LE RAYON DE BOHR D'UNE SÉRIE ENTIÈRE EN UNE OU PLUSIEURS VARIABLES

HERVÉ CARRIEU, ETIENNE FIEUX, PATRICE LASSÈRE ET FRÉDÉRIC RODRIGUEZ

1. LE THÉORÈME DE BOHR EN UNE VARIABLE

En 1914, G. H. Hardy présente aux Proceedings de la London Mathematical Society l'étonnant résultat suivant du mathématicien Harald Bohr[1]:

Théorème de Bohr [Bo] **:** *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à* 1 *vérifiant*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| < 1 \quad \textit{pour tout} \ \ z \in D(0,1),$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < 1 \quad \textit{pour tout}\ z \in D(0,1/3).$$

($D(0,r)$ *désigne le disque ouvert de centre l'origine et de rayon* $r > 0$*). En outre, la constante* $1/3$ *est optimale.*

En fait, Bohr ne prouve ce théorème qu'avec la constante $1/6$ et l'énoncé dans son état final bénéficie des contributions successives de M. Riesz, I. Schur et F. W. Wiener et c'est celle de Wiener[2] qui est présentée dans cet article. La constante optimale $1/3$, associée au disque unité dans $\mathbb{C}$, est appelée **rayon de Bohr** ; il s'agit du rayon de Bohr en une dimension et nous verrons dans la troisième partie de cette note des extensions en dimensions supérieures de cette notion.

La démonstration repose sur les

Inégalités de Carathéodory : *Si* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *possède un rayon de convergence supérieur ou égal à* 1 *et si* $\Re e\big(g(z)\big) > 0$, $\forall z \in D(0,1)$*, alors*

$$\forall\, n \geq 1, \qquad |a_n| \leq 2\ \Re e\big(a_0\big).$$

Preuve : Par convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, on a pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in\,]0,1[$:

$$(\bigstar) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

Date: February 2, 2004.

[1]À chacun son rayon !! On ne le confondra pas avec son frère, le célèbre atomiste Niels Bohr, prix Nobel de Physique et à qui l'on doit notamment la notion de rayon de Bohr d'un atome. Pour la petite histoire, Harald Bohr (1887-1951) a aussi participé aux jeux olympiques de 1908 de Londres au sein de l'équipe danoise de football, médaille d'argent ; auteur d'un but en quarts de finale, il a également à son palmarès un historique 17 à 1 inscrit au livre des records et établi aux dépens ... de l'équipe de France ! L'aura de son frère à quelque peu éclipsé la qualité de ses travaux mathématiques et on pourra consulter Boas R.P. *The football player and the infinite series.* (Notices. Amer. Math. Soc. 144(11), (1997), pp.1430-1435) pour une présentation de ce mathématicien et de ses principaux résultats. En particulier, les lecteurs se rappelleront sa caractérisation (avec Mollerup) de la fonction Gamma via la Log-convexité (voir A. Chambert-Loir & S. Fermigier *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Analyse 2*, Masson (1995), exercice 16-5, page 53.).

[2]Harald P. Boas and Dimitry Khavinson, *Vita: Friedrich Wilhelm Wiener*, Mathematical Intelligencer 22 (2000), no.2, 73-75.

et par suite, **si $\mathbf{n \geq 1}$** :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \big(g(re^{i\theta}) + \overline{g(re^{i\theta})}\big)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} 2\Re\mathrm{e}\big(g(re^{i\theta})\big)e^{-in\theta}d\theta, \quad \forall\ 0 < r < 1, \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

où la seconde égalité résulte de la normale convergence de la série $g(re^{i\theta}) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta}$ sur $[0, 2\pi]$ combinée à l'orthogonalité de la famille $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2([0, 2\pi])$. La partie réelle de g étant positive sur $D(0, 1)$, on a pour tout $r \in\ ]0, 1[$:

$$\begin{aligned} |a_n r^n| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\big|\Re\mathrm{e}\big(g(re^{i\theta})\big)e^{-in\theta}\big|d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,\Re\mathrm{e}\big(g(re^{i\theta})\big)d\theta \\ &= 2\,\Re\mathrm{e}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta\Big) \\ &= 2\,\Re\mathrm{e}(a_0) \end{aligned} \qquad \text{vu} \quad (\bigstar)$$

d'où le résultat en faisant tendre r vers 1. □

On peut à présent conclure :

Preuve du théorème de Bohr :

• Quitte à considérer $e^{i\theta}f$ à la place de f on peut supposer que $f(0) = a_0 > 0$. Puisque $|z| < 1 \implies |f(z)| < 1$, la fonction $g(z) = 1 - f(z)$ développable en serie entière sur le disque unité vérifie

$$\Re\mathrm{e}\big(g(z)\big) > 0 \quad \text{sur} \quad D(0, 1)$$

et on peut lui appliquer les inégalités de Carathéodory :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad |a_n| \leq 2(1 - a_0),$$

soit, pour $|z| < \frac{1}{3}$

$$\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| < a_0 + \sum_{n\geq 1} 2(1 - a_0)\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = 1.$$

• Il reste à établir que la constante $1/3$ est optimale. Et pour cela, si $0 < a < 1$ il est bien connu que la fonction $f_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - az}$ est une bijection développable en série entière du disque unité sur lui-même et un petit calcul nous donne

$$f_a(z) = -a + \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{a} - a)a^n z^n := \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

et

$$\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| = a + \frac{1 - a^2}{a}\frac{a|z|}{1 - a|z|} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = \frac{1}{2a + 1}.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre a vers 1 par valeurs inférieures pour s'assurer que la valeur $1/3$ est bien optimale. □

2. VARIATIONS SUR LE THÉORÈME DE BOHR

Sous réserve d'hypothèses supplémentaires pour f on peut encore améliorer la constante $1/3$. Commençons par une version du théorème de Bohr où l'hypothèse ne porte que sur la partie réelle.

Théorème[3] **:** *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à* 1 *vérifiant*

$$a_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \left|\Re\text{e}\, f(z)\right| \leq 1 \qquad \text{pour tout } z \in D(0,1),$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Big(\frac{1}{3}\Big)^n \leq 1\ .$$

Démonstration : Posons $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n = |a_n|e^{i\epsilon_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_0 = 0$, $U = \Re e(f)$ et $V = \Im m(f)$, ; on a pour $z \in D(0,1)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = U(re^{i\theta}) + iV(re^{i\theta})$$

D'après les formules (♣) :

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n) r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta\ , \quad n \geq 1 \qquad \text{et} \qquad a_0 = \alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) d\theta$$

soit, en multipliant ces égalités par $\rho^n e^{-i\epsilon_n}$ pour tout n

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} |a_n|\rho^n r^n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \rho^n e^{i(-n\theta-\epsilon_n)}\Big) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \rho^n \cos(n\theta + \epsilon_n)\Big) d\theta \\ &\qquad - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \rho^n \sin(n\theta + \epsilon_n)\Big) d\theta\end{aligned}$$

le terme de gauche étant réel ainsi que les intégrandes, la seconde intégrale est nécessairement nulle :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} |a_n|\rho^n r^n &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|U(re^{i\theta})\right| \left|\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \rho^n \cos(n\theta + \epsilon_n)\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|U(re^{i\theta})\right| \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \rho^n \cos(n\theta + \epsilon_n)\right| d\theta\end{aligned}$$

mais $\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \rho^n \cos(n\theta + \epsilon_n) \geq \frac{1}{2} - \sum_{n\geq 1} \rho^n = \frac{1}{2} - \frac{\rho}{1-\rho} \geq 0$ pour $\rho \leq 1/3$, ce qui permet d'enlever la valeur absolue dans la dernière intégrale et, une intégration terme à terme (convergence normale) ne faisant intervenir que le terme constant de la série, il reste :

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|\rho^n r^n \leq \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|U(re^{i\theta})\right| = \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|\Re\text{e}(f(z))\right| \leq 1, \quad \forall\ 0 < r < 1,\ \rho \leq 1/3.$$

On termine la démonstration en choisissant $\rho = 1/3$ et en faisant tendre r vers 1 par valeurs inférieures. □

Remarques

- Quitte à faire une rotation, on retrouve le théorème de Bohr.
- Il faut souligner la grande simplicité de cette démonstration qui peut tout à fait faire l'objet d'un problème niveau bac+2. Plus subtil est l'endroit où on utilise l'hypothèse $a_0 > 0$: elle intervient au moment où on écrit $a_0 = \alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})d\theta$ égalité qui n'est rien d'autre que la formule (♣) pour $n = 0$ démontrée dans le premier paragraphe. Mais cette formule n'est vraie en général **que pour** $n \geq 1$ sauf si $a_0 \in \mathbb{R}$ ...

[3] M. Tomić *Sur un théorème de Bohr*, Math.Scand. 11 (1962) 103-106

- Moyennant de légères modifications, on peut montrer que la constante optimale est supèrieure ou égale à $1/2$ sous l'hypothèse supplémentaire $f(0) = 0$:

  Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à* 1 *vérifiant* $a_1 > 0$ et $|f(z)| < 1 \quad \forall\, z \in D(0,1)$, *alors*
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{2^n} \leq 1 - \frac{a_1}{2} .$$

- Il est facile de voir que l'on peut accroître la constante optimale lorsqu'on considère des séries particulières. Plus précisément, lorsque le série vérifie :
  $$\begin{cases} a_0 \neq 0 \\ a_i = 0 \text{ pour } 0 < i < N+1 \\ a_{N+1} \neq 0 \end{cases}$$
  la constante optimale, supérieure ou égale à la première racine positive de l'équation $2\rho^{N+1} + \rho - 1 = 0$, sera le terme général d'une suite croissante de limite 1 (dont les deux premiers termes sont donnés par $1/3$ et $1/2$).

- Cette version du théorème de Bohr peut sembler surprenante car seule une contrainte sur la partie réelle permet de contrôler toute la fonction sur le disque $D(0,1/3)$ alors qu'on sait par ailleurs qu'il existe un biholomorphisme (via le théorème de Riemann) du disque unité sur la bande $\Omega := \{-1 < \Re\mathrm{e}(z) < 1\}$. Bien que $f(D(0,1)) = \Omega$ on aura toujours $f(D(0,1/3)) \subset D(0,1)$ et même $f(D(0,1/3)) \subset D(0,1/2)$ puiqu'on peut imposer $f(0) = 0,\ f'(0) > 0$. Le lecteur intéressé pourra visualiser ces résultats à l'aide d'un logiciel de mathématiques standard.

3. LE PASSAGE À PLUSIEURS VARIABLES

Au début du siècle, la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes en était à ses balbutiements et il a fallu attendre ces dernières années, plus particulièrement avec les travaux de Boas[4], Khavinson[5] et Aizenberg[6] pour avoir des résultats qui étendent au cas de plusieurs variables la notion de rayon de Bohr.

Le domaine de convergence d'une série entière

En une ou plusieurs variables, les fonctions holomorphes sont les fonctions localement développables en série entière. Il est donc naturel de s'intéresser au **domaine de convergence** de ces séries (par *domaine de convergence*, nous entendons **l'intérieur** de l'ensemble des points où la série converge). Alors qu'en une variable, ces domaines sont des disques ouverts, on voit apparaître en plusieurs variables une classe plus riche d'objets géométriques ([Ran1], [Chab]). A titre d'exemple, considérons les séries entières :

$$S_1(z,w) = \sum_{n\geq 0} z^n w^n \qquad S_2(z,w) = \sum_{k+l=0}^{+\infty} z^{k+1} w^l \qquad S_3(z,w) = \sum_{k,l\geq 0}^{+\infty} \frac{k}{l\,!} z^k w^l$$

La première a pour domaine de convergence[7] le bidisque $D_1 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \ :\ |z| < 1,\ |w| < 1\}$, la deuxième admet $D_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \ :\ |zw| < 1\}$ pour domaine de convergence (non borné) et la troisième converge sur la bande verticale $D_3 = \{|\ z\ | < 1,\ w \in \mathbb{C}\}$; graphiquement :

[4]Boas R.P., *Bohr's power series theorem in several variables*, J. Korean Math. Soc. 37(2), (2000), pp.321-337.

[5]Boas R.P. & Khavinson D. *Bohr's power series theorem in several variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 125(10), (1997), pp.2975-2979

[6]*Multidimentional analogues of Bohr's theorem on power series*, Proc. Amer. Math. Soc., 128(2000), no. 4, 1147-1155 ainsi que *An abstract approach to Borh's phenomenon.*, Proc. Amer. Math. Soc. 128(2000), no. 9, pp. 2611-2619.

[7]On notera que S_1 converge également sur la droite complexe $\{z = 0\}$ adhérente au domaine de convergence, d'où l'importance de ne considérer que les points intérieurs.

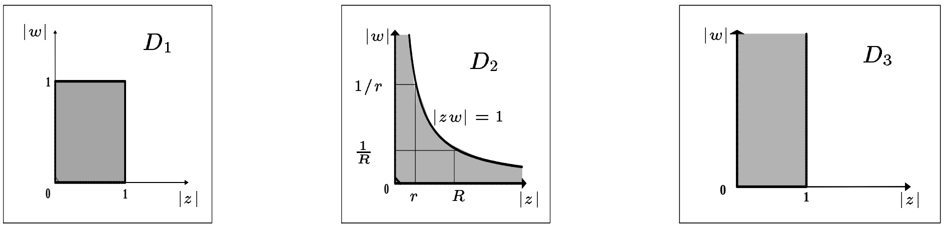

FIGURE 1. Les domaines de convergence de S_1, S_2 et S_3

Il n'est pas difficile de vérifier qu'en plusieurs variables (sans perdre de généralité, on se placera dans le cas de deux variables ($d = 2$) et on centrera les séries en l'origine), le domaine de convergence Ω d'une série entière vérifie toujours pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ la propriété suivante :

$$\text{le bidisque } P_{(\alpha)} := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \mid z_1 \mid \leq \mid \alpha_1 \mid , \mid z_2 \mid \leq \mid \alpha_2 \mid\} \text{ est aussi dans } \Omega.$$

Un domaine possédant cette propriété est appelé **domaine de reinhardt complet**. En **une variable**, les domaines de Reinhardt complets coïncident avec les disques et on sait que tout disque est le domaine de convergence d'une série entière. En **plusieurs variables**, il reste vrai qu'une fonction holomorphe sur un domaine de Reinhardt complet s'y développe en série entière mais la situation se complique pour la réciproque : un domaine de Reinhardt complet n'est pas forcément *le* domaine de convergence d'une série entière. De fait, si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est un point du domaine de convergence Ω d'une série à deux variables, on vérifie facilement que pour tout $t \in [0, 1]$, $w_t = (|z_1|^t |z_2|^{1-t}, |z_1|^{1-t} |z_2|^t)$ est aussi dans Ω. Autrement dit, toute fonction holomorphe sur un domaine de Reinhardt complet Ω admet un développement en série entière jusqu'à son enveloppe logarithmiquement convexe $\lambda(\Omega)$. Ainsi, les domaines de convergence possèdent une propriété géométrique supplémentaire (triviale en dimension 1) : ils sont **logarithmiquement convexes**, i.e.

$$\lambda(\Omega) := \{ \left(\log |z_1|, \log |z_2|\right), \ (z_1, z_2) \in \Omega, \ z_1 z_2 \neq 0\} \text{ est une partie convexe de } \mathbb{R}^d$$

En résumé, les domaines de convergence de séries entières en plusieurs variables sont des domaines de Reinhardt complets logarithmiquement convexes. Outre les exemples de tels domaines vus précédemment (FIG. 1), on peut encore bien entendu citer la boule $B(0, 1) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z|^2 + |w|^2 < 1\}$; on notera cependant qu'il n'est pas facile de trouver une série dont elle sera le rayon de convergence ([Ran2]). D'un autre côté, la réunion de deux bidisques est un domaine de Reinhardt complet mais pas forcément logarithmiquement convexe :

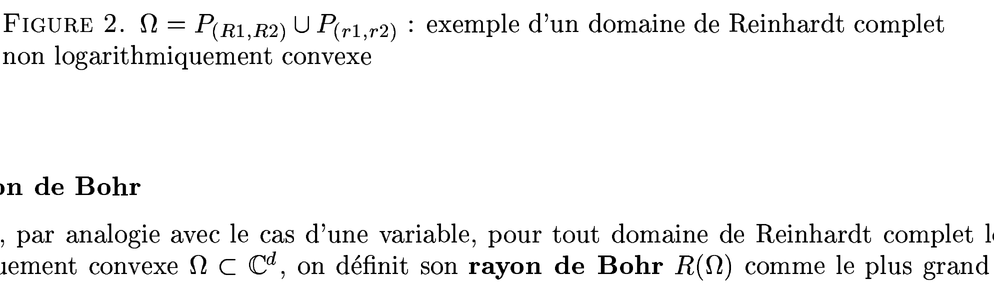

FIGURE 2. $\Omega = P_{(R1,R2)} \cup P_{(r1,r2)}$: exemple d'un domaine de Reinhardt complet non logarithmiquement convexe

Le rayon de Bohr

Ainsi, par analogie avec le cas d'une variable, pour tout domaine de Reinhardt complet logarithmiquement convexe $\Omega \subset \mathbb{C}^d$, on définit son **rayon de Bohr** $R(\Omega)$ comme le plus grand réel positif γ tel que :

$$\Big(\Big| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha z^\alpha \Big| < 1 \ , \ \forall z \in \Omega \Big) \Longrightarrow \Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} |a_\alpha z^\alpha| < 1 \ , \ \forall z \in \gamma\Omega \Big)$$

avec les notations classiques pour $d \in \mathbb{N}^\star$: $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d, z = (z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d}$. Avec cette définition le théorème de Bohr en une variable s'écrit tout simplement $R(D(0,1)) = 1/3$. La surprise est que le rayon de Bohr dépend du choix initial de Ω et parfois tend vers zéro avec la dimension d. C'est, par exemple, le cas pour le polydisque $P_d := \{z \in \mathbb{C}^d \ : \ \max_{1\leq i\leq d} |z_i| < 1\}$, Boas & Khavinson ayant montré :

$$\frac{1}{3\sqrt{d}} \leq R(P_d) \leq 2\frac{\sqrt{\log d}}{\sqrt{d}}$$

alors que pour l'hypercône $B_d = \{z \in \mathbb{C}^d \ : \ |z_1| + \cdots + |z_d| < 1\}$, Khavinson a montré :

$$\frac{1}{3^3\sqrt{3}} \leq R(B_d) \leq \frac{1}{3}.$$

Et pour la boule euclidienne : $\{z \in \mathbb{C}^d \ : \ |z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2 < 1\}$, le rayon vaut $1/3$.

Il n'est pas ici question de fournir une démonstration, le lecteur intéressé se référera aux articles cités, pour la plupart d'un niveau assez accessible.

Pour terminer, on notera que la théorie des opérateurs offre un autre angle d'attaque pour l'étude du rayon de Bohr multidimensionnel. Cette approche a déjà apporté[8] un certain nombre de résultats intéressants qui feront l'objet d'un travail ultérieur.

References

[Bo] Bohr H. *A theorem concerning power series*, Proc. London Math. Soc. **13**(2), (1914), pp.1-5.

[Chab] Chabat B. *Introduction à l'Analyse Complexe, T.2 Fonctions de plusieurs variables* , MIR, (1990).

[Ran1] Range R. M., *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Graduate Text in Mathematics 108, Springer Verlag, 1986.

[Ran2] Range R.M., *Complex Analysis : A Brief Tour into Higher Dimensions*, Am. Math. Monthly, 110(2003), 89-108.

[Rud] Rudin W. *Analyse Réelle et Complexe*, Dunod (1998).

H.Carrieu : 54 rue de Bignou, 86000 POITIERS FRANCE.
E-mail address: herve.carrieu@ac-poitiers.fr

Etienne Fieux & Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE FRANCE.
E-mail address: fieux@picard.ups-tlse.fr & lassere@picard.ups-tlse.fr

Frédéric Rodriguez : Laboratoire du CERS, UMR CNRS 5177, Université Toulouse II, 5, allées Antonio Machado, 31058 TOULOUSE Cedex 9.
E-mail address: frederic.rodriguez@univ-tlse2.fr

[8]Paulsen V. I., Popescu G., Singh D., *On Bohr's inequality*, Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002) 493-512.