Feuille 2
Dérivées partielles, différentielle totale

Exercice I. Soit l'opérateur de Laplace n-dimensionnel

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

a) Montrer que pour $n \geq 3$

$$\Delta_n \frac{1}{|x|^{n-2}} = 0 \text{ pour tout } x \neq 0$$

où $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne.
b) Pour $n = 2$ on a

$$\Delta_2 \ln \frac{1}{|x|} = 0 \text{ pour tout } x \neq 0.$$

Exercice II. a) Calculer l'expression de toutes les dérivées partielles d'ordre au plus 3 de la fonction

$$g(x, y) = \frac{xy}{x - y}.$$

Donner l'expression du gradient ∇g de g.
b) Calculer l'expression de toutes les dérivées partielles d'ordre au plus 2 de la fonction

$$h(x, y, z) = -x^2 z - e^x \cos y.$$

Donner l'expression de son gradient $\nabla h(x, y, z)$.

Exercice III. a) Grâce à la différentielle totale on peut obtenir des estimations d'erreurs de mesures physiques. Considérons le pendule mathématique de longueur ℓ. Il est connu (le vérifier !) que la période de petites oscillations est donnée par la relation

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Supposons que ℓ et g ont été mesurés avec une erreur relative maximale de $0,1\%$. Quelle est l'erreur relative maximale de T ?
b) Utiliser la différentielle totale pour calculer approximativement la valeur

$$8.94\sqrt{9.99 - (1.03)^3}.$$

Exercice IV.
a) On considère les expressions

$$dz = ydx - xdy \qquad \text{et} \qquad dz = y^2 dx + 2xydy$$

Décider dans chaque cas s'il s'agit d'une différentielle totale, et le cas échéant, déterminer une fonction $f(x, y)$ dont elle dérive.
b) Montrer que $dQ = C_v dT + \frac{nRT}{V} dV$ n'est pas une différentielle totale.
Montrer que $\frac{dQ}{T}$ est une différentielle totale.

Exercice V. Calculer le plan tangent au graphe de la fonction $z(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$.