métrique. En raisonnant comme dans le cas $p \geq 1$ on peut même montrer qu'il est complet.

❸ Soit $f \in L^p([0,1])$ et $n \geq 1$, la continuité de $x \mapsto \int_0^x |f(t)|^p dt$ et le théorème des valeurs intermédiaires assurent l'existence d'une partition $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$ vérifiant

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = \frac{\delta(f)}{n}, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

où $\delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p dt$. Ainsi $f_i := nf\chi_{[x_{i-1}, x_i]} \in L^p([0,1])$ et $f = \frac{1}{n}(f_1 + \cdots + f_n)$. De plus par construction $\delta(f_i) = n^{p-1}\delta(f)$; il suffit alors de choisir n assez grand pour que $n^{p-1}\delta(f) \leq \varepsilon$.

❹ Soit V un voisinage convexe de l'origine dans $L^p([0,1])$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \subset V$. Soit $f \in L^p([0,1])$, vu la question précédente, il existe $f_1, \dots, f_n \in L^p([0,1])$ vérifiant $\delta(f_i) < \varepsilon$ i.e. $f_i \in B(0,\varepsilon) \subset V$ et finalement $f \in V$ puisque V est convexe. $L^p([0,1])$ est donc le seul voisinage convexe de l'origine. $L^p([0,1])$ est bien le seul voisinage convexe de l'origine, ce n'est n'est donc pas un espace de Fréchet. Soit $\varphi \in L^p([0,1])'$ et $\mathscr{B}$ une base de voisinages convexes de $0_{\mathbb{K}}$, $\forall B \in \mathscr{B} \ : \ \varphi^{-1}(B)$ est un voisinage ouvert convexe de l'origine dans $L^p([0,1])$ i.e. $\varphi^{-1}(B) = L^p([0,1])$ soit $\forall B \in \mathscr{B} \ : \ \varphi(L^p([0,1])) \subset B \implies \varphi \equiv 0$, soit $L^p([0,1])' = \{0\}$. (remarquer que le même raisonnement vaut pour $\mathscr{L}_c(L^p([0,1]), E)$ où E est un evtlc...). ❑

Exercice 276 (Densité de vect$\{\ x\mapsto \frac{1}{(x-a_n)},\ n\geq 1\}$ dans $\mathscr{C}^0([0,1])$)
Soit $(a_n)_n\subset]1,+\infty[$ *verifiant* $\lim_n a_n=+\infty$. *Montrer que*
$$V:=\mathit{vect}\left\{f_{a_n}\ \ x\mapsto\frac{1}{(x-a_n)},\ n\geq 1\right\}\quad \textit{est dense dans}\quad \mathscr{C}^0([0,1]).$$

$\mathscr{C}^0([0,1])$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[0,1]$. Avec un corollaire du théorème de Hahn-Banach [46], il suffit de montrer que toute forme linéaire continue $T\in\mathscr{C}^0([0,1])'$ nulle sur V est identiquement nulle. Considérons donc une telle forme T. Posons pour $k\in\mathbb{N}$, $g_k(x)=x^k$ alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ la série de fonction $\sum_{k=0}^\infty\frac{g_k(x)}{a_n^k}$ est normalement convergente sur $[0,1]$ vers $-a_nf_{a_n}$. Par continuité de T sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ nous avons
$$0=T(-a_nf_n)=T\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{g_k(x)}{a_n^k}\right)=\sum_{k=0}^\infty\frac{T(g_k)}{a_n^k},$$
soit
$$(1)\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\quad :\quad \frac{g_k(x)}{a_n^k}=0.$$
Par continuité de T nous avons aussi
$$(2)\qquad \|T(g_k)\|\leq\|T\|.\|g_k\|=\|T\|,\quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$
La formule (2) assure que la série entière
$$f(z)=\sum_{n\geq 0}T(g_k)z^k$$
possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 : f donc est holomorphe sur le disque $D(0,1)$. Mais vu (1)
$$\left(\ \sum_{k=0}^\infty\frac{T(g_k)}{a_n^k}=0,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}\ \right)\quad\Longleftrightarrow\quad \left(f\left(a_n^{-1}\right)=0,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}\right).$$
Or, vu les hypothèses, la suite $(a_n^{-1})_n\subset D(0,1)$ converge vers 0 : par le théorème des zéros isolés, $f\equiv 0$ ce qui entraine $T(g_k)=0,\ \forall\, k\in\mathbb{N}$ et donc $T\equiv 0$ sur $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, toute forme linéaire continue nulle sur V est nulle sur $\mathbb{R}[X]$; par transitivité de la densité et le théorème de Weierstrass une telle forme est donc identiquement nulle. C.Q.F.D. ❑

🛈 **Remarque :** De manière analogue, on peut montrer le résultat suivant : Soit $(\alpha_k)_k\subset]-1,1[$ une suite convergeant vers 0 alors les suites $(\alpha_k^n)_k,\ (n\in\mathbb{N})$, engendrent un sous-espace dense dans $l^p(\mathbb{N}),\ (\forall\, p\geq 1)$.

Exercice 277 (Normes équivalentes et formes linéaires continues)
Soit E, un $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$-espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes.

① *Montrer que toute forme linéaire est continue.*

② *En déduire que E est de dimension finie.*

❶ Il s'agit donc de montrer que dual algébrique $E^\star$, et topologique E', coïncident. Il va de soit que $E' \subset E^\star$; pour $\varphi \in E^\star$ et pour une quelconque norme $\|.\|$ sur E posons

$$N(x) := |\varphi(x)| + \|x\|, \qquad \forall\, x \in E.$$

On vérifie facilement que N est une norme sur E qui est donc équivalente à $\|.\|$: il existe en particulier une constante $c > 0$ telle que

$$N(x) = |\varphi(x)| + \|x\| \leq c\|x\|, \quad \forall\, x \in E$$

donc

$$(|\varphi(x)| \leq (1-c)\|x\|, \quad \forall\, x \in E) \quad \Longrightarrow \quad (\varphi \in E')\,.$$

(toutes les normes sur E étant équivalentes le dual topologique ne dépend pas du choix de la norme) d'où le résultat.

❷ Vu la question précédente, il suffit de montrer que sur tout espace vectoriel de dimension infinie, il existe toujours des formes linéaires non continues. Soit E un tel espace et $\{e_i\}_{i\in I}$ une base de E (il en existe toujours une avec l'axiome du choix). I est infini, et soit $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ une partie stricte dénombrable. Pour une norme $\|.\|$ sur E la forme linéaire définie sur $\{e_i\}_{i\in I}$ (et donc sur E) par

$$\forall\, i \in I \quad : \quad f(e_i) = \begin{cases} n\|e_{i_n}\| & \text{si} \quad i = i_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est visiblement discontinue sur E. Ainsi, sur tout espace vectoriel normé de dimension infinie on peut construire une forme linéaire non continue, et par suite un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes est forcément de dimension finie. ❑

Exercice 278 (L'inclusion $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R})$ est stricte)
Montrer que

$$\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R})$$

et que l'inclusion est stricte.
Où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et nulles à l'infini, $L^1(\mathbb{R})$ l'espace de Lebesgue des (classes) fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. $L^1(\mathbb{R})$ est muni de la topologie associée à la norme $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$ et $C_0(\mathbb{R})$ de celle associée à $\|f\|_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(t)|$, ces deux espaces sont des Banach.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, le Lemme de Riemman-Lebesgue[3] assure que la tranformée de Fourier est un opérateur linéaire continu injectif de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ (la continuité est immédiate par convergence dominée) i.e.

$$\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R}).$$

Montrons que cette inclusion est stricte, (on peut aussi utiliser le théorème de l'application ouverte, nous le ferons peut être plus tard). Exhibons un élément de $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \setminus C_0(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, la clef est de remarquer que si $\mathscr{F}(f)$ est impaire il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_1^b \frac{\mathscr{F}(f)(t)}{t} dt \right| \leq C, \quad \forall\, 1 < b < \infty.$$

ceci résulte des deux faits élémentaires suivants :

$$\exists C > 0 \ : \ \left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq C, \quad \forall\, \alpha < \beta$$

$$\mathscr{F}(f)(x) = -i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) dt.$$

et du théorème de Fubini.
Ainsi, pour exhiber un élément $g \in C_0(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ il suffit de construire une fonction impaire $g \in C_0(\mathbb{R})$ telle que $\int_1^b \frac{g(t)}{t} dt$ soit non borné lorsque b tends vers l'infini. Par exemple une fonction continue impaire égale à $1/\log(x)$ pour $x > 2$ convient. ❑

Exercice 279 (Image de $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ par la tranformée de Fourier)
Sous quelles circonstances existe-t-il une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $f \notin L^1(\mathbb{R})$, mais $\mathscr{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$?
Donner un exemple d'une telle fonction.

➪ La transformée de Fourier est un isomorphisme (topologique) de $L^2(\mathbb{R})$. f répondra donc au problème, si et seulement si $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(f) \notin \mathscr{F}(L^1(\mathbb{R}))$. En particulier, ceci va se produire pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathscr{F}(f) \in (L^1(\mathbb{R}))$ mais $\mathscr{F}(f) \notin C_0(\mathbb{R})$.

➪ Pour exhiber un tel objet, considérons une fonction

$$g \in \left(L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})\right) \setminus C_0(\mathbb{R})$$

et soit f la transformée de Fourier inverse de g (prendre $f = \mathscr{F}(g)$ marchera aussi puisque $\mathscr{F}(f)(t) = g(-t)$). Par exemple soit $g(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1]$, on a

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{itx} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(x)}{x}.$$

[3] C.Wagschall, ...

La formule d'inversion de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ implique que $\mathscr{F}(f) = g$ qui est dans $L^1(\mathbb{R})$ comme désiré ; on vérifie facilement que $f \notin L^1(\mathbb{R})$ ou plus simplement que $\mathscr{F}(f) = g$ n'est pas continue. ❑

Exercice 280 (Forme faible du théorème de Müntz) [40]
Soit $(\lambda_n)_n$ *une suite strictement croissante de réels positifs vérifiant*

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty, \\ \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} = +\infty. \end{cases}$$

On considère $E = vect\{x^{\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ *le sous espace vectoriel de* $\mathscr{C}^0([0,1])$*, l'objectif est ici de montrer le* **théorème de Müntz** *: sous ces hypothèses,* E *est dense dans* $\mathscr{C}^0([0,1])$ *pour la topologie de la convergence uniforme sur* $[0,1]$*.*
Pour cela, à tout $m \in \mathbb{N}^\star$ *distinct de tous les* $\lambda_n,\ n \geq 1$ *on associe la suite* $(R_n)_n$ *dans* $\mathscr{C}^0([0,1])$ *définie par :*

$$\begin{cases} R_0(x) = x^m,\ x \in [0,1] \\ R_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 R_{n-1}(t)t^{-1-\lambda_n}dt, \quad n \geq 1,\ x \in [0,1]. \end{cases}$$

❶ *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe une suite* $(a_{n,k})_{k=0}^n$ *de réels telle que*

$$R_n(x) = x^m - \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^{\lambda_k}, \quad x \in [0,1].$$

❷ *Montrer que pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\|R_n\|_\infty \leq \delta_n := \prod_{k=1}^n \left|1 - \frac{m}{\lambda_k}\right|$$

❸ *Montrer que la suite de fonctions* $\left(\sum_{k=0}^n a_{n,k}x^{\lambda_k}\right)_n$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers* $e_m(x) = x^m$*.*

❹ *Conclure.*

❶ On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: si $n = 0$: $R_0(x) = x^m - a_{0,0}x^{\lambda_0}$ avec $a_{0,0} = 0$. Supposons le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$, on a alors

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 R_{n-1}(t) t^{-1-\lambda_n} dt \\
&= (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 \left(t^m - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, t^{\lambda_k} \right) t^{-1-\lambda_n} dt \\
&= (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 \left(t^{m-1-\lambda_n} - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, t^{\lambda_k - 1-\lambda_n} \right) dt \\
&= x^m - \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{\lambda_k} \text{ avec } \begin{cases} a_{n,n} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m-\lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n} a_{n-1,k}, \\ a_{n,k} = \frac{m-\lambda_n}{\lambda_k-\lambda_n} a_{n-1,k}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

D'ou le résultat.

❷ Pour $x \geq 1$ et $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq |\lambda_n - m|\, x^{\lambda_n} \int_x^1 \|R_{n-1}\|_\infty\, t^{-1-\lambda_m} dt \\
&\leq \frac{|\lambda_n - m|}{\lambda_n} \|R_{n-1}\|_\infty\, x^{\lambda_n}(-1 - x^{-\lambda_n}) \\
&\leq \left| 1 - \frac{m}{\lambda_n} \right| \|R_{n-1}\|_\infty
\end{aligned}$$

soit

$$\|R_n\|_\infty \leq \left| 1 - \frac{m}{\lambda_n} \right| \|R_{n-1}\|_\infty \leq \prod_{k=1}^n \left| 1 - \frac{m}{\lambda_k} \right| \|R_0\|_\infty = \prod_{k=1}^n \left| 1 - \frac{m}{\lambda_k} \right|.$$

❸ Vu les deux premières questions, il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$, or pour $n \geq 1$, on a :

$$\log(\delta_n) = \sum_{k=1}^n \log \left| 1 - \frac{m}{\lambda_k} \right|$$

et $\lim_k \dfrac{m}{\lambda_k} = 0$ assure que pour k tendant vers $+\infty$: $\log \left| 1 - \dfrac{m}{\lambda_k} \right| \sim -\dfrac{m}{\lambda_k}$ soit, vu les hypothèses $\lim_n \log(\delta_n) = -\infty$ i.e. $\lim_n \delta_n = 0$.

❹ Vu la question précédente, $\mathbb{R}[X]$ est inclus dans l'adhérence de E pour la norme « sup » ; le résultat suit avec Weierstrass et la transitivité de la densité. ❑

Remarques : ➪ Il y a en fait équivalence i.e. le sous-espace E est dense si, et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1}$ diverge. C'est le théorème de Müntz-Szatz.

➪ Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème la plus fréquente (W.Rudin, Analyse Réelle et Complexe, Dunod (2002), pages ? ? ? ?) reponsant sur la théorie des fonctions holomorphes et les outils d'analyse fonctionnelle (théorème de Hahn-Banach) ;

une autre consiste à commencer par établir le résultat dans $L^2([0,1])$ qui a le bon gout de posséder une structure hilbertienne (Chamber-Loir et Fermigier) le passage aux fonctions continues ne pose alors pas de problèmes.

➪ Il est intéressant de remarquer qu'à ce jour, on ne connait pas de démonstration de ce résultat qui ne s'appuie pas sur le théorème de Weierstrass.

➪ Il existe de nombreuses généralisations de ce théorème, on pourra consulter à ce sujet le remarquable ouvrage de J.Borwein et T.Eyderly *Polynomials inequalities*, Springer 19 ? ?. **ref. !**

Exercice 281 (Sous-espaces de $\mathscr{C}([0,1])$ fermés dans $L^2([0,1])$) ([10], 2003/04 et [34]-? ? ? ?)

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et F un sous-espace de E tel que :

$$(\text{✘})\qquad \exists\, C > 0 \quad : \quad \forall\, f \in F \quad : \quad \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$$

❶ *Montrer que $F \neq E$.*

❷ *Montrer que F est de dimension finie inférieure à C^2.*

❸ *Donner un exemple pour $C = \sqrt{n}$.*

❶ Si $F = E$, alors

$$(\bigstar)\qquad \exists\, C > 0 \quad : \quad \forall\, f \in E \quad : \quad \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2.$$

Il suffit alors de considérer la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1-\frac{1}{n}], \\ \sqrt{n^2x + n - n^2} & \text{pour } x \in]1-\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

en effet, vu ce choix

$$\|f_n\|_\infty = \sqrt{n} \text{ et } \|f_n\|_2 = 1,\ n \geq 1$$

rendant $(\bigstar)$ absurde.

❷ Supposons F de dimension infinie, il est alors possible, pour tout $N \geq 1$ de construire une famille orthonormale $\{f_1, \dots, f_N\}$ dans $(F, \langle,\rangle_2)$. On a alors pour tout $x \in [0,1]$ et $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^N a_i f_i(x) \leq \|\sum_{i=1}^N a_i f_i\|_\infty \leq C\|\sum_{i=1}^N a_i f_i\|_2 = C\left(\sum_{i=1}^N a_i^2\right)^{1/2}.$$

En particulier, $x \in [0,1]$ étant fixé, le choix $a_i = f_i(x),\ 1 \leq i \leq N$ nous donne

$$\sum_{i=1}^N f_i^2(x) \leq C\left(\sum_{i=1}^N f_i^2(x)\right)^{1/2}$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^N f_i^2(x) \leq C^2 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1]$$

et en intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, la famille $(f_i)_1^N$ étant orthonormale

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^N f_i^2(t)dt = \sum_{i=1}^N \|f_i\|_2^2 = N \leq C^2$$

ainsi $N \leq \sqrt{C}$ et ceci pour tout $N \geq 1$: contradiction ! F est donc de dimension finie et $\dim(F) \leq \sqrt{N}$.

❸ Pour $N \geq 1$, on considère $F := \text{vect}\{f_1, \dots, f_N\}$ où les f_i sont définies comme suit : si $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1$ est une subdivision de $[0,1]$, soit pour tout $1 \leq i \leq N$, $f_i \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f_i \in \mathscr{C}^0([0,1]), \\ f_i \text{ est nulle sur } [0,1] \setminus]x_{i-1}, x_i[, \\ \|f_i\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f_i(t)|^2 \right)^{1/2} = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_i(t)|^2 \right)^{1/2} = 1, \\ \|f_i\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_i(t)| = \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} f_i(t) = \sqrt{N}. \end{cases}$$

Il suffit de s'inspirer de l'exemple de la question (1) pour construire facilement de telles fonctions. Il est alors immédiat que la famille $(f_i)_{i=1}^N$ est libre dans $\mathscr{C}^0([0,1])$, F est donc bien de dimension N et vu (2) $C \geq \sqrt{N}$, comme convenu, on va montrer qu'ici $C = \sqrt{N}$ convient.
Par construction ($f_i f_j \equiv 0$ si $i \neq j$) c'est une famille orthonormée dans $L^2([0,1])$. Pour

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 \cdots + a_N f_N \in F$$

on aura

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |a_1 f_1(t) + \cdots + a_N f_N(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N f_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,1]} \left(\sum_{i=1}^N f_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2} \sup_{t\in[0,1]} \left(\sum_{i=1}^N f_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(voir la seconde question)} \\ &\leq \sqrt{N} \, \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant du fait que par construction, les support des f_i sont deux à deux disjoints et donc pour tout $t \in [0,1]$, il existe un $1 \leq i_0 \leq N$ vérifiant $t \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$ la somme est réduite à un terme, si bien que :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} f_i^2(t) \right)^{1/2} = |f_{i_0}(t)| \leq \|f_{i_0}\| = \sqrt{N}.$$

On a donc

$$\forall\, f \in F \quad : \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{N} \|f\|_{L^2}$$

et le résultat de la seconde question montre bien que $\sqrt{N}$ est la meilleure constante possible (il est d'ailleurs encore plus facile de le vérifier en prenant $f = f_i$...) : F est donc bien l'exemple désiré.
Remarquons aussi que $\sqrt{N}$ est la norme de l'application linéaire continue canonique (l'identité)

$$\mathrm{id} \quad : \; (F, \|.\|_\infty) \to (F, \|.\|_{L^2})$$

❑

🛈 **Quelques remarques :** ➪ La première est, en utilisant des outils un peu plus sophistiqués (niveau maitrise), que cette propriété est caractéristique des sous espaces de fonctions continues fermés dans $(L^2([0,1]), \langle , \rangle_2)$, plus précisément :

Pour tout sous-espace de fonctions continues fermé pour la norme L^2

$$(\text{✘}) \qquad \text{il existe} \quad C > 0 \quad : \quad \forall\, f \in F \quad : \quad \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$$

(et comme plus haut F est alors de dimension finie) et réciproquement, si un tel sous espace vérifie (✘) alors il en est de même de son adhérence dans L^2.

En effet, par Cauchy-Schwarz $\forall\, f \in F \;:\; \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, autrement dit l'application identité : id $(F, \|.\|_\infty) \to (F, \|\|_2)$ est continue et par suite F est aussi fermé pour la norme infinie (comme image réciproque du fermé F pour la norme L^2...) On a donc un isomorphisme continu $(F, \|.\|_\infty) \to (F, \|.\|_2)$ entre deux Banach : par le théorème de l'application ouverte c'est un isomorphisme topologique et ainsi sur F les deux normes induisent la même topologie, en particulier on a (✘).

Réciproquement, si F est un sous-espace de fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant (✘), alors il en est de même pour son adhérence (qui est encore un sous-espace vectoriel) dans $L^2([0,1])$ (bien entendu si à ce niveau-là, on a déjà traité l'exercice précédent c'est évident puisqu'il sera de dimension finie donc nécessairement fermé pour une topologie d'espace vectoriel normé). Soit donc f un point adhérent à F dans $L^2([0,1])$ et $(f_n)_n$ une suite d'élément de F (et donc vérifiant $\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_2$ pour tout n) qui converge pour la norme L^2 vers f : c'est donc une suite de Cauchy pour la norme L^2 et, vu (✘) on a

$$\forall\, n, p \in \mathbb{N} \quad : \quad \|f_n - f_p\|_\infty \leq C \|f_n - f_p\|_2$$

i.e. $(f_n)_n$ est aussi de Cauchy pour la norme infinie : elle converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $g \in \mathscr{C}^0([0,1])$. Par Cauchy-Schwarz

$$\|f_n - g\|_2 \leq \|f_n - g\|_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

i.e. $(f_n)_n$ vers g pour la norme L^2 et par unicité de la limite, $f = g$ dans $L^2([0,1])$ puis sur $[0,1]$ par continuité des deux fonctions. Il reste alors à faire tendre n vers $+\infty$ dans $\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_2$ pour obtenir $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$ et (✘) est donc encore vraie sur $\overline{F}^{L^2}$.

➪ *Donnons une autre preuve (toujours avec les outils d'analyse fonctionnelle) que F est nécessairement de dimension finie.*
Pour cela, on considère $\mathscr{B} := \{f \in F \ : \ \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule unité de F pour la norme infinie. On va montrer que $\mathscr{B}$ est compacte dans $(F, \|.\|_2)$ (cet espace étant normé, il suffit de montrer que de toute suite de $\mathscr{B}$, on peut extraire une sous-suite qui converge pour la norme L^2 vers une limite appartenant à $\mathscr{B}$).
Les deux topologies coïncidant sur F, $\mathscr{B}$ est bornée dans l'espace de Hilbert $(F, \|.\|_2)$ donc faiblement compacte : on peut donc, de toute suite $(g_n) \subset \mathscr{B}$ extraire une sous-suite $(g_{n_k})_k$ L^2-faiblement convergente. Mais dans l'Hilbert $(F, \|.\|_2)$ les masses de Dirac $\delta_x \ : \ f \in F \mapsto \delta_x(f) := f(x)$ sont des formes linéaires continues (pas sur $(L^2([0,1]), \|.\|_2)$ bien entendu !) ; et par suite pour tout $x \in [0,1]$ la suite $(\delta_x(g_{n_k}))_k = (g_{n_k}(x))_k$ converge, i.e. la suite $(g_{n_k})_k$ est simplement convergente sur $[0,1]$. Notons g sa limite, on montre facilement que $\|g_{n_k} - g\|_\infty^2 \leq 4$. On peut ainsi appliquer le théorème de la convergence dominée : $|g_{n_k} - g|^2 \to 0$ dans L^1, i.e. $\lim_k g_{n_k} = g$ dans $L^2([0,1])$ et $\mathscr{B}$ est séquentiellement compact dans $(F, \|\|_2)$ donc dans $(F, \|.\|_\infty)$: la boule unité de $(F, \|.\|_\infty)$ est compacte : par le théorème de Riesz $\dim(F) < +\infty$. CQFD

➪ Avec un petit effort supplémentaire on peut montrer que le résultat ne subsiste plus si on remplace

« *sous-espace de fonctions continues sur* $[0,1]$ *dans* $L^2([0,1])$ »

par

« *sous-espace de fonctions continues sur* $]0,1]$ *dans* $L^2([0,1])$ »

En effet, considérons pour $n \geq 1$ des applications $f_n \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, à support dans $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ vérifiant $\|f_n\|_2 = 1$. C'est visiblement une famille orthonormale dans $L^2([0,1])$. Avec la formule de Parseval, on montre facilement que l'application

$$L \ : \ \alpha = (\alpha_i)_{i \geq 1} \in l^2(\mathbb{N}) \mapsto L(\alpha) := \sum_{i \geq 1} \alpha_i f_i \in L^2([0,1])$$

est une isométrie. En outre, la somme étant localement finie pour tout $x \in]0,1]$

$$L(\alpha) \in \mathscr{C}^0(]0,1]) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in l^2(\mathbb{N}).$$

En conclusion, $L\left(l^2(\mathbb{N})\right)$ est un sous-espace de fonctions continues (en prenant des fonctions affines par morceaux, on se persuade rapidement qu'il est facile de fabriquer dans $L(l^2(\mathbb{N}))$

des fonctions discontinues **à l'origine**), de dimension infinie, fermé (car isométrique à $l^2(\mathbb{N})$) dans $L^2([0,1])$. Bref, le contre-exemple désiré.

Exercice 282 (Opérateur de dérivation) [10], 1998/99.

Soit $D : f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \mapsto D(f) = f'$. *Existe-t-il* $T \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}))$ *tel que* $T \circ T = T^2 = D$ *?*

Si un tel T existe, alors

$$\ker(T^2) = \ker(D),$$

mais $\ker(D)$ est l'ensemble des fonctions constantes, il est donc de dimension 1 et par suite $\dim\ker(T^2) = 1$ et T n'est pas injectif, donc

$$\{0\} \subsetneqq \ker(T) \subset \ker(T^2).$$

$\ker(T^2)$ étant de dimension 1, la seule alternative est $\ker(T) = \ker(T^2)$, qui implique aussitôt

$$\ker(T^p) = \ker(T),\ \forall p \in \mathbb{N}^\star$$

et en particulier

$$\ker(D^2) = \ker(T^4) = \ker(T^2) = \ker(D),$$

cependant

$$\ker(D^2) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ f'' = 0\}$$

est l'ensemble des fonction affines, donc de dimension 2 : tout ceci est donc absurde et un tel opérateur ne peut exister. ❑

Exercice 283 (Aux limites du théorème de Banach-Steinhaus)
Soit $E = c_{00}$ *l'espace vectoriel des suites* $x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *nulles a partir d'un certain rang et muni de la norme*

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

❶ *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *les applications linéaires* $T_n \in \mathscr{L}(E)$ *définies par*

$$T_n(x) = (0, x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, 0, 0, \dots),$$

sont continues.
❷ *Montrer que pour tout* $x \in c_{00}$ *la suite* $(T_n(x))_n$ *est convergente dans* E.
❸ *Montrer que la suite* $(T_n)_n$ *n'est pas uniformément bornée sur* c_{00}.
❹ *Pourquoi néanmoins le théorème de Banach-Steinhaus n'est pas contredit ?*

Exercice 284 ($(\|1_E - T\| < 1,\ T \in \mathscr{L}(E)) \Rightarrow (T$ **inversible**$)$ **?)** [34], *1984/9.*
Soient $T : E \to E$ un opérateur continu sur un espace vectoriel normé E vérifiant $\|1_E - T\| < 1$.

❶ *Si E est un espace de Hilbert (ou une algèbre de Banach), montrer que T est inversible.*

❷ *Montrer que l'hypothèse de complétude sur E est essentielle.*

❶ C'est tout à fait classique et la solution peut attendre...

❷ Considèrons par exemple l'espace des polynômes $E = \mathbb{C}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\overline{Q(t)}dt, \quad P, Q \in \mathbb{C}[X],$$

et l'opérateur $T : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ défini par

$$T(P) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) P(x), \quad P \in \mathbb{C}[X].$$

On a

$$((1-T)(P))(x) = \frac{x}{2}P(x),$$

de telle sorte que

$$\|(1-T)(P)\|^2 = \frac{1}{4}\int_0^1 t^2\, |P(t)|^2\, dt \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |P(t)|^2\, dt = \frac{1}{4}\|P\|^2,$$

soit

$$\|1 - T\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

D'un autre coté, T n'est pas inversible car par exemple, le polynôme constant $1 \notin \mathrm{im}(T)$. ❏

🛈 **Remarque :** Sur ce sujet, on pourra consulter *« Geometric series in incomplete normed algebras », R.Fuster & A.Marquina* [34], *1984/1.*

Exercice 285 (Encore une preuve de $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$)

❶ *Démontrer l'existence d'une forme linéaire continue L sur $l^\infty(\mathbb{N})$ vérifiant*

$$\left(u = (u_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}) \text{ et } \lim_n u_n = l \in \mathbb{R}\right) \implies L(u) = l.$$

❷ *En déduire que $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$.*

❶ Considérons le sous-espace $\mathscr{C}$ de $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites convergentes. Sur $\mathscr{C}$, la forme linéaire L qui à $u = (u_n)_n \in \mathscr{C}$ associe $L(u) = \lim_n u_n$ est une forme linéaire continue (de norme 1). Par Hahn-Banach, on peut prolonger L en une forme linéaire continue de norme 1 sur $l^\infty(\mathbb{N})$, c'est la limite de Banach et ce prolongement répond à la question.

❷ Supposons que $(l^\infty(\mathbb{N}))' = l^1(\mathbb{N})$ avec la question précédente, il existerai $\alpha = (\alpha_n)_n \in l^1(\mathbb{N})$ tel que

$$L(u) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n u_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Mais en appliquant cette formule aux suite $\delta_k = (\delta_n^k)_n \in l^\infty(\mathbb{N})$ on obtient $\alpha_k = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, soit $L \equiv 0$ ce qui est absurde. ❑

Exercice 286 (Quelques exemples de suites faiblement convergente dans $L^2(\mathbb{R})$)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$g_n(x) = f(x-n), \quad h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right), \quad k_n(x) = f(x)e^{inx}.$$

Montrer que ces trois suites convergent faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

ℹ **Remarque liminaire :** Avec le théorème de représentation de Riesz $L^2(\mathbb{R})' \simeq L^2(\mathbb{R})$; donc à toute forme linéaire continue $T \in L^2(\mathbb{R})'$ est associée un (unique) élément $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $T(f) = \langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$. Ainisi, pour établir la faible convergence vers 0 d'une suite $(g_n)_n$ il faut démontrer que

$$(\text{✘}) \qquad \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}) \ : \quad \int_{\mathbb{R}} g_n(t)\overline{g(t)}dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

➲ Soient $\varepsilon > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R})$. Par densité[4] de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe $f_\varepsilon,\ g_\varepsilon \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon, \quad \|g - g_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\overline{g(t)}dt\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(t-n)\overline{g(t)}dt\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)}\left(f(t-n) - f_\varepsilon(t-n)\right)dt\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\overline{g(t)} - \overline{g_\varepsilon(t)}\right) f_\varepsilon(t-n)dt\right| \\
&\qquad + \left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g_\varepsilon(t)} f_\varepsilon(t-n)dt\right| \\
&\leq \|g\|_2 \cdot \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|g - g_\varepsilon\|_2 \cdot \|f_\varepsilon\|_2 + \left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g_\varepsilon(t)} f_\varepsilon(t-n)dt\right|.
\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière inégalité, nous avons appliqué deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour l'égalité $\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t-n)|^2 dt = \|f_\varepsilon\|_2^2$.
Maintenant on peut choisir $n \in \mathbb{N}$ assez grand (disons $n \geq n_\varepsilon$) pour que l'intersection des supports de g_ε et $t \mapsto f_\varepsilon(t-n)$ soit vide (c'est classique : le support de g_ε est compact, donc inclu dans un intervalle $[a,b]$ et celui de f_ε dans un intervalle $[c,d]$; alors, celui de

[4] Donner une référence, Wagschall...

$t \mapsto f_\varepsilon(t-n)$ sera inclu dans $[c+n, d+n]$ et ne rencontrera pas $[a,b]$ pour n assez grand). Ainsi, pour $n \geq n_\varepsilon$ le dernier terme dans la dernière inégalité sera nul, i.e.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\overline{g(t)}dt\right| &\leq \|g\|_2 \cdot \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|g - g_\varepsilon\|_2 \cdot \|f_\varepsilon\|_2 \\ &\leq \varepsilon\|g\|_2 + \varepsilon\|f_\varepsilon\|_2 \\ &\leq \varepsilon\|g\|_2 + \varepsilon(\varepsilon + \|f\|_2) := C \cdot \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon.\end{aligned}$$

Où dans la dernière inégalité on a utilisé l'inégalité $\|f_\varepsilon\|_2 \leq \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f\|_2 \leq \varepsilon + \|f\|_2$. Les applications f, g étant arbitraires mais fixés, $\varepsilon > 0$ étant quelconque, (✘) est vérifiée et la suite $(g_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

➲ Pour la seconde suite la procèdure est identique et inutile à détailler, le dernier terme dans l'inégalité tendant vers 0 avec n aprés un calcul direct :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g_\varepsilon(t)}\frac{1}{\sqrt{n}} f_\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right) dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|f_\varepsilon\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g_\varepsilon(t)|dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

➲ Pour la troisième, on se ramène à la première via la tranformée de Fourier qui est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle g, k_n\rangle = \langle \widehat{g}, \widehat{k_n}\rangle,$$

et la formule élémentaire

$$\widehat{k}_n(t) = \widehat{f}(t-n).$$

❑

Exercice 287 (Deux convexes disjoints non séparables par un hyperplan)

Dans $\mathbb{R}[x]$ on note $\mathscr{P}_+$ (resp. $\mathscr{P}_-$) l'ensemble des polynômes donc le coefficient du terme dominant est strictement positif (resp. strictement négatif). Montrer que $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ sont deux convexes disjoints qui ne peuvent être sépares par un hyperplan.

$\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ sont clairement convexes. Supposons qu'il existe un hyperplan $\mathscr{H} = \{\, P \in \mathbb{R}[x] \ :\ \Phi(P) = c\}$ où Φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[x]$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathscr{P}_+ \subset \{\, \Phi > c\}$ et $\mathscr{P}_- \subset \{\, \Phi < c\}$. On va montrer que $\Phi \equiv 0$ ce qui nous fournira la contradiction désirée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme x^n, x^{n+1} et $x^{n+1} + tx^n$, $(t \in \mathbb{R})$ appartiennent à $\mathscr{P}_+$ nous avons

$$\Phi(x^{n+1}) > c,\ \Phi(x^n) > c$$

et

$$\Phi(tx^n + x^{n+1}) = \Phi(x^{n+1}) + t\Phi(x^n) > c, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière égalité ne peut avoir lieu pour tout réel t (faire tendre t vers $-\infty$ si $c > 0$ et $+\infty$ sinon) qu'à la condition

$$\Phi(x^n) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

et la forme Φ est bien identiquement nulle. ❑

Exercice 288 (Une forme bilinéaire discontinue mais séparément continue)

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ de la norme

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|dt, \quad P \in \mathbb{R}[x],$$

et on considère la forme bilinéaire B définie par

$$B(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt, \quad P,Q \in \mathbb{R}[x].$$

❶ *Montrer que B est une forme bilinéaire séparément continue sur $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ muni de la topologie produit induite par la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}[x]$.*

❷ *Montrer que B n'est pas continue sur $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$.*

❶ Il s'agit donc de montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, l'application coordonnée $B_P : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ définie par $B_P(Q) = B(P,Q)$ est continue (la continuité de l'autre application coordonnée $P \mapsto B(P,Q)$ se déduit par symétrie). B_P est clairement linéaire et on a pour tout $Q \in \mathbb{R}[x]$

$$|B_P(Q)| = \left|\int_0^1 P(t)Q(t)dt\right| \leq \|P\|_\infty \int_0^1 |Q(t)|dt = \|P\|_\infty \cdot \|Q\|_1.$$

Cette inégalité assure la continuité de B_P (et montre aussi que la norme de B_P est inférieure ou égale à $\|P\|_\infty$).

❷ On va établir la non-continuité à l'origine de B. Pour cela, considérons la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ définie par $P_n(t) = n^{2/3}t^{n-1}$. Alors

$$\|P_n\|_1 = n^{2/3}\int_0^1 t^{n-1}dt = \frac{1}{n^{1/3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La suite (P_n) converge donc vers 0 dans $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|_1)$ et par conséquent $(P_n, P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ dans $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$. D'un autre coté, toujours par un calcul élémentaire

$$B(P_n,P_n) = \int_0^1 P_n(t)^2 dt = \frac{n^{4/3}}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Ainsi,

$$B(P_n,P_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 = B(0,0).$$

B est donc bien discontinue à l'origine de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ et donc partout par bilinéarité. ❑

🛈 **Remarque :** Toute application bilinéaire séparément continue $B : X \times X \to Y$ où X et Y sont deux espaces de Fréchet est continue, c'est un corollaire classique du théorème de Banach-Steinhaus [46] page ? ?. Il va sans dire que $\mathbb{R}[x]$ admettant une base algèbrique n'a quel que soit le choix de la norme (ou de la famille de semi-normes), aucune chance d'être muni d'une structure d'espace de Banach (ou de Fréchet), c'est une conséquence immédiate du théorème de Baire.

Exercice 289 (Pourquoi la topologie produit ?)

Soient $X_a, (a \in A)$ (A de cardinal infini) des espaces topologiques. Sur l'ensemble produit $\prod_{a\in A} X_a$, on considère la topologie $\mathscr{T}$ engendrée par les ensembles de la forme $\prod_{a\in A} U_a$ où U_a est un ouvert de X_a.

❶ *Montrer que dans $(\prod_{a\in A} X_a, \mathscr{T})$ un produit de connexes n'est plus forcément connexe.*

❷ *Montrer que dans $(\prod_{a\in A} X_a, \mathscr{T})$ un produit de compacts n'est plus forcément compact.*

❸ *$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ étant muni de la topologie précédente, montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f(x) = (x, x, \dots)$ n'est pas continue.*

❹ *On suppose que tous les X_a sont des espaces métriques et soit X un autre espace métrique, Montrer qu'une fonction $f : X \to \prod_{a\in A} X_a$ est continue si, et seulement si chaque application coordonnée $f_a = \pi_a(f) : X \to X_a$ est continue et si tout $x \in X$ admet un voisinage sur lequel toutes les applications coordonnées sauf peut-être un nombre fini sont constantes.*

❹ *Si de plus X est compact, montrer que f est continue si, et seulement si chaque application coordonnée $f_a = \pi_a(f) : X \to X_a$ est continue et si toutes les applications coordonnées sauf peut-être un nombre fini sont constantes.*

❶ Munissons l'espace produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles de cette topologie et considérons l'ensemble des suites bornées $L^\infty(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(x_k)_k \in L^\infty(\mathbb{N})$ si, et seulement si, il existe un entier n tel que $(x_k)_k \in]-n, n[^{\mathbb{N}}$; soit

$$L^\infty(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\geq 1}]-n, n[^{\mathbb{N}}.$$

$L^\infty(\mathbb{N})$ est donc ouvert dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme produit d'ouverts de $\mathbb{R}$. Mais on a aussi

$$(x_k)_k \in L^\infty(\mathbb{N}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ :\ |x_k| \geq n,$$

soit encore

$$L^\infty(\mathbb{N}) = \bigcap_{n\geq 1} \prod_{k\geq 1} X_k^n := \bigcap_{n\geq 1} F_n$$

où

$$F_n = \prod_{k\geq 1} X_k^n \quad \text{avec} \quad X_k^n = \begin{cases} [n, +\infty[, & \text{si } \ k = n, \\ \mathbb{R}, & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Comme produit de fermés les ensembles F_k sont fermés et par suite $L^\infty(\mathbb{N}) = \bigcap_{n\geq 1} F_k$ est fermé comme intersection de fermés : c'est une partie non vide distincte de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est à la fois ouverte et fermée, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe bien qu'étant le produit des connexes $\mathbb{R}$.

❷ Considérons maintenant le produit d'espaces compacts $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ toujours bien entendu équipé de la topologie définie dans l'énonçé et montrons que $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ n'est pas compact. Pour cela, nous allons construire un recouvrement ouvert de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ qui n'admet pas de sous-recouvrement fini : soient $A_0 = [0, 1[$, $A_1 =]0, 1]$. Ce sont deux ouverts de $[0, 1]$ et par conséquent les ensembles de la forme

$$\prod_{n\geq 1} A_{\varepsilon_n}, \quad \text{où} \quad (\varepsilon_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

sont des ouverts de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ fournissant le recouvrement ouvert

$$[0, 1]^{\mathbb{N}} = \bigcup_{(\varepsilon_n)_n\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \prod_{n\geq 1} A_{\varepsilon_n}.$$

Toutefois, il est facile de vérifier qu'un tel recouvrement n'admet pas de sous-recouvrement fini, car si l'ensemble $\prod_{n\geq 1} A_{\varepsilon_n}$ est omis le point $(\varepsilon_n)_n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ ne sera plus recouvert (car bien entendu ici $A = \mathbb{N}$ n'est pas de cardinal fini).

❸ Soit $a \in \mathbb{R}$, l'image réciproque par f de l'ouvert $\prod_{n\geq 1}] - \frac{1}{n} + a, a + \frac{1}{n}[$ est

$$f^{-1}\left(\prod_{n\geq 1}\left]-\frac{1}{n} + a, a + \frac{1}{n}\right[\right) = \bigcap_{n\geq 1}\left]-\frac{1}{n} + a, a + \frac{1}{n}\right[= \{a\}$$

qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$: f est donc discontinue sur $\mathbb{R}$.
On peut tout de même remarquer que les applications coordonnées sont elles bien continues (tout le monde aura noté que la topologie produit $\mathscr{T}_P$ est inclue dans $\mathbb{T}$).

❹ Supposons au contraire, qu'il existe une application continue $f : X \to \prod_{a\in A} X_a$ et un point $x \in X$ tels que pour une infinité d'indices $a \in A$ l'application coordonnée $f_a : X \to X_a$ soit non constante au point x. On peut alors construire dans A, une suite infinie d'indices $a_1, a_2, \dots$ et une suite de réels strictement positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ telles que

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^\star, \quad \exists\, x_i \in B_X(x, 1/i) \ \text{ tel que } \ d_{X_{a_i}}(f_{a_i}(x_i), f_{a_i}(x)) > \varepsilon_i.$$

Il en résulte immédiatement que l'image réciproque par f du voisinage ouvert de $f(x)$

$$\left(\prod_{i\geq 1} B_{X_{a_i}}(f_{a_i}(x), \varepsilon_i)\right) \times \prod_{a\in A\setminus\{a_j,\ j\geq 1\}} X_a$$

ne contiendra aucune boule $B_X(x, 1/j)$, $(j \geq 1)$, et ne peut par conséquent être un voisinage de x : f est donc discontinue au point x, d'où la contradiction.

Réciproquement, considérons un point $x \in X$ admettant un voisinage U_x sur lequel les applications coordonnées f_a, $(a \in A)$ sont constantes sauf pour un nombre fini d'indices $a_1, \dots, a_n$. Soit $V = \prod_{a\in A} V_a \in \mathscr{T}$ un voisinage élémentaire de $f(x)$ alors

$$U := f_{a_1}^{-1}(V_{a_1}) \cap f_{a_2}^{-1}(V_{a_2}) \cap \dots f_{a_n}^{-1}(V_{a_n}) \cap U_x$$

est un voisinage de x vérifiant $f(U) \subset V$: f est bien continue au point x (l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x....).

❺ C'est un corollaire immédiat de la question précédente. ❏

ℹ **Remarque :** Sur l'espace produit $\prod_{a\in A} X_a$, la topologie produit $\mathscr{T}_P$ admet pour base les ouverts élémentaires de la forme $\prod_{a\in A} U_a$ où les U_a sont des ouverts de X_a et tous **sauf** peut être un nombre **fini** sont égaux à X_a. Cette définition cause souvent un certain malaise chez les étudiants qui ont tendance à la confondre avec $\mathscr{T}$ (en **dimension finie**, ces deux topologies bien entendu coïncident) ; l'exercice ci-dessus à pour objectif de leur montrer que $\mathscr{T}_P$ est la bonne topologie sur l'espace produit car il est bien connu ([46], page ? ?) que pour la topologie produit, un produit de connexe est connexe, un produit de compact est compact (théorème de Tychonov) et une application $f\ :\ X\to\prod_{a\in A}X_a$ est continue si, et seulement si chaque application coordonnée $f_a=\pi_a(f)\ :\ X\to X_a$ est continue ce qui n'est pas le cas pour $\mathscr{T}$. Moralité : **plus** vous avez d'ouverts **moins** vous avez de compacts, de connexes et de fonctions continues. Vu sa définition, la topologie produit est la topologie la plus économique (la moins fine ou initiale) i.e. possédant les moins d'ouverts, rendant continues les applications coordonnées $\pi_b\ :\ \prod_{a\in A}X_a\to X_b,(b\in A)$.

Exercice 290 (Séparabilité de $L^p(\Omega),\ 1\le p\le\infty$)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que

❶ *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1\le p<\infty$.*
❷ *$L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

➲ Désignons par $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la famille (dénombrable) de tous les pavés ouverts de Ω de la forme $Q=]a_1,b_1[\times\dots]a_n,b_n[\subset\Omega$ avec $a_i,b_i\in\mathbb{Q}$ et soit $\mathscr{E}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par la famille des fonctions indicatrices $(\chi_{Q_i})_i$. $\mathscr{E}$ est une partie dénombrable de $L^p(\Omega)$ et on va montrer que $\mathscr{E}$ est dense $L^p(\Omega)$.
Soit $f\in L^p(\Omega)$. L'espace $\mathscr{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est notoirement dense dans $L^p(\Omega)$ ([47], ? ? ?) ; étant donné $\varepsilon>0$, il existe donc $g_\varepsilon\in\mathscr{C}_c(\Omega)$ vérifiant $\|f-g_\varepsilon\|_{L^p}\le\varepsilon$. Considérons maintenant un ouvert borné Ω' vérifiant $\mathrm{supp(g)}\subset\Omega'\subset\Omega$. Il n'est alors pas difficile de construire une application $h\in\mathscr{C}_c(\Omega)$ vérifiant $\mathrm{supp(h)}\subset\Omega'$ et $|h(x)-g(x)|\le\varepsilon/\lambda(\Omega)^{1/p},\ \forall\,x\in\Omega'$ (utiliser la continuité uniforme de g pour recouvrir le support de g par un nombre fini de pavés sur lesquels l'oscillation de g est $|\le\varepsilon/\lambda(\Omega)^{1/p}$...). Avec ce choix $\|g-h\|_{L^p}\le\varepsilon$ et finalement $\|g-h\|_{L^p}\le\varepsilon$.

➲ Soient $a\in\Omega$, $0<r_a<\mathrm{dist(a,\mathbb{R}^d\setminus\Omega)}$, $\mathrm{f_a}=\chi_{\mathrm{B(a,r_a)}}$ et enfin la boule ouverte $\mathscr{O}_a=\{f\in\mathscr{L}^\infty(\Omega)\ :\ \|f-f_a\|<1/2\}$. La famille $(\mathscr{O}_a)_{a\in\Omega}$ est une famille non dénombrable d'ouverts non vides de $L^\infty(\Omega)$ deux à deux disjoints : en effet sinon, considérons $a\neq b$ deux points de Ω, et, sans perdre de généralité $x\in B(a,r_a)\backslash B(b,r_b)$ $r>0$ tels que $B(x,r)\subset B(a,r_a)\backslash B(b,r_b)$; supposons qu'il existe $f\in\mathscr{O}_a\cap\mathscr{O}_b$ alors

$$-1/2<f(y)-\chi_{B(a,r_a)}(y)<1/2\quad\text{presque partout sur } B(x,r)$$
$$-1/2<f(y)-\chi_{B(b,r_b)}(y)<1/2\quad\text{presque partout sur } B(x,r),$$

il existe donc $c\in B(x,r)$ tel que

$$-1/2<f(c)-\chi_{B(a,r_a)}(c)<1/2\quad\text{et}\quad -1/2<f(c)-\chi_{B(a,r_a)}(c)<1/2$$

soit $1/2<f(c)<3/2$ et $0<f(c)<1/2$ ce qui est absurde. Nous avons construit une suite non dénombrable d'ouverts deux à deux disjoints dans $L^\infty(\Omega)$, il en résulte immédiatement que $L^\infty(\Omega)$ ne peut être dénombrable (sinon, considérer une suite $(f_n)_n$ dense dans $L^\infty(\Omega)$ et à tout $a\in\Omega$ associer l'entier $n(a)\in\mathbb{N}$ défini comme le plus petit tel que $f_{n(a)}\in\mathscr{O}_a$ par densité de $(f_n)_n$ l'application $\Omega \ni a \mapsto n(a) \in \mathbb{N}$ est bien définie et les ouverts $\mathscr{O}_a$ étant deux à deux disjoints, cette correspondance est bijective d'où la contradiction). ❑

Exercice 291 (Séparabilité de $l^p(\mathbb{N}),\ 1 \leq p \leq \infty$)
Montrer que

❶ $l^p(\mathbb{N})$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$.
❷ $l^\infty(\mathbb{N})$ *n'est pas séparable.*

➲ Posons pour tout $j \in \mathbb{N}$: $E_j := (\delta_i^j)_j \in l^p(\mathbb{N})$ (où δ_i^j est le symbôle de Kronecker). Soit $X = (x_i)_i \in l^p(\mathbb{N})$, alors puisque $p < \infty$ on a

$$\|X - \sum_{i=0}^{n} x_i E_i\|_p = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

comme reste d'une série convergente. La famille $(E_j)_j$ est donc totale dans $l^p(\mathbb{N})$ qui est donc bien (considérer comme toujours $\mathrm{vect}_{\mathbb{Q}}\{\mathrm{E_j},\ \mathrm{j_i n\mathbb{N}}\}$) séparable.

➲ Montrons par l'absurde[5] que $l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable, supposons donc qu'il existe dans $l^\infty(\mathbb{N})$ une suite dense $(X_n)_n$. Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\chi_A\ :\ \mathbb{N} \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de A et $E_A := (\chi_A(i))_i \in l^\infty(\mathbb{N})$. Par densité de $(X_n)_n$ dans $l^\infty(\mathbb{N})$ il existe $n = n(A) \in \mathbb{N}$ tel que $\|X_n - E_A\|_\infty < 1/2$ et désignons par n_A le plus petit entier vérifiant cette propriété. Nous venons de construire une application $\phi\ :\ \mathscr{P}(\mathbb{N}) \ni A \mapsto \phi(A) = n_A$ et cette application est injective car si $n = n_A = n_B$

$$(\,\|E_n - E_A\|_\infty < 1/2 \quad \& \quad \|E_n - E_A\|_\infty < 1/2) \Longrightarrow (\|E_A - E_B\|_\infty < 1)$$

qui implique immédiatement $E_A = E_B$ soit $\phi(A) = n_A = n_B = \phi(B)$: ϕ est bien injective. En résumé, la séparabilité de $l^\infty(\mathbb{N})$ permet de construire une injection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$ ce qui est absurde (Bernstein), d'où le résultat.

Exercice 292 (Encore une application du théorème du graphe fermé)
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions dans* $\mathscr{C}^1([0,1])$ *telle que*

⇝ $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $[0,1]$.
⇝ $(f_n')_n$ *ne converge pas uniformément vers* 0 *sur* $[0,1]$.

Montrer qu'il existe une fonction $g \notin \mathscr{C}^1([0,1])$ *qui est limite uniforme de combinaisons linéaire (finies..) des* f_n.

On équipe $\mathscr{C}^0([0,1])$ de la norme « sup », c'est un espace de Banach. Soit X l'adhérence de $\mathrm{vect}\{\,\mathrm{f_n},\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathscr{C}^0([0,1])$. On suppose par l'absurde que $X \subset \mathscr{C}^1([0,1])$; par un théorème de Weierstrass de L2, le graphe de l'opérateur de dérivation entre les espaces de

[5] Avez vous remarqué pourquoi la preuve précédente ne marche plus si $p = \infty$?

Banach X et $\mathscr{C}^0([0,1])$ est fermé : il est donc continu par le théorème du graphe fermé. Mais dans ce cas $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ implique que $(f'_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ ce qui est contraire à l'hypothèse. ❏

Exercice 293 (Une permutation qui conserve les séries convergentes) [34]
1-2006.

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{S}$ des suites $\boldsymbol{a}=(a_n)_n$ de nombres réels telles que la série $\sum_0^\infty a_n$ converge.
Soit $\pi\ :\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une permutation telle que pour tout $\boldsymbol{a}=(a_k)_0^\infty\in\mathscr{S}$ la série $\sum_{k=0}^\infty a_{\pi(k)}$ converge. On va montrer que

$$\sum_{k=0}^\infty a_{\pi(k)}=\sum_{k=0}^\infty a_k,\quad \forall\,\boldsymbol{a}\in\mathscr{S}.$$

❶ *Montrer que $\mathscr{S}$, muni de la norme $\|\boldsymbol{a}\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left|\sum_{k=0}^n a_k\right|\right\}$ est un espace de Banach.*
❷ *Montrer que les formes linéaires sur $\mathscr{S}$ ci-dessous sont continues*

$$\begin{aligned} U_n\quad &:\quad \mathscr{S}\ni\boldsymbol{a}\mapsto U_n(\boldsymbol{a})=\sum_{k=0}^n a_k,\\ T_n\quad &:\quad \mathscr{S}\ni\boldsymbol{a}\mapsto T_n(\boldsymbol{a})=a_n,\\ T\quad &:\quad \mathscr{S}\ni\boldsymbol{a}\mapsto T(\boldsymbol{a})=\sum_{k=0}^\infty a_k. \end{aligned}$$

❸ *Montrer que l'application linéaire $T_\pi\quad\mathscr{S}\ni\boldsymbol{a}\mapsto T_\pi(\boldsymbol{a})=(a_{\pi(k)})_k$ est continue.*
❹ *En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n=\sum_{n=0}^\infty a_{\pi(n)},\quad\forall\,\boldsymbol{a}=(a_n)\in\mathscr{S}$.*

❶ On munit l'espace $\mathscr{S}$ des suites $(a_k)_0^\infty$ de nombres réels telles que la série $\sum_k a_k$ converge de la norme

$$N(\mathbf{a})=\sup_{n\geq 0}\left|\sum_{k=0}^\infty a_k\right|.$$

$(\mathscr{S},N)$ est (classique) un espace de Banach.

❷ Les formes linéaires

$$\begin{aligned} U_n &: \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto U_n(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k, \\ T_n &: \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T_n(\mathbf{a}) = a_n, \\ T &: \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

sont continues. Les inégalités $|U_n(\mathbf{a})| \leq N(\mathbf{a})$ assurent la continuité des U_n, comme $T_0 = U_0,\ T_n = U_n - U_{n-1}, (n \geq 1)$ les formes T_n sont aussi continues ; enfin T est continue puisque par exemple $|T(\mathbf{a})| \leq 2N(\mathbf{a})$ (on peut aussi invoquer le théorème de Banach-Steinhaus puisque $T(\mathbf{a}) = \lim_n U_n(\mathbf{a}), \forall\, \mathbf{a} \in \mathscr{S}$).

❸ L'application linéaire $T_\pi\ :\ \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T_\pi(\mathbf{a}) = (a_{\pi(k)})_k$ est continue.
Pour cela on applique le théorème du graphe fermé : soit $(\mathbf{a}^n)_n$ une suite convergente dans $\mathscr{S}$ de limite $\mathbf{a} = (a_k)_k$ telle que $\lim_n T_\pi(\mathbf{a}^n) = \mathbf{b} = (b_k)_k$ dans $\mathscr{S}$. Notons $\mathbf{a}^n = (a_k^n)_k$. Par continuité de U_k

$$\lim_n U_k(T_\pi(\mathbf{a}^n)) = U_k(\mathbf{b}) = b_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

mais

$$U_k(T_\pi(\mathbf{a}^n)) = a^n_{\pi(k)},\ \text{ on a donc aussi } \lim_n U_k(T_\pi(\mathbf{a}^n)) = \lim_k a^n_{\pi(k)} = a_{\pi(k)}$$

puisque $\lim_n \mathbf{a}^n = \mathbf{a}$, finalement $b_k = a_{\pi(k)},\ \forall k \in \mathbb{N}$, soit $T_\pi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$: T_π est bien continue.

❹ Vu ce qui précède $T \circ T_\pi - T$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}$ avec $(T \circ T_\pi - T)(\mathbf{a}) = \sum_k a_{\pi(k)} - \sum_k a_k$. Il ne reste plus qu'à remarquer que pour toute suite $\mathbf{a} \in \mathscr{S}$ nulle à partir d'un certain rang $(T \circ T_\pi - T)(\mathbf{a}) = 0$ et comme l'ensemble de ces suites est dense dans $\mathscr{S}$ par continuité $T \circ T_\pi - T \equiv 0$ i.e.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathscr{S}.$$

C.Q.F.D. ❑

Exercice 294 (Topologie de la convergence simple : points adhérents et suites) [7]

Soit $\mathscr{T}$ la topologie sur $\mathscr{C}([0,1])$ engendrée par le système de voisinages

$$V_{F,f,\varepsilon} = \{\, g \in \mathscr{C}([0,1]) \ : \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \ \forall\, x \in F\,\},$$

où F est une partie finie non vide dans $[0,1]$, $f \in \mathscr{C}([0,1])$, $\varepsilon > 0$ (c'est la topologie de la convergence simple sur $[0,1]$ i.e. engendrée par la famille de semi-normes $(p_x)_{x\in[0,1]}$ avec $p_x(f) = |f(x)|$). On considère alors le sous-ensemble de $\mathscr{C}([0,1])$ définit par

$$\mathscr{A} = \{\, f \in \mathscr{C}([0,1]) \ : \ 0 \leq f(x) \leq 1 \ \text{et}\ \lambda(x \in [0,1] \ : \ f(x) = 1) \geq 1/2\,\}.$$

(λ est la mesure de Lebesgue) Montrer que la fonction identiquement nulle 0 est adhérente à $\mathscr{A}$ bien qu'il n'existe pas de suite $(f_n)_n \subset \mathscr{A}$ qui converge vers 0 dans $(\mathscr{C}([0,1]), \mathscr{T})$.

Il est clair que $\lim_n f_n = f$ dans $(\mathscr{C}([0,1]), \mathscr{T})$ si et seulement si, $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[0,1]$.
Pour montrer que la fonction nulle $f = 0 \in \overline{\mathscr{A}}$ il faut montrer que tout voisinage de f

$$V_{F,\varepsilon} = \{\, g \in \mathscr{C}([0,1]) \ : \ |g(x)| < \varepsilon, \ \forall\, x \in F\,\},$$

rencontre $\mathscr{A}$ ce qui est évident car étant donnés $F \subset [0,1]$ fini et $\varepsilon > 0$, il est facile de construire une fonction $g \in \mathscr{C}([0,1])$ affine par morceaux qui soit nulle sur F et égale à 1 sur une reunion disjointe d'intervalles $I_1, \dots, I_p$ de longueur $1/2$.
Toutefois, s'il existais une suite $(f_n)_n$ dans $\mathscr{A}$ qui converge vers f alors elle convergerai simplement vers f sur $[0,1]$ et par convergence dominée (car $0 \leq f_n \leq 1$) on aurai

$$0 = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \lim_n f_n(t)dt = \lim_n \int_0^1 f_n(t)dt \geq 1/2$$

ce qui est absurde. CQFD ❑

Septième partie

EXERCICES EN COURS.....

Exercice 295 (Histoire dans un corps)
Soient $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ des éléments non nuls d'un corps $\mathbb{K}$. On remplace simultanément chacun de ces éléments par la somme des 50 autres. Soit $b_1, b_2, \dots, b_{51}$ la suite obtenue, si cette nouvelle suite est une permutation de l'originale que peut être la caractéristique de $\mathbb{K}$?

Nous avons
$$S := a_1 + a_2 + \cdots + a_{51}, \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_{51} = 50S$$
soit, pour toute permutation $b_1, b_2, \dots, b_{51}$ de $a_1, a_2, \dots, a_{51}$
$$50S = S \quad \text{qui implique} \quad 49S = 0.$$
Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 7$ alors $49S = 0 \implies S = 0$ puis $b_i = -a_i$ pour tout $1 \leq i \leq 51$. D'un autre coté, il existe une permutation $\sigma \in S_{51}$ telle que $b_i = a_{\sigma(i)} = -a_i$. Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2, on peut alors construire une partition $\{a_i, a_{\sigma(i)}\}_1^{51}$ de la suite $a_1, a_2, \dots, a_{51}$, fait absurde puisque 51 est impair. La caractéristique de $\mathbb{K}$ vaut donc 2 ou 7.
Les valeurs 2 et 7 sont toutes les deux possibles : pour $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 7$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{51} = 1$ est un choix possible et pour le cas de 2, tout élément peut être choisi pour que $S = 0$ puisque $b_i = a_i = -a_i$. ❏

Exercice 296 (Le lemme de Riemann-Lebesgue et l'inclusion $\mathscr{L}^1([0,1]) \subset c_0$.)

❶ *(Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1([0,1])$, alors la suite de ses coefficients de Fourier $\mathscr{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie*
$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0.$$
Autrement dit, l'opérateur $\mathscr{F}$ injecte l'espace $L^1([0,1])$ dans l'espace vectoriel c_0 des suites de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui convergent vers zéro, i.e. $\mathscr{F}(L^1([0,1])) \subset c_0$.
❷ *Montrer que l'inclusion $\mathscr{F}(L^1([0,1])) \subset c_0$ est stricte.*

❶ Par densité des polynômes trigonométriques $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (muni de la norme « sup ») et de $\mathscr{C}^0([0,1])$ dans $L^1([0,1])$ (muni de la norme L^1), il existe pour tout $f \in L^1([0,1])$ deux applications $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et $h \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ vérifiant
$$\|f - g\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|g - h\|_\infty \leq \varepsilon.$$
Par l'inégalité triangulaire et domination de la norme L^1 par la norme « sup » on a alors $\|f - h\|_1 < 2\varepsilon$.
h étant un polynôme trigonométrique, ses coefficients de Fourier sont nuls à partir d'un certain rang. Par orthogonalité, on a donc
$$|\hat{f}(n)| = \left| \int_0^1 (f(x) - h(x)) e^{-2i\pi nx} dx \right| \leq \|f - h\|_1 < 2\varepsilon.$$
$\varepsilon > 0$ étant arbitraire le lemme est établi.

❷ On munit c_0 de la norme $\|(a_n)\|_{c_0}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|$, c'est (exercice facile) un espace de Banach et l'inégalité

$$|\hat{f}(n)|=\left|\int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx\right|\leq\|f\|_1,\quad\forall\, f\in L^1([0,1]),\ n\in\mathbb{Z}$$

assure que l'opérateur

$$\mathscr{F}\quad:\ L^1([0,1])\longrightarrow c_0$$

est une forme linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1 (et en fait égale à 1 en considérant $f\equiv 1$).

➪ Nous allons maintenant vérifier que $\mathscr{F}$ est injective : soit $f\in L^1([0,1])$ vérifiant $\hat{f}(n)=0\ \forall\, n\in\mathbb{Z}$ et montrons que $f\equiv 0$.
Il est déja clair que pour tout polynôme trigonométrique $h\in\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e^{inx},\ n\in\mathbb{Z}\}$

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx=0,$$

et par convergence dominée via la densité des polynômes trigonométriques ceci vaut pour toute fonction continue puis (par convergence dominée via Lusin..à détailler)) sur pour toute fonction indicatrice h d'ensemble mesurable ; le choix $h:=\mathbf{1}_{\{f>0\}}$ donne $\|f\|_1=0$, soit $f=0$. $\mathscr{F}$ est bien injective.

➪ Si l'inclusion n'est pas stricte, $\mathscr{F}$ est alors une application linéaire bijective continue entre les deux Banach $L^1([0,1])$ et c_0. Par le théorème de l'application ouverte $\mathscr{F}$ est un isomorphisme topologique : il existe donc une constante $C>0$ telle que

$$(✘)\qquad\qquad \|\mathscr{F}(f)\|_{c_0}\geq C\|f\|_1,\qquad\forall\, f\in L^1([0,1]).$$

On considére alors pour tout $N\in\mathbb{N}$

$$f_N(x)=\sum_{|n|\leq N}e^{-2i\pi nx},$$

il est immédiat que $\|\mathscr{F}(f_N)\|_{c_0}=1$ et $\|f_N\|_1=2N+1$ contredisant (✘) lorsque N tends vers l'infini : l'inclusion $\mathscr{F}(L^1([0,1]))\subset c_0$ est bien stricte. ❏

🛈 **Remarques :** ➪ Donner l'autre preuve plus rapide de Riemann-Lebesgue via les distributions.
➪ Comparer avec l'exercice............ ?

Exercice 297 (Trois problèmes d'optimisation autour d'une droite et une parabole)
On considère un point P, distinct de l'origine et situé sur la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$. La normale à $(\mathscr{P})$ passant par P recoupe la parabole en un point Q.

❶ *Déterminer P pour que l'arc de parabole soit minimum.*
❷ *Déterminer P pour que le périmètre de la région bornée délimitée par $(\mathscr{P})$ et PQ soit minimum.*
❸ *Déterminer P pour que l'aire de la région bornée délimitée par $(\mathscr{P})$ et PQ soit minimum.*

❶ Considérons un point (x, x^2), $(x > 0)$ sur la parabole. La pente de la normale à $(\mathscr{P})$ passant par (x, x^2) vaut $-1/2x$; si elle recoupe la parabole au point (z, z^2) nous aurons donc

$$\frac{z^2 - x^2}{z - x} = -\frac{1}{2x}$$

soit comme $x > 0$:

$$z = z(x) = -x - 1/2x = -\frac{2x^2 + 1}{2x}.$$

La formule pour la longueur d'un arc nous donne

$$s(x) = u(x) - u(z(x)), \qquad \text{avec} \quad u(a) = \int_0^a \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

et il s'agit de minimiser $x \mapsto s(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Avec le théorème fondamental du calcul intégral nous avons

$$s'(x) = \sqrt{1 + 4x^2} - z'(x)\sqrt{1 + 4z^2(x)}, \qquad x > 0$$

qui se réduit aprés quelques calculs algébriques à

$$1 - 3x^2 = 0$$

i.e. $x = 1/\sqrt{3}$ et $x = -1/\sqrt{3}$ par symétrie.

❷ Désignons par $R(x)$ l'aire de la région bornée lorsque les coordonnées du point P sont (x, x^2). Nous avons vu dans la question précédente que Q est associé au paramètre $z(x) = -\frac{2x^2+1}{2x}$. Avec ceci, le périmètre est

$$R(x) = \int_{z(x)}^x \sqrt{1 + 4t^2} dt + (x - z(x))\sqrt{1 + (x + z(x))^2}$$

Quelques manipulations algébriques sur $R'(x)$ montrent que la (les) solution est racine du polynôme

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Un logiciel de calcul nous donne

$$x = \frac{\sqrt{7}}{3}\cos(\text{Arcos}(\sqrt{7}/14)/3) - \frac{1}{6} \simeq 0,62349..$$

et $-x$ par symétrie ❑

Exercice 298 (Convergence faible dans $\mathscr{C}^0(X)$)
Soit X un espace métrique compact.

❶ *Montrer qu'une suite $(f_n)_n \subset \mathscr{C}^0(X)$ est faiblement convergente dans $\mathscr{C}^0(X)$ si, et seulement si elle est uniformément bornée et simplement convergente sur X.*

❷ *En déduire que pour toute suite $(f_n)_n \subset \mathscr{C}^0(X)$ uniformément bornée sur X et simplement convergente vers f, il existe une suite $(\tilde{f}_n)_n$ où $\tilde{f}_n \in \mathrm{conv}\{f_1, \dots, f_n\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, qui converge uniformément sur X vers f.*

❶ D'aprés le théorème de représentation de Riesz, le dual de $\mathscr{C}^0(X)$ est l'ensemble des mesures boreliennes de masse totale finie sur X dont font partie les masses de Dirac

$$\mathscr{C}^0(X) \ni f \ \longmapsto \int_X f\delta_x = f(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Ainsi, toute suite $(f_n)_n$ faiblement convergente dans $\mathscr{C}^0(X)$ vers f vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{X}, \qquad \int_X f_n\delta_x = f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\delta_x = f(x)$$

i.e. $(f_n)_n$ est simplement convergente sur X vers f.
Comme dual de l'espace de Banach $\mathscr{C}^0(X)$, $\mathscr{C}^0(X)'$ est aussi un espace de Banach contenant les f_n (identifiées aux fonctionnelles $\mathscr{C}^0(X)' \ni \mu \ \mapsto \int_X f_n\mu$). De l'inégalité

$$\left|\int_X f_n\mu\right| \leq ||f_n||_\infty \int_X |\mu|$$

on tire $|||f_n||| \leq ||f_n||_\infty$ et comme cette inégalité est une égalité pour $\mu = \delta_{x_n}$ où $x_n \in X$ vérifie $|f_n(x_n)| = ||f_n||_\infty$ on a

(✘) $$|||f_n||| \leq ||f_n||_\infty.$$

En outre avec l'hypothèse de convergence faible la suite $(\langle f_n, \mu\rangle)_n$ est bornée (puisque convergente) : on peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus qui assure que la suite $(|||f_n|||)_n$ est elle même bornée ce qui, avec (✘) achève la première implication.

Réciproquement, considèrons une suite $(f_n)_n\mathscr{C}^0(X)$ simplement convergente sur X vers f et uniformément bornée (disons par $C > 0$). Comme $\mathbf{1}_A \in L^1(X, |\mu|)$ pour toute mesure de Radon sur X, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\mu = \int_X f\mu, \qquad \forall\, \mu \in \mathscr{C}^0(X)'$$

en d'autre termes, $(f_n)_n$ converge faiblement vers f. CQFD.

❷ L'existence de la suite $(\tilde{f}_n)_n$ équivaut à montrer que f est dans l'adhérence de l'enveloppe convexe C des f_n lorsque $f_n \rightharpoonup f$. La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach nous dit qu'il est équivalent de montrer qu'aucune forme linéaire ne sépare f et C :

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{C}^0(X)', \quad \varphi(C) \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad \varphi(f) \geq \alpha.$$

Soit φ une telle forme et μ la mesure associée :

$$\varphi(f) = \int_X f\mu, \qquad f \in \mathscr{C}^0(X).$$

Vu les hypothèses et ❶ (ou par convergence dominée) $(f_n)_n$ converge faiblement vers f, en particulier

$$\varphi(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(f)$$

et comme $\varphi(f_n) \geq \alpha$ on aura $\varphi(f) \geq \alpha$ i.e. $f \in \overline{C}^{\mathscr{C}^0(X)}$ i.e. il existe une suite $(\tilde{f}_n)_n \subset C$ qui converge vers f dans $\mathscr{C}^0(X)$ soit uniformément sur X. ❑

Exercice 299 (Inégalité de Bernstein (2)) [10], *110-9/10.*

❶ *Montrer qu'un polynôme trigonométrique de degré n qui admet au moins $2n+1$ racines distinctes dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ est identiquement nul.*

❷ *Soit f un polynôme trigonométrique de degré n à valeurs réelles. On suppose que $f'(0) = \|f'\|_\infty > n\|f\|$ et on considère le polynôme trigonométrique $g(x) = n^{-1}\|f'\|_\infty \sin(nx) - f(x)$.*

- *Montrer que g admet au moins $2n$ racines distinctes sur $[0, 2\pi[$.*
- *Montrer que g' admet au moins $2n+1$ racines distinctes sur $[0, 2\pi]$.*
- *Montrer que g'' admet au moins $2n+1$ racines distinctes sur $[0, 2\pi[$. Conclusion ?*

❸ *Soit f un polynôme trigonométrique de degré n à valeurs réelles. Montrer que*

$$\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty \qquad \textit{(Inégalité de Bernstein).}$$

ℹ Un polynôme trigonométrique de degré au plus n peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = e^{-inx} P(x)$$

où $P(X) = \sum_{k=-n}^{n} c_k X^{k+n}$ est un polynôme de degré au plus $2n$.

❶ Soit f un tel polynôme. Si f admet $2n+1$ racines distinctes $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{2n+1}$ dans $[0, 2\pi[$, les $2n+1$ nombres complexes distincts $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{2n+1}}$ sont racines du polynôme P quiest donc le polynôme nul et par suite f est la fonction nulle.

❷ Le cas $n = 0$ est évident, nous supposerons $n \geq 1$. Posons

$$x_k = \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n}, \quad k = O, 1, \dots, 2n.$$

Nous avons

$$g(x_k) = \frac{(-1)^k}{n}\|f'\| - f(x_k)$$

et l'hypothèse $\|f'\|_\infty > n\|f\|$ assure que $g(x_k)$ est du signe de $(-1)^k$. Par conséquent g s'annule sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ ce qui donne $2n$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_0 + 2_p i]$. La 2π-périodicité permet d'affirmer que g s'annule également $2n$ fois sur $[0, \pi[$.

❸ ❑

Exercice 300 () *xxxxxxxxx*

Exercice 301 (Une caractérisation de la convexité) ([11], EXO. 1.8.3).
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant l'inégalité de la moyenne suivante

$$f(x) \leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Montrer que
❶ *Le maximum de f sur tout segment est atteint en une des extrémités.*
❷ *f est convexe.*

1) Supposons qu'il existe un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sur lequel f n'atteint pas son maximum en les extrémités a et b. Par continuité de f nous avons tout de même

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(c) \quad \text{avec} \quad a < c < b$$

et il existe $a < a_0 < c < b_0 < b$ tels que

$$f(x) < f(c), \quad \forall x \in [a,a_0] \cup [b_0,b].$$

à suivre.........

Exercice 302 (Probabilités, géométrie)
Un point P est choisi au hasard (relativement à la distribution uniforme) dans un triangle équilatéral $\mathbf{T}$. Quelle est la probabilité qu'il existe un point $Q \in \mathbf{T}$ dont la distance à P est supérieure à la hauteur de $\mathbf{T}$?

Soient A, O, B les sommets de $\mathbf{T}$, M le milieu de OB, C l'orthocentre de $\mathbf{T}$ et R l'intersection entre la hauteur de AB (h désignera sa longueur) et le cercle de centre A et de rayon $\overline{AM}$. Supposons $AO = OB = BA = 1$, la probabilité cherchée est

$$p = \frac{24\mathscr{A}(ORM)}{\sqrt{3}}.$$

Fixons l'origine en O, l'axe des abcisses positives suivant OB et celui des ordonnées positives suivant la direction de AM. Les coordonnées (x,y) de R vérifient

$$y = \frac{x}{3}\sqrt{3}, \quad (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

soit

$$x = \frac{1}{4}(3-\sqrt{6}), \quad y = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

à suivre.................. ❑

Exercice 303 (Séries de fourier et séries trigonométriques) [27], [37].

❶ *Soit $f \in L^1([-\pi,\pi])$ une application 2π-périodique. $(a_n)_n, (b_n)_n$ désignant ses coefficients de Fourier réels, montrer que pour tout $x \in [0,2\pi]$:*

$$\int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n \sin(nx) + b_n(1-\cos(nx))}{n}.$$

❷ *Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{b_n}{n}$ converge.*

❸ *En déduire que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\sin(nx)}{\log(n)}$ n'est la série de Fourier d'aucune fonction $f \in L^1([-\pi,\pi])$.*

❹ *Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante vers zéro vérifiant*

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la série trigonométrique $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$ est la série de fourier d'une fonction $f \in L^1([-\pi,\pi])$ positive.

❺ *En déduire que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\cos(nx)}{\log(n)}$ est la série de Fourier d'une telle fonction.*

❶ Par périodicité f est intégrable sur $[0,2\pi]$ et par suite la fonction $F(x) = \int_0^x (f(t) - \dfrac{a_0}{2})dt$ est à variation bornée sur $[0,2\pi]$; en outre, elle est 2π-périodique et

❷

❸

❹

❺

Exercice 304 (Sur la topologie de la convergence simple)

Soient X un ensemble, $(E, (\|.\|_i)_{i\in I})$ un espace localement convexe (e.l.c.). Sur l'ensemble $\mathscr{F}(X,E)$ de toutes les applications de X dans E, on considère la topologie d'e.l.c. définie par les semi-normes

$$\|f\|_{i,x} = \|f(x)\|_i, \quad i\in I,\ x\in X.$$

❶ *Montrer qu'une suite $(f_n)_n \subset \mathscr{F}(X,E)$ converge vers une application $f : X \to E$ pour cette topologie si, et seulement si, elle converge simplement sur X vers f. (On appelera donc « **topologie de la convergence simple** » cette topologie sur $\mathscr{F}(X,E)$ que l'on désignera alors par $\mathscr{F}_s(X,E)$).*

❷ *Si E est séparé, montrer que $\mathscr{F}_s(X,E)$ est séparé.*

❸ *Si E est métrisable et si $E \neq \{0_E\}$, montrer que l'espace $\mathscr{F}_s(X,E)$ est métrisable si, et seulement si, X est dénombrable.*

❹ *Si Eest un espace de Fréchet (e.l.c. métrisable complet) et si X est dénombrable, montrer que $\mathscr{F}_s(X,E)$ est un espace de Fréchet.*

❺ *Si E est un espace normé et si $E\neq\{0_E\}$, montrer que l'espace $\mathscr{F}_s(X,E)$ est normable si, et seulement si, X est fini.*

❻ *On suppose que $E = \mathbb{K}(= \mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$ et on pose $F = \mathscr{F}_s(X,\mathbb{K})$.*

a) Si $a\in\mathbb{X}$, montrer que la forme linéaire sur F $\delta_a : f\mapsto f(a)$ est continue.

b) Soit $T\in F'$ une forme linéaire continue, montrer qu'il existe une partie finie $A\subset X$ telle que $T(f)=0$ dès que f est nulle sur A.

c) En déduire que les formes linéaires continues sur F sont de la forme

$$T = \sum_{a\in A\in PF(X)} c_a\delta_a, \quad c_a\in\mathbb{K}.$$

❼ ***Un exemple.*** *On considère l'espace $\mathbb{K}[[x]]$ des séries formelles à une indéterminée. Cet espace s'identifie de manière naturelle à $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ en associant à toute série formelle $P=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ la fonction $n\mapsto a_n$. On peut donc définir sur l'espace $\mathbb{K}[[x]]$ la topologie de la convergence simple, on le note alors $\mathbb{K}_s[[x]]$.*

a) Montrer que l'espace $\mathbb{K}_s[[x]]$ possède la propriété de Montel.

b) Soit $Q=\sum_{n=0}^N b_n x^n$ un polynôme. Montrer que l'application

$$\mathbb{K}_s[[x]] \ni P \mapsto \langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^N a_n b_n$$

est une forme linéaire continue sur $\mathbb{K}_s[[x]]$ et que l'on obtient ainsi toutes les formes linéaires continues.

c) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}[x]$ des polynômes est dense dans $\mathbb{K}_s[[x]]$ et que les formes linéaires sur ce sous-espace s'écrivent $P\mapsto\langle P,Q\rangle$ où $Q\in\mathbb{K}[x]$. Si P est une série formelle qui n'est pas un polynôme, vérifier que la forme linéaire $P\mapsto\langle P,Q\rangle$ sur l'espace $\mathbb{K}[x]$ n'est pas continue.

❶ Une suite $(f_n)_n$ dans $\mathscr{F}_s(X,E)$ converge vers 0 si, et seulement si

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[\mathscr{F}_s]{} 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x\in X,\ \forall\, i\in I\ :\ \lim_n \|f_n\|_{i,x}=0\\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, x\in I\ :\ \lim_n f_n(x)=0\ \text{ dans } E\\ &\Leftrightarrow \quad (f_n)_n \text{ converge simplement vers } \ f\equiv 0 \ \text{ sur } X. \end{aligned}$$

❷ Soit $f\in\mathscr{F}(X,E)$, si f n'est pas identiquement nulle, il existe $x\in X$ tel que $f(x)\neq 0$; E étant séparé, il existe $i\in I$ tel que $\|f(x)\|_i\neq 0$. Il existe donc $x\in X$ et $i\in I$ tels que $\|f\|_{i,x}\neq 0$: l'espace $\mathscr{F}_s(X,E)$ est bien séparé.

❸ ➪ Si $E=\{0\}$, $\mathscr{F}_s(X,E)$ est métrisable quelquesoit X.

➪ Supposons E non réduit au vecteur nul et métrisable. Nous savons ([46] théorème 3.4.6) que sa topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes $(\|.\|_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour les mêmes raisons, si $\mathscr{T}_s$ est métrisable elle est engendrée elle aussi par une famille dénombrable de semi-normes $(\|.\|_{i_k,x_l})_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$; mais si X n'est pas dénombrable, il existe $a\notin\{x_l,\ l\in\mathbb{N}\}$ et l'application $f\in\mathscr{F}_s(X,E)$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq a,\\ 1 & \text{si } x=e\end{cases}$$

où $e\in E\setminus\{0\}$ n'est pas identiquement nulle car $f(a)=e\neq 0$, mais elle vérifie

$$\|f\|_{i_k,x_l}=0,\ \forall\, k,l\in\mathbb{N}.$$

$\mathscr{T}_s$ n'est donc pas séparée ce qui absurde (puisque par hypothèse métrisable) : X est donc dénombrable.

➪ Si X est dénombrable, $X=\{x_k\}_k$ la topologie $\mathscr{T}_s$ sera engendrée par la famille de semi-normes $(\|.\|_{i_k,x_l})_{k,l}$ et sera séparée car E est séparé : elle est ([46] théorème 3.4.6) métrisable.

❹ Aprés la question précédente il reste à montrer que $\mathscr{F}_s(X,E)$ est complet. Soit donc une suite de Cauchy $(f_n)_n$ dans $\mathscr{F}_s(X,E)$

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\ :\ \forall n,p\geq N_\varepsilon\quad \|f_n-f_p\|_{i,l}=\|f_n(x_l)-f_p(x_l)\|_i\leq\varepsilon,\quad \forall\, i,l\in\mathbb{N}.$$

Autrement dit, la suite $(f_n(x_l))_n$ est pour tout entier $l\in\mathbb{N}$ une suite de Cauchy dans E complet : elle est donc convergente et en notant $f(x_l)$ sa limite, on a $f_n\to f$ dans $\mathscr{F}_s(X,E)$ qui est bien complet.

❺ Supposons $\mathscr{T}_s$ normable et X infini. E étant aussi normé, un voisinage fondamental de l'origine dans $\mathscr{F}_s(X,E)$ sera de la forme

$$\bigcap_{j\in J} B_{x_j}(r_j)=\bigcap_{j\in J}\{f\in\mathscr{F}_s(X,E)\ :\ \|f(x_j)\|\leq r_j\},$$

où J est une partie finie de I. Il est clair qu'un tel voisinage n'est pas borné (comme X est infini, il contient les droites vectorielles $\mathbb{K}f$ où $f\in\mathscr{F}_s(X,E)$, $f\neq 0$ et $f_{/J}\equiv 0$). $\mathscr{T}_s$ est une topologie non localement bornée, donc non normable. Réciproquement, X fini et E normé impliquent $\mathscr{F}_s(X,E)$ normable : si $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ on définit une norme sur $\mathscr{F}(X,E)$ en posant $N(f)=\max_{1\leq i\leq n}\|f(x_i)\|$ et la topologie associée à cette est norme coïncide avec $\mathscr{T}_s$; pour s'en persuader on peut remarquer par exemple que

$$\forall\, 1\leq i\leq n\ :\quad \|f_i(x)\|\leq N(f)=\max_{1\leq i\leq n}\|f(x_i)\|$$

assure que l'identité entre $(\mathscr{F}(X,E),\mathscr{T}_N)$ et $(\mathscr{F}(X,E),\mathscr{T}_s)$ est un isomorphisme topologique.

❻ a) Soit $a\in X$ l'égalité $|\delta_a(f)|=|f(a)|=p_a(f)$ garanti la continuité de δ_a.

b) et c) Un résultat d'algèbre (exercice ? ? ? 🛈) linéaire assure que pour tout espace vectoriel E, si des formes linéaires $f,f_1,\dots,f_n\in E^\star$ vérifient $(f_i(x)=0,\ \forall\, i\in\{1,\dots,n\})\Rightarrow(f(x)=0)$ alors il existe des constantes $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{K}$ telles que $f=c_1f_1+\dots+c_nf_n$.
Soit T une forme linéaire continue sur $\mathscr{F}(X,E)$, il existe une partie finie $A\subset X$ et une constante $C>0$ telles que

$$\forall\,\mathscr{F}(X,E)\ :\ |T(f)|\leq C\sup_{a\in A}p_a(f)=C\sup_{a\in A}|f(a)|=C\sup_{a\in A}|\delta_a(f)|.$$

Ainsi, $(\delta_a(f)=0,\ \forall\, a\in A)\Rightarrow(T(f)=0)$; il ne reste plus qu'à invoquer le rappel d'algèbre linéaire précédent.

❼ a) Il faut montrer que les parties bornées sont relativement compactes. Soit $B\subset\mathbb{K}[[x]]$ une partie bornée ; pour tout $l\in\mathbb{N}$, il existe une constante C_l telle que

$$p_l(P)=|a_l|\leq C_l,\quad\forall\, P=\sum_n a_nx^n\in B.$$

Autrement dit,

$$B\subset K:=\prod_{l\in\mathbb{N}}\{|z|\leq C_l\}\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\simeq\mathscr{F}_s(\mathbb{N},\mathbb{K})$$

La topologie induite sur K par $\mathscr{F}_s(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est bien entedu la « topologie produit » : K est donc une partie compacte de $\mathscr{F}_s(\mathbb{N},\mathbb{K})$ d'aprés le théorème de Tychonoff ([46] théorème 2.32.5) et B est bien relativement compacte.

b)

c)

❏

Exercice 305 (Un bien utile lemme de factorisation)

❶ *Soient E,F,G trois espaces vectoriels. Si G est de dimension finie et s'il existe $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $g\in\mathscr{L}(E,G)$ telles que*

$$(✘)\qquad(\forall\, x\in E)\,(g(x)=0)\Longrightarrow(f(x)=0)\,,$$

alors il existe $h\in\mathscr{L}(G,F)$ telle que $f=h\circ g$.

❷ ***Application 1 :*** *Soient E un espace vectoriel, $f,f_1,\dots,f_n\in E^\star$ des formes linéaire telles que*

$$(\forall\, x\in E)\,(f_i(x)=0,\quad\forall\, i=1\dots n)\Longrightarrow(f(x)=0)\,,$$

alors il existe des scalaires $c_1,\dots,c_n$ tels que $f=c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_nf_n$.

❸ ***Application 2 :*** *Montrer que toute distribution $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ de support l'origine est combinaison linéaire de dérivées de la distribution de Dirac.*

❶ L'hypothèse (✘) implique

$$(\forall\, x,y\in E)(g(x)=g(y))\Longrightarrow(f(x)=f(y)).$$

Ainsi, pour $t = g(x) \in \mathrm{im}(g)$, la formule $h_1(t) = f(x)$ définit bien une application $h_1 \in \mathscr{L}(\mathrm{im}(g), F)$ vérifiant $f = h_1 \circ g$ sur $\mathrm{im}(g)$ et le problème est déja résolu sur $\mathrm{im}(g)$. Pour construire une solution sur G, on considére (puisque G est de dimension finie) un supplémentaire H de $\mathrm{im}(g)$ dans G et p la projection sur $\mathrm{im}(g)$ paralellement à H ; alors, $h = h_1 \circ p$ répond visiblement au problème.

❷ Pour l'application en considèrant $g = (f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}^n)$, on se retrouve dans la situation précédente avec $F = \mathbb{K}$ et $G = \mathbb{K}^n$: il existe donc $h \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ telle que $f = h \circ g$. Mais la forme générale des éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ est bien connue : il existe $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tels que $h(z) = (z_1, \dots, z_n)) = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n$ d'où le résultat.

Remarque : Ce dernier résultat est essentiel en analyse fonctionnelle (voir l'exercice précédent où la question ci-dessous) ; on trouvera aussi dans *H.Brézis « Analyse fonctionnelle » Masson 19 ? ?* une démonstration trés amusante de ce résultat s'appuyant sur le théorème d'Hahn-Banach.

❸ $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ est à support compact, donc d'ordre fini : il existe une constante $C > 0$, un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que[6]

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{n \in \mathbb{N}^d,\ |k| \leq N} |\varphi^{(k)}(0)|, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Ainsi, la forme linéaire T s'annule au point φ dés que les formes linéaires $\delta^{(k)} \ :\ \varphi \mapsto \langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \varphi^{(k)}(0),\ |k| \leq N$ s'annulent. Avec la question précédente, il existe des scalaires c_i tels que

$$T = \sum_{|i| \leq N} c_i\, \delta^{(i)},$$

Q.E.D. ❏

Exercice 306 (Exemple d'une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier) [37]

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n \sin(nt)$ *une série trigonométrique où* $a_n \geq 0\ \forall\, n \geq 1$.

❶ *On suppose que cette série est une série de Fourier, c'est à dire qu'il existe* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *telle que* $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$ *i.e.* $c_0(f) = 0$ *et, si* $n \geq 1$: $c_n(f) = \frac{a_n}{2i}$, $c_{-n}(f) = -\frac{a_n}{2i}$. *Soit* $F(t) = \int_0^t f(u) du$. *Montrer que* F *est continue et* 2π*-périodique sur* $\mathbb{R}$ *et, pour*

$$|n| \geq 1\ :\ c_{|n|}(F) = -\frac{a_{|n|}}{2|n|}$$

❷ *En déduire que* $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ *converge.*

❸ *Montrer que la série trigonométrique partout convergente* $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(nt)}{\log(n)}$ *n'est pas une série de Fourier.*

La solution..........

[6] rappel : si $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ on note $|k| := k_1 + \dots + k_d$.

Exercice 307 (Nombre de points à coordonnées entières dans un disque, comportement au bord d'une série entière)
Soient pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n := B_{\mathbb{R}^2}(0,n),\ p_n := \text{card}\left(D_n \cap \mathbb{Z}^2\right),\ p_n^+ := \text{card}\left(D_n \cap \mathbb{N}^2\right).$$

❶ *Montrer que*

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi n^2 \quad et \quad p_n^+ \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi n^2/4.$$

❷ *En déduire que*

$$\lim_{t\to 1_-}(1-t^2)^{1/2}\sum_{n\geq 0} t^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-t}}.$$

❸ *En déduire que*

$$\lim_{x\to -1_+}\sum_{n\geq 0} x^{n^2} = \frac{1}{2}.$$

❶ À tout point $p=(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ associons $C(p)$ le carré plein centré en p dont les cotés de longueur 1 sont parallèles aux axes. On vérifie facilement que si $p \neq p' \in \mathbb{Z}^2$ alors l'aire de $C(p)\cap C(p')$ est nulle. Posons alors :

$$A(n) = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Z}^2\\ C(p)\subset D(n)}} C(p),\quad B(n) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}^2\cap D(n)} C(p),\quad C(n) = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Z}^2\\ C(p)\cap D(n)\neq\emptyset}} C(p)$$

Visiblement $A(n)\subset B(n)\subset C(n)$, et par construction même, l'aire de $B(n)$ est précisément p_n. En outre comme

$$D(n-2)\subset A(n)\subset B(n)\subset C(n)\subset D(n+2)$$

(car $2>\sqrt{2}$) nous pouvons écrire

$$\pi(n-2)^2 \leq p(n) \leq \pi(n+2)^2$$

soit $\quad p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \pi n^2.$
Maintenant, remarquons que dans $D(n)$, les points à coordonnées entières sur les axes sont au plus $4n = o(n^2)$ donc négligeables par rapport à p_n : on peut donc ignorer ces points, des arguments évidents de symétrie impliquent alors que $\quad p_n^+ \underset{n\to\infty}{\sim} p_n/4 \quad$ soit $\quad p_n^+ \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi n^2}{4}.$

❷ Pour $|t|<1$, nous avons (produit de Cauchy)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l^2+m^2=k}} t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k)t^k$$

où $q(k)$ désigne le nombre de couples $(l,m)\in\mathbb{N}^2$ tels que $l^2+m^2=k$. Considérons alors l'application définie pour $|t|<1$ par

$$G(t)=\frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}\right)^2.$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}G(t)&=\frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}\right)=\frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}\right)^2\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}q(k)t^{k}\right)\\&=\sum_{d=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{d}q(k)\right)t^k\quad\text{(toujours par produit de Cauchy).}\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on observe que $\displaystyle\sum_{k=0}^{d}q(k)=p^+(\sqrt{d})$, on peut écrire

$$G(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p^+(\sqrt{k})t^k.$$

D'aprés la première question $p^+(\sqrt{d})\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{\pi d}{4}$. Considérons alors pour $|t|<1$

$$H(t):=\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=\frac{\pi}{4}\frac{1}{(1-t)^2}.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n/4}{\pi(n+1)/4}=1,$$

un théorème classique (ref.... ?) implique que

$$\lim_{t\to1_-}\frac{G(t)}{H(t)}=\lim_{t\to1_-}\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{(1-t)^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}\right)^2\right)=1$$

soit encore

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}\underset{t\to1_-}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-t}}.$$

Q.E.D.

❸ Commencer par calculer la limite lorsque x tends vers 1_- et pour en déduire la limite en -1 découper la somme en parties paire et impaires...

Exercice 308 (Optimisation dans un triangle) (APMO, 1990).
Dans triangle ABC où $AB = 1$, h désigne la mesure de la hauteur issue de C et $f(h)$ le produit des trois hauteurs. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. À quelle configuration de ABC cet extréma correspond-t-il ?

Solution 1 :

Solution 2 : ❑

Exercice 309 (optimisation, combinatoire)
Quelle est la valeur maximum $f(n)$ de

$$|\sigma(1) - \sigma(2)| + |\sigma(3) - \sigma(4)| + \cdots + |\sigma(n-1) - \sigma(n)|$$

σ décrivant toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$?

🛈 **Remarque liminaire :** dans une configuration optimale les termes $\sigma(i)$ doivent alternativement croitre et décroitre : en effet si $\sigma(i) < \sigma(i+1) < \sigma(i+2)$ (ou $\sigma(i) > \sigma(i+1) > \sigma(i+2)$) alors $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| + |\sigma(i+1) - \sigma(i+2)| = |\sigma(i) - \sigma(i+2)|$, si bien que la permutation associée à l'une des deux deux suites d'entiers $(\sigma(i+1), \sigma(1), \ldots, \sigma(i), \sigma(i+2), \ldots, \sigma(n))$ et $(\sigma(1), \ldots, \sigma(i), \sigma(i+2), \ldots, \sigma(n), \sigma(i+1))$ fournira une somme strictement plus grande que celle associée à σ.

Passons à la solution. Mieux vaut distinguer les cas n pair et impair. Si $n = 2m$........... ❑

Exercice 310 (Étude des espaces $\text{vect}\{f^{(k)},\ k\in\mathbb{N}\}$ et $\text{vect}\{x\mapsto f(x+a),\ a\in\mathbb{R}\}$)
Pour $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ on définit

$$\mathscr{T}_f := \text{Vect}\{x\mapsto f_a(x)=f(x-a),\ a\in\mathbb{R}\},$$

et pour $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$\mathscr{D}_f := \text{Vect}\{x\mapsto f^{(k)}(x),\ k\in\mathbb{N}\}.$$

❶ *Caractériser les applications $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vérifiant $\dim\mathscr{D}_f<\infty$.*
❷ *Soient $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $f\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On suppose $\dim\mathscr{T}_f=d<\infty$, montrer qu'il existe $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{R}$ et $\varphi_1,\dots,\varphi_d\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que*

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad f_a=\sum_{j=1}^d \varphi_j(a)f_{a_j}.$$

❸ *Plus précisément, si $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vérifiant $\dim\mathscr{T}_f=d<\infty$, montrer que les applications $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ sont $\mathscr{C}^\infty$.*
❹ *En déduire que $f\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$.*
❺ *Établir l'équivalence*

$$(\dim\mathscr{T}_f=d<\infty)\iff(\dim\mathscr{D}_f=d<\infty)\iff\left(f(t)=\sum_{j=1}^d P_j(t)e^{\lambda_j t}\right).$$

❶ Il n'est pas difficile de démontrer que $\mathscr{D}_f$ est de dimension finie si, et seulement si, il existe une suite $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ de nombres complexes tels que

$$f^{(d)}+\lambda_d f^{(d-1)}+\dots+\lambda_1 f=0.$$

f est donc solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la structure des solutions est parfaitement connue ([12], [33])

$$f(t)=\sum_{j=1}^d P_j(t)e^{\lambda_j t},\ t\in\mathbb{R}\quad\text{où}\quad \lambda_j\in\mathbb{C},\ P_j\in\mathbb{C}[X].$$

Réciproquement, il est bien évident que pour de telles fonctions $\mathscr{D}_f$ est de dimension finie.

❷ $\mathscr{T}_f$ étant engendré par les translations $x\mapsto f_a(x)=f(x-a)$, admet, s'il est de dimension finie, une base de la forme $f_{a_1},\dots,f_{a_d}$. Autrement dit, il existe des applications $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad f_a=\sum_{j=1}^d \varphi_j(a)f_{a_j}$$

et il reste à montrer que ces applications ont la même régularité que f. Pour cela, le lemme suivant est crutial

« Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ il existe une base de $E^\star$ de la forme $(\delta_{x_1},\dots,\delta_{x_d})$ (où $\delta_x(f):=f(x)$ est la masse Dirac au point x). En outre, si $(f_1,\dots,f_d)$ est une base de E : $\det((\delta_{x_j}(f_i)))_{ij}\neq 0$. »

Preuve du lemme : Comme $\dim(E^\star) = \dim(E) < \infty$ et que toute famille $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_d})$ est libre dans $E^\star$ dès que les réels x_i sont deux à deux distincts l'existence de telles bases est élémentaire. On vérifie alors sans peine que la matrice de passage P de la base de E, $(g_1, \dots, g_d)$ duale de $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_d})$ à la base $(f_1, \dots, f_d)$ est précisément la matrice $((\delta_{x_j}(f_i)))_{ij}$ qui est donc de déterminant non nul. ■

Ceci étant acquis, étant donné une base $(f_{a_1}, \dots, f_{a_d})$ de $\mathscr{T}_f$ et (c.f. le lemme) $(x_1, \dots, x_d)$ tels que la matrice $A = ((f_{a_i}(x_j)))$ soit inversible, nous avons

$$(\text{✘}) \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(a) f_{a_i}(x)$$

et en particulier

$$f_a(x_j) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(a) f_a(x_j) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(a) \delta_{x_j}(f_a), \quad \forall\, j \in \{1, \dots, d\}.$$

Matriciellement cette égalité s'écrit

$$A \begin{pmatrix} \varphi_1(a) \\ \vdots \\ \varphi_d(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{a_1}(a_1) & \dots & f_{a_1}(a_d) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{a_d}(a_1) & \dots & f_{a_d}(a_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(a) \\ \vdots \\ \varphi_d(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_1 - a) \\ \vdots \\ f(a_d - a) \end{pmatrix}$$

mais par le lemme précédent, A est inversible, si bien qu'en posant $B = A^{-1} = ((b_{ij}))$ le système linéaire précédent s'inverse pour donner

$$\varphi_i(a) = \sum_{j=1}^{d} b_{ij} f(a_j - a), \quad 1 \leq i \leq d.$$

Ces égalités assurent que les applications φ_i sont au moins aussi régulières que f.

❸ Cette question maximise la précédente puisqu'il s'agit de montrer que les applications φ_j sont $\mathscr{C}^\infty$ dès que f est continue (rien d'étonnant, tout va s'expliquer dans la dernière question). Pour cela, considérons[7] une « approximation de l'identité » $(\theta_k)_k$. Les applications θ_k étant à support compact, et f continue donc localement intégrable, l'application $\theta_k \star f$ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on vérifie facilement que $(\theta_k \star f)_a = \theta_k \star f_a$. En outre, la convolution étant linéaire

$$(\text{✘}) \quad (\theta_k \star f)_a = \theta_k \star f_a = \theta_k \star \left(\sum_{j=1}^{d} \varphi_j(a) f_{a_j} \right) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(a) (\theta_k \star f_{a_j}) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(a) (\theta_k \star f)_{a_j}.$$

L'espace vectoriel $\mathscr{T}_{\theta_k \star f}$ admet donc $((\theta_k \star f)_{a_1}, \dots, (\theta_k \star f)_{a_d})$ comme famille génératrice : il est donc de dimension finie. En outre, $(\theta_k)_k$ étant une approximation de l'identité, la matrice $A_k = ((\theta_k \star f_{a_i}(x_j)))_{ij} = ((\delta_{x_j}(\theta_k \star f_{a_i})))_{ij}$ converge vers la matrice inversible $A = ((f_{a_j}(x_i)))$. Par continuité du déterminant, il existe un entier k_0 tel que $A_k \in GL_d(\mathbb{R})$, $\forall\, k \geq k_0$. La linéarité des masses de Dirac δ_{x_j} implique alors que la famille $((\theta_{k_0} \star f)_{a_1}, \dots, (\theta_{k_0} \star f)_{a_d})$ est aussi libre, c'est donc une base de $\mathscr{T}_{\theta_{k_0} * f}$ et la formule (✘) implique alors que les coordonnées

[7] [47] : $\theta_k \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \theta_k(x) dx = 1$, $\theta_k(x) = 0\ \forall\, |x| \geq 1/k$ et $\lim_k \theta_k \star f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$...

de $(\theta_{k_0} \star f)_a$ sont $\varphi_1(a), \dots, \varphi_d(a)$: il ne reste plus qu'à appliquer la question ❷ à la fonction $(\theta_{k_0} \star f)_a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour pouvoir affirmer que $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ sont $\mathscr{C}^\infty$ et conclure.

❹ Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\mathscr{T}_f) < \infty$. Avec (✔), nous avons

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f_{-x}(0) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(x) f_{a_j}(0) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(-x) f(-a_j)$$

et comme d'aprés la question précédente, les fonction φ_j sont $\mathscr{C}^\infty$ il en découle immédiatement que f l'est aussi.

❺ Il reste à établir

$$(\dim \mathscr{T}_f = d < \infty) \iff (\dim \mathscr{D}_f = d < \infty) \iff \left(f(t) = \sum_{j=1}^{d} P_j(t) e^{\lambda_j t} \right).$$

La seconde équivalence a fait l'objet de la première question. Supposons que $\dim(\mathscr{T}_f) < \infty$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(f^{(k)})_{-a} = (f_{-a})^{(k)} = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a) f_{x_i}^{(k)} = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a) (f^{(k)})_{x_i}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

en particulier, en évaluant $(f^{(k)})_{-a}$ à l'origine

$$f^{(k)}(a) = (f^{(k)})_{-a}(0) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a) f_{x_i}^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a) (f^{(k)})(-a_i), \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

ce qui montre que toutes les dérivées de f sont dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions $a \mapsto \varphi_i(-a)$, $1 \le i \le d$: $\mathscr{D}_f$ est donc de dimension finie.
Réciproquement, si $\dim(\mathscr{D}_f) < \infty$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} P_i(x) e^{\lambda_i x}.$$

Comme il est facile de vérifier que

$$\forall\, g, h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{C} \quad : \quad \mathscr{T}_{g+h} \subset \mathscr{T}_g + \mathscr{T}_h, \quad \mathscr{T}_{\alpha h} \subset \mathscr{T}_h$$

il en résulte que $\dim(\mathscr{T}_g) < \infty$ et $\dim(\mathscr{T}_h) < \infty$ impliquent que $\dim(\mathscr{T}_{f+g}) < \infty$ et $\dim(\mathscr{T}_{\alpha h}) < \infty$. Ainsi, vu la forme de f, il est suffisant de montrer que $\dim(\mathscr{T}_{x \mapsto x^n e^{\lambda x}}) < \infty$ ce qui est immédiat. Q.E.D. ❏

Exercice 311 ($\inf \left\{ \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx,\ f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0,\ f(1) = 1 \right\} = e^{-1}$. **)** [10]

Existence et calcul de

$$m := \inf \left\{ \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx,\ f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0,\ f(1) = 1 \right\}.$$

➪ Si on remarque que $f'(x) - f(x) = e^x\left(f(x)e^{-x}\right)'$, on peut alors écrire (puisque $e^x \geq 1,\ \forall\, x \geq 0$...)

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)|dx = \int_0^1 e^x \left|\left(f(x)e^{-x}\right)'\right| dx \geq \int_0^1 \left(f(x)e^{-x}\right)' dx = \frac{1}{e}.$$

Soit

$$m \geq 1/e.$$

➪ Considérons maintenant pour $0 < a < 1$ les applications

$$f_a(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{e^{a-1}}{a}\right) x & \text{si} \quad x \in [0, a], \\ e^{x-1} & \text{si} \quad x \in]a, 1]. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $f_a \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ pour tout $0 < a < 1$ et comme

$$\int_0^1 |f_a'(x) - f_a(x)|dx = e^{a-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right)$$

nous avons

$$\frac{1}{e} \leq m \leq e^{a-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right) \underset{a \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{e},$$

et finalement $\quad m = e^{-1}$. ❏

Exercice 312 (Études de quelques équations fonctionnelles) [25]

❶ *Déterminer les solutions continues à l'origine (voire bornée sur un voisinage de l'origine) de l'équation fonctionnelle*

(✘) $$2f(2x) = f(x) + x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

❷ *Déterminer les applications* $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ *tendant vers zéro en* $+\infty$ *et solutions de l'équation fonctionnelle*

(✔) $$f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^\star.$$

❶ Supposons que le problème (✘) admette une solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il est équivalent d'écrire

$$f(x) = 2^{-1} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De là, aprés une récurrence élémentaire on en déduit que pour tous $x \in \mathbb{R},\ , n \in \mathbb{N}^\star$

$$f(x) = 2^{-n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^4} + \cdots + \frac{x}{2^{2(n-1)}} + \frac{x}{2^{2n}}$$

soit encore

$$\begin{aligned}f(x) &= 2^{-n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x}{2^2}+\frac{x}{2^4}+\dots+\frac{x}{2^{2(n-1)}}+\frac{x}{2^{2n}},\\ &= \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^2}\right)^k\\ &= \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x}{4}\frac{1-2^{-2n}}{1-2^2}\\ &= \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x(1-2^{-2n})}{3}.\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout entier $n\in\mathbb{N}^\star$, on peut donc passer à la limite sur n

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x(1-2^{-2n})}{3}\right)$$

mais comme f est continue à l'origine $2^{-n}f(x2^{-n})$ tends vers zéro avec n, donc

$$f(x)=0+\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-2^{-2n})}{3}=\frac{x}{3}.$$

On trouve donc $f(x)=x/3$, et réciproquement, il est élémentaire de vérifier que c'est bien une solution : c'est l'unique solution continue à l'origine de l'équation fonctionnelle (✘).

❷ Pour $y=x$ l'équation fonctionnelle donne $f(xf(x))=xf(x)$ et donc $xf(x)$ est un point fixe (non nul) de f pour tout $x\in\mathbb{R}_+^\star$. Notons $a=xf(x)$ un tel point fixe. Nous avons ❑

Exercice 313 (Quelques applications de l'inégalité de Jensen) [43]

❶ *Montrer que pour tout $x>1$*

(✘) $$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}<\frac{3}{x}.$$

En déduire une nouvelle démonstration de la divergence de la série harmonique.

❷ *Démontrer que parmi tous les polygones convexes inscrits dans un cercle, ce sont les polygones réguliers qui possèdent une aire maximale.*

❶ La stricte convexité de l'application $f\ :\ x\mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ implique avec

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3},\quad x_1=x-1,x_2=x,\ x_3=x+1$$

que

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$$

soit

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3(x+1)},$$

(✘) est bien démontrée[8].

[8] Il faut tout de même remarquer que c'est ici un luxe d'utiliser l'inégalité de Jensen, (✘) se démontre élémentairement comme suit : (✘) $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}<\frac{2}{x}\Leftrightarrow x^2>x^2-1$ inégalité immédiate pour $x>1$.

Pour l'application, supposons que la série harmonique converge, alors avec (✘)

$$H := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots < 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \cdots = 1 + H$$

contradiction et la série harmonique est bien divergente.

❷ Comme on le voit sur la figure tout tel polygône peut être considère comme un aggloméat de triangles isocèles admettant tous l'origine comme un des sommets et dont la réunion des aires est celle du polygône. L'aire achurée du triangle sur la figure vaut $\frac{1}{2}\sin(\theta_1)$ et si on désigne par $\theta_1, \dots, \theta_N$ les angles correspondants, l'aire du polygône sera

$$A = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\sin(\theta_j), \quad 0 < \theta_j < \pi, \quad \sum_{j=1}^{N} \theta_j = 2\pi.$$

Par concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi]$ nous avons avec Jensen

$$A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j) \leq \frac{n}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j)\right) = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Par stricte concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi]$, le cas d'égalité dans la formule de Jensen assure qu'il y aura égalité dans la formule précédente si, et seulement si $\theta_j = \frac{2\pi}{n}$, configuration qui correspond bien au cas d'un polygône régulier.

ℹ Profitons-en pour signaler que cette inégalité et son application pour la divergence de la série harmonique sont attribuées au mathématicien Italien Pietro Mengoli (1625-1686).

Exercice 314 (Combinatoire : les nombres de Bell) [15]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[1, \dots, n]$ avec par convention $B_0 = 1$.

❶ *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:* $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

❷ *Montrer que le rayon de convergence R de la série génératrice exponentielle $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ de la suite $(B_n)_0^\infty$ est strictement positif et calculer $f(z)$ pour $|z| < R$.*

❸ *Montrer que* $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

❶ Associons à tout entier $0 \leq k \leq n$, l'ensemble E_k des partitions de $[1, 2, \dots, n+1]$ telles que la partie de $[1, 2, \dots, n+1]$ contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Le cardinal de E_k vaut $C_n^k E_{n-k}$ (car une telle partition est déterminée par les k éléments restant pour compléter la partie de $[1, 2, \dots, n+1]$ contenant $n+1$ (soit C_n^k possibilités, à laquelle on peut adjoindre les B_{n-k} partitions de l'ensemble à $n-k$ éléments restant). Comme $E_0, E_1, \dots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[1, 2, \dots, n+1]$, on a bien

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} = B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k.$$

❷ Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n \leq n!$. Comme $B_0 = B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$, la propriété est vérifiée pour $n \leq 3$. Supposons là vérifiée jusqu'au rang n, alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)!.$$

On a donc $\dfrac{B_n}{n!} \leq 1$ et le rayon de convergence R de la série entière $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 1.

On va utiliser la formule démontrée dans la première question pour calculer $f(z)$. Pour $z \in]-R, R[$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \right) z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

On reconnait alors dans le dernier terme le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n = f(z)$ et $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z$ de rayon de convergence strictement positif : on a donc

$$f'(z) = f(z)e^z, \qquad \forall\, z \in]-R, R[.$$

En intègrant cette équation différentielle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = Ce^{e^z}$ sur $]-R, R[$; enfin, comme $f(0) = B_0 = 1$, $C = e^{-1}$ et finalement

$$f(z) = e^{e^z - 1}, \qquad \forall\, z \in]-R, R[.$$

❸ Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z$ étant infini, on a

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nz)^k}{k!}\right), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

La série double $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} u_{n,k}$ (où $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$) est sommable[9] ; il est donc légitime d'échanger l'ordre de sommation

$$f(z) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_{n,k}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\sum_{n=0}\frac{n^k}{n!}\right)z^n, \quad z \in]-R, R[,$$

soit par unicité des coefficients

$$B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}.$$

Q.E.D. ❑

Exercice 315 (Probabilités et formule de Taylor) [31], *exercice 12.*

Donner une preuve probabiliste de l'affirmation suivante : « la somme des coefficients de $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ dans le dévellopement en série de Taylor de $(2-x)^{-n}$ est $1/2$. »

❑

Exercice 316 (Une suite dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ qui « s'annule » sur $\mathbb{C}$) [10], *2004.*

❶ *Soit $(P_k)_k \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier k tel que P_k soit le polynôme nul.*

❷ *Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Q}$, la conclusion de ❶ reste-t-elle valable ?*

❑

[9] car $\sum_k |u_{n,k}| = e^{|nz|}/n!$ et $\sum_n\sum_k |u_{n,k}| = e^{e^{|z|}}$,voir [12] (T2, page ...).

Exercice 317 (Autour de la série harmonique) [6].

On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *Montrer que*

$$\rightsquigarrow \quad \text{La série} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kH_k} \quad \text{diverge.}$$

❏

Exercice 318 ($n(n^2+1)/2$ est valeur propre de toute matrice magique $A \in M_n(\mathbb{R})$.) [34], *E 733-1947.*

Montrer que toute matrice magique $A \in M_n(\mathbb{R})$ *admet* $n(n^2+1)/2$ *comme valeur propre.*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice magique[10]. Désignons pâr s la somme des composantes d'une colonne de A, si $X = {}^t(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, comme A est magique

$$AX = sX.$$

La somme des n^2 premiers entiers vaut $n^2(n^2+1)/2$ et c'est la somme des n colonnes de A soit $n^2(n^2+1)/2 = ns$ et finalement $s = n(n^2+1)/2$. ❏

Exercice 319 (Une base de deux Banach X et Y n'en est pas forcément une pour $X \cap Y$) [34]

Exercice 320 (Encore un peu de dénombrement) [19]

Dans chacune des n *maisons d'une rue rectiligne se trouve un ou plusieurs enfants. Dans quelle maison doivent-ils tous se rencontrer de telle sorte que la somme des distances parcourues soit minimale ?*

Désignons par x_i la coordonnée linéaire du i-ème enfant où l'on a arrangé la numérotation de telle sorte que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Il est clair que ce problème admet toujours au moins une solution, désignons par i_0 la coordonnée du (d'un des) meilleur(s) point de rendez-vous. Supposons que r enfants vivent à droite de la maison i_0 et l à sa gauche

[10]Une matrice est magique si les sommes des composantes de chacunes de ses lignes et de ses colonnes sont égales et si elle est à coefficients dans $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ tous ces entiers apparaissant exactement une fois dans A.

Exercice 321 (La courbe d'équation $y = x^4 + 9x^3 + \alpha x^2 + 9x + 4$ admet-elle 4 points alignés ?) [10].
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de α la courbe

$$(C_\alpha) \qquad y = x^4 + 9x^3 + \alpha x^2 + 9x + 4$$

admet-elle 4 points alignés ?

$(\Rightarrow)$ Fixons nous $\alpha \in \mathbb{R}$ et une droite $(D_{a,b})$ d'équation $y = ax+b$. Le point (x, y) appartient à $(C_\alpha) \cap (D_{a,b})$ si, et seulement si

$$f_{a,b}(x) := x^4 + 9x^3 + \alpha x^2 + (9-a)x + 4 - b = 0.$$

Il s'agit donc de déterminer une condition sur α pour que la fonction $f_{a,b}$ admette 4 racines réelles distinctes. Si tel est le cas, le théorème de Rolle assure que $f'_{a,b}$ admet 3 racines réelles distinctes et de même $f''_{a,b}$ admet 2 racines réelles distinctes. Mais $f''_{a,b}(x) = 12x^2 + 54x + 2\alpha$, son discriminant $\Delta = 54^2 - 96\alpha$ doit être strictement négatif, i.e. $\alpha < 243/8$.

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, si $\alpha < 243/8$ et montrons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}$ admette 4 racines réelles distinctes.
$\alpha < 243/8$ assure que le discriminant de $f''_{a,b}(x) = 12x^2 + 54x + 2\alpha$ est strictement négatif, $f''_{a,b}$ admet donc deux racines réelles $z_1 < z_2$ et nécessairement

$$\begin{aligned} &f'_{a,b} \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, z_1] \\ &f'_{a,b} \text{ est strictement décroissante sur } [z_1, z_2] \\ &f'_{a,b} \text{ est strictement croissante sur } [z_2, +\infty[. \end{aligned}$$

En particulier $f'_{a,b}(z_1) > f'_{a,b}(z_2)$ et la constante a n'apparaissant que dans le terme constant de $f'_{a,b}$, il est donc possible de choisir convenablement a de telle sorte (faites un dessin) que

$$f'_{a,b}(z_1) > 0 \quad \text{et} \quad f'_{a,b}(z_2) < 0.$$

De plus, comme $\lim_{+\infty} f'_{a,b} = +\infty$, $\lim_{-\infty} f'_{a,b} = -\infty$ la fonction $f'_{a,b}$ admet forcément trois racines réelles distinctes $y_1 < y_2 < y_3$ et

$$\begin{aligned} &f_{a,b} \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, y_1], \\ &f_{a,b} \text{ est strictement croissante sur } [y_1, y_2], \\ &f_{a,b} \text{ est strictement décroissante sur } [y_2, y_3[, \\ &f_{a,b} \text{ est strictement décroissante sur } [y_3, +\infty[. \end{aligned}$$

On va maintenant jouer sur b qui n'apparait que dans le coefficient constant de $f_{a,b}$ sous la forme $4 - b$: en d'autres termes, augmenter b revient a translater le graphe de $f_{a,b}$ suivant la direction de l'axe des ordonnées. comme $f_{a,b}(y_2) > f_{a,b}(y_1) > f_{a,b}(y_3)$ il suffit de choisir correctement $b \in \mathbb{R}$ pour que $f_{a,b}(y_2) > 0$, $f_{a,b}(y_1) < 0$, $f_{a,b}(y_3) < 0$. ❏

Exercice 322 (Un théorème d'Erdös sur les fonctions multiplicatives monotones) [34], *(8)1986.*

*Un fonction arithmétique $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non identiquement nulle est **dite multiplicative** si*

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{dès que} \quad m \wedge n = 1,$$

*et **complétement multiplicative** si*

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{pour tous } n, m \in \mathbb{N}.$$

➊ *Montrer que si f est complétement multiplicative et croissante, il existe une constante α telle que $f(n) = n^{\alpha}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^{\star}$.*

➋ *Montrer que toute application multiplicative croissante est complétement multiplicative.*

Exercice 323 (Autour d'une ellipse) *Problem of the week, spring 2006.*

Dans une ellipse $\mathscr{E}$ d'aire 1, on considère deux cordes parallèles respectivement aux deux axes de $\mathscr{E}$. Ces deux cordes divisent l'ellipse en quatre régions, montrer qu'au moins deux regions ont une aire inférieure ou égale à $1/4$.

Sans perdre de généralité, supposons que les deux cordes se coupent dans le premier cadran (fermé) ; si on rajoute les deux axes de $\mathscr{E}$ et les deux cordes symétriques déduites des deux premières par une symétrie de centre O le centre de $\mathscr{E}$ on obtient 16 régions dont les aires sont désignées par les lettres A, B, C, D (voir la figure, certaines bien entendu, pouvant être d'aire nulle si une corde est confondu avec un axe). Il déja clair que $B \leq 1/4$, nous allons montrer que la somme des aires des deux régions grisées est inférieure ou égale à $1/2$. En effet, elle vaut $(B + 2C) + (B + 2D)$ et comme $4(A + B + C + D) = \text{Aire}(\mathscr{E}) = 1$ on aura

$$(B+2C)+(B+2D) = 2(B+C+D) = \frac{1}{2}(1-4A) \leq \frac{1}{4}.$$

Ainsi, une des deux quantités $B+2C$, $B+2D$ est inférieure à $1/4$ ce qui achève la démonstration (les deux domaines seront (B) et (B, C, C, B) ou (B, D, D, B)). ❏

Exercice 324 (Autour du théorème de Gauss-Lucas) [43]

❶ *Montrer que pour tout polynôme* $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d \in \mathbb{C}[z]$, *les racines du polynôme dérivée* P' *sont dans l'enveloppe convexe des racines de* P *(théorème de Gauss-Lucas).*

❷ ***(l'inégalité arithmético-géométrique complexe)*** *Soient* n *nombres complexes* $z_1, \dots, z_n$ *tels qu'il existe* $\psi \in [0, \pi/2[$ *vérifiant*

$$z_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \quad 0 \leq |\theta_j| < \psi < \pi/2, \quad \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

(voir la figure) Montrer que

$$\cos(\psi)|z_1 \dots z_n|^{1/n} \leq \frac{|z_1 + z_2 + \dots + z_n|}{n}.$$

❸ *Soit* H *l'enveloppe convexe des zéros de* $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d \in \mathbb{C}[z]$, $(d \geq 1)$. *Montrer que*

$$\left|\frac{a_d}{P(z)}\right|^{1/d} \leq \frac{1}{d\cos(\varphi)}\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|, \quad \forall\, z \notin H,$$

(c'est l'inégalité de Wilf) où φ *est la moitié de l'angle « de vision » de* H *du point* z *(voir la figure ci-dessous). Retrouver le théorème de Gauss-Lucas.*

❶ Soient $r_1, \dots, r_n$ les racines deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_n$ de telle sorte que $P(z) = (z - r_1)^{m_1} \dots (z - r_n)^{m_n}$; aprés un calcul classique

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{m_1}{z - r_1} + \dots + \frac{m_n}{z - r_n}.$$

Un zéro de P' qui est aussi un zéro de P est trivialement dans H, considérons donc z_0 un zéro de P' qui n'est pas un zéro de P ; l'égalité précédente s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_1}{z_0 - r_1} + \dots + \frac{m_n}{z_0 - r_n} \\ &= \frac{m_1(\overline{z_0} - \overline{r_1})}{|z_0 - r_1|^2} + \dots + \frac{m_n(\overline{z_0} - \overline{r_n})}{|z_0 - r_n|^2} \\ &= \lambda_1(\overline{z_0} - \overline{r_1}) + \dots + \lambda_n(\overline{z_0} - \overline{r_n}), \end{aligned}$$

où $\lambda_k := m_K/|\overline{z_0} - \overline{r_k}|^2 \in \mathbb{R}_+$. La dernière égalité peut alors aussi s'écrire

$$z_0 = \frac{\lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_n r_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n},$$

qui assure que z_0 est combinaison convexe des racines de P.

❷ Nous avons

$$\begin{aligned} |z_1 + \dots + z_n| &\geq |\mathrm{Re}(z_1 + \dots + z_n)| \\ &= |z_1|\cos(\theta_1) + \dots + |z_n|\cos(\theta_n) \\ &\geq (|z_1| + \dots + |z_n|)\cos(\psi) \\ &\geq n(|z_1| \dots |z_n|)^{1/n}\cos(\psi) \end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé la décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi/2]$ et l'inégalité arithmético-géométrique[11] sur les réels positifs $|z_j|,\ j = 1, \dots, n$.

❸ ➲ Soient $r_1, \dots, r_d$ les racines de P comptées cette fois-ci avec leur multiplicité et $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe en dehors de l'enveloppe convexe H des zéros de P. Sous forme polaire nous avons $z - r_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ soit

$$\frac{1}{z - r_j} = \rho_j^{-1} e^{i\theta_j}, \quad 1 \leq j \leq d,$$

où $\theta_j \leq 2\psi,\ (1 \leq j \leq n)$. L'inégalité arithmético-géométrique complexe implique (bien remarquer que H fermé convexe et $z \notin H$ impliquent $\psi \in [0, \pi/2[$...)

$$\cos(\psi)\left|\frac{1}{z - r_j} \cdots \frac{1}{z - r_n}\right|^{1/n} \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - r_j}\right|$$

qui peut aussi s'écrire

$$\left|\frac{a_n}{P(z)}\right|^{1/n} \leq \frac{1}{n\cos(\psi)}\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|, \quad \forall\, z \notin H.$$

➲ S'il existe un zéro de P' qui ne soit pas dans H, il n'est donc pas une racine de P et par l'inégalité de Wilf

$$0 < \left|\frac{a_n}{P(z)}\right|^{1/n} \leq \frac{1}{n\cos(\psi)}\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| = 0,$$

ce qui est absurde, le théorème de Gauss-Lucas suit. ❑

Exercice 325 (Différentiabilité de $M_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto (\mathbf{tr}(M), \mathbf{tr}(M^2), \dots, \mathbf{tr}(M^n))$ et applications) [10]-*2006.*

❶ *Montrer que l'application $f\ :\ M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ définie par*

$$f(M) = (tr(M), tr(M^2), \dots, tr(M^n)), \quad M \in M_n(\mathbb{R}^n)$$

est différentiable et calculer $df(M)(H)$.

❷ *Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. montrer que le rang de $df(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.*

❸ *En déduire que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique coïncide avec le polynôme minimal est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.*

❶ On a pour $k \in \mathbb{N}^\star$

$$\mathrm{tr}(M + H)^k = \mathrm{tr}(M^k) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{tr}(M^i H M^{k-1-i}) + O(\|H\|^2),$$

11 $(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ pour $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}_+$.

et l'identité $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ entraine alors

$$\mathrm{tr}(M+H)^k = \mathrm{tr}(M^k) + k\mathrm{tr}(M^{k-1}H) + O(\|H\|^2).$$

Les fonctions composantes de f sont donc différentiables, il en va donc de même pour f et

$$df(M)(H) = (\mathrm{tr}(H), 2\mathrm{tr}(MH), \dots, n\mathrm{tr}(M^{n-1}H)).$$

❷ Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, désignons par Φ_X la forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi_X(H) = \mathrm{tr}(XH)$. L'application $X \mapsto \Phi_X$ réalise un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{R})$ et son dual $M_n(\mathbb{R})^\star$. Ainsi les formes $(\Phi_{M^k})_0^{n-1}$ forment une famille de rang égal à celui des matrices $(M^k)_0^{n-1}$ lui même égal à d le degré du polynôme minimal de M. Par conséquent, $\dim\ker df(M) = n^2 - d$, donc $\mathrm{rg} df(M) = d$.

❸ Le polynôme minimal divisant toujours le polynôme caractéristique, l'ensemble $\mathscr{C}$ des matrices dont les polynôme minimal et caractéristique coïncident est formé des matrices pour lesquelles le polynôme minimalest de degré n. Soit $M \in \mathscr{C}$, on sait donc que $\mathrm{rg} df(M) = n$ et comme $df(M)$ est continue, il existe[12] un voisinage de M dans $M_n(\mathbb{R})$ sur lequel $\mathrm{rg} df \geq n$. Par conséquent $\mathscr{C}$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$. ❑

Exercice 326 (Une inégalité...) [34]

Soient $x_1 \geq x_2 \geq \dots, x_n \geq 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 400 \quad \textit{et} \quad \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq 10^3,$$

montrer que

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 10.$$

Si $x_1 \geq 100$ il n'y a rien à démontrer, supposons donc $x_1 \leq 100$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} 10^3 &\leq x_1^2 + \sum_{j=2}^n x_j^2 \leq x_1^2 + x_2 \sum_{j=2}^n x_j \\ &\leq x_1^2 + x_2(400 - x_1) = x_1(x_1 - x_2) + 400x_2 \\ &\leq 100(x_1 - x_2) + 400x_2 = 100x_1 + 300x_2 \end{aligned}$$

soit

$$10 \leq x_1 + 3x_2.$$

Maintenant

$$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} \geq x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_2x_2} = x_1 + 3x_2 \geq 10,$$

ce qu'il fallait démontrer. ❑

[12] par continuité de l'application déterminant...

Exercice 327 (Autour des cordes universelles des fonctions continues) [21], [10]-*2007/4.*

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(1)$. On dira que $c>0$ est une corde pour f s'il existe un nombre réel x tel que x et $x+c$ soient tous deux les dans $[0,1]$ et vérifient $f(x+c)=f(x)$. On dira que c est une corde universelle s'il est une corde pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(1)$.

❶ *Montrer que les réels $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots (n \in \mathbb{N}^\star)$ sont des cordes universelles.*

❷ *Soit $0<c<1$ qui ne soit pas l'inverse d'un entier. Construire une fonction $g \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $g(0)=0$, $g(1)=1$ et $g(x+c)=g(x),\ x\in[0,1-c]$. En considérant $f(x):=g(x)-x$, montrer que c n'est pas une corde universelle.*

❸ *(Application) Un marcheur parcourt (continuement) 40 kilomètres en deux heures. Montrer qu'il existe une période d'une heure où il parcourt 20 kilomètres exactement.*

❹ *On suppose que*
$$f(x+3/10)\neq f(x),\quad \forall\, x\in[0,7/10].$$
Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0,1]$.

❶ Pour une telle fonction et $n\in\mathbb{N}^\star$, écrivons
$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{0}{n}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\dots+\left(f\left(\frac{n}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)=f(1)-f(0)=0.$$
Si l'une des n parenthèses s'annule, $1/n$ est une corde de f. Sinon, considérons la fonction $d(x):=f(x+1/n)-f(x)$, elle est continue sur $[0,1-1/n]$ et la formule précédente s'écrit
$$d(0)+d(1/n)+\dots+d(n-1/n)=0.$$
Comme les réels $d(0), d(1/n), \dots, d((n-1)/n)$ sont non nuls mais de somme nulle, deux d'entre-eux au moins sont de signe contraire et par continuité de d le théorème des valeurs intermédiaires assure que d s'annule sur l'intervalle d'extrémités ces deux valeurs. il existe donc $x\in[0,1-1/n]$ tel que $d(x)=0$ i.e. $f(x)=f(x+1/n)$: $1/n$ est bien une corde pour f.

❷ Supposons maintenant que c ne soit pas l'inverse d'un entier, comme dans la question précédente on commence par construire une fonction g continue sur $[0,1]$ telle que
$$g(0)=0,\ g(1)=1 \quad\text{et}\quad g(x)=g(x+c),\ x\in[0,1-c].$$
Il est possible de s'assurer de l'existence d'une telle fonction en dessinant son graphe mais il est aussi possible de donner une formule explicite de l'une d'entre-elles :
$$g(x)=\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi x}{c}\right)}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{c}\right)}.$$

Considérons alors

$$f(x) := x - g(x), \quad x \in [0,1].$$

f est continue sur $[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ mais c ne peut être une corde pour f : en effet, s'il existe $x \in [0, 1-c]$ tel que $f(x) = f(x+c)$ alors

$$f(x+c) - f(x) = (x + c - g(x+c)) - (x - g(x)) = c > 0,$$

et c n'est pas une corde universelle.

❸

❹ Pour $x \in [0, 7/10]$ l'application continue $x \mapsto f(x + 3/10) - f(x)$ ne s'annule pas ; elle garde donc un signe constant que l'on peut supposer strictement positif. On a donc $f(x + 3/10) > f(x),\ \forall x \in [0, 3/10]$. En particulier $f(9/10) > f(6/10) > f(3/10) > f(0) = 0$ et $0 = f(1) > f(7/10) > f(4/10) > f(1/10)$. Ainsi, sur chacun des intervalles $]1/10, 3/10[,]3/10, 4/10[,]4/10, 6/10[,]6/10, 7/10[,]7/10, 9/10[$ f change de signe, donc, d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires s'annule. Comme $f(0) = f(1) = 0$ elle admet au moins sept zéros sur $[0,1]$. ❏

Exercice 328 (Accélération de la convergence vers la contante d'Euler) [34], *mai 1993.*

La constante d'Euler γ est traditionellement définie par la limite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} U_n := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)\right) := \lim_{n\to\infty} U_n.$$

❶ *Montrer que* $\dfrac{1}{2(n+1)} < U_n - \gamma < \dfrac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}.$

❷ *Si on modifie légèrement la suite $(U_n)_n$ en la remplacant par la suite $(V_n)_n$ où*

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

nous allons vérifier que la convergence est notablement accélérée, plus précisément nous avons

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < V_n - \gamma < \frac{1}{24n^2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, soit $f(x) = -(x+1)^{-1} - log(x + \frac{1}{2}) + log(x + \frac{3}{2})$.

⇝ *Vérifier que $V_n - V_{n+1} = f(n),\ n \in \mathbb{N}$.*

⇝ *Montrer que $-f'(x) < \frac{1}{4}(x + \frac{1}{2})^{-4}$. En déduire que*

$$f(k) \leq \frac{1}{12}(k + \frac{1}{2})^{-3} < \int_k^{k+1} t^{-3}\frac{dt}{12}$$

et montrer l'inégalité de droite.

⇝ *Faire de même à gauche et conclure.*

❶

❷ Comme

$$f'(x) = -\frac{1}{4(x+1)^2(x+1/2)(x+3/2)}, \quad x \in \mathbb{R}_+^\star$$

on a

$$-f'(x) < \frac{1}{4(x+1/2)^4}, \quad x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

De là, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ assure que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$

$$f(k) = -\int_k^\infty f'(x)dx < \frac{1}{4}\int_k^\infty (x+1/2)^{-4}dx = \frac{1}{12(k+1/2)^3}.$$

Maintenant, en remarquant que $(k+1/2)^2 = k^2+k+1/4 > k(k+1)$ on peut écrire

$$\frac{1}{(k+1/2)^3} < \frac{1}{(k+1/2)k^2(k+1)^2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1} x^{-3}dx,$$

(cette inégalité peut être suggérée par par la figure ci-contre) soit

$$f(k) < \frac{1}{12}\int_k^{k+1} x^{-3}dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$

❑

Exercice 329 (A la recherche des points isolés de $\{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ P(A) = 0\,\}$, $P \in \mathbb{C}[x]$)
[10]-*2005.*

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, un polynôme non constant. L'objectif est de déterminer les points isolés de $\mathscr{E} := \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ P(A) = 0\,\}$

❶ *Soit $A \in \mathscr{E}$, montrer qu'il existe une voisinage V de l'origine dans $M_n(\mathbb{C})$ tel que $(I_n+H)A(I_n+H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V$.*

❷ *Si de plus A est isolée, montrer que $AM = MA$ pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, en déduire que $A = \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{C}$.*

❸ *Soit λ une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2; à l'aide des matrices $M_k = \lambda I_n + k^{-1}E_{12}$, montrer que $\lambda I_n \notin \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$. Enfin, montrer que $\mathrm{Iso}(\mathscr{E})$ est l'ensemble des matrices scalaires λI_n où λ est racine de P de multiplicité 1.*

🛈 Il est essentiel de se souvenir qu'un point isolé est toujours dans l'ensemble. Remarquons aussi qu'ici $\mathscr{E}$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $A \mapsto P(A)$. On peut enfin observer que $A \in \mathscr{E}$ implique que les valeurs propres de A sont des racines de P et que la classe de conjugaison $\mathscr{S}_A = \{\, P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\,\}$ de A est aussi dans $\mathscr{E}$. Comme $\mathscr{S}_A$ est non bornée dès que[13] $A \neq \lambda I_n$ il en sera de même pour $\mathscr{E}$ dès que P admet au moins deux racines distinctes.

[13] Voir l'exercice ? ? ? sur les classes de conjugaison.

❶ L'ensemble $\Omega = \{ H \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ I_n + H \in GL_n(\mathbb{C}) \}$ est bien entendu ouvert et pour $H \in \Omega, A \in \mathscr{E}$ nous avons

$$P\left((I_n + H)A(I_n + H)^{-1}\right) = (I_n + H)P(A)(I_n + H)^{-1} = 0.$$

Par conséquent l'application continue $\varphi \ : \ \Omega \ni H \mapsto \ \varphi(H) = (I_n+H)A(I_n+H)^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$ est à valeurs dans $\mathscr{E}$ (i.e. $\varphi(\Omega) \subset \mathscr{E}$). En outre,vu que $\varphi(0) = A$, pour tout voisinage V de A, $\varphi^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine dans Ω.
Supposons maintenant que $A \in \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$, il existe un voisinage V_A de A dans $M_n(\mathbb{C})$ tel que $V_A \cap \mathscr{E} = \{A\}$, et, vu ce qui précède, un voisinage V_0 de l'origine tel que $V_0 \subset \varphi^{-1}(V_A)$. Ainsi, comme $\varphi(\Omega) \subset \mathscr{E}$ nous aurons $\varphi(V_0) \subset V_A \cap \mathscr{E} = \{A\}$ soit $(I_n + H)A(I_n + H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V_0$.

❷ $(I_n + H)A(I_n + H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V_0$ implique $HA = AH$ pour tout $H \in V_0$. A commute déja avec le voisinage de l'origine V_0 ; soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice arbitraire, il existe $\varepsilon > 0$ tel que (ici, le fait que Ω soit ouvert dans $M_n(\mathbb{C})$ est fondamental puisqu'il assure l'existence d'une vraie boule $B(0, \varepsilon) \subset \Omega$...voisinage relatif ne suffit pas...) $\varepsilon B \in V_0$ si bien que $\varepsilon(BA) = (\varepsilon B)A = A(\varepsilon B) = \varepsilon(AB)$ soit $BA = AB$. Ainsi tout point isolé A de $\mathscr{E}$ commute avec tout $M_n(\mathbb{C})$, par un exercice classique d'algèbre linéaire ([33]) $A = \lambda I_n, \ \lambda \in \mathbb{C}$.

🛈 Il est bon de remarquer à ce niveau de l'exercice que $A = \lambda I_n \in M_n(\mathbb{C}) \cap \mathscr{E}$ implique $0 = P(A) = P(\lambda)I_n$, soit $P(\lambda) = 0$ et λ est un zéro de P. Les éventuels points isolés de $\mathscr{E}$ sont donc dans l'ensemble fini $\{ \lambda I_n, \ P(\lambda) = 0 \}$.

❸ Λ désignant l'ensemble (éventuellement vide) des racines simples de P, montrons que l'ensemble des points isolés de $\mathscr{E}$ est $\mathscr{A} := \{ \lambda I_n, \ \lambda \in \Lambda \}$.

➪ Si λ est une racine multiple de P, alors $(X - \lambda)^2$ divise P. Considérons la suite de matrices $M_k = \lambda I_n + k^{-1}E_{12}, \ k \in \mathbb{N}^\star$, elle converge vers λI_n et on a $(M_k - \lambda I_n)^2 = (k^{-1}E_{12})^2 = 0$, si bien que

$$P(M_k) = \prod_{\mu \ : \ P(\mu)=0} (M_k - \mu I_n) = (M_k - \lambda I_n)^2 Q(M_k) = 0.$$

(comme polynômes en M_k les endomorphismes du produit commutent justifiant les deux égalités) La suite $(M_k)_k$ est donc bien dans $\mathscr{E}$ et λI_n n'est pas isolé dans $\mathscr{E}$.

➪ Si P admet au moins une racine simple $\lambda (\in \Lambda)$ montrons que λI_n est isolée dans $\mathscr{E}$. Sinon, il existe dans $\mathscr{E} \setminus \{\lambda I_n\}$ une suite $(N_k)_k$ convergente vers λI_n et par continuité de l'application $A \mapsto \chi_A$, la suite de polynômes χ_{N_k} converge vers $\chi_{\lambda I_n} = (\lambda - X)^n$. Mais cette suite convergente est inclue dans l'ensemble **fini** $\{ \chi_A, \ A \in \mathscr{E}\}$ (fini car les valeurs propres d'un élément de $\mathscr{E}$ sont forcément des racines de P) elle est donc stationnaire i.e. $\chi_{N_k} = (\lambda - X)^n$ à partir d'un certain rang. On a alors :

$$\begin{cases} \chi_{N_k} = (\lambda - X)^n \\ P(N_k) = 0 \\ \lambda \text{ racine simple de } P, \end{cases}$$

et dans ce cas, la seule alternative est que le polynome minimal de N_k soit égal à $X - \lambda I_n$ i.e. $N_k = \lambda I_n$ à partir d'un certain rang et le point λI_n est bien isolé dans $\mathscr{E}$. ❑

Exercice 330 (Supplémentaires universels d'un espace de dimension finie) [34] *7-1985 & 8-1986.*

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie d. On dira qu'une famille $(E_i)_{i\in I}$ (I est au plus dénombrable) de sous-espaces de ***même*** *dimension k de E admet un supplémentaire universel F dans E si $E_i \oplus F = E$ pour tout $i \in I$.*

❶ *Étudier le cas où $E = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

❷ *Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se traite de même) et pour tout $i \in I$, $(e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i)$ désignera une base de E_i enfin, si $E^{d-k} = E \times \cdots \times E$ désigne le $d-k$ produit cartésien de E avec lui-même on définit $f_i : E^{d-k} \to \mathbb{R}$ par*

$$f_i : E^{d-k} \ni (v_1, \dots, v_{d-k}) \mapsto f_i(v_1, \dots, v_{d-k}) := \det(e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i, v_1, \dots, v_{d-k}) \in \mathbb{R}.$$

➪ *Montrer que $O_i = f_i^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est un ouvert dense de E^{d-k}.*

➪ *Conclure.*

❸

❶

❶ ➪ Par le théorème de la base incomplète O_i est non vide et c'est un ouvert (E^{n-k} est bien entendu muni de sa topologie usuelle d'espace vectoriel normé) vu l'évidente continuité des applications f_i.
Il reste à établir la densité. Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-k}) \in E^{n-k}$, pour $\mathbf{v} \in \mathscr{O}_i$ l'application

$$p_i(x) = f_i(x\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \det(e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i, xu_1 + v_1, \dots, xu_{n_k} + v_{d-k}), \quad x \in \mathbb{R},$$

est un polynôme en x non identiquement nul puisque $p_i(0) = f_i(\mathbf{v}) \neq 0$. Il existe donc $R > 0$ tel que $x \geq R$ implique $p_i(x) \neq 0$. Ainsi $x\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et par suite $\mathbf{u} + x^{-1}\mathbf{v}$ (car pour $x \in \mathbb{R}^\star$ on a $p_i(x) = x^n p_i(\mathbf{u} + x^{-1}\mathbf{v})$...) est dans $\mathscr{O}_i$ pour tout $x \geq R$. Mais

$$\|\mathbf{u} - (\mathbf{u} + x^{-1}\mathbf{v})\| = x^{-1}\|\mathbf{v}\| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Toute boule centrée en $\mathbf{u}$ rencontre donc $\mathscr{O}_i$ qui est bien un ouvert dense de E^{n-k}.
Pour achever la démonstration, le théorème de Baire assure que $\cap_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{O}_i$ est une partie dense de E^{n-k} et pour tout $(e_1, \dots, e_{n-k}) \in \cap_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{O}_i$ l'ensemble $F := \text{vect}\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$ convient.
❶

❶ ❑

Exercice 331 (Partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$) [15].

Déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

La fonction $t \mapsto t^{-2/3}$ est positive strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a donc pour tout $n \geq 2$

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{2/3}} < \frac{1}{n^{2/3}} < \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{2/3}}.$$

Soit

$$\int_2^{10^9} \frac{dt}{t^{2/3}} < \sum_{k=2}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} < \int_1^{10^9} \frac{dt}{t^{2/3}},$$

donc

$$3\left(\sqrt[3]{10^9+1} - \sqrt[3]{2}\right) < \sum_{k=2}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} < 3\left(\sqrt[3]{10^9} - 1\right) = 2997$$

et comme

$$3\left(\sqrt[3]{10^9+1} - \sqrt[3]{2}\right) > 3\left(\sqrt[3]{10^9} - \sqrt[3]{2}\right) \geq 2996$$

on en déduit (en rajoutant le terme correspondant à $n = 1$) que

$$2997 < \sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} < 2998.$$

La partie entière vaut donc 2997. ❑

Exercice 332 (Le saviez vous ?) [49], [34] *(1974-81).*

❶ *Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(N_x)_{x\in\mathbb{R}}$ de parties deux à deux distinctes de $\mathbb{N}$ qui soit totalement ordonnée pour l'inclusion.*
❷ *Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(N_x)_{x\in\mathbb{R}}$ de parties deux à deux distinctes de $\mathbb{N}$ dont l'intersection de deux quelconques éléments est finie.*

❶ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ une bijection et considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$ les ensembles de niveau $N_x := \{ n \in \mathbb{N} : f(n) < x\}$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ assure que $(x \neq y) \Rightarrow (N_x \neq N_y)$: la famille est bien constituée d'éléments deux à deux distincts de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et est non dénombrable. En outre par construction $(x \leq y) \Rightarrow (N_x \subset N_y)$: elle est donc bien totalement ordonnée pour l'inclusion.

❷ Énumérons les rationnels $\mathbb{Q} = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Maintenant, pour tout réel $x \in [0,1]$ fixons nous une suite de nombres rationnels deux à deux distincts qui converge vers x et désignons par N_x les indices de cette suite dans l'énumération précédente. Les ensembles N_x sont clairement des parties dénombrables de $\mathbb{N}$. En outre pour $x \neq y$ dans $[0,1]$ l'ensemble $N_x \cap N_y$ est fini puisque les suites correspondantes convergent vers des limites différentes. ❑

Exercice 333 (Analyse sur une ligne brisée)

On considère une ligne brisée dont les longueurs $L_1, L_2, \dots L_n, \dots$ des segments successifs $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ valent respectivement $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on suppose en outre que chaque segment fait avec le précédent un angle θ. Déterminer la distance et l'angle entre l'extrémité initiale et finale (lorsqu'elle existe...) de cette ligne brisée.

On se place dans le plan complexe et sans perdre de généralité supposons que le premier segment relie les points 0 et 1. Il est alors clair que pour $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi$) la ligne brisée va (par divergence de la série harmonique) décrire tout le demi axe $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) qui n'aura donc pas d'extrémité finale. Nous allons vérifier que ce sont les seules valeurs de θ qui font « diverger » la contruction.
Fixons $\theta \in [0, 2\pi[$, le second segment va relier les points 1 et $1 + \frac{e^{i\theta}}{2}$; le n-ième segment représente le complexe $\frac{e^{i(n-1)\theta}}{n}$ et par conséquent, lorsqu'il sera raccordé aux $n-1$ précédents son extrémité finale est $\sum_{k=1}^n \frac{e^{i(k-1)\theta}}{k}$.
Ainsi, à θ fixé, la ligne brisée aura une extrémité finale si, et seulement si la série

$$(\text{✘}) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i(k-1)\theta}}{k}$$

converge.

➪ Si $\theta \equiv 0(\pi)$ on retrouve la série harmonique, la ligne brisée n'a pas d'extrémité finale.

➪ Pour $\theta \not\equiv 0(\pi)$ écrivons $e^{i(k-1)\theta} \cdot \frac{1}{k} = a_k \cdot b_k$, alors

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} e^{i(k-1)\theta} \right| \leq \left| \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} < \infty.$$

Comme $b_k = 1/k$ décroit vers 0 la convergence de la série (✘) est assurée par le lemme d'Abel[14].

Il reste maintenant à évaluer la somme de la série, pour cela utilisons un autre théorème d'Abel[15] :

$$\text{Si} \quad \sum_{k\geq 1} c_k \text{ converge, alors} \quad \lim_{r\to 1_-} \sum_{k\geq 1} c_k r^k = \sum_{k\geq 1} c_k.$$

On peut donc écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i(k-1)\theta}}{k} = \lim_{r\to 1_-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(re^{ik\theta}\right)}{k} \cdot e^{-i\theta}$$

[14] Voir par exemple.....................
[15] Et cette fois-ci............

et poser $z = re^{i\theta}$ pour reconnaitre le développement en série entière de la valeur principale de $z \mapsto -\log(1-z)$[16] :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i(k-1)\theta}}{k} = \lim_{r \to 1_-} -e^{i\theta} \log(1 - re^{i\theta}) = -e^{i\theta} \log(1 - e^{i\theta})$$

ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i(k-1)\theta}}{k} &= -e^{i\theta} \log(1 - e^{i\theta}) \\ &= e^{i(\pi-\theta)} \log(2\sin(\theta/2) e^{i(\theta-\pi)/2}) \\ &= e^{i(\pi-\theta)} \left(\log(2\sin(\theta/2)) + i \cdot \frac{\theta - \pi}{2} \right)\end{aligned}$$

La distance entre les deux extrémités de la ligne brisée est donc égale à

$$\sqrt{\log^2(2\sin(\theta/2)) + \frac{(\theta-\pi)^2}{4}},$$

et l'angle

$$\pi - \theta + \arg\left(\log(2\sin(\theta/2)) + i \cdot \frac{\theta - \pi}{2} \right).$$

❏

🛈 **Remarque :** Pour montrer que

$$(✔) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = -\log(1 - e^{i\theta}) = \log(2\sin(\theta/2)) + i \cdot \frac{\pi - \theta}{2}$$

on peut aussi utiliser les séries de Fourier. En effet la série Fourier de la fonction 2π-périodique impaire égale à $\theta \mapsto (\pi-\theta)/2$ sur $[0, 2\pi]$ est $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin(k\theta)}{k}$, celle de $\theta \mapsto \log(2\sin(\theta/2))$ est $-\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(k\theta)}{k}$. Les deux applications étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$ elles y sont développables en série de Fourier, soit

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\log(2\sin(\theta/2)), \quad \sum_{k\geq 1} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

La relation d'Euler $e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ nous redonne alors (✔).

[16] $\log(z) = \ln(|z|) + i \cdot \arg(z),\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,\ -\pi < \arg(z) < \pi$ et $\log(1-z) = -\sum_{k\geq 1} z^k/k$ pour $|z| < 1$

Exercice 334 (La formule de Stirling via la loi de Poisson) [34], *2007-3.*

Soit X_λ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e.

$$p(X_\lambda = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

❶ *Calculer sa fonction caractéristique φ_{X_λ} et montrer que*

$$I_k := \frac{k^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\theta}-1-i\theta)}d\theta, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

❷ *En déduire la formule Stirling*

$$k! \simeq \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k}.$$

❶ On a

$$\varphi_{X_\lambda}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} p(X_\lambda = k)e^{ik\theta} = e^{\lambda(e^{i\theta}-1)}.$$

La convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ (par rapport à la variable θ) et donc sur $[-\pi, \pi]$ assure une intégration terme à terme pour en déduire que la série précédente est bien la série de Fourier de φ_{X_λ} :

$$p(X_\lambda = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{X_\lambda}(\theta)e^{-ik\theta}d\theta, \quad \forall\, \lambda > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

En particulier, $\lambda = k$ donne la formule désirée.

❷ Faisons le changement de variable $y = \theta\sqrt{k}$ dans I_k, il vient

$$\begin{aligned} I_k\sqrt{k} = \frac{k^{k+1/2}}{k!}e^{-k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi\sqrt{k}}^{\pi\sqrt{k}} \exp\left[k(e^{iy/\sqrt{k}} - 1 - iy/\sqrt{k})\right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\pi\sqrt{k},\pi\sqrt{k}]}(y) \exp\left[k(e^{iy/\sqrt{k}} - 1 - iy/\sqrt{k})\right] dy. \end{aligned}$$

Mais l'intégrande est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto e^{-t^2/2}$ lorsque $k \to \infty$ et on a la domination

$$\left|\exp\left[k(e^{iy/\sqrt{k}} - 1 - iy/\sqrt{k})\right]\right| = e^{k(\cos(y/\sqrt{k})-1)} = e^{-2k\sin^2(y/2\sqrt{k})} \leq e^{-2y^2/\pi^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

donc par convergence dominée

$$\lim_{k\to\infty} I_k\sqrt{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+1/2}}{k!}e^{-k} = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi},$$

et on retrouve bien la formule de Stirling. ❑

Exercice 335 (Preuve probabiliste du théorème d'approximation de Bernstein) [4], [35].

Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$, B_n désigne le n-ième polynôme de Bernstein associé à f, il est défini par

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

(avec la convention $0^0 = 1$). Soit, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et pour $x \in [0,1]$ une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoire indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre x. On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

❶ *Déterminer la moyenne* $\mathrm{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$.

❷ *Pour $\varepsilon > 0$ on pose*

$$\delta(\varepsilon) = \sup\left\{\, |f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \varepsilon \,\right\}.$$

Démontrer que

$$\sup_{x\in[0,1]} |\, B_n(f,x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$$

et en déduire que la suite $(B_n(f,\cdot))_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

❶ La suite $(X_n)_n$ étant une suite de variables aléatoire indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre x il est bien connu ([35]-1, proposition 3-15) que S_n suit une loi binomiale de $\mathscr{B}(n,x)$. Par le théorème du transfert ([35]-1, théorème 5-2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= B_n(f,x).
\end{aligned}$$

❷ Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}|B_n(f,x) - f(x)| &= \left|\mathrm{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] - f(x)\right| \\ &\leq \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\varepsilon\right)}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] + \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\varepsilon\right)}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] \\ &\leq \delta(\varepsilon)\cdot P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \varepsilon\right) + 2\|f\|_\infty \cdot P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right) \\ &\delta(\varepsilon) + 2\|f\|_\infty \cdot P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Alors, avec l'inégalité de Tchebichev[17] et sachant que[18] $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,x)$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(S_n/n)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\varepsilon^2},$$

et ceci pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tous $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f,x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\varepsilon^2}.$$

soit

$$\limsup_{n\to\infty} \|B_n - f\|_\infty \leq \delta(\varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

f étant uniformément continue sur $[0,1]$: $\lim_n \delta(\varepsilon) = 0$ i.e.

$$\limsup_{n\to\infty} \|B_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|B_n - f\|_\infty = 0.$$

C.Q.F.D. ❑

---

[17] $P(|X - E(X)| > t) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$, $X \in L^2$, voir [4], pp 59, ou bien [35] pp. 133.
[18] $E(S_n) = nx,\ Var(S_n) = nx(1-x)$...

Exercice 336 (Équicontinuité)

❶ *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $f_n(x) = \sin(nx)$ *; étudier l'équicontinuité sur* $[0,1]$ *de la suite de fonctions* $(f_n)_n$.

❷ *Soient* X *un espace métrique,* $(f_n)_n \subset \mathscr{C}(X)$*. Démontrer que si la suite* $(f_n)_n$ *est équicontinue en un point* $x \in X$ *alors, pour toute suite* $(x_n)_n$ *dans* X *convergente vers* x *la suite* $(f_n(x_n) - f_n(x))_n$ *converge vers* 0*. En déduire que la suite de terme général* $f_n(x) = \sin(nx)$ *n'est équicontinue en aucun point* $x \in \mathbb{R}$.

❸ *On munit l'espace* $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *des fonctions continues et bornées sur* $\mathbb{R}_+$ *de la norme « sup » et soit dans* $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *la suite de terme général*

$$f_n(x) = \sin\sqrt{x + 4\pi^2 n^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \ n \in \mathbb{N}.$$

➪ *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est uniformément équicontinue sur* $\mathbb{R}_+$.

➪ *Montrer que* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}_+$ *vers* $f \equiv 0$ *et que* $f_n(\mathbb{R}_)$ *est relativement compact pour tout entier* n.

➪ *Supposons* $(f_n)_n$ *relativement compacte dans* $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$*, montrer qu'elle converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$*. En déduire que* $(f_n)_n$ *n'est pas relativement compacte dans* $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 337 (L'équation $\det(A+X) = \det(X), \ X \in M_n(\mathbb{R})$**.)**
[10] *2001/2002.*

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$\det(A+X) = \det(X), \quad \forall X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A *est la matrice nulle. En déduire que si* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifient* $\forall X \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \det(A+X) = \det(B+X)$*, alors* $A = B$.

➪ Soit $r := \text{rang}(A)$, on sait qu'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Posons $X = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} Q$, pour un tel choix

$$\det(X) = \det(A+X) = \det(PI_nQ) = \det(P)\det(Q) \neq 0$$

qui exige $n = n - r$ soit $r = \text{rang}(A) = 0$ et A est bien la matrice nulle.

➪ Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $\forall X \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \det(A+X) = \det(B+X)$ posons $Y = B + X$, alors Y décrit $M_n(\mathbb{R})$ et l'équation s'écrit $\det(A - B + Y) = \det(Y)$, $Y \in M_n(\mathbb{R})$, soit $A - B = 0$ vu le premier point.

🛈 **Remarque :** Pour montrer que $A = B$ le calcul différentiel fourni une solution plus élaborée mais trés élégante : remplaçons X par $t^{-1}X$ et multiplions par t^n, on obtient

$$\forall\, X \in M_n(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}\ :\ \det(X + tA) = \det(X + tB).$$

Dérivons par rapport à t et faisons $t = 0$, comme

$$\frac{d}{dt}\left(\det(X + tA)\right)_{t=0} = \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{com}\, X)A\right),$$

le formule précédente nous donne alors

$$\forall\, X \in M_n(\mathbb{R}),\ :\quad \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{com}\, X)A\right) = \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{com}\, X)B\right)$$

cette formule devient si X est inversible (car bien sûr $X^{-1}\det(X) ={}^t (\mathrm{com}\, X)$...) : $\forall\, X \in GL_n(\mathbb{R}),\ :\ \mathrm{tr}\,(\, X^{-1}A) = \mathrm{tr}\,(\, X^{-1}B)$ soit

$$\forall\, X \in GL_n(\mathbb{R}),\ :\quad \mathrm{tr}\,(\, X(A - B)) = 0,$$

puis, par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{C})$:

$$\forall\, X \in M_n(\mathbb{R}),\ :\quad \mathrm{tr}\,(\, X(A - B)) = 0,$$

qui implique $A - B = 0$ (en effet $\mathrm{tr}\,(\, X(A - B)) = \langle X, A - B\rangle$ où $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\,(\,{}^tXY))$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$...). ❑

Exercice 338 (Isométries rationnellles) [19]

➊ *Montrer qu'une tranformation T du plan dans lui même préservant les distances rationnelles est une isométrie.*

➋ *Montrer que le résultat correspondant sur la droite réelle est faux.*

➊

➋ ❑

Exercice 339 (Une fonction continue nulle part dérivable) [5], [24].

❶ *(Préliminaire) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable un point $a \in I$ montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} \right| < \varepsilon$$

pour tous $t_1 < a < t_2,\ u_1 < a < u_2$ dans $]a - \delta, a + \delta[$.

❷ *Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = dist(x, \mathbb{Z})$; pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $G_(x) = dist(2^n x, \mathbb{Z})$ puis $H(x) = \sum_{n \geq 0} 2^{-n} G_n(x)$.*

➪ *Montrer que $H \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et que la réunion des points de non dérivabilité des fonctions G_n est dense dans $\mathbb{R}$.*

Soient $a \in \mathbb{R},\ \delta > 0$.

➪ *Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$a - \delta < x_1 = \frac{r}{2^k} < x_2 = \frac{r+1}{2^k} < a + \delta$$

et étudier la quantité

$$\frac{H(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{H(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(où $\xi = (x_1 + x_2)/2$) pour en déduire la non dérivabilité de H au point a.

❶

❷ ➪

➪ ❏

Exercice 340 (Restes et sommes partielles de deux séries) [24].

Soient pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ c_n = \frac{(-1)^n}{n},\ d_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

❶ *Montrer que $a_n \sim_n b_n$, que les deux séries $\sum_n a_n,\ \sum_n b_n$ divergent mais que leurs sommes partielles ne sont pas équivalentes.*

❷ *Montrer que $c_n \sim_n d_n$, que les deux séries $\sum_n c_n,\ \sum_n d_n$ convergent mais que leurs restes ne sont pas équivalents.*

❶ Inutile de s'attarder sur la divergences des deux séries $\sum_n a_n,\ \sum_n b_n$ et l'équivalence de leur termes généraux qui sont élémentaires ; posons $A_n = \sum_{k=1}^n a_n,\ B_n = \sum_{k=1}^n b_n$ alors

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0(2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad , \quad B_n = A_n + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

$(A_n)_n$ est donc bornée, $(B_n)_n$ tends vers $+\infty$: elles ne peuvent être équivalentes.

❷ Les séries $\sum_n c_n$, $\sum_n d_n$ sont convergentes à termes généraux équivalents. Posons

$$C_n = \sum_{k\geq n} c_n,\ \ D_n = \sum_{k\geq n} d_n$$

$$e_n = c_{2n} + c_{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

Des théorèmes de comparaisons séries/intégrales il vient

$$\frac{1}{4(n+1)} = \int_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{4t^2} \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{4k^2} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{4t^2} = \frac{1}{4n}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} = \int_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

soit

$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{4k^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{4n},\quad \sum_{k\geq n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

et comme $e_n \sim 1/4n^2$, le théorème sur l'équivalence des restes des séries convergentes à termes positifs assure que

$$\sum_{k\geq n} e_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{4n}.$$

Mais, pour tout $n \geq 1$,

$$C_{2n+1} = \sum_{k\geq 2n} = \sum_{k\geq n} e_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$$

et comme

$$C_{2n} = -\frac{1}{2n+1} + C_{2n+1}$$

implique

$$\frac{C_{2n}}{C_{2n+1}} = 1 - \frac{1}{C_{2n+1}(2n+1)},$$

soit

$$|C_{2n}| \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$$

et finalement

$$|C_n| \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

De l'autre coté, $d_n = c_n + \frac{1}{n\sqrt{n}}$ donne

$$D_n = C_n + \sum_{k\geq n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n} + \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

i.e. $C_n = o(D_n)$. ❏

🛈 **Remarque :** La positivité est donc essentielle, les régles sont les suivantes :

– Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de nombres réels, si $a_n > 0$ à partir d'un certain rang, si la série $\sum_n a_n$ diverge et si $b_n \sim a_n$, alors leurs sommes partielles sont équivalentes.

– Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de nombres réels, si $a_n > 0$ à partir d'un certain rang, si la série $\sum_n a_n$ converge et si $b_n \sim a_n$, alors leurs suites des restes sont équivalentes.

Exercice 341 (Géométrie) [19]
Soit $HOMF$ un rectangle avec $HO = 11$, $OM = 5$. Soit ABC un triangle tel que : H est à l'intersection des hauteurs, O est le centre du cercle circonscrit, M est le milieu de BC et F est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer la longueur du segment BC.

➪ **Solution 1 :** On se fixe un repère où

$$O = (0,0),\ H = (-11,0),\ F = (-11,-5)\ \text{ et }\ M = (0,-5).$$

Comme B et C sont équidistants de M et O il existe $x > 0$ tel que

$$C = (x,-5)\ \text{ et }\ B = (-x,5),$$

il existe aussi $y \in \mathbb{R}$ tel que $A = (-11, y)$.
La hauteur issue de B passant par H, sa pente vaut $5/(x-11)$ et comme elle est perpendiculaire à AC qui admet comme pente $-(y+5)/(x+11)$ leur produit vaut -1, soit

$$5(y+5) = (x-11)(x+11). \tag{1}$$

D'autre part, A et B sont équidistants de 0, donc

$$y^2 + 11^2 = x^2 + 5^2. \tag{2}$$

(1) et (2) impliquent $y^2 - 5y - 50 = 0$ soit $y = 10$ ou $y = -5$ mais cette dernière possibilité est exclue ($y = -5$ implique $A = F$...) donc $y = 10$ et $BC = 2x = 28$.

➪ **Solution 2 :** Le centre de gravité G du triangle est colinéaire avec H et O (c'est la droite d'Euler) et $OG = OH/3$ par conséquent $AF = 3OM = 15$. Il est facile de vérifier (les triangles HBF et CAF sont semblables) que

$$\angle(HBF) = \angle(CAF) = \pi - 2\angle(C).$$

Donc

$$\frac{BF}{FH} = \frac{AF}{FC}$$

soit

$$BF \cdot FC = FH \cdot AF = 5 \cdot 15 = 75.$$

Maintenant

$$BC^2 = (BF + FC)^2 = (FC - BF)^2 + 4BF \cdot FC$$

et comme M est le milieu de BC

$$FC - BF = (FM + MC) - (BM - FM) = 2FM = 2HO = 22,$$

donc

$$BC = \sqrt{(FC - BF)^2 + 4BF \cdot FC} = \sqrt{22^2 + 4 \cdot 75} = \sqrt{784} = 28.$$

➪ **Solution 3 :** On choisit à nouveau un repère centré en O. O étant le centre du cercle circonscrit on a[19] $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ donc

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{HA}}{2}.$$

soit $AH = 2OM = 10$.
Maintenant $OC = OA = \sqrt{AH^2 + HO^2} = \sqrt{221}$ et finalement

$$BC = 2MC = 2\sqrt{OC^2 - OM^2} = 2\sqrt{221 - 25} = 28.$$

❑

Exercice 342 (L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange)
Pour $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$ on note

$$\overline{x_a} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ \overline{x_g} = (x_1 \dots x_n)^{1/n},\ M = \max_{1\leq i\leq n} x_i,\ m = \min_{1\leq i\leq n} x_i,\ \sigma^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2.$$

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction log *et $\overline{x}, x_i \in [m, M]$ pour en déduire*

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Préciser le cas d'égalité.

Appliquons[20] donc à la fonction $x \mapsto \log(x)$ la formule de Taylor-Lagrange en les points[21] $\overline{x_a}, x_i \in [m, M],\ (1 \leq i \leq n)$:

$$\log(x_i) = \log(\overline{x_a}) + \frac{x_i - \overline{x_a}}{\overline{x_a}} - \frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{2\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2},$$

sommons pour $1 \leq i \leq n$ ces égalités

$$\log(x_1 \dots x_n) = n\log(\overline{x_a}) + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{2\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2}$$

que l'on peut encore écrire

$$\log\left(\frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $m \leq \overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a}) \leq M,\ (1 \leq i \leq n)$ donne

$$\frac{\sigma^2}{2M} \leq \log\left(\frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}}\right) \leq \frac{\sigma^2}{2m}$$

[19] Vous devez le savoir, sinon exercice...
[20] M.Perisastry & V.N.Murty *Two Years College Mathematics Journal,* 13-2 (1982).
[21] On exclut le cas trivial où tous les x_i sont nuls ainsi que, quitte à diminuer n, celui où certains x_i sont nuls.

où encore

$$(\text{✘}) \qquad \exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Comme $1 \leq \exp(\sigma^2/2M)$ on retrouve la forme classique de l'inégalité inégalité Arithmético-Géométrique : $\overline{x_g} \leq \overline{x_a}$; en outre (✘) assure que $\overline{x_g} = \overline{x_a}$ si et seulement si $\sigma = 0$ i.e. si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$. ❏

Exercice 343 (Générer des permutation avec des urnes)

Dans une urne on met une boule numérotée 1*, deux boules numérotées* 2 *et ainsi de suite jusqu'à* n *boules numérotées* n*. On tire une à une les boules avec remise jusqu'a obtention des* n *chiffres* $1, 2, \cdots, n$*. À un tel tirage on associe la permutation de* $\{1, 2, \dots, n\}$ *que l'on botient si on supprime les boules associées à un numéro deja sorti (par exemple si* $n = 4$ *le tirage* 4434342241 *donne la permutation* 4321*). Soit* X_n *la variable aléatoire « position de* n *dans la permutation obtenue ». Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{n} = 1 - \log(2).$$

Soit Y_i $(1 \leq i \leq n-1)$ la variable aléatoire définie par

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si une balle marquée i est choisie avant une marquée } n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$X_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} P(Y_i = 1) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n+i}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \frac{E(X_n)}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n+i} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i/n}{1+i/n} - \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers l'infini et reconnaitre dans le second terme une somme de Riemann :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{n} = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = 1 - \log(2).$$

❑

Exercice 344 (Irrationalité de $\sqrt{2}$) [32]

Donner plusieurs démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

➪ Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{2} = p/q$, et soit q le plus petit de ces tels dénominateurs. Alors $2q^2 = p^2$, p^2 et par conséquent p est pair : $p = 2p_1$. De là, $2q^2 = 4p_1^2$ soit $q^2 = 2p_1^2$ et q est donc aussi pair. Si $q = 2q_1$ on aura $\sqrt{2} = p/q = p_1/q_1$ et $q_1 < q$ ce qui contredit le choix de q.

➪ Supposons à nouveau qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{2} = p/q$, et soit q le plus petit de ces tels dénominateurs. Alors

$$\frac{2q-p}{p-q} = \frac{2-(p/q)}{(p/q)-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2},$$

comme $2p - q$ et $p - q$ sont des entiers et $0 < p - q < q$ on a à nouveau une contradiction.

➪ Cette démonstration utilise le théorème[22] fondamental de l'arithmétique (tout entier $n > 1$ se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs prés) en un produit de nombres premiers). Si $\sqrt{2} = p/q$, alors $2q^2 = p^2$. Via le théorème fondamental de l'arithmétique, dans la décomposition de p^2 en facteurs premiers tout nombre premier (et 2 en particulier) doit apparaitre élevé à une puissance paire. D'un autre coté, et pour les mêmes raisons, l'exposant de 2 dans la décomposition de $2q^2$ en facteurs premiers sera impair. L'unicité de la décomposition fourni alors la contradiction.

➪ Posons $\varepsilon_i = (\sqrt{2}-1)^i$. On a $0 < \varepsilon_i < 2^{-i}$ pour tout entier i et il est aussi facile de vérifier (par récurrence sur i ou avec le binôme de Newton) que l'on peut écrire $\varepsilon_i = a_i + b_i\sqrt{2}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Si $\sqrt{2} = p/q$, alors

$$\varepsilon_i = a_i + b_i \cdot \frac{p}{q} = \frac{qa_i + pb_i}{q} = \frac{A_i}{q}$$

où A_i est un entier. Mais $\varepsilon_i > 0$ pour tout i implique $A_i \geq 1$ pour tout i et par suite $\varepsilon_i \geq 1/q$ pour tout entier i ce qui est absurde car $2^{-i} \geq \varepsilon_i > 0 \;\Rightarrow\; \lim_i \varepsilon_i = 0$ (ou bien en remarquant que $2^{-i} \geq \varepsilon_i \geq 1/q,\ \forall\, i$ est incompatible avec l'inégalité classique $2^i > 2^q > q,\ \forall\, i > q$...).

➪ L'irrationalité de $\sqrt{2}$ est un cas particulier du résultat suivant : « *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationel* ». Pour établir ce dernier point, on peut par exemple reprendre la seconde preuve : posons $k := [\sqrt{n}]$ (partie entière) si $\sqrt{n}$ n'est pas un entier, supposons

[22] Voir [23] Théorème 2, page 4.

le rationel i.e. $\sqrt{n} = p/q$ où q est le plus petit de ces tels dénominateurs. Alors comme plus haut

$$\frac{nq-kp}{p-kq} = \frac{n-k\dfrac{p}{q}}{\dfrac{p}{q}-k} = \frac{n-k\sqrt{n}}{\sqrt{n}-k} = \sqrt{n}$$

avec $0 < p-kq < q$ (car $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ implique $\sqrt{n}-1 = \frac{p}{q}-1 < k < \frac{p}{q} = \sqrt{n}...$) ce qui est contraire au choix de q, ainsi $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
On pourrai aussi raisonner comme dans la quatrième preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$: soit $k := [\sqrt{n}]$ alors $\varepsilon_i := (\sqrt{n}-k)^i$ est de la forme $a_i + b_i\sqrt{n}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Si $\sqrt{n}$ n'est pas un entier alors $\lim_i \varepsilon_i = 0$ ce qui donne la contradiction comme pour $\sqrt{2}$. La troisième preuve marche aussi mais la première ne subsiste que pour n pair non multiple de 4. ❏

Exercice 345 ($\forall F$ fermé dans $\mathbb{R}$, $\exists\ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ F = f^{-1}(0)$.)

Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, construire une fonction $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^\star)$ telle que $F = f^{-1}(0)$. Commencer par traiter le cas où $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ est un intervalle.

➪ Lorsque $\Omega =]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R}$ on peut choisir

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-(x-a)^{-2}(x-b)^{-2}\right), & x \in]a,b[\\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si Ω est non borné, par exemple $\Omega =]a, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-(x-a)^{-2}\right), & x \in]a,+\infty[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions sont classiquement $\mathscr{C}^\infty$ et vérifient les propriétés recquises. Il est important pour la suite de bien observer que les dérivées à tout ordre de ces fonctions sont bornées sur $\mathbb{R}$.

➪ Pour un fermé arbitraire F de $\mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}\setminus F$ est réunion au plus dénombrable[23] d'intervalles deux à deux disjoints

$$\Omega = \bigcup_n]a_n, b_n[.$$

Si l'on désigne par f_n la fonction associée à $]a_n, b_n[$ dans la première étape, posons pour tout entier n

$$M_n = \max_{0\leq k\leq n} \sup\left\{|f_n^{(k)}(x)|,\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Alors le théorème de Weierstrass de dérivation des séries de fonctions assure que la formule

$$f = \sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{n^2 M_n}$$

[23] Ω est la réunion disjointe de ses composantes connexes qui sont des intervalles et sont au plus dénombrable car $\mathbb{R}$ admet une base dénombrable de voisinages (les intervalles à extrémités rationelles).

définit une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui possède les propriétés désirées. ❑

Remarque : Avec le même esprit, on peut étendre ce résultat à $\mathbb{R}^d$:

1) Soit $B \subset \mathbb{R}^d$. Montrer qui existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ positive telle que $f^{-1}(0) = \mathbb{R}^d \setminus B$.

2) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(g_n)_n$ une suite dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer qu'il existe une suite $(\mu_n)_n$ de réels strictement positifs telle que la série $\sum_n \mu_n g_n$ converge dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3) Soit $E \subset \Omega$ un fermé de $\mathbb{R}^d$. En observant que $\Omega \setminus E$ est réunion dénombrable de boules ouvertes, montrer qu'il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ positive, telles que $E = f^{(-1)}(0)$.

4) Si E et F sont deux fermés disjoints dans Ω, montrer qu'il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq f \leq 1,\ E = f^{(-1)}(0),\ F = f^{-1}(1)$.

Exercice 346 (dist$(a, \ker(T))$ où T est une forme linéaire continue.) *Soient E un espace vectoriel normé, $T \in E'$ une forme linéaire continue non identiquement nulle sur E.*

❶ *Montrer que pour tout $a \in E \setminus \ker(T)$, $|||\ T\ ||| = \dfrac{|T(a)|}{dist(a, \ker(T))}$.*

❷ *Dans l'espace de Banach $c_0(\mathbb{N})$ des suites réelles convergentes vers 0 (muni de la norme « sup ») on considère*

❶ Pour $u \in \ker(T)$ on a

$$|T(a)| = |T(a-u)| \leq |||\ T\ ||| \cdot \|a-u\|,$$

par conséquent, en passant à la borne inférieure pour $u \in \ker(T)$:

$$\|T(a)\| \leq |||\ T\ ||| \cdot \mathrm{dist}(a, \ker(T)),$$

soit

$$|||\ T\ ||| \leq \frac{|T(a)|}{\mathrm{dist}(a, \ker(T))}$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, avec la définiton de $|||\ T\ |||$, il suffit de montrer que pour tout $x \in E$:

$$|T(x)| \leq \frac{|T(a)|}{\mathrm{dist}(a, \ker(T))} \cdot \|x\|.$$

Si $T(x) = 0$ il n'y a rien à démontrer, on peut donc supposer $T(x) \neq 0$ et l'inégalité étant homogène en x on peut, quitte à remplacer x par $\frac{T(a)}{T(x)}x$ supposer que $T(x) = T(a)$. Alors $x - a \in \ker(T)$ qui implique $\mathrm{dist}(x, \ker(T)) = \mathrm{dist}(a, \ker(T))$ (l'écrire) et finalement comme $\|x\| \geq \mathrm{dist}(x, \ker(T))$:

$$|T(x)| \leq |T(x)| \cdot \frac{\|x\|}{\mathrm{dist}(x, \ker(T))} = |T(a)| \cdot \frac{\|x\|}{\mathrm{dist}(a, \ker(T))}$$

CQFD. ❑

Exercice 347 ($\forall\, F$ fermé dans $\mathbb{R}$, $\exists\ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ F = f^{-1}(0)$. (part. 3))

Le but de cet exercice est la construction d'une fonction infiniment dérivable non identiquement nulle et nulle en dehors d'une intervalle fermé.

Étant donné $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle support de f le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ tel que f soit nulle sur son complémentaire. Si le support est borné, on dit que f est à support compact. Soit α un réel strictement positif, on définit la fonction H_α sur $\mathbb{R}$ par

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} 1/\alpha, & si\ \ x \in]0, \alpha[, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la série $\sum_n a_n$ converge, on note a sa somme. Pour $m \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathscr{C}^m_{0,a}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^m$ sur $\mathbb{R}$ à support inclu dans $[0, a]$.

1) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou possédant un nombre fini de discontinuités et à support compact. On définit la fonction $f * g$ pour $x \in \mathbb{R}$ pa r

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt.$$

Montrer que $f * g$ est une fonction à support compact et plus précidément si pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, f (resp. g) est à support compact dans $[0, \alpha]$ (resp. $[0, \beta]$), alors $f * g$ est à support compact dans $[0, \alpha + \beta]$. Donner également une expression simple de

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)dx.$$

2) On définit la fonction u_1 par

$$u_1 = H_{a_0} * H_{a_1}.$$

Déterminer explicitement u_1 et en déduire m_1 le plus grand entier tel que u_1 appartienne à $\mathscr{C}^m_{0,a}$.

3) On définit maintenant la fonction u_k par

$$u_k = u_{k-1} * H_{a_k}.$$

Déterminer m_k le plus grand entier tel que u_k appartienne à $\mathscr{C}^m_{0,a}$.

4) Montrer que pour $k \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $j \leq m_k$,

$$|u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \dots a_j}.$$

5) Montrer que pour tout couple d'entiers k, m supérieurs ou égaux à 2, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|u_{k+m}(x) - u_m(x)| \leq 2 \cdot \frac{a_{m+1} + \cdots + a_{m+k}}{a_0 a_1}.$$

6) Montrer que, quand k tends vers $+\infty$, la suite $(u_k)_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u appartenant à $\mathscr{C}^\infty_{0,a}$. Montrer également que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1.$$

Exercice 348 (e est transcendant)

On suppose

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ (avec $a_n \neq 0$) tels que $a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$.

Exercice 349 () $xxxxxxxxx$

Exercice 350 () $xxxxxxxxx$

Exercice 351 () $xxxxxxxxx$

Exercice 352 () $xxxxxxxxx$

Exercice 353 () $xxxxxxxxx$

Exercice 354 () $xxxxxxxxx$

Exercice 355 () $xxxxxxxxx$

Exercice 356 () $xxxxxxxxx$

Exercice 357 () $xxxxxxxxx$

Bibliographie

[1] M. Aigner and M. Ziegler. *Proofs from the Book*. Springer, 1998.

[2] E. Amar and E.Matheron. *Analyse Complexe*. Cassini, 2004.

[3] D. Azé., G. Constans, and J.B. Hiriart-Urruty. *Exercices de Calcul Différentiel*. Dunod, 2004.

[4] P. Barbe and M. Ledoux. *Probabilité*. EDP sciences, 2007.

[5] R.P. Boas. *A primer of real functions*, volume 13 of *The Carus Mathematical Monograph*. A.M.S., 1981.

[6] D.D. Bonar and M.J. Khoury. *Real Infinite Series*. Classroom Ressource Materials. M.A.A., 2006.

[7] B.R.Gelbaum and J.M.Olmsted. *Counterexamples in analysis*. Dover, 2003.

[8] N.N. Chentzov, D.O. Shklarsky, and I.M. Yaglom. *The USSR Olympiad Problem Book*. Dover, 1993.

[9] Louis Comtet. *Analyse Combinatoire, T. 2*, volume 13 of *Collection sup*. P.U.F., 1970.

[10] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http://www.rms-math.com/.

[11] P. Ney de Souza and J.N. Silva. *Berkeley Problems in Mathematics*. Problem Books in Mathematics. Springer, 2000.

[12] C. Deschamp. and A. Warusfel. *Mathématiques, cours et exercices corrigés (deux tomes)*. Dunod, 2001.

[13] J. Edward and S.Klamkin W.O.J Moser J.Barbeau, S. Murray. *Five Hundred Mathematical Challenges*. M.A.A., 1995.

[14] P. Eymard and J.P. Lafon. *Autour du Nombre* π. Hermann, 1999.

[15] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. *Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1*. Cassini, 2001.

[16] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. *Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : analyse 1*. Cassini, 2001.

[17] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. *Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : analyse 2*. Cassini, 2001.

[18] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. *Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 2*. Cassini, 2006.

[19] A.M. Gleason, R.E. Greenwood, and L.M. Kelly. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions 1938-1964*. MAA Problems Books. M.A.A., 1980.

[20] C. Grunspan and E. Lanzmann. *L'oral de mathématiques aux concours : Algèbre*. Vuibert, 1994.

[21] P.R. Halmos. *Problems for Mathematicians Young and Old*, volume 12 of *Dolciani Mathematical Expositions*. MAA, 1991. Il existe maintenant également une vertion française « Problèmes pour mathématiciens, petits et grands » aux éditions Cassini (2000).

[22] P.R. Halmos. *Linear Algebra Problem Book*, volume 16 of *Dolciani Mathematical Expositions*. MAA, 1995.

[23] G.H. Hardy and E.M. Wright. *Introduction à la Théorie des Nombres*. Vuibert-Springer, 2007. *C'est la traduction francaise du très fameux « An Introduction to the Theory of Numbers » (Oxford University Press) 1974.*

[24] B. Hauchecorne. *Les Contre-exemples en Mathématiques*. Ellipses, seconde édition 2007.

[25] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis : Continuity and Differentiation*, volume 2 of *Student Mathematical Library*. AMS, 2001.

[26] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series*, volume 1 of *Student Mathematical Library*. AMS, 2001.

[27] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis : Integration*, volume 3 of *Student Mathematical Library*. AMS, 2003.

[28] K.S.Kedlaya, B.Poonen, and R.Vakil. *The William Lowell Putnam competition 1985-2000*. MAA Problem Books. M.A.A., 2002.

[29] E. Leichtnam. *Exercices corrigés de Mathématiques(X, E.N.S.) : Analyse*. Ellipses, 1999.

[30] Eric Leichtnam. *Exercices corrigés de Mathématiques (X, E.N.S.) : Algèbre et Geométrie*. Ellipses, 1999.

[31] Gérard Letac. *Problèmes de Probabilité*, volume 6 of *Collection sup – le mathématicien*. P.u.f. edition, 1970.

[32] M.Laczkovoch. *Conjecture and Proof*. Classroom Ressource Material. M.A.A., 2007.

[33] Jean-Marie Monier. Multiples ouvrages aux éditions Dunod.

[34] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.

[35] J.Y Ouvrad. *Probabilités*, volume 1 et 2. Cassini, 1998.

[36] G. Polya and G. Szegö. *Problems and Theorems in Analysis*, volume 1 & 2. Springer, 19 ? ? edition, 2004.

[37] H. Queffélec and C. Zuily. *Éléments d'Analyse, Agrégation de Mathématiques.* Dunod, 2002.

[38] J.E. Rombaldi. *Analyse matricielle, Cours et exercices résolus.* EDP sciences, 1999.

[39] J.E. Rombaldi. *Thèmes pour l'agrégation de Mathématiques.* EDP sciences, 1999.

[40] J.E. Rombaldi. .... EDP sciences, 2004.

[41] Francois Rouvière. *Petit guide de Calcul Différentiel.* Cassini, 1999.

[42] Y.U. Shashkin. *Fixed Points*, volume 2 of *Mathematical World.* A.M.S., 1990.

[43] J.M. Steele. *The Cauchy-Schwarz Master Class.* MAA Problem Books Series. M.A.A. & Cambridge University Press, 2004.

[44] P. Tauvel. *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre 2.* Masson, 1994.

[45] P. Tauvel. *Exercices d'Algèbre Linéaire.* Dunod, 2004.

[46] Claude Wagschall. *Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Hermann, 1995.

[47] Claude Wagschall. *Dérivation, Intégration.* Hermann, 2003.

[48] Claude Wagschall. *Fonctions holomorphes, équations différentielles.* Hermann, 2003.

[49] G.L. Wize and E.B. Hall. *Couterexamples in Probability and Real Analysis.* Oxford University Press, 1993.

Index