☢ ☯ L3-M1 – Exercices d'Analyse Fonctionnelle et Distributions ☯ ☢

1. Théorèmes d'Ascoli et de Weierstrass

Exercice 1. *Soit $(K_i)_1^n$ une famille d'espaces métriques compacts, $K := K_1 \times \cdots \times K_n$ est muni de la topologie produit et $\mathcal{C}(K)$ de la topologie de la convergence uniforme. Montrer que les fonctions de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto u_1(x_1) \ldots u_n(x_n)$ où $u_i \in \mathcal{C}(K_i)$ engendrent un sous espace dense de $\mathcal{C}(K)$ (théorème de Dieudonné).*

Exercice 2. *Soit K un espace métrique compact, montrer que $\big(\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty\big)$ est séparable (indic. si $(x_n)_n$ est une suite dense de K, poser pour $x \in K$: $\varphi_0(x) = 1, \varphi_n(x) = d(x, x_n)$ $(n \geq 1)$, et utiliser Stone-Weierstrass).*

Exercice 3. *(sur le théorème de prolongement de Tietze). Soient E un espace métrique, X une partie compacte non vide de E. On désigne par $\mathcal{C}_b(E)$ l'espace vectoriel des fonctions continue et bornées de E dans $\mathbb{K}$ muni de la norme définie par $\|f\| = \sup_{y \in E} |f(y)|$. L'espace vectoriel $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur X est muni de la norme de la convergence uniforme sur X qui sera encore notée $\|.\|$. On note enfin Φ l'application linéaire (restriction) de $\mathcal{C}_b(E)$ dans $\mathcal{C}(X)$ définie par $\Phi(f) = f_{/X},\ f \in \mathcal{C}_b(E)$.*

(1). Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}_c\big(\mathcal{C}_b(E), \mathcal{C}(X)\big)$

(2). Montrer que $\mathcal{C}_b(E)$ est un espace de Banach.

(3). Démontrer que si $f \in \mathcal{C}_b(E)$, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b(E)$ telle que $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ et $\|\tilde{f}\| = \|\Phi(f)\|$.

(4). Démontrer que $Im(\Phi)$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

(5). Soit $(\Phi(f_n))_n \subset \mathcal{C}(X)$ une suite qui converge (dans $\mathcal{C}(X)$, donc uniformément sur X) vers g.

(a). Démontrer que l'on peut supposer, quitte à extraire une sous suite convergente, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|\Phi(f_{n+1}) - \Phi(f_n)\| \leq 2^{-n}$.

(b). Démontrer que la série $\tilde{f}_0 + \sum_{n \geq 0} \big(f_{n+1} - f_n\big)\tilde{}$ converge dans $\mathcal{C}_b(E)$. On note f sa somme.

(c). Montrer que $\Phi(f) = g$.

(6). Déduire de ce qui précède que toute fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ admet un prolongement en une fonction $f \in \mathcal{C}_b(E)$ telle que $\|f\| = \|g\|$.

(7). Soit A une partie non vide dans E et f une application de A dans $\mathbb{R}$, lipschitzienne de rapport C. On pose

$$g(y) = \inf_{x \in A} \big\{ f(x) + Cd(x, y) \big\},\ y \in E.$$

Montrer que g est un prolongement de f, lipschitzien de même rapport C.

Exercice 4. *On désigne par $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.*

(1.a). Montrer que $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ est une norme sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, puis, que $\big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|.\|\big)$ est un espace de Banach.

(1.b). Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité du plan complexe et Φ l'application de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U} \backslash \{-1\}$ définie par $\Phi(x) = e^{2i \arctan(x)}$. Démontrer que Φ réalise un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$, avec $\Phi^{-1}(z) = \tan\big(\frac{1}{2} Arg(z)\big)$ (où $Arg(z)$ désigne la valeur de l'argument de z dans à $]-\pi, \pi[$). Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = -1$.

(1.c). Démontrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ si et seulement si, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{U}$ par $\tilde{f}(-1) = 0$ et $\tilde{f}(z) = f(\Phi^{-1}(z))$ sinon, appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{U})$.

(1.d). En déduire que l'application qui à f associe $\tilde{f}$ est une isométrie de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des éléments de l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ nuls en -1.

(2). Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ vérifiant

i. $\forall f \in H\ :\ f^2 \in H$.

ii. H sépare les point de $\mathbb{R}$.

iii. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists f \in H\ :\ f(x) \neq 0$.

iv. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\forall f \in H,\ : \overline{f} \in H$.

(2.a). Montrer que H est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (indic. appliquer Stone-Weierstrass sur le compact $\mathbb{U}$ à l'ensemble constitué des fonctions de la forme $\tilde{f}+a,\ f\in H,\ a\in\mathbb{K}$).
(2.b). Réciproquement, montrer que toute partie dense de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ satisfait aux conditions (ii) & (iii) ci-dessus.
(3). Si $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ on pose $\Phi_a(x)=(a+x)^{-1}$, montrer que la famille $\big(\Phi_a\big)_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$ est totale dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (indic. montrer que $\Phi_a^2=\lim_{h\to 0}\big(\Phi_a-\Phi_{a+h}\big)h^{-1}$ et appliquer la question (2.a). à l'espace vectoriel engendré par les Φ_a).
(4). Soit H l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto e^{-x^2}P(x),\ P\in\mathbb{R}[x]$.
(4.a). Soient $r\in\mathbb{N},\ a\in]0,1[$, on note pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}\ :\ R_n(x)=e^{-x^2}x^{2n+r}a^n/n!$. Démontrer que $\big(R_n\big)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle (indic. montrer que $\lim_n\|R_{n+1}\|/\|R_n\|=a...$). En déduire que $f_{a,r}(x)=e^{-(1+a)x^2}x^r$ appartient à $\overline{H}$ (utiliser Taylor avec reste intégral pour approcher e^{-ax^2} par des polynômes).
(4.b). Démontrer que $g_{a,r}(x)=e^{-(1+a)^2x^2}x^r$ est aussi dans $\overline{H}$ (indic. écrire $g_{a,r}(x)=(1+a)^{-r/2}f_{a,r}(x\sqrt{1+a})$ et appliquer deux fois la question précédente).
(4.c). En choisissant $a=\sqrt{2}-1$, démontrer que H est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$..

Exercice 5.
(1). Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f_n(x)=x^n$. En quels points de l'intervalle $[0,1]$ la famille $(f_n)_n$ est elle équicontinue ?
(2). Soient X un espace métrique, $(f_n)_n\subset\mathcal{C}(X)$. Démontrer que si $(f_n)_n$ est équicontinue en un point $x\in X$, alors pour toute suite $(x_n)_n$ de X convergeant vers x, la suite $\big(f_n(x)-f(x)\big)_n$ converge vers zéro. Si $f_n(x)=\sin(nx)$, démontrer que la suite $(f_n)_n$ n'est équicontinue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. *Soit $\alpha\in]0,1[$. On note $\mathcal{C}^\alpha([0,1])$ l'ensemble des fonctions $f\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$ telles que la quantité $|f|_\alpha:=\sup\limits_{0\le x<y\le 1}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ soit finie. Si on n munit $\mathcal{C}^\alpha([0,1])$ de la norme $|.|_\alpha+\|.\|$ montrer que l'on obtient un espace de Banach dont la boule unité est un compact de $\mathcal{C}([0,1])$ muni de sa topologie usuelle.*

Exercice 7. *Soit X un espace métrique compact et H une famille équicontinue d'éléments de $\mathcal{C}(X)$. Soit $J=\big\{\,x\in X\ :\ \{f(x)\}_{f\in H}$ est borné $\big\}$. Démontrer que J est ouvert et fermé dans X. Si X est connexe et J non vide, en déduire que H est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}(X)$.*

Exercice 8. *(L). (Stone-Weierstrass pour les espaces localement compacts). soit (X,d) un espace métrique localement compact et non compact. On note $\hat{X}=X\cup\{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X ; $\mathcal{C}_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X et nulle à l'infini (i.e. pour tout $\epsilon>0$, il existe un compact $K\subset X$ tel que $|f(x)|<\epsilon,\ \forall x\in X\setminus K$). À l'aide de $\hat{X}$, montrer que toute sous algèbre séparante, $A\subset\mathcal{C}_0(X)$ est dense dans $\big(\mathcal{C}_0(X),\|.\|_\infty\big)$.*

2. Espaces Localement Convexes

Exercice 9. *(M). On définit sur $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$: $p_i(x) = \mid x_i \mid$, $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$.*
(1). Montrer que chaque p_i est une semi norme sur $\mathbb{R}^n$ et que pour toute partie $\mathcal{I} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, la topologie définie par la famille de semi-normes $\big(p_i\big)_{i \in \mathcal{I}}$ co ň incide avec la topologie définie par la semi-norme $p_{\mathcal{I}}(x) := \max_{i \in \mathcal{I}}\{\mid x_i \mid\}$. A quelle condition cette topologie est-elle séparée ?
(2). On suppose $n = 2$. Montrer que la famille de boules $\mathcal{B} = \big\{\, x \in \mathbb{R}^2,\ p_i(x) < \rho, \rho > 0,\ i = 1, 2 \,\big\}$ ne forme pas une base de voisinages de l'origine.

Exercice 10. *(M). Pour $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\Delta(f, g) = \min\big\{\, 1\,, \sup_{x \in \mathbb{R}} \mid f(x) - g(x) \mid \big\}$, $(\inf(1, \infty) = \infty..)$*
(1). Montrer que Δ est une distance invariante par translation, et que $\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \Delta\big)$ est un espace métrique complet.
(2). vérifier que $\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \Delta\big)$ n'est pas un e.v.t. (on pourra considérer $\Delta(0, \lambda f)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est une fonction non bornée de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.)

Exercice 11. *(M). Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}(\Omega)$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes continues sur Ω. Pour $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ on pose $p_K(f) := \sup_{x \in K} \mid f(x) \mid$, $\quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$.*
(1). Montrer que p_K est une semi-norme sur $\mathcal{C}(\Omega)$, et que la topologie associée à la famille $\{p_K\}_{K \in \mathcal{K}(\Omega)}$ est séparée.(C'est la topologie de la convergence compacte sur Ω.)
(2). Pour $j \in \mathbb{N}^\star$ et $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ on pose $K_j := \big\{\, x \in K \ :\ d(x, \mathbb{R}^d \setminus K) \geq j^{-1} \ \text{et}\ \parallel x \parallel \leq j \,\big\}$. Montrer que les topologies définies par $\{p_{K_j}\}_j$ et $\{p_K\}_{K \in \mathcal{K}(\Omega)}$ sur $\mathcal{C}(\Omega)$ sont équivalentes.
(3). Vérifier que pour chaque compact $K \in \mathcal{K}(\Omega)$, p_K n'est pas une norme sur $\mathcal{C}(\Omega)$, puis que tout voisinage de l'origine de $\mathcal{C}(\Omega)$contient une droite complexe ; en déduire que $\mathcal{C}(\Omega)$ est un e.v.t.l.c.s. non normable.

Exercice 12. *(M). Soit $0 < p < 1$ et $I = [0, 1]$; $L_p(I)$ désigne l'espace des fonctions mesurables sur I telles que $\mid f \mid^p$ soit Lebesgue intégrable sur I. Pour $f, g \in L_p(I)$, on pose alors $\delta_p(f) = \int_I \mid f(t) \mid^p dt$ et $\Delta_p(f, g) = \delta_p(f - g)$.*
(1). Montrer que δ_p est sous-additive et que Δ_p est une distance sur $L_p(I)$ invariante par translation qui fait de $L_p(I)$ un espace métrique complet.
(2). Pour $f \in L_p(I)$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ et $f_1, f_2, \dots, f_n \in L_p(I)$ telles que $\delta_p(f_i) \leq \varepsilon$ et $f = \frac{1}{n}(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$. (Ind. : utiliser la continuité de $x \mapsto \int_0^x \mid f(t) \mid^p\ dt$...)
(4). En déduire que le seul voisinage convexe de l'origine dans $L_p(I)$ est $L_p(I)$; que $L_p(I)$ n'est pas un e.v.t. localement convexe, et enfin que $\big(L_p(I)\big)' = \{0\}$.

Exercice 13. *(M). Soit $A = (a_n)_n$ une partie dénombrable de $[0, 1]$ telle que $a_p \neq a_q$ pour $p \neq q$ et $\alpha = (\alpha_n)_n$ un suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n < \infty$. Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ on pose $\parallel f \parallel_{A, \alpha} = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \cdot \mid f(a_n) \mid$.*
(1). Montrer que $\parallel - \parallel_{A, \alpha}$ est une semi-norme sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, dans quel cas est-ce une norme ?
2). Montrer que $\parallel - \parallel_{A, \alpha}$ et $\parallel - \parallel_{A', \alpha'}$ définissent la même topologie sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A = A', \qquad \exists\, c_1, c_2 > 0 \quad : \ c_1 \cdot \alpha_n \leq \alpha'_n \leq c_2 \cdot \alpha_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 14. *(M). Soient E un e.v.s.n., F un s.e.v. de E et $x_0 \in E$, montrer que*

$$\big(\, x_0 \in \overline{F} \,\big) \ \Leftrightarrow\ \big(\forall f \in E' \ :\ f/_F = 0 \colon f(x_0) = 0\big).$$

La réciproque est fausse : L^1 est séparable alors que L^∞ ne l'est pas..

Exercice 15. *(M). Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $E_\alpha := \{\, f \in L^2([-1, 1]) \ :\ f(0) = \alpha \,\}$. Montrer que E_α est une partie convexe dense de $L^2([-1, 1])$. Montrer que pour $\alpha \neq \beta$: $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$, mais qu'il n'existe aucune fonctionnelle $\Lambda \in L^2([-1, 1])'$ qui les séparent.*

Exercice 16. *(M). Soit E un espace de Banach et B une partie de E.*
(1). Soit B une partie de E telle que $\forall \varphi \in E'$, $\varphi(B)$ est borné, montrer que B est bornée dans E.
(2). Soit B' une partie de E' telle que $\forall x \in E$, $B'_x := \{\, f(x),\ f \in B' \,\}$ soit une partie bornée, montrer que B' est une partie bornée de E'.

Exercice 17. *(M). Soit K un compact d'un espace de Fréchet E. On appelle hyperplan d'appui $\mathcal{H}$ de K, tout hyperplan affine fermé (i.e. de la forme $\mathcal{H} = \{T(x) = a\,\}$, $T \in E'$, $a \in \mathbb{R}$) tel que $\mathcal{H} \cap K \neq \emptyset$ et K est inclu dans l'un des demi-espaces $\mathcal{H}_+ = \{T(x) \leq a\,\}$, $\mathcal{H}_- = \{T(x) \geq a\,\}$. $\mathcal{HA}(K)$ désignera l'ensemble des hyperplans d'appui de K.*

(1). Montrer que pour tout hyperplan fermé $\mathcal{H}$ de E, il existe $\mathcal{H}' \in \mathcal{HA}(K)$ avec $\mathcal{H}' \parallel \mathcal{H}$.
(2). On définit l'enveloppe convexe de K ($co(K)$) comme le plus petit convexe fermé contenant K. Montrer que

$$co(K) = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{HA}(K)} \{ 1/2 \ \text{ espace fermé limité par } K \text{ et contenant } K \}.$$

(3). On suppose K convexe, montrer que

$$\big(x \in Fr(K)\big) \Leftarrow:\big(\exists\, \mathcal{H}_x \in \mathcal{HA}(K) : x \in \mathcal{H}_x \cap K.$$

(Indic : distinguer les cas où K est d'intérieur vide où non..).
On dira que x est extrémal dans K, ($x \in X(K)$) si $\forall\, y, z \in K,\ t \in]0,1[:\ x = ty + (1-t)z$ implique $x = y = z$.

(4). Montrer que : $\big(\exists \mathcal{H}_x \in \mathcal{HA}(K),\ \mathcal{H}_x \cap K = \{x\}\big) =:\big(x \in X(K)\big)$
Et trouver un contre exemple simple dans $\mathbb{R}^2$ pour la réciproque.
(5). K est maintenant un compact convexe de $\mathbb{R}^2$, montrer que

$$K = co(X(K)). \qquad \textit{Théorème de KREIN-MILMAN.}$$

Indic. : si $x_0 \in K \setminus co(X(K))$ et si $y_0 \in K$ est tel que $dist(y_0, co(X(K))) := \max_{y \in K} dist(y, co(X(K)))$ on montrera qu'il existe $y_1 \in \mathcal{H}_{y_0}$ qui est extrémal........

Remarque : Le théorème de Krein Milman est en fait vrai pour tout compact convexe d'un e.l.c. séparé, vous en trouverez une démonstration (parfaitement accessible) dans l'un quelconque de vos manuels favoris d'analyse fonctionnelle......

Exercice 18. *(M). Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $l \geq m$ deux entiers et*

$$P(x, \delta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans $\mathcal{C}^{l-m}(\Omega)$. Montrer que P est un opérateur continu de $\mathcal{C}^l(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{l-m}(\Omega)$.

Exercice 19. *(M). Soient E un e.l.c. réel, A, B deux convexes non vides disjoints. on suppose A compact et B fermé, montrer qu'il existe un hyperplan fermé séparant A et B et ne rencontrant ni A ni B (on pourra montrer qu'il existe $V \in \mathcal{V}(0_E)$ tel que $(A + V) \cap B = \emptyset$).*

Exercice 20. *(M). Soit B un sous Banach de $L^1([0,1])$ inclu dans $\cup_{p>1} L^p([0,1])$. Montrer qu'il existe $p > 1$ tel que $B \subset L^p([0,1])$.*

Exercice 21. *(M). (le théorème de Helly). Soient E un espace de Banach, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $c > 0$.*
(1). Si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x_\epsilon \in E$ tel que $\|x_\epsilon\| \leq c + \epsilon$ et $\varphi_i(x_\epsilon) = \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$ vérifier que pour $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

$$\Big| \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i \Big| \leq c \| \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i \|.$$

(2). Démontrer la réciproque. Pour cela si $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et $B_\epsilon = \overline{B_E}(0, c + \epsilon)$ on montrera que pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \notin \varphi(B_\epsilon)$ il existe une forme linéaire continue μ sur $\mathbb{K}^n$ telle que $\sup\big(\mu(\varphi(B_\epsilon))\big) \leq \mu(\lambda)$.

3. Théorèmes de Banach

Exercice 22. *Soit $g \in L^2([0,1])$ telle que $fg \in L^2([0,1])$ pour tout $f \in L^2([0,1])$. Utiliser le théorème du graphe fermé, puis celui de Banach-Steinhaus pour donner deux démontration de la continuité de l'application*

$$\Lambda_g \ : \ L^2([0,1]) \ni f \mapsto \Lambda_g(f) = fg \in L^2([0,1])$$

Exercice 23. *Démontrer que $L^2([0,1])$ est maigre dans $L^1([0,1])$ de trois manière differentes :*
(1). En considérant les ensembles $I_n := \{f \in L^1([0,1]) \ : \ \int_0^1 |f(t)|dt \leq n\}$.
(2). En considérant l'injection canonique de $L^2([0,1])$ dans $L^1([0,1])$.
(3). En considérant les fonctionnelles $\Lambda_n \ : \ L^1([0,1]) \ni f \to \Lambda_n(f) = \int_0^1 f(t)g_n(t)dt$ où $g_n(t) = n\mathbf{1}_{[0,n^{-3}]}(t)$.

Exercice 24. *(Sous-espaces de $\mathcal{C}([0,1])$ fermés dans $L^2([0,1])$). Soit donc un sous espace vectoriel $X \subset \mathcal{C}([0,1])$ fermé dans $L^2([0,1])$ muni de sa structure hilbertienne canonique.*
(1). Montrer que X est fermé dans $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty\big)$ et que les restrictions à X des normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.
(2). Soit $\mathcal{B} = \{f \in X \ : \ \|f\|_\infty \leq 1\}$. Montrer que toute suite $(g_n)_n \subset \mathcal{B}$ admet une sous-suite $(g_{n_k})_k$ L^2-faiblement convergente de limite g.
(3). Montrer que $(g_{n_k})_k$ converge simplement sur $[0,1]$ vers g, puis que $(g_{n_k})_k$ converge vers g dans L^2.
(4). En déduire que X est de dimension finie.

Exercice 25. *(Sous-espaces réguliers & fermés dans $\mathcal{C}([0,1])$). Soit X un sous-espace fermé de $\mathbb{C}^0([a,b])$ constitué de fonctions de classe $\mathbb{C}^1$.*
(1). Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, f \in X \ : \ \|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty.$$

(2). Avec Ascoli montrer que X est de dimension finie.
(3). On suppose maintenant que

$$\forall\, f \in X, \ \exists\, \alpha > 0, C > 0 \ : \ \forall\, x, y \in [a,b], \ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|.$$

Utiliser le théorème de Baire pour montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\forall\, f \in X, \forall\, x, y \in [a,b], \ |f(x) - f(y)| \leq n|x-y|^{1/n}\|f\|_\infty,$$

puis montrer que X est encore de dimension finie.

Exercice 26. *Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que pour toute suite $(b_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$, la série $\sum_n a_n b_n$ converge. Grâce au théorème de Banach-Steinhaus montrer que $(a_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$.*

Exercice 27. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur continu. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i). T est localement quasi-nilpotent, i.e. pour tout $x \in H$, $\lim_k \|T^k(x)\|^{1/k} = 0$
(ii). T est quasi-nilpotent, i.e. $\lim_k \|T^k\|^{1/k} = 0$.

Exercice 28. *(les théorèmes d'Hellinger-Toeplitz). Soient H un espace de Hilbert, T un endomorphisme de H.*
(1). On suppose qu'il existe un endomorphisme U de H tel que

$$\forall\, x, y \in H \ : \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, Uy\rangle$$

Montrer que T est continu.
(2). On suppose que $\forall\, x \in H \ : \ \langle Tx, x\rangle \geq 0$, montrer que T est continu.

Exercice 29. *Soit H un espace de Hilbert et $\varphi \ : \ H \times H \to H$ une application bilineaire. Montrer que φ est continue si, et seulement si elle est séparément continue.*

Exercice 30. *Soient H un espace de Hilbert, E un sous-espace de H muni d'une structure d'espace de Banach telle que l'injection canonique de E dans H soit continue ; si F est un sous-espace de E fermé dans H montrer que sur F les espaces E et H induisent la même topologie.*

Exercice 31. *(supplémentaires topologiques). Dans un espace de hilbert H, on dira que deux sous-espaces E, F de H sont des supplémentaires topologiques s'ils sont supplémentaires algébriques et si les projections sont continues.*
(1). Montrer que deux supplémentaires algébriques fermés sont supplémentaires topologiques (donner deux preuves : une avec l'application ouverte, l'autre avec le graphe fermé)
(2). Soient G, H deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(G, H)$. Montrer que T admet un inverse à doite dans $\mathcal{L}(H, G)$ si et seulement si T est surjective et $\mathrm{Ker}(T)$ admet un supplémentaire topologique. Montrer que T admet un inverse à gauche dans $\mathcal{L}(H, G)$ si et seulement si T est injective et $\Im(T)$ admet un supplémentaire topologique.
(3). Donner un exemple de supplémentaires algébriques non topologiques (regardez dans vos feuilles de TD anterieures...).

Exercice 32. *Pour $f \in \mathbb{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (continue 2π-périodique) on note $S_n(f)(x) := \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)dt$, $D_n(t) = \sum_{-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$, $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et pour $x \in \mathbb{R}$: $E_x = \{f \in \mathbb{C}_{2\pi} \,:\, \sup_n |S_n(f)(x)| = +\infty\}$. Montrer que E_x est gras (de complémentaire maigre) dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, conclusion ?*

Exercice 33. *Pour $f \in \mathbb{C}([0,1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $P_n(f)$ désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en les points k/n, $0 \leq k \leq n$. Montrer que $\{f \in \mathbb{C}([0,1]) \,:\, \sup_n \|P_n(f)\| = +\infty\}$ est gras dans $\mathcal{C}([0,1])$.*

4. Théorème de Baire

Exercice 34. (le jeu de Choquet). *Soit X un espace métrique. Deux joueurs, Pierre et Paul, jouent au jeu suivant (appelé jeu de Choquet) : Pierre choisit un ouvert U_1 non vide dans X, puis Paul choisit un ouvert non vide $V_1 \subset U_1$ puis Pierre choisit un ouvert non vide $U_2 \subset V_1$, et ainsi de suite. À la fin de la partie, les deux joueurs ont ainsi défini deux suites décroissantes d'ouverts non vides (U_n) et (V_n) telles que pour tout entier n,*

$$U_n \supset V_n \supset U_{n+1}.$$

Remarquer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Notons U cet ensemble. Pierre a gagné la partie si U est vide et Paul si U n'est pas vide.

On dit que l'un des joueurs a une stratégie gagnante s'il a une méthode lui permettant de gagner à tous les coups, quelle que soit la façon de jouer de son adversaire. Ainsi, il est impossible que les deux joueurs aient une stratégie gagnante. Par contre, il n'est a priori pas certain que l'un des deux joueurs en ait une.

(1) *On suppose que dans l'espace X il y a un ouvert non vide O qui est une réunion dénombrable de fermés F_n d'intérieurs vides. Montrer que Pierre a une stratégie gagnante.*
Indication. Pierre commence à jouer $U_1 = O$ et à chaque choix V_n de Paul, Pierre répond $V_n \setminus F_n$.
(2) *Démontrer que si X est complet, Paul a une stratégie gagnante.*
Indication. Si (F_n) est une suite décroissante de fermés de X dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection des F_n n'est pas vide.
(3) *Application : le théorème de Baire. Soit X un espace complet. Démontrer qu'aucun ouvert de X n'est réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides.*
(4) *Corollaire : le théorème de Banach-Steinhaus. Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $L(E,F)$ telle que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{\|T_n(x)\|, n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Démontrer que $\{\|T_n\|, n \in \mathbb{N}\}$ est borné.*
Indication. Démontrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel l'ensemble
$$F_k = \{x \in E \,:\, \forall n \in \mathbb{N}\ \|T_n(x)\| \leq k\}$$
est d'intérieur non vide et donc contient une certaine boule $B(a,r)$, puis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|T_n\| \leq \frac{1}{r}\left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \|T_m(a)\| + k\right).$$

Exercice 35. (une caractérisation des polynômes (H.P.Boas-1960)). *Soit $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout réel x il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n_x)}(x) = 0$. Montrer que f est un polynôme.*

Exercice 36. *Démontrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir une famille génératrice dénombrable. Par exemple $\mathbb{R}[X]$ ne peut être muni d'une structure d'espace de Banach.*

Exercice 37. (les ensembles G_δ). *On dit qu'un ensemble est G_δ s'il est l'intersection dénombrable d'ensembles ouverts.*

(1) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble des points où f est continue est un G_δ de $\mathbb{R}$.*
Indication. Définir pour chaque entier naturel non nul n l'ensemble C_n formé des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe un ouvert V contenant x tel que pour tous $y, z \in V$, $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$. Démontrer que les C_n sont ouverts.
(2) *Démontrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ dans $\mathbb{R}$.*
Indication. Si c'était le cas, alors $\mathbb{R}$ serait une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides.
(3) *Plus généralement, montrer que dans un espace de Banach (de dimension finie ou non), un G_δ dense n'est jamais dénombrable.*
(4) *Démontrer qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ discontinue partout ailleurs.*

(5) *Démontrer qu'il existe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ discontinues en tout point de $\mathbb{Q}$ continues partout ailleurs.*

Indication. On note $\mathbb{Q} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels, la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et, pour tout entier n, $f(x_n) = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 38. *Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable est lipschtzienne sur un intervalle non trivial.*

Exercice 39. *Montrer que toute partie de $\mathbb{R}^n$ est la réunion d'un ensemble maigre et d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.*

Exercice 40. *La limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite d'applications continues est continue sur un ensemble gras.*

5. Espaces de Hilbert

Exercice 41. *Soit K une partie compacte d'un espace de Hilbert H. Montrer que toute suite $(x_n)_n \subset K$ faiblement convergente est fortement convergente.*

Exercice 42. *Soit C une partie convexe d'un espace de Hilbert H. Montrer que C est fermée dans H si et seulement si elle est faiblement fermée.*

Exercice 43. *(Sous espaces de $\mathcal{C}([0,1])$ fermés dans $L^2([0,1])$). Soit donc un sous espace vectoriel $X \subset \mathcal{C}([0,1])$ fermé dans $L^2([0,1])$ muni de sa structure hilbertienne canonique.*
(1). Montrer que X est fermé dans $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty\big)$ et que les restrictions à X des normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.
(2). Soit $\mathcal{B} = \{f \in X \ : \ \|f\|_\infty \leq 1\}$. Montrer que toute suite $(g_n)_n \subset \mathcal{B}$ admet une sous-suite $(g_{n_k})_k$ L^2-faiblement convergente de limite g.
(3). Montrer que $(g_{n_k})_k$ converge simplement sur $[0,1]$ vers g, puis que $(g_{n_k})_k$ converge vers g dans L^2.
(4). En déduire que X est de dimension finie.

Exercice 44. *Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{S} := \{x \in E \ : \ \|x\| = 1\}$ la sphére unité de E. Si E est de dimension infinie, montrer que $\mathcal{S}$ n'est jamais faiblement fermé, plus précisément l'adhérence faible de $\mathcal{S}$ est la boule unité forte : $B = \{x \in E \ : \ \|x\| \leq 1\}$. En déduire que l'intérieur faible de $\{x \in E \ : \ \|x\| < 1\}$ est vide.*

Exercice 45. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que dans un espace de Hilbert, l'application identité soit un opérateur compact.*

Exercice 46. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. Si ImT est de dimension finie, montrer que T est un opérateur compact.*

Exercice 47. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Si ImT est fermé dans H, montrer que $dim(ImT) < \infty$.*

Exercice 48. *Soit H un espace de Hilbert, montrer que l'ensemble $\mathcal{K}(H)$ des opérateurs compacts est fermé dans $\mathcal{L}(H)$ (indic : dans un espace métrique complet, relativement compact équivaut à précompact (i.e. pour tout $\epsilon > 0$ il existe un recouvrement par des ensembles de diamètre $\leq \epsilon$). Etendre cette propriété au cas de $\mathcal{L}(E,F)$, E e.v.n. et F espace de Banach.*

Exercice 49. *Soit H un espace de Hilbert, montrer que tout opérateur compact $T \in \mathcal{K}(H)$ est limite dans $\mathcal{L}(H)$ d'une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang fini.*
(1). Donner une démonstration simple dans le cas où H est séparable.
(2). Traiter le cas général.

Exercice 50. *Soient H un espace de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$, $T^\star$ son adjoint. Montrer que T est compact si et seulement si $T^\star$ l'est.*

Exercice 51. *Soit E un espace de Banach, montrer que $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$ (i.e. $\forall T \in \mathcal{K}(E)$, $\forall U, V \in \mathcal{L}(E) \ : \ VTU \in \mathcal{K}(E)$).*

Exercice 52. *Si E et F sont deux espaces de Banach, montrer que pour $T \in \mathcal{K}(E,F)$ on a : $\big(x_n \rightharpoonup 0_E\big) =: \big(\|T(x_n)\| \to 0\big)$. Si E est reflexif et séparable, montrer que la réciproque est vraie.*

Exercice 53.
1) Donner un exemple de sous-espace non fermé d'un espace de Hilbert.
2) Donner un exemple d'endomorphisme non continu d'un espace de Hilbert. Donner un exemple de forme linéaire non continue sur un espace de Hilbert.

Exercice 54. *Montrer que*

$$l^2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \, / \, \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

muni de $< x, y >= \sum_{n \geq 0} x_n \overline{y_n}$ est un espace de Hilbert.
Montrer qu'il existe un sous-ensemble dénombrable dense dans $l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 55. *Soit $c \in l^2(\mathbb{N})$. Montrer que le "cube de Hilbert"*

$$Q_c := \{x \in l^2(\mathbb{N}) \,/\, |x_n| \leq |c_n| \text{ pour tout } n \geq 0\}$$

est un compact de $l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 56. *Soit $H = l^2(\mathbb{Z})$ muni de la norme hermitienne standard. On pose $\delta^{(k)} := (\delta_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$,*

$$F = Vect\{\delta^{(k)}\,,\, k \geq 1\} \text{ et } G = Vect\{\delta^{(k)} + k\delta^{(-k)}\,,\, k \geq 0\}.$$

1) Montrer que $\overline{F} \cap \overline{G} = \{0\}$.
2) Montrer que $E := \overline{F} \oplus \overline{G}$ est un sous-espace propre qui est dense.

Exercice 57. *Soit H un espace de Hilbert.*
1) On suppose que la boule unité fermée $B_H = \{x \in H \,/\, ||x|| \leq 1\}$ est compacte. Montrer que H est de dimension finie.
2) On suppose H de dimension infinie. Soit $\mathcal{B} = \{e^{(k)}\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$ une famille orthonormale. Montrer que $\mathcal{B}$ est un fermé borné qui n'est pas compact.

Exercice 58. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On pose $B(\Omega) := L^2(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$.*
1) Soit K un compact de Ω et α tel que $0 < \alpha < dist(K, \partial\Omega)$. Montrer que pour toute $f \in B(\Omega)$,

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} ||f||_{L^2(\Omega)}.$$

2) En déduire que $(B(\Omega), ||\cdot||_{L^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.
3) Montrer que $\Lambda_z : f \in B(\Omega) \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue et estimer $||\Lambda_z||$.

Exercice 59.
1) Soit H un espace de Hilbert. Soit $a \in H \setminus \{0\}$. Montrer que $d(x, \{a\}^\perp) = |< x, a >|/||a||$.
2) Soit $\varphi : f \in L^2([0,1], \mathbb{C}) \mapsto \int_0^1 f(t)dt \in \mathbb{C}$.
i) Montrer que φ est une forme linéaire continue et calculer $||\varphi||$.
ii) Déterminer $(Ker\,\varphi)^\perp$.
iii) Calculer $d(e^t, Ker\,\varphi)$.

Exercice 60. *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Soit $F = \{f \in E \,/\, \int_0^1 f(t)dt = f(0)/2\}$.*
1) Montrer que F est un hyperplan fermé de E.
2) Soit g la fonction constante égale à 1. Montrer que si $||f - g||_\infty \leq 1/3$ alors $f \notin F$.
3) Calculer $d(g, F)$. Montrer que f n'a pas de projection sur F.

Exercice 61. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $B(\omega)$ l'espace de Bergman associé (voir exercice 1.6).*
1) Montrer qu'il existe un unique $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant
i) $\forall z \in \Omega$, $w \mapsto \overline{K(z,w)} \in B(\Omega)$
ii) $\forall f \in B(\Omega)$, $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \int f(\zeta)K(z,\zeta)d\zeta$.
2) Vérifier que $\overline{K(z,w)} = K(w,z)$.
3) On note P le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)$ sur $B(\Omega)$. Montrer que pour toute $f \in L^2(\Omega)$, on a

$$Pf(z) = \int f(\zeta)K(z,\zeta)d\zeta, \ \forall z \in \Omega.$$

Exercice 62. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert. Montrer que la série $\sum x_n$ converge fortement si et seulement si elle converge faiblement.*

Exercice 63. *Soit H un espace de Hilbert.*
1) Montrer que toute suite orthonormée converge faiblement vers 0.
2) Soit (x_n) une suite qui converge fortement vers x et (y_n) une suite qui converge faiblement vers y. Montrer que $< x_n, y_n >$ converge vers $< x, y >$.
3) Soit (x_n) une suite qui converge faiblement vers x. On suppose que $\overline{\lim}||x_n|| \leq ||x||$. Montrer que (x_n) converge fortement vers x.

Exercice 64.
1) Soit (x_n) une suite d'un espace de Hilbert H qui converge simplement vers 0 (on "rappelle" que cela implique que la suite $||x_n||$ est bornée). Montrer qu'il existe une suite extraite x_{n_k} telle que pour tout $k \geq 2$,

$$| < x_{n_i}, x_{n_k} > | \leq \frac{1}{k} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k-1.$$

En déduire que la moyenne de Cesaro de la suite (x_{n_k}) converge fortementvers 0.
2) Soit C un convexe fermé borné de H et $\varphi : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Montrer que φ admet un minimum sur C.

Exercice 65. *Soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu. Montrer que*
1) $||T|| = ||T^*||$.
2) $(ImT)^\perp = KerT^*$.
3) $(KerT)^\perp = \overline{ImT^*}$.

Exercice 66. *Soit H un Hilbert et U un endomorphisme unitaire de H (i.e. $||Ux|| = ||x||$ pour tout $x \in H$).*
1) Montrer que U est continu, inversible, avec $U^{-1} = U^*$.
2) Soit $E = \{x \in H \,/\, Ux = x\}$. Montrer que $(Ker(Id - U^*))^\perp = Im(Id - U)$ et en déduire que $H = E \oplus \overline{Im(Ud - U)}$.
3) On note P le projecteur orthogonal sur E et on pose

$$S_n := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} U^j.$$

Montrer que (S_N) converge vers P.
4) Soit $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On considère

$$T_\alpha : f \in H \mapsto (z \mapsto f(e^{i\alpha} z)) \in H.$$

Montrer que T_α est un endomorphisme unitaire de H et calculer son inverse. Calculer $Ker(Id - T_\alpha)$ et en déduire que

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(e^{ij\alpha} z) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 67. *Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. On considère*

$$T_\lambda : x \in l^2(\mathbb{N}) \mapsto (\lambda_n x_n) \in l^2(\mathbb{N}).$$

A quelle condition T_λ est-il autoadjoint ? (respectivement normal ? positif ? isométrique ? unitaire ?).
Montrer que T_λ est compact si et seulement si λ_n converge vers 0. Calculer alors le spectre de T_λ.

6. Divers, Avariès et non classés

Exercice 68. *On considère l'algèbre $A = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles, munie de la norme de la convergence uniforme. On note G la sous-algèbre des fonctions de classe C^1.*

a) Montrer que G est dense dans A.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de G, fermé dans A.

b.1) Montrer que l'application $f \longmapsto f'$ est continue de F dans A.

b.2) Montrer que la boule unité fermé e B_F de F est compacte.

b.3) Quelle conclusion peut-on tirer pour F ?

Exercice 69. *Soit $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on pose $T_K f(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)ds$.*

a)Montrer que T_K est une application linéaire continue de $\mathcal{C}([0,1])$ dans lui-même.

b) Montrer que $\{T_K f\,;\, \|f\|_\infty \leq 1\}$ est équicontinu. En déduire que, pour tout $r > 0$, l'ensemble $T_K(\overline{B}(0,r))$ est relativement compact.

Exercice 70. *Soit E un espace vectoriel normé.*

a) Soit $a \in E$. Montrer que la translation de vecteur a est un homéomorphisme de $(E, \sigma(E,E'))$ dans lui-même.

b) Montrer que l'addition est faiblement continue de $E \times E$ dans E et que la multiplication par un scalaire est faiblement continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Exercice 71. *Soit E un espace de Banach. Montrer qu'il existe un compact K tel que E s'identifie (en tant qu'espace vectoriel normé) à un sous-espace fermé de $(\mathcal{C}(K), \|\ \|_\infty)$. (on prendra pour K la boule unité fermée de E').*

Exercice 72. *Soient E un espace vectoriel normé , $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $x \in E$.*

a) Soit F un ensemble total dans E'. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si elle est normiquement bornée et si pour tout $f \in F$ la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

b) Si E est un espace de Hilbert admettant $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ pour base hilbertienne, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si elle est normiquement bornée et si pour tout $\alpha \in I$ la suite $(< x_n\,,\, e_\alpha >)$ converge vers $< x\,,\, e_\alpha >$.

c) Si $E = c_0$ ou $E = \ell^p$ avec $1 < p < \infty$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si elle est normiquement bornée et si pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^k. (Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$).

Exercice 73. *Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normiquement vers x si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et $(\|\ x_n\ \|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ x\ \|$.*

Exercice 74. *Soient E un espace vectoriel norméet E' son dual topologique.*

a) Montrer que la topologie normique de E est plus fine que la topologie faible $\sigma(E,E')$. Comparer sur E' la topologie normique $\tau_{\mathcal{N}}$ et les topologies $\sigma(E',E)$ et $\sigma(E',E'')$.

b) Montrer que si E est de dimension finie alors la topologie normique et la topologie faible coïncident.

c) On suppose maintenant que E est de dimension infinie.

c.1) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur E. Montrer que $\bigcap_{i=1}^n Ker(f_i)$ est un sous-espace vectoriel de dimension infinie. En déduire que tout voisinage faible de 0 contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie.

c.2) Montrer que l'intérieur faible de la boule unité (normique) est vide, l'adhérence faible de la sphére unité (normique) est la boule unité fermée.

c.3) Montrer que la topologie normique est strictement plus fine que la topologie faible.

Exercice 75. *Soit E un espace vectoriel normé.*

a) Soit f une forme linéaire sur E. Montrer que f est normiquement continue si et seulement si f est faiblement continue, c'est à dire $\big(E, \sigma(E,E')\big)' = E'$.

b) Soit ℓ une forme linéaire sur E'.

b.1) Montrer que ℓ est continue pour la topologie faible $\sigma(E',E'')$ si et seulement si $\ell \in E''$. b.2) Montrer que ℓ est continue pour la topologie $*$-faible $\sigma(E',E)$ si et seulement si $\ell \in J_E(E)$. (Si ℓ est $*$-faiblement continue montrer qu'il existe $x_1, \cdots, x_n$ dans E tels que le sous-espace vectoriel $\bigcap_{i=1}^n \{f \in E'\,;\, f(x_i) = 0\}$ est inclus dans $\Omega = \{f \in E'\,;\, |\ell(f)| < 1\}$).

Exercice 76. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E dans F. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) T est continue de $(E, \| \ \|)$ dans $(F, \| \ \|)$ (T normiquement continue).

b) T est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$ (T faiblement continue).

c) T est continue de $(E, \| \ \|)$ dans $(F, \sigma(F, F'))$.

Exercice 77. *Montrer que l'adhérence faible d'une partie convexe d'un espace normé est égale à son adhérence normique. (Pour montrer que l'adhérence faible est contenue dans l'adhérence normique, utiliser la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach).*

Exercice 78. *Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.*

a) Montrer qu'il existe un plus petit convexe contenant A, noté $co(A)$ et appelé enveloppe convexe *de A. Montrer que l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de suites finies d'éléments de A.*

b) Montrer que si $x \in E$ est limite faible d'une suite d'éléments de A, alors il est normiquement adhérent à l'enveloppe convexe de A.

12 - *a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x = (x_n)$ de ℓ^∞ on pose $\delta_n(x) = x_n$. Montrer que (δ_n) est une suite de la boule unité du dual de ℓ^∞, n'admettant pas de sous-suite $*$-faiblement convergente.*

b) En déduire qu'un espace compact n'est pas nécessairement séquentiellement compact.

c) Que peut-on déduire du a) à propos de la séparabilité de ℓ^∞ ?

Exercice 79.

Exercice 80.

Exercice 81.

Exercice 82.

Exercice 83.

Exercice 84.

7. Distributions

Exercice 85. *(L). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx)$. Montrer que la suite $(\varphi_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Etudier la convergence de la suite de terme général $\psi_n(x) = (n+1)^{-k}\varphi(nx)$ où $k \in \mathbb{N}$ est fixé.*

Exercice 86. *(L). Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.*
(1). Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on pose $< T_f, \phi >:= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x)dx$, montrer que T_f est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^d$.
(2). Montrer que si f_j converge vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $T_{f_j} \to T_f$ et $D^\alpha T_{f_j} \to D^\alpha T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 87. *(L). Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on note $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$.*
(1). Etudier la convergence de la suite $(\varphi_n)_n$ dans $L^1(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(2). Montrer que la suite $(T_{\varphi_n})_n$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 88. *(L). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'un des énoncés suivant implique t'il l'autre ?*
(1). $< T, \varphi >= 0$.
(2). $\varphi T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 89. *(L). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ constante et égale à 1 sur un voisinage de l'origine. On pose $f_j(x) = \dfrac{j}{j^2x^2+1}\varphi(x)$. Montrer que $T_{f_j} \to T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$*

Exercice 90. *(L). Soient $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^\star), N \in \mathbb{N}$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que : $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de l'origine, $x^{N+1}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que*

$$S \,:\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto < S, \varphi >:= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} f(x)\Big(\varphi(x) - \chi(x)\sum_{j=0}^{N} \frac{\varphi_{(j)}(0)}{j!}x^j\Big)dx$$

définit une distribution d'ordre fini qui prolonge $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^\star)$.
Montrer par contre qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $< T, \varphi >= \int \exp(1/x^2)\varphi(x)dx$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^\star)$. (i.e. la condition $x^{N+1}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est essentielle pour espérer un prolongement de T_f...)

Exercice 91. *(M).*

Exercice 92. *(M). Soit T définie par $< T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x)dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, quel est son ordre ? son support ? Montrer que T n'est pas associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ $\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}$.*

Exercice 93. *(M). Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si f est nulle sur le support de T, a-t-on $fT = 0$?*

Exercice 94. *(M). (Distributions à support dans l'origine). Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $supp\,(T) \subset \{0\}$.*
(1). Montrer que T est d'ordre fini N.
(2). Soient X un espace vectoriel et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_d$, $d+1$ formes linéaires (algébriques) sur X vérifiant $\varphi_i(x) = 0$, $\forall 1 \leq i \leq d \;\; =: \varphi(x) = 0$. En utilisant convenablement le théorème de Hahn-Banach dans $\mathbb{R}^{d+1}$ montrer qu'il existe $c_1, \dots, c_d$ telles que $\varphi = \sum_{k=0}^{d} c_k\varphi_k$.
(3). On admet (voir par exemple le Hirsh & Lacombe ou Zuily) que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\;:\;\varphi^{(\alpha)}(0) = 0\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq N\ =: < T, \varphi >= 0$. Montrer que $T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \delta^{(\alpha)}$.

Exercice 95. *(M). On considère dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation ($\bigstar$) $\quad 2xT' - T = \delta$.*
(1). A l'aide de l'exercice précédent, déterminer les solutions T de ($\bigstar$) telles que $supp\,(T) \subset \{0\}$.
(2). Pour $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on note $U = W_{/\mathbb{R}^\star_+}$, $V = W_{/\mathbb{R}^\star_-}$.
(a). Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^\star_+)\;:\;\big(x^{-1/2}\,U'\big) = \frac{1}{2}x^{-3/2}\big(2xU' - U\big)$.
(b). En déduire la suite d'équivalences $\big(2xW' - W\big)_{/\mathbb{R}^\star_+} = 0 \;\Leftarrow:\; 2xU' - U = 0 \;\Leftarrow:\; \big(x^{-1/2}\,U\big)' = 0 \;\Leftarrow:\; \exists\lambda \in \mathbb{C}\;:\; U = \lambda\sqrt{x}$. (on montrerai de même que $\big(2xW' - W\big)_{/\mathbb{R}^\star_-} = 0 \;\Leftarrow:\; \exists\mu \in \mathbb{C}\;:\; V = \mu\sqrt{-x}$).
(3). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $S = \lambda\sqrt{x}Y(x) + \mu\sqrt{-x}Y(-x)$.
(a). Montrer que $supp\,S \subset \{0\}$.
(b). Montrer que 2xS'-S=2$\big($xS $\big)$'-3S est représentable par une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $2xS' - S = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(4). Déduire de (2.b) que pour toute solution T de ($\bigstar$) il existe S comme dans (3) telle que supp$(T-S) \subset \{0\}$. Donner finalement la forme générale des solutions de l'équation ($\bigstar$).

Exercice 96. *(M). On considère le cône $\mathcal{C}_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \lambda^2 y^2 - x^2 \geq 0,\, y \geq 0\}$ où $\lambda > 0$ est fixé. Calculer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, la distribution $T = \dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}$.*

Exercice 97. *(M).*
(1). Montrer que l'application $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est linéaire continue et injective.
(2). Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\dfrac{\partial}{\partial x_i} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$.

Exercice 98. *(M). Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, montrer que $\big(\log|x|\big)' = vp\,(\frac{1}{x})$ et calculer $\big(vp\,(\frac{1}{x})\big)'$.*

Exercice 99. *(M). Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation : $xT' + T = 0$. Préciser l'ordre et le support des distributions solutions.*

Exercice 100. *(M). Soit $f \,:\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto f(x,y) = \log(x^2+y^2)$.*
(1). Montrer que f est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer Δf dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(2). Calculer Δf_ϵ où $f_\epsilon(x,y) = \log(x^2+y^2+\epsilon^2)$. En déduire la valeur du laplacien de f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
(3). Les dérivées partielles de f sont-elles localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 101. *(M). Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $T = x^p \delta^{(q)}$.*

Exercice 102. *(M). Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur differentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ qui possède une solution élémentaire E (i.e. $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $PE = \delta$ et telle que $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$)*
(1). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur un voisinage de l'origine. Montrer que $\psi := P(\varphi E) - \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
(2). En déduire que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $Pu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 103. *(M). Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall\, 1 \leq i \leq n \,:\, \frac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$*
(1). Si $n = 1$, montrer que $T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
(2). Soit $(\chi_\epsilon)_\epsilon$ une approximation radiale de l'identité (i.e....) et $f_\epsilon = T * \chi_\epsilon$. En décomposant f_ϵ sous la forme $f_\epsilon(s) = f_\epsilon(0) + g_\epsilon(x)$ où $g_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f_\epsilon(tx)}{\partial x_i} dt$, montrer que $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_i}$ converge uniformement vers $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ sur tout compact et qu'il existe une fonction continue g, limite uniforme sur tout compact des g_ϵ
(4). En considérant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \varphi \neq 0$ déduire de (2) que la suite $(f_\epsilon(0))_\epsilon$ converge dans $\mathbb{R}$. Enfin, conclure que $(f_\epsilon)_\epsilon$ converge uniformément vers une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $T = T_\varphi$.

Exercice 104. *(M). soit $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer qu'il n'existe aucune distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $A * T = \delta$.*

Exercice 105. *(M).*

Exercice 106. *(M).*

Exercice 107. *(M). (Rappels sur la convolution des fonctions). Étant données $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on définit $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$.*
(1). Montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.
(2). Montrer que supp$(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$
(3). Soit χ_ϵ une approximation radiale de l'identité, i.e. une famille de fonctions positives $(\chi_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $\epsilon > 0 \,:\, \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\epsilon(x)dx = 1$, $supp(\chi_\epsilon) \subset \overline{B(0,\epsilon)}$. Montrer que $\chi_\epsilon * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ puis $\chi_\epsilon * g \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 108. *(M). Justifiez l'existence des produits de convolution ci-dessous puis calculez-les : $\delta_a * \delta_b$, $\delta_a * H$, $\delta' * H$, $\delta' * 1$, $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[a,b]}$.*

Exercice 109. *(M). On pose avec les notations habituelles $E = \frac{-1}{4\pi r}$*
(1). Calculer ΔE dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.
(2). Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$. Montrer que $u := E * f$ vérifie $\Delta U = f$. En décomposant u sous la forme $u = \chi E * f + (1-\chi)E * f$ (où χ est convenablement choisie), montrer que u est $\mathcal{C}^\infty$ hors du support de f.
(3). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que $\Delta u = 0$. Si $x_0 \in \Omega$ on considère $\theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $\theta \equiv 1$ sur un voisinage de x_0. Montrer que $\theta u = E * \Delta(\theta u)$ et en déduire que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Exercice 110. *(M).*

(1). Soient $(\delta' - \lambda\delta) * H(t)e^{\lambda t}$ *et* $(\delta' - \lambda\delta)^{*\,n} * \dfrac{H(t)e^{\lambda t}t^{n-1}}{(n-1)!}$*. Montrer que ces produits on bien un sens et les calculer.*
(2). En déduire qu'une équation différentielle à coefficients constants possède toujours une solution élémentaire dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Exercice 111. *(M).*
(1). Calculer $(1 * \delta') * H$ *et* $1 * (\delta' * H)$.
(2). Montrer que $(T * S) * U = T * (S * U)$ *si deux de ces distributions sont à support compact.*

Exercice 112. *(M). Pour* $\alpha > 0$ *on pose* $f_\alpha(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}H(x)}{\Gamma(\alpha)}$.
(1). Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ *et que* $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.
(2). Montrer que pour $\alpha > 1$: $f'_\alpha = f_{\alpha-1}$ *et en déduire la limite de* f_α *dans* $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ *quand* α *tends vers zéro.*

Exercice 113. *(M). Soient* $p, q, n, m \in \mathbb{N}$
(1). Calculer $x^p\delta^{(q)}$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
(2). Exprimer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\left(x^p\delta^{(q)}\right) * \left(x^m\delta^{(m)}\right)$ *en fonction d'une seule dérivée de* δ.

Exercice 114. *(L).*

Exercice 115. *(L).*

Exercice 116. *(L).*

Exercice 117. *(L).*

Exercice 118. *(L).*

Exercice 119. *(L).*

Exercice 120. *(L).*

Exercice 121. *(L).*

Exercice 122. *(Distributions à support dans l'origine).* *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant supp$(T) \subset \{0\}$.*
(1). Montrer que T est d'ordre fini N.
(2). Soient X un espace vectoriel et $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_d$, $d+1$ formes linéaires (algébriques) sur X vérifiant $\varphi_i(x) = 0,\ \forall 1 \leq i \leq d \ \ =: \varphi(x) = 0$. En utilisant convenablement le théorème de Hahn-Banach dans $\mathbb{R}^{d+1}$ montrer qu'il existe $c_1, \ldots, c_d$ telles que $\varphi = \sum_{k=0}^{d} c_k \varphi_k$.
(3). On admet (voir par exemple le Hirsh & Lacombe ou Zuily) que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\ :\ \varphi^{(\alpha)}(0) = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq N \ =:\ < T, \varphi >= 0$. Montrer que $T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \delta^{(\alpha)}$.

Exercice 123. *On considère dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $(\bigstar)\quad 2xT' - T = \delta$.*
(1). A l'aide de l'exercice précédent, déterminer les solutions T de $(\bigstar)$ telles que supp$(T) \subset \{0\}$.
(2). Pour $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on note $U = W_{/\mathbb{R}_+^\star}$, $V = W_{/\mathbb{R}_-^\star}$.
(a). Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^\star)\ :\ \big(x^{-1/2}\, U'\big) = \frac{1}{2} x^{-3/2}\big(2xU' - U\big)$.
(b). En déduire la suite d'équivalences $\big(2xW' - W\big)_{/\mathbb{R}_+^\star} = 0 \quad \Leftarrow :\ 2xU' - U = 0 \ \Leftarrow :\ \big(x^{-1/2}\, U\big)' = 0 \quad \Leftarrow :\ \exists \lambda \in \mathbb{C}\ :\ U = \lambda\sqrt{x}$. (on montrerai de même que $\big(2xW' - W\big)_{/\mathbb{R}_-^\star} = 0 \ \Leftarrow :\exists \mu \in \mathbb{C}\ :\ V = \mu\sqrt{-x}$).
(3). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $S = \lambda\sqrt{x}Y(x) + \mu\sqrt{-x}Y(-x)$.
(a). Montrer que supp $S \subset \{0\}$.
(b). Montrer que $2xS$'-S=$2\big(xS\ \big)$'-$3S$ est représentable par une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $2xS' - S = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
(4). Déduire de (2.b) que pour toute solution T de $(\bigstar)$ il existe S comme dans (3) telle que supp$(T - S) \subset \{0\}$. Donner finalement la forme générale des solutions de l'équation $(\bigstar)$.

Exercice 124. *(Rappels sur la convolution des fonctions).* *Étant données $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on définit $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$.*
(1). Montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.
(2). Montrer que supp$(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$
(3). Soit χ_ϵ une approximation radiale de l'identité, i.e. une famille de fonctions positives $(\chi_\epsilon)_{\epsilon > 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $\epsilon > 0\ :\ \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\epsilon(x)dx = 1,\ \text{supp}(\chi_\epsilon) \subset \overline{B(0, \epsilon)}$. Montrer que $\chi_\epsilon * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ puis $\chi_\epsilon * g \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 125. *Justifiez l'existence des produits de convolution ci-dessous puis calculez-les : $\delta_a * \delta_b,\ \delta_a * H,\ \delta' * H,\ \delta' * 1,\ \mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[a,b]}$.*

Petit complément à la convolution & la transformée de Fourier :

Pour terminer voila deux tableaux bien utiles pour mémoriser les interactions entre tous les espaces utilisés, les fléches désignent les injections canoniques et elles sont toutes continues, enfin $p \in [1, +\infty]$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & L^p_c(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & L^p(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathcal{C}'_0(\mathbb{R}^n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathcal{K}'(\mathbb{R}^n)
\end{array}
$$

Enfin voici la table de multiplication de la convolution entre les espaces usuels, le symbole " $-$ " signifiant que la convolution correspondante n'est pas définie et où $P\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions ne croissant pas plus vite qu'un polynôme.

$\star$	$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	$-$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$-$
$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$-$	$-$	$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$-$	$-$
$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$P\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$	$-$	$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	$-$	$-$
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	$-$	$-$	$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	$-$	$-$