Annales de mathématiques
Licence 1ère année

(1er semestre 2003-2004)

13 septembre 2004

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. (Question de cours) On considère un système linéaire (S) de n équations à m inconnues. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ une solution de (S). Rappeler comment on exprime toutes les solutions de (S) en fonction de $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ et des solutions du système homogène (sans second membre) associé à (S). Le démontrer soigneusement.

Exercice 2. Résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & +y & +z & =1 \\ 3x & +3y & -z & =2 \\ x & +y & +4z & =3 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, en distinguant les cas selon les valeurs du paramètre réel m :

$$(\mathcal{S}) = \left\{\begin{array}{ccccc} 2\,x & +\,5\,y & -\,8\,z & = & 8 \\ 4\,x & +\,3\,y & -\,9\,z & = & 9 \\ 2\,x & +\,3\,y & +\,m\,z & = & 7 \\ m\,x & +\,8\,y & -\,7\,z & = & m \end{array}\right.$$

Exercice 4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3,3,\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système linéaire $AX = B$ par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 5. Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Candidat	A	B	C
Mathématiques	7	11	11
Anglais	12	6	16
Informatique	6	10	14
Moyenne	8	9	14

Retrouvez les coefficients de chaque épreuve.

Exercice 6. On calcule la note finale N d'un étudiant à partir de ses notes n_1 n_2 et n_3 dans trois matières affectées des coefficients entiers positifs x, y et z par la formule $N = xn_1 + yn_2 + zn_3$. Les valeurs des coefficients ont été égarées, mais on connait la note finale et les notes par matière de trois étudiants. Pour le troisième étudiant, une des trois notes est manquante et on l'a remplacée par un paramètre λ. On a donc le tableau :

	n_1	n_2	n_3	Note finale N
Etudiant 1 :	4	12	14	114
Etudiant 2 :	8	7	11	92
Etudiant 3 :	12	19	λ	131

On cherche à retrouver les coefficients x y et z, puis à retrouver la ou les valeurs possibles de la note manquante λ.

1. Ecrire le système linéaire traduisant la donnée ci-dessus.

   Ecrire ce système sous une forme échelonnée équivalente (on recommande pour la suite de ne pas changer l'ordre des équations et variables).
2. Discuter suivant la valeur de λ du rang de ce système. En déduire que pour toute valeur de la note λ entre 0 et 20, ce système admet une solution (x, y, z) unique. Exprimer la composante z de cette solution en fonction de λ.
3. En remarquant que les seuls diviseurs de 75 sont 1, 3, 5, 15, 25 et 75, déterminer les valeurs entières de λ entre 0 et 20 pour lesquelles z est un entier positif. Déterminer la (ou les) valeur(s) de λ entre 0 et 20 pour laquelle (ou lesquelles) les trois coefficients sont entiers positifs. Quelle sont alors les valeurs de ces coefficients ?

1.2 Calcul matriciel

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Les produits AX et XA ont-ils un sens ? Et si oui, quelles sont les dimensions des matrices et AX et XA (respectivement) ?
2. On rappelle que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ecrire le système d'équations que doivent vérifier les variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pour que $AX = I_2$.
3. Résoudre le système ci-dessus par la méthode du pivot de Gauss.
4. Vérifiez votre résultat en résolvant le même système par une méthode directe (indication : il y aura une infinité de solutions ; les variables x_1, x_2, x_3, x_5 pourront toutes s'écrire en fonction de x_4).

Exercice 2. On définit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(3,3)$ comme suit : pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$, $a_{ij} = 1$ si $i < j$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

1. Ecrire explicitement la matrice A.
2. Calculer A^2 (soit $A.A$) puis A^3.
3. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?

Exercice 3. (Inversion de matrice) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $M^2 + M + I_4 = 0$, où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.
2. En déduire que $M^3 = I_4$.
3. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 4. (Inversion de matrice) Soit $A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 = A + I_n$. Montrez que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5. (Transposition de matrice) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(m,n,\mathbb{R})$, on introduit $A^T \in \mathcal{M}(n,m,\mathbb{R})$ par $[A^T]_{ij} = A_{ji}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

1. Montrez que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}(m,n,\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}(n,p,\mathbb{R})$, on a $(AB)^T = B^T A^T$.
2. Soient $A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{M}(n,1,\mathbb{R})$ et soit $A \in \mathcal{M}(m,n,\mathbb{R})$ la matrice dont les lignes sont $A_1^T, \cdots, A_m^T$.

   Montrez que pour tout $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(m,1,\mathbb{R})$, on a $A^T Y = \sum_{j=1}^m Y_j A_j$.

1.3 Espaces vectoriels

1.3.1 Famille libre, famille génératrice, base

Exercice 1. $\mathbb{R}^2$, muni de la loi interne ("addition") $+$ usuelle et de la loi externe ("multiplication par un scalaire") définie par $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$, est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. (Question de cours) Soient $u_1, \cdots, u_m$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. Établir correctement les deux définitions suivantes.

a) $\{u_1, \cdots, u_m\}$ est un système libre si

$$\left\{\begin{array}{c}\text{il existe une}\\ \text{pour toute}\end{array}\right.$$

relation $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, alors les coefficients $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{sont tous non nuls}\\ \text{sont tous nuls}\\ \text{ne sont pas tous nuls}\end{array}\right.$$

b) $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{est un système générateur}\\ \text{n'est pas un système générateur}\end{array}\right. \text{ de } E \text{ si}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{il existe un}\\ \text{pour tout}\end{array}\right. \text{ vecteur } \left\{\begin{array}{l}\mathrm{v} \in E\\ \mathrm{v} \in S\end{array}\right.$$

alors v est combinaison linéaire d'éléments de

$$\left\{\begin{array}{l}\text{E}\\ \text{S.}\end{array}\right.$$

Exercice 3. Soit le système $S = \{e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (1, 1, 2),\ e_3 = (1, 2, 3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = (5, 7, 12)$ dans cette base.

Exercice 4. On munit $F = \left\{A \in \mathcal{M}_{2,2} \ :\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\right\}$ des opérations usuelles des matrices.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ est une famille libre.
3. Montrer que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de F.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} m \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminez les valeurs possibles de m pour que (u, v) soit un système libre et complétez ce système avec un vecteur w pour que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

1.3.2 Sous-espaces vectoriels

Exercice 6. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et E l'ensemble des polynômes P de $\mathcal{P}_3$ tels que $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$.

1. Rappeler la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base d'un espace vectoriel.
2. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_3$.
3. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ un polynôme de $\mathcal{P}_3$.
   Ecrire les conditions $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$ sous forme d'un système linéaire en les inconnues a_i.
   Quel est le rang de ce système ?
   Résoudre ce système.
4. En déduire une famille de polynômes formant une base de E. (On vérifiera soigneusement qu'ils forment une base).
   Quelle est la dimension de E ?

Exercice 7. **(Question de cours)** Soit E un espace vectoriel, et soient V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. Est-ce que $V \cap W$ est un sous-espace vectoriel de E ? Si oui le démontrer, si non, justifier la réponse.
2. Même question pour $V \cup W$.

Exercice 8. On désigne par E l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $2x + y - z = a$, où a est un réel donné. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que E soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.

1. Montrez que l'ensemble F des matrices
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.
2. Montrez que le système (I, J), où I est la matrice identité d'ordre 3 et
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est libre.
Enoncez le théorème de la base incomplète. Complétez (I, J) par une matrice K telle que (I, J, K) soit une base de F.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, soit
$$F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = m\} \quad m \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminez m_0 pour que F_{m_0} soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient les vecteurs
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Rappelez la définition d'un système libre, d'un système générateur, d'une base. Le système (u, v) est-il libre ? Montrez que (u, v) est une base de F_{m_0}.

Exercice 11. Soit $E = \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de types 2 et soit
$$F = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0 \right\}.$$
Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminez une base de E.

Exercice 12. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On considère $F \subset E$ donné par
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E : x_2 = x_3 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que
$$S := \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$
est un système générateur de F.
3. Le système S est-il un système libre ? (justifier votre réponse).
4. Trouver une base de F (vous pouvez vous dispenser de démonstration).

1.4 Applications linéaires

1.4.1 Injectivité, surjectivité, noyau, image

Exercice 1. (Question de cours) Soient E et F des espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E, et que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 2. On considère une application définie d'un ensemble E vers un ensemble F.

1- Quand dit-on que cette application est : a) surjective ? b) injective ?

2- Soit $E = F = \{0, 1\}$. Déterminer toutes les applications de E dans F en précisant si elles sont surjectives , injectives ou les deux.

Exercice 3. Soient E, F, G des espaces vectoriels, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que l'image de f est contenue dans le noyau de g. Est-ce que la réciproque est vraie ?

1.4.2 Matrice d'une application linéaire

Exercice 4. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E. On note T l'endomorphisme de E défini par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$, $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de T.
2. Ecrire la matrice de T dans la base $\mathcal{E}$.
3. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$,$f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E.
4. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3.
5. En déduire la nature de T.
6. Ecrire la matrice de T dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit $f : E \to E$ l'application qui à un polynôme P associe sa dérivée P'. Soit $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. Vérifier que f est une application linéaire. Préciser son image et son noyau.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
3. Déterminer la matrice de $f \circ f$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 6. Rappel. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F. La notation $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ désigne la matrice d'une application linéaire de E dans F relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

On note $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$, on rappelle que c'est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\phi(x,y) = (4x+y, 3x+2y).$$

1- Montrer que l'application ϕ est linéaire.
2- Calculer $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ en expliquant comment on obtient le résultat.

Exercice 7. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique

$$\mathcal{B}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique

$$\mathcal{B}_4 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ 4x_2 - 4x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de ϕ, $M_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}(\phi)$ dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$ respectivement.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\phi = \{u \in \mathbb{R}^3 : \phi(u) = 0\}$, et en trouver une base.
3. Déterminer une base de l'image de ϕ, qui est le sous espace $\mathrm{Im}\phi = \phi(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^4$.
4. Donner la matrice de ϕ dans les nouvelles bases

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(on ne demande pas de vérifier que ce sont des bases).

Exercice 8. On note par $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ l'application identité de $\mathbb{R}^2$ et $e = \{(1,0),(0,1)\}$. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\phi(x,y) = (4x + y, 3x + 2y).$$

1- Montrer que l'application ϕ est linéaire.
2- Calculer $M_e^e(\phi)$.
3- On considère l'application linéaire $\psi_1 = \phi - id_{\mathbb{R}^2}$
  3.1- Montrer que le noyau de ψ_1 est un sous espace vectoriel.
  3.2- Calculer une base du noyau de ψ_1. On note f_1 cette base.
4- Déterminer une base du noyau de $\psi_5 = \phi - 5id_{\mathbb{R}^2}$. On note f_5 cette base.
5- Soit $f = f_1 \cup f_5$. Déterminer $M_f^f(\phi)$.

Exercice 9. (Matrice de passage) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B} = (i,j,k)$ une base de E. Soit $\mathcal{B}' = (j+k-i, k+i-j, i+j-k)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Déterminer les matrices $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)$ et $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)$ de l'application identité Id dans les bases $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ et $(\mathcal{B}',\mathcal{B})$.
2. Soit l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$ (Ind : déterminer l'expression matricielle de la relation $f = Id \circ f \circ Id$).
3. Montrer par récurrence que

$$\left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)\right)^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

4. Calculer $\left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)\right)^{10}$ et en déduire $\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right)^{10}$.

Chapitre 2

Analyse

2.1 Nombres réels

Exercice 1. (Majorant, minorant, bornes supérieure et inférieure)

Partie I

1. Donner la définition d'un majorant, puis de la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$.
2. Traduire ces définitions à l'aide des symboles $\in$, $\forall$ et $\exists$.
3. Rappeler le résultat concernant l'existence d'une borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$.

Partie II

On considère la partie $A = \{e^{-n},\ n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Répondre à chacune des questions ci-dessous *en justifiant à chaque fois votre réponse par une preuve utilisant la partie I.*

1. La partie A est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
2. Les bornes supérieures et inférieures de A existent-elles ? Si oui, quelle est leur valeur ?
3. La partie A admet-elle un plus grand élément ? plus petit élément ?

Exercice 2. (Majorant, borne supérieure) Soit A un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On pose (pour cet exercice seulement !)

$$|A| := \{|x|, x \in A\}$$

(c'est-à-dire l'ensemble des valeurs absolues de chaque élément de A).

1. Déterminer $|A|$ dans le cas particulier où $A = A_1 = [-2, 1[$.
2. A_1 admet-il un plus grand élément, et si oui, quel est-il ? (vous pouvez vous dispenser de démonstration).
3. Déterminer $\sup A_1$ (vous pouvez vous dispenser de démonstration).
4. $|A_1|$ admet-il un plus grand élément, et si oui, quel est-il ? (vous pouvez vous dispenser de démonstration).
5. Déterminer $\sup |A_1|$ (vous pouvez vous dispenser de démonstration).
6. On revient au cas général. Montrer que tout majorant de $|A|$ doit aussi être un majorant de A.
   En déduire que, pour tout sous-ensemble borné A de $\mathbb{R}$, $\sup |A| \geq \sup A$.
   Cette inégalité peut-elle être stricte ?

Exercice 3. (Bornes supérieure et inférieure) Soit $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrez que A possède des bornes supérieures et inférieures et calculez-les.

Exercice 4. (Bornes supérieure et inférieure) Rappeler la définition de la borne supérieure d'un ensemble. Donner la borne inférieure de l'ensemble suivant (en justifiant la réponse) :

$$E := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Est-ce que cet ensemble à un minimum ?

Exercice 5. (Bornes supérieure et inférieure) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Supposons que $A \cap B$ est non vide et que A et B sont majorées. Montrer que

$$\sup(A \cap B) \leq \inf(\sup(A), \sup(B)).$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ et $A = [a, b[\cup\{b+1\}$, $B = [a, b[\cup\{b+2\}$. Déterminez $\sup(A \cap B)$ et $\inf(\sup(A), \sup(B))$.
Trouvez ensuite deux parties A et B $(A \neq B)$ de $\mathbb{R}$ telles que

$$\sup(A \cap B) = \inf(\sup(A), \sup(B)).$$

2.2 Suites numériques

Exercice 1. (Question de cours) Redémontrer que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \times v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers une limite l (dans $\mathbb{R}$). Quelle est la limite de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$?

Si $\lim_{n\to\infty} |u_n| = l$, est-ce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers une limite ? Si oui, que peut être cette limite ? Le démontrer.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}.$$

a) Montrer par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
c) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle bornée ?

Exercice 4. Soit $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Etudier le comportement en l'infini de u selon la valeur du réel x.

Exercice 5. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}}$.

1. Comparer u_1 et u_0. Démontrer par récurrence que (u_n) est une suite strictement monotone.
2. Démontrer que si (u_n) converge vers une limite finie l, alors nécessairement, $l = \sqrt{l}$. En déduire les valeurs possibles pour l.
3. La suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ? (Justifiez votre réponse).
4. Conclure sur la nature de la suite (u_n) (convergente ou divergente).
   Si elle converge, préciser la valeur de sa limite.

Exercice 6. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{8}.$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et donner l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \leq x$.
2. On pose $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{u_n^2}{8}.$$

   Calculer u_0, u_1, u_2.
   Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer par récurrence que $u_n \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 7. On pose $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Les quatre questions peuvent être traitées indépendamment.

1. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle bornée ? Si oui, donnez des nombres réels M_1 et M_2 tels que $M_1 \leq u_n \leq M_2$ pour tout entier n.
2. La suite (u_n) est-elle monotone, croissante ou décroissante ?
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, donnez sa limite (expliquez comment vous la trouvez).
4. Calculer $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ (vous pouvez vous dispenser de démonstration).

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n =$ le chiffre des unités dans l'écriture décimale de n. Par exemple, $u_2 = 2$, $u_{12} = 2$, $u_{13} = 3$, $u_{53} = 3$, $u_{4437} = 7$, etc.
Les trois questions peuvent être traitées indépendamment. Vous pouvez donner des explications intuitives, pourvu qu'elles soient justes.

1. La suite (u_n) est-elle bornée ? Si oui, donnez des nombres réels M_1 et M_2 tels que $M_1 \leq u_n \leq M_2$ pour tout entier n.
2. La suite (u_n) est-elle monotone, croissante ou décroissante ?
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, donnez sa limite (expliquez comment vous la trouvez).
4. Calculer $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ (vous pouvez vous dispenser de démonstration).

Exercice 9. (Suites adjacentes) Montrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 10. (Suites adjacentes) Soit $a, b > 0$, $a > b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de manière récurrente par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$v_0 = b \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   Indication : Il sera utile de commencer par déterminer le signe de $u_n - v_n$.
   Il sera aussi utile d'en déduire que $-2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq -2v_{n-1}$.

2. Montrez que
$$\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2},$$
   où l désigne la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11. (Suites adjacentes) On considère la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \ n \geq 0.$$

1. Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont des suites adjacentes.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Exercice 12. Calculer le terme général des suites suivantes et étudier leur convergence :

a) $3u_n = 7u_{n-1} - 2u_{n-2}$, $u_0 = -1$, $u_1 = 3$.

b) $6u_n = 5u_{n-1} - u_{n-2}$, $u_0 = -1$, $u_1 = -1/6$.

Exercice 13. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}, \ \forall n \geq 0.$$

a) Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.
Faites l'étude des fonctions f et $f \circ f$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer leurs points fixes respectifs sur $]0, +\infty[$.
b) Vérifier que $1 \leq u_n \leq 3$, $\forall n \geq 0$.
c) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est croissante et que la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est décroissante.
d) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et déterminer sa limite éventuelle.

Exercice 14. Soit A une matrice 3x3, et $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des triplets $(X_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ de suites réelles tels que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Le but de ce problème est de déterminer $\mathcal{E}_A$ pour différentes matrices A.

1. Soit D la matrice diagonale :
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que les éléments de $\mathcal{E}_D$ sont des triplets de suites géométriques que l'on précisera.
   (b) Ecrire le terme général de chacune de ces suites lorsque $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$.
   (c) Précisez la convergence et les limites éventuelles de ces trois suites (justifiez votre réponse).
2. On considère la matrice 3x3
$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$
et les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $M \cdot X = Y$ en exprimant l'inconnue X en fonction du second membre Y. En déduire que la matrice M est inversible et donner la matrice inverse M^{-1}.
3. Soit A la matrice $M \cdot D \cdot M^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice A.

(b) Déduire de la relation $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$ que le triplet (X_n) appartient à $\mathcal{E}_A$ si et seulement si le triplet $(X'_n) = (M^{-1}X_n)$ appartient à $\mathcal{E}_D$ (cette question peut se traiter sans connaitre le résultat de la question précédente).

(c) En déduire l'expression de l'élément (X_n) de $\mathcal{E}_A$ de premier terme $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$.

Chapitre 3

Dénombrement et probabilité

Exercice 1. Soit A, B, C trois sous-ensembles de Ω.

1. Montrer que
$$(A \cup B) \cap C \quad \subset \quad A \cup (B \cap C).$$

2. Montrer que
$$\Big((A \cup B) \cap C\Big) \cup \Big((A \cup C) \cap B\Big) \quad \subset \quad A \cup (B \cap C).$$

3. Soit $\Omega = \{0, 1\}$, donner un exemple de A, B et C tel que
$$\Big((A \cup B) \cap C\Big) \cup \Big((A \cup C) \cap B\Big) \quad \neq \quad A \cup (B \cap C).$$

Exercice 2. (Question de cours)

1. Rappeler l'expression du nombre d'arrangements de p éléments parmi n, et du nombre de combinaisons de p éléments parmi n.
2. Montrer la formule pour le nombre d'arrangements.

Exercice 3.

1. Rappeler la définition d'une application injective de E dans F.
2. On suppose que E est fini de cardinal k et F est fini de cardinal n. Quel est le nombre d'applications injectives de E dans F ?
3. 10 personnes veulent s'assoir sur un banc de 4 places seulement : 4 s'assoient et 6 restent debout. De combien de façons différentes ceci peut-il se faire ? (justifiez votre réponse).

Exercice 4. On choisit au hasard un code à quatre chiffres. Modéliser l'expérience aléatoire correspondante et calculer la probabilité des événements suivants :

A : "les quatre chiffres sont tous distincts" ;

B : "les quatre chiffres sont rangés par ordre strictement croissant" ;

C : "le produit des quatre chiffres est pair" (Ind : calculer $\mathbb{P}(\bar{C})$) ;

D : "la combinaison ne comporte que deux chiffres distincts (Par exemple : 1311, 1331, 3331, ...)".

Exercice 5. Soit $E = \{1, \cdots, n\}$. On souhaite déterminer le nombre de manière de décomposer E en la réunion de trois ensembles disjoints P, Q et R ayant respectivement p, q et r éléments, où $p + q + r = n$.

1. On pose $F = P \cup Q$, quel est nombre d'éléments de F ? Déterminer le nombre de manières possibles de décomposer E en la réunion de F et de R.
2. Déterminer le nombre de manière de décomposer F en la réunion de P et de Q, ces deux ensembles ayant p et q éléments respectivement.
3. En déduire, en fonction de p, q et r, le nombre de manières de décomposer E en $P \cup Q \cup R$.

Exercice 6.

1. Donner sans démonstration le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à q éléments.
2. On veut calculer le nombre d'entiers naturels de n chiffres comportant deux cinq exactement.
   (a) On suppose que le premier chiffre est un cinq.
      i. Quel est le nombre de possibilités de placer le deuxième cinq ?
      ii. Appliquer la question 1 pour donner le nombre de possibilités de placer les $n - 2$ chiffres restants ?
      iii. En déduire le nombre d'entiers de n chiffres comportant deux cinq et commençant par un cinq.
   (b) On suppose que le premier chiffre n'est pas un cinq.
      i. Quel est le nombre de possibilités de placer le premier chiffre.
      ii. Quel est le nombre de possibilités de placer les deux cinq.
      iii. Quel est le nombre de possibilités de placer les $n-3$ autres chiffres restants.
      iv. En déduire le nombre d'entiers de n chiffres comportant deux cinq et ne commençant pas par un cinq.

(c) En déduire le nombre d'entiers de n chiffres comportant deux cinq exactement.

Exercice 7.

1. Soit $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $p(\omega) = c(1 + \omega^2)$ et $X(\omega) = \omega^2$.
   (a) Déterminer la constante c pour que (Ω, p) soit un espace dénombrable probabilisé.
   (b) Déterminer la loi de X.
2. Lors d'une galette des rois, on présente deux gâteaux : une brioche et une frangipane. La cuisinière a glissé une fève dans l'un des deux après avoir tiré une pièce à pile ou face. Comme Jean se sert une seule fois de la brioche et deux fois de la frangipane, il a une chance sur six d'être le roi quand la fève est dans la brioche, et une chance sur trois quand la fève est dans la frangipane.
   On notera $F = b$ quand la fève est dans la brioche et $F = f$ quand la fève est dans la frangipane.
   On notera aussi $R = 1$ quand Jean devient roi et $R = 0$ sinon.
   (a) Avec ces notations que représente le $1/6$ dans l'énoncé ci-dessus ?
   (b) Calculer $\mathbb{P}(R = 1)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(F = f \mid R = 1)$.

Exercice 8. Dans chaque partie d'un jeu de 32 cartes, on vous distribue au départ cinq cartes au hasard.

1. Quelle est la probabilité p d'avoir l'as de pique au début d'une partie ?
2. Vous jouez 4 parties. Quelle est la probabilité d'avoir eu l'as de pique au départ dans deux parties (exactement deux parties, ni plus, ni moins) ? *Donnez si possible le résultat d'abord en fonction de p afin d'obtenir des points même si vous avez fait une erreur dans la question précédente.*

Exercice 9. Deux usines sous-traitantes A et B produisent des microprocesseurs pour un fabricant d'ordinateurs.

On a constaté que l'usine A livre 3% d'articles défectueux, l'usine B livre 1% d'articles défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'un lot de 10 microprocesseurs provenant de l'usine A en contienne exactement 3 qui sont défectueux ? Au plus 2 qui sont défectueux ?
2. A fournit 20% des besoins du fabricant, B fournit 80% des besoins. On teste un lot de 10 microprocesseurs arrivés d'une même usine, et on en

trouve 3 qui sont défectueux. Quelle est la probabilité que ce lot vienne de l'usine A ?

Exercice 10. Une compagnie aérienne dispose d'un avion qui peut accueillir 38 passagers. On sait que parmi les passagers qui réservent, il y en a 10% qui ne se présentent pas à l'embarquement. On suppose que chaque passager vient ou ne vient pas de façon indépendante des autres passagers. La compagnie accepte 41 réservations.

1. Donner la probabilité que k passagers se présentent à l'embarquement (où k est un nombre entier entre 0 et 41). On pourra noter X la variable aléatoire "nombre de passagers présents à l'embarquement".
2. Quel est le nombre moyen de passagers (espérance du nombre de passagers) qui se présentent à l'embarquement ?
3. Quel est la probabilité qu'il y ait plus de passagers présents à l'embarquement que de places (à cause des surréservations) ?
4. La compagnie s'engage à payer 300 euros à tout passager à qui on doit refuser l'embarquement à cause des surréservations. Soit Y la variable aléatoire "nombre de passagers à qui on doit refuser l'embarquement". Donner l'espérance de Y, et celle des pénalités payées aux passagers par la compagnie.
5. La compagnie considère que chaque siège vide de l'avion représente un manque à gagner de 100 euros. Soit Z la variable aléatoire "nombre de sièges vides". Trouver une relation entre X, Y et Z. En déduire l'espérance de Z.
6. (Question facultative) Le nombre de 41 réservations acceptées représente-t-il un choix raisonnable pour la compagnie, dont le but est de maximiser son profit ? Peut-on faire un meilleur choix ?

Index