Théorie de Galois différentielle, multisommabilité et phénomènes de Stokes

J. Cano
J.P. Ramis

Version préliminaire, à diffusion restreinte.

Table des matières

Chapitre 1

Théorie de Galois Différentielle Classique

1.1 Rappels classiques

Soient K un corps commutatif et $f(X)$ un polynôme sur K sans racine multiple. Soit E un corps de rupture pour $f(X)$ sur K, i.e. il existe des éléments $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans E tels que $E = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \xi_i)$. Le groupe de Galois du polynôme $f(X)$ sur le corps K, $\mathrm{Gal}_K(f)$, est le groupe des isomorphismes du corps E qui laissent fixe tout élément de K. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(f)$, on a $f(\sigma(\xi_i)) = \sigma(f(\xi_i)) = 0$, $1 \leq i \leq n$, donc la restriction de σ à l'ensemble, $\bar{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, des racines de $f(X)$ dans E est une permutation des racines de $f(X)$. Soit $S_{\bar{\xi}}$ le groupe des permutations de l'ensemble $\bar{\xi}$. Alors la restriction à $\bar{\xi}$ induit l'homomorphisme de groupes $\mathrm{Gal}_K(f) \to S_{\bar{\xi}}$. Cet homomorphisme est injectif car $E = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. On peut donc considérer $\mathrm{Gal}_K(f)$ un sous-groupe de $S_{\bar{\xi}}$. Alors $\mathrm{Gal}_K(f)$ jouit les propriétés suivantes :

(1) Soit $\alpha \in E$ vérifient $\sigma(\alpha) = \alpha$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(f)$, alors $\alpha \in K$.

(2) Soit $\sigma \in S_{\bar{\xi}}$. Alors $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(f)$ si et seulement si pour tout polynôme $P(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ on a

$$P(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \Rightarrow P(\sigma(\xi_1), \ldots, \sigma(\xi_n)) = 0.$$

La propriété (2) peut s'interpréter en disant que le groupe de Galois de $f(X)$ est formé par les permutations de ses racines qui sont "indiscernables" de l'identité au regard du corps de base K.

On montre (2). Soit $\phi : K[X_1, \ldots, X_n] \to E$ l'homomorphisme d'anneaux tel que $\phi|_K = \mathrm{Id}|_K$ et $\phi(X_i) = \xi_i$, et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier $\mathrm{Ker}\phi$, alors l'homomorphisme ϕ induit un isomorphisme entre le corps E et le corps de fractions de l'anneau intègre $K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}$. Soit τ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ telle que la permutation $\sigma(\xi_i) = \xi_{\tau(i)}$ satisfait la propriété (2). On considère l'isomorphisme $\psi : K[X_1, \ldots, X_n] \to K[X_1, \ldots, X_n]$ défini par $\psi|_K = \mathrm{Id}|_K$ et $\psi(X_i) = X_{\tau(i)}$. Alors $\psi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$; en effet, $\psi(P)(\xi_1, \ldots, \xi_n) = P(\sigma(\xi_1), \ldots, \sigma(\xi_n))$ donc $\psi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$; si $\psi(\mathfrak{p})$ était strictement contenu dans $\mathfrak{p}$ on aurait une chaîne infinie strictement croissante d'idéaux $\mathfrak{p} \subseteq \psi^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq \psi^{-1}(\psi^{-1}(\mathfrak{p})) \subseteq \ldots$, en contradiction avec la noethérianité de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Donc ψ s'étend à un isomorphisme de E dans E qui envoie ξ_i sur $\xi_{\tau(i)}$.

Exemple 1.1 Soit $f(X) = X^3 - bX^2 + cX - d \in \mathbb{Q}[X]$ sans racines sur $\mathbb{Q}$ (en particulier, sans racine multiple). Notons ξ_1, ξ_2, ξ_3 les racines de $f(X)$ dans $\mathbb{C}$, $\delta = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)$ et $\Delta = \delta^2$ (on rappelle que $\Delta = -4b^3d + b^2c^2 + 18abc - 4c^3 - 27d^2 \in \mathbb{Q}$). Si Δ a une racine carrée dans $\mathbb{Q}$ ($\delta \in \mathbb{Q}$), on considère le polynôme $R(X_1, X_2, X_3) = (X_1 - X_2)(X_2 - X_3)(X_3 - X_1) - \delta \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$; si τ est une permutation de trois éléments on a que $R(\xi_{\tau(1)}, \xi_{\tau(2)}, \xi_{\tau(3)})$ est égal à zéro si et seulement si τ est paire, donc le groupe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ est contenu dans les permutations paires de trois éléments (en fait, on a l'égalité puisque f n'a pas des racines dans $\mathbb{Q}$, donc $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \neq \{1\}$). Si Δ n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{Q}$, alors $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ est le groupe de permutations de trois éléments (si $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ est un sous-groupe propre alors il doit être contenu dans le sous-groupe des permutations paires, donc δ serait invariante par $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$, et alors $\delta \in \mathbb{Q}$).

1.2 Rappels d'algèbre différentielle.

Un *anneau différentiel* ordinaire est une paire (A, δ) où A est un anneau commutatif et δ est une dérivation sur A, c'est à dire, une application

$$\delta : A \to A$$

satisfaisant

$$\begin{aligned} \delta(a+b) &= \delta(a) + \delta(b), \qquad a, b \in A, \\ \delta(a \cdot b) &= a \cdot \delta(b) + \delta(a) \cdot b, \quad a, b \in A. \end{aligned}$$

Dans le cas où A est un corps, on parlera de *corps différentiel.* L'ensemble

$$\mathrm{Const}(A) = \{a \in A \mid \delta(a) = 0\}$$

est un sous-anneau (un sous-corps, si A est un corps) de A : *le sous-anneau des constantes.*

Soient (A_1,δ_1) et (A_2,δ_2) deux anneaux différentiels ordinaires. Un *morphisme d'anneaux différentiels* $f:(A_1,\delta_1)\to(A_2,\delta_2)$ est un morphisme d'anneaux $f:A_1\to A_2$ qui satisfait $f(\delta_1(a))=\delta_2(f(a))$ pour tout élément de l'anneau A ; si le morphisme f est injectif on dira que (A_2,δ_2) est une *extension différentielle* de (A_1,δ_1) via f. Soient $f_1:A\to B_1$ et $f_2:A\to B_2$ deux extensions différentielles de A. On dit que $\phi:B_1\to B_2$ est un A-*morphisme différentiel* si il est un morphisme d'anneaux différentiels tel que $\phi\circ f_1=f_2$.

Dorénavant on omettra l'adjectif "ordinaire" pour les anneaux différentiels. On notera par δ la dérivation de l'anneau différentiel quel qu'il soit, et par $a',a'',\ldots,a^{(n)}$ les éléments $\delta(a),\delta(\delta(a)),\ldots,\delta^{(n)}(a)$, avec la convention $a=a^{(0)}=\delta^{(0)}(a)$.

Un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau différentiel A, est dit *idéal différentiel* s'il est stable par la dérivation, c'est à dire, si $\delta(\mathfrak{a})\subseteq\mathfrak{a}$. Le noyau d'un morphisme différentiel est un idéal différentiel. Si A_0 est un sous-anneau (resp. un sous-corps) de A tel que $\delta(A_0)\subseteq A_0$ on dira qu'il est un *sous-anneau différentiel* (resp. *sous-corps différentiel*). Soit Σ un sous-ensemble de A, on notera par $A_0\{\Sigma\}$ (resp. par $A_0<\Sigma>$) le plus petit sous-anneau différentiel (resp. sous-corps différentiel) de A qui contienne A_0 et l'ensemble Σ ($A_0\{\Sigma\}$ existe toujours ; $A_0<\Sigma>$ existe pourvu que A soit un corps).

Soit $\mathfrak{a}\subseteq A$ un idéal différentiel de l' anneau différentiel A. L'anneau $A/\mathfrak{a}$ est un anneau différentiel muni de la dérivation δ_0 définie par $\delta_0(a\mathrm{mod}\,\mathfrak{a})=\delta(a)\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}$. Si $S\subseteq A$ est une partie multiplicative de A, on munit l'anneau de fractions $S^{-1}A$ d'une structure différentielle par

$$\delta(\frac{a}{s})=\frac{\delta(a)\cdot s-a\cdot\delta(s)}{s^2}.$$

Dans les deux cas, les applications naturelles, $A\to A/\mathfrak{a}$ et $A\to S^{-1}A$, sont différentielles.

Soient $A\subseteq B$ et $A\subseteq C$ deux extensions différentielles. L'anneau produit tensoriel, $B\otimes_A C$, est muni de la dérivation

$$\delta(\sum b_i\otimes c_i)=\sum(\delta(b_i)\otimes c_i+b_i\otimes\delta(c_i)),\quad b_i\in B,\ c_i\in C.$$

Exercice 1.2 Soit A un anneau différentiel. On considère l'anneau des polynômes $A[X_i;i\in I]$ sur A en les indéterminées X_i, $i\in I$, où I est un ensemble arbitraire. Soit $\{P_i(X)\}_{i\in I}$ une famille des polynômes de $A[X_i;i\in I]$. Montrer qu'il existe une unique dérivation δ sur $A[X_i;i\in I]$ qui étend la dérivation de A et telle que $\delta\big(X_i\big)=P_i(X)$, $i\in I$.

Soit A un anneau différentiel. On considère l'anneau des polynômes $A[y_{i,j}]$ sur A en les indéterminées $y_{i,j}$, $1in$, $j\in\mathbb{N}$. Il existe une dérivation unique

δ sur $A[y_{i,j}]$ qui étend la dérivation de A et telle que $\delta(y_{i,j}) = y_{i,j+1}$. On appellera $A[y_{i,j}]$ *l'anneau des polynômes différentiels* sur A dans les indéterminées différentielles $y_1, \ldots, y_n$, et il sera noté $A\{y_1, \ldots, y_n\}$. Il satisfait la propriété suivante : soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux différentiels, soient $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de B ; alors il existe un unique morphisme d'anneaux différentiels $\Phi : A\{y_1, \ldots, y_n\} \to B$ tel que $\Phi|_A = f$ et $\Phi(y_{i,0}) = b_i$ (donc $\Phi(y_{i,j}) = b_i^{(j)}$). Pour alléger la notation, on pose $y_i = y_{i,0}$, et dans le cas d'une seule indéterminée différentielle y on pose $A\{y\} = A[y, y', y'', \ldots, y^{(k)}, \ldots]$ où les éléments $y, y', y'', \ldots, y^{(k)}, \ldots$ sont des indéterminées sur A et on a $\delta(y) = y'$, $\delta(y^{(k)}) = y^{(k+1)}$.

1.3 Équations différentielles linéaires, systèmes différentiels, connexions.

Soit (K, δ) un corps différentiel. Un *système différentiel d'ordre un et rang* n sur le corps différentiel K est donné par

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ et $y_1, \ldots, y_n$ sont des indéterminées différentielles sur K. On notera ce système par (Δ_A), ou bien par (Δ) s'il n'est pas nécessaire de spécifier la matrice A. Soit $K \subseteq F$ une extension différentielle d'anneaux. L'ensemble des solutions du système différentiel (Δ) à valeurs dans F est l'ensemble

$$\mathrm{Sol}_F(\Delta) = \{f^t = (f_1, \ldots, f_n)^t \in F^n \mid f_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j, \quad 1 i n\}.$$

La somme de deux solutions est une solution, et le produit d'une solution par une constante est une solution, donc $\mathrm{Sol}_F(\Delta)$ est un module sur l'anneau $\mathrm{Const}(F)$. Si F est un corps, alors $\mathrm{Sol}_F(\Delta)$ est un espace vectoriel sur $\mathrm{Const}(F)$.

Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice à coefficients dans un anneau différentiel A, on note $M' = (m_{i,j}')$. On a

$$\big(M \cdot N)' = M' \cdot N + M \cdot N'.$$

Soit $M \in \mathrm{GL}(n, A)$, le groupe des matrices carrées à coefficients en A et inversibles dans A. En dérivant l'égalité $M \cdot M^{-1} = \mathrm{Id}$ on obtient

$$(M^{-1})' = -M^{-1} \cdot M' \cdot M^{-1}.$$

Définition 1.3 *Une* matrice fondamentale *pour le système* (Δ_A) *à coefficients dans* F *est une matrice* $U \in \mathrm{GL}(n, F)$ *telle que* $U' = A \cdot U$.

Lemme 1.4 *Soient* $U, V \in \mathrm{GL}(n, F)$ *matrices fondamentales pour le système* (Δ_A). *Alors, il existe une unique matrice* $C \in \mathrm{GL}\big(n, \mathrm{Const}(F)\big)$, *telle que*

$$U = V \cdot C.$$

Preuve. En dérivant $V^{-1} \cdot U$ on obtient

$$(V^{-1})' \cdot U + V^{-1} \cdot U' = -V^{-1} \cdot A \cdot V \cdot V^{-1} \cdot U + V^{-1} \cdot A \cdot U = 0.$$

Alors $C = V^{-1} \cdot U \in \mathrm{GL}\big(n, \mathrm{Const}(F)\big)$. ∎

Proposition 1.5 *Soit* F *un corps. Le* $\mathrm{Const}(F)$ *espace vectoriel* $\mathrm{Sol}_F(\Delta)$ *est de dimension au plus* n.

Preuve. Supposons qu'on a $n + 1$ solutions $f_1^t, \dots, f_{n+1}^t \in F^n$ linéairement indépendants sur $\mathrm{Const}(F)$. On considère les matrices

$$U = [f_1^t, \dots, f_n^t], \quad V = [f_2^t, \dots, f_{n+1}^t].$$

On va montrer que U et V sont matrices fondamentales pour (Δ). Comme les colonnes de U et V sont des solutions, on a $U' = A \cdot U$ et $V' = A \cdot V$. Il faut montrer $U, V \in GL(n, F)$. Comme F est un corps il suffit de montrer que leur déterminants sont différents de zéro. Supposons $\det(U) = 0$. Alors il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in F^n$, $\lambda \neq 0$, tel que $U\lambda^t = 0$. On choisit λ de tel sorte qu'il soit minimal en le nombre des composantes différentes de zéro. Il existe une composante $\lambda_k \neq 0$. On divise par λ_k, et on peut supposer que $\lambda_k = 1$. En dérivant l'égalité $U\lambda^t = 0$ on obtient

$$0 = U'\lambda^t + U\lambda'^t = AU\lambda^t + U\lambda'^t = U\lambda'^t.$$

Le nombre des composantes différentes de zéro de λ' est plus petit que celui de λ. Par la minimalité de λ, on a $\lambda' = 0$. Alors $f_1^t, \dots, f_n^t$ sont linéairement dépendantes sur $\mathrm{Const}(F)$, ce qui contredit notre hypothèse. De la même façon on montre $\det(V) \neq 0$.

Par le lemme précédent il existe une matrice des constantes C telle que $U = V \cdot C$. Alors f_{n+1}^t dépend linéairement $f_1^t, \dots, f_n^t$ sur $\mathrm{Const}(F)$. ∎

Dans l'exemple suivante on montre que l'hypothèse sur F d'être un corps dans la proposition précédente ne peut pas être remplacé par celle d'être un anneau intègre. Elle pourra être remplace par celle d'être un anneau différentiel simple, notion qu'on introduira plus tard.

Exercice 1.6 Soit $K = \mathbb{C}[[X]][X^{-1}]$ l'anneau des séries formelles méromorphes avec la dérivation usuelle $\delta(X^m) = mX^{m-1}$. On considère le système différentiel de rang un

$$y' = X^{-2}\, y.$$

Montrer, en utilisant l'ordre d'une série, que aucune série $y(X) \in K$ vérifie $y'(X) = X^{-2}y(X)$. On considère l'anneau des polynômes $K[w,t]$ avec la dérivation $w' = X^{-2}w$ et $t' = X^{-2}t$. Montrer que $\mathrm{Const}(K[w,t]) = \mathbb{C}$. Pourtant, w et t sont deux solutions linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. On remarque que w/t est une constante dans le corps $K(w,t)$. ∎

Une *équation différentielle linéaire* d'ordre n sur K est une expression

$$P(y) = 0 \tag{1.1}$$

où $P(y)$ est un polynôme différentiel dans la variable différentielle y :

$$P(y) = a_0 \cdot y + a_1 \cdot y' + \cdots + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + y^{(n)}, \qquad a_i \in K.$$

Soit $K \subseteq F$ une extension différentielle d'anneaux. L'ensemble des *solutions de l'équation différentielle* $(P(y) = 0)$ *dans* F est l'ensemble

$$\mathrm{Sol}_F(P) = \{v \in F \mid a_0 \cdot v + a_1 \cdot v' + \cdots + a_{n-1} \cdot v^{(n-1)} + v^{(n)} = 0\}.$$

Cet ensemble a une structure de module sur l'anneau $\mathrm{Const}(F)$.

On associe classiquement, à l'équation $P(y) = 0$, le système différentiel de rang n,

$$Y' = A_P \cdot Y,$$

où la matrice A_P est donnée par

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sol}_F(P) & \to & \mathrm{Sol}_F(\Delta_{A_P}) \\ v & \mapsto & (v, v', \ldots, v^{(n-1)})^t \end{array} \tag{1.3}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{Const}(F)$-modules. Donc, dans le cas où F est un corps, d'après la proposition 1.5, la dimension du $\mathrm{Sol}_F(P)$ sur $\mathrm{Const}(F)$ est au plus n.

Dans l'exemple suivante on montre que $\mathrm{Const}(F)$ peut être plus grand que $\mathrm{Const}(K)$, et donc la dimension de $\mathrm{Sol}_F(P)$ sur $\mathrm{Const}(K)$ peut être plus grand que n.

Exemple 1.7 On considère le corps différentiel $K = \mathbb{C}[[X]]\,[X^{-1}]$ avec la dérivation usuelle, $\delta(X^m) = mX^{m-1}$. Soit $K[w]$ l'anneau des polynômes sur K en l'indéterminée w avec la dérivation $\delta(w) = 0$. Soit L son corps de fractions : $L = K(w)$. On a que $\mathrm{Const}(K) = \mathbb{C}$ et que $\mathrm{Const}(L) = \mathbb{C}(w)$. On considère l'équation différentielle $P(z) = z' - z = 0$. Nous avons $\mathrm{Sol}_L(P) = \{\lambda(w) \cdot \exp(X) \mid \lambda(w) \in \mathbb{C}(w)\}$. Cet espace est de dimension 1 sur $\mathrm{Const}(L)$ et de dimension infinie sur $\mathrm{Const}(K)$. ∎

Soit (Δ_A) le système différentiel $Y' = A \cdot Y$ d'ordre un et rang n sur le corps différentiel K.

Soit $Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ une matrice inversible, on considère les indéterminées différentielles $z_1, \ldots, z_n$ sur K, reliées aux indéterminées $y_1, \ldots, y_n$ par les relations $Z = (z_1, \ldots, z_n)^t = Q \cdot (y_1, \ldots, y_n)^t = QY$. Alors le système (Δ) se transforme dans le système $(\Delta_{{}^Q\!A})$

$$Z' = Q' \cdot Y + Q \cdot Y' = Q' \cdot Y + Q \cdot A \cdot Y = (Q' \cdot Q^{-1} + Q \cdot A \cdot Q^{-1}) \cdot Z = {}^Q\!A \cdot Z,$$

où on note

$${}^Q\!A = Q' \cdot Q^{-1} + Q \cdot A \cdot Q^{-1}.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sol}_F(\Delta) & \to & \mathrm{Sol}_F(\Delta_{{}^Q\!A}) \\ f & \mapsto & Q \cdot f, \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{Const}(F)$-modules. On a ainsi une action à gauche du groupe $\mathrm{GL}(n, K)$ sur l'ensemble des systèmes différentiels sur K. Deux systèmes différentiels (Δ_A) et (Δ_B) seront dits équivalents relativement au corps de base K, s'ils appartiennent à la même orbite, c'est-à-dire, s'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ tel que $B = {}^Q\!A$.

Le lemme suivante, dite du vecteur cyclique, montre l'équivalence entre les notions de système différentiel d'ordre un et rang n avec celle d'équation différentielle linéaire d'ordre n sur un corps différentiel K de caractéristique zéro avec d'éléments non constantes. Il y a plusieurs preuves de cette lemme, cette que on présente ici est empruntée de [2] (voir aussi [5]).

Lemme 1.8 (Vecteur cyclique) *Supposons que le corps K est de caractéristique zéro et $\mathrm{Const}(K) \neq K$. Étant donné un système différentiel (Δ_A) d'ordre un et de rang n sur K, il existe au moins une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}(n, K)$ telle que le système différentiel $(\Delta_{{}^Q A})$ est un système associé à une équation différentielle linéaire d'ordre n sur K.*

Preuve. Il s'agit de trouver une matrice inversible Q sur K telle que la matrice

$$Q' \cdot Q^{-1} + Q \cdot A \cdot Q^{-1}$$

soit de la forme 1.2. Si on cherche

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \qquad e_i \in K^n,$$

il suffit que l'on ait $e_{j+1} = e'{}_j + e_j A$ pour $1jn-1$ et que les éléments $e_1, \ldots, e_n$ soient K-linéairement indépendants. Notons par Σ l'opérateur sur K^n défini par $\Sigma(e) = e' + eA$. Il s'agit de trouver un vecteur $e \in K^n$ tel que les vecteurs $e, \Sigma(e), \Sigma^2(e), \ldots, \Sigma^{n-1}(e)$ soient K-linéairement indépendants. Soit $t \in K$ tel que $t' \neq 0$. On considère l'opérateur Σ_t, $\Sigma_t(e) = \frac{t}{t'}\Sigma(e)$. Pour $a \in K$ et $e \in K^n$, on a que

$$\Sigma_t(ae) = \mu_t(a)e + a\Sigma_t(e), \quad \text{où} \;\; \mu_t(a) = \frac{t}{t'}a'. \tag{1.4}$$

Pour tout vecteur $e \in K^n$ et $m \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel de K^n engendré par les vecteurs $e, \Sigma(e), \ldots, \Sigma^m(e)$ est égal à celui engendré par les vecteurs e,$\Sigma_t(e)$,$\Sigma_t^2(e), \ldots, \Sigma_t^m(e)$ car on a les égalités suivantes

$$\Sigma_t^i(e) = \left(\frac{t}{t'}\right)^i \Sigma^i(e) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \cdot \Sigma^j(e), \qquad \lambda_j \in K, \quad 2 \leq i \leq m.$$

Soit m le plus grand entier tel qu'il existe un vecteur e pour lequel les vecteurs $e, \Sigma_t(e), \Sigma_t^2(e), \ldots, \Sigma_t^{m-1}(e)$ soient linéairement indépendants. Si $m < n$, il existe un vecteur f linéairement indépendant des vecteurs e, $\Sigma_t(e)$, $\Sigma_t^2(e), \ldots,$ $\Sigma_t^{m-1}(e)$. Pour $\lambda \in \mathbb{Q} \subseteq K$ et $k \in \mathbb{N}$ on note $v_{\lambda,k} = e + \lambda t^k f$. De l'équation (1.4) et du fait que $\mu_t(t^k) = kt^k$ on déduit les égalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} v_{\lambda,k} & = & e + \lambda t^k f \\ \Sigma_t(v_{\lambda,k}) & = & \Sigma_t(e) + \lambda t^k(\Sigma_t(f) + kf) \\ \Sigma_t^2(v_{\lambda,k}) & = & \Sigma_t^2(e) + \lambda t^k(\Sigma_t^2(f) + 2k\Sigma_t(f) + k^2 f) \\ & \cdots & \\ \Sigma_t^m(v_{\lambda,k}) & = & \Sigma_t^m(e) + \lambda t^k(\Sigma_t^m(f) + \cdots \binom{m}{j} k^j \Sigma_t^{m-j}(f) + \cdots + k^m f). \end{array}$$

Comme les vecteurs $v_{\lambda,k}, \Sigma_t(v_{\lambda,k}), \ldots, \Sigma_t^m(v_{\lambda,k})$ sont linéairement dépendants, leur produit extérieur $z_{\lambda,k}$ est nul. On a que

$$z_{\lambda,k} = \sum_{i=0}^{m+1} \lambda^i t^{i \cdot k} \cdot \omega_i(k),$$

où les vecteurs $\omega_i(k)$ ne dépendent pas de λ. Comme $z_{\lambda,k} = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, on a que $\omega_i(k) = 0$ pour $0im+1$ et $k \in \mathbb{N}$. En particulier

$$\omega_1(k) = \sum_{j=0}^{m} k^j \cdot \omega_{1,j} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Comme le vecteur $\omega_{1,j}$ ne dépend que de e et f, alors $\omega_{1,j} = 0$ pour $0jm$. En particulier

$$\omega_{1,m} = e \wedge \Sigma_t(e) \wedge \ldots \wedge \Sigma_t^{m-1}(e) \wedge f = 0,$$

ce qui est absurde, donc $m = n$. ∎

On a ainsi vu que chaque orbite pour l'action de $\mathrm{GL}(n, K)$ sur l'ensemble des systèmes différentiels sur K d'ordre un et de rang n contient au moins un système associé à une équation différentielle d'ordre n.

Définition 1.9 *Soit E un anneau différentiel et W un E-module. Une connexion sur W est la donnée d'une application linéaire $\nabla : W \to W$ vérifiant la règle de Leibniz*

$$\nabla(aw) = a'w + a\nabla(w), \qquad a \in E,\ w \in W.$$

On dira que $w \in W$ est une section horizontale pour la connexion ∇ si

$$\nabla(w) = 0.$$

Soient W un E-module libre de dimension fini et ∇ une connexion sur W. Soit $\underline{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ une E-base de W, alors il existe des éléments $a_{i,j} \in E$, $1i, jn$, tels que pour tout j on a $\nabla(w_j) = -\sum_{i=1}^n a_{i,j} w_i$ (on écrira cette relation $\nabla(w_1, \ldots, w_n) = -(w_1, \ldots, w_n) \cdot A$, où $A = (a_{i,j})$). Si $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j w_j, \quad \lambda_j \in E$, on a que

$$\nabla(v) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j' w_j + \lambda_j \nabla(w_j)) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j' w_j - \lambda_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} w_i) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k' - \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{k,j}) w_k, \tag{1.5}$$

ou bien matriciellement,

$$\nabla((w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}) = (w_1, \ldots, w_n) \cdot \left(\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right),$$

donc l'élément v est une section horizontale pour la connexion ∇ si et seulement si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ est une solution du système différentiel (Δ_A) :

$$Y' = A \cdot Y, \qquad \text{où } A = (a_{i,j})_{\substack{1in \\ 1jn}}.$$

Étant donnée une matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ et une base $\underline{w}$ de W, on peut définir une connexion sur W suivant l'équation 1.5. Pour chaque base $\underline{w}$ de W on a donc une application surjective

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\underline{w}} : \{ \text{ connexions } \} & \to & \{ \text{ systèmes différentiels } \} \\ \nabla & \mapsto & (\Delta_A), \quad \nabla(w_1, \ldots, w_n) = -(w_1, \ldots, w_n) \cdot A. \end{array}$$

Si $\underline{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une autre base de W et $(v_1, \ldots, v_n) = (w_1, \ldots, w_n) \cdot P$, avec $P \in \mathrm{GL}(n, K)$, on a que

$$\nabla(v_1, \ldots, v_n) = (w_1, \ldots, w_n)\big(P' - A \cdot P\big) = (v_1, \ldots, v_n) \cdot \big(P^{-1} \cdot P' - P^{-1} \cdot A \cdot P\big).$$

Posons $Q = P^{-1}$, comme $(Q^{-1})' = -Q^{-1} \cdot Q' \cdot Q^{-1}$, on a

$$\nabla(v_1, \ldots, v_n) = -(v_1, \ldots, v_n) \cdot \big(Q' \cdot Q^{-1} + Q \cdot A \cdot Q^{-1}\big) = -(v_1, \ldots, v_n) \cdot {}^{Q}\!A.$$

Le système $\Psi_{\underline{v}}(\nabla)$ est ainsi le transformé du système $\Psi_{\underline{w}}(\nabla)$ par la matrice Q, où $\underline{v} \cdot Q = \underline{w}$. Les systèmes $\Psi_{\underline{v}}(\nabla)$ et $\Psi_{\underline{w}}(\nabla)$ appartiennent à une même orbite de l'ensemble des systèmes sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(n, K)$.

On dit que deux connexions $\nabla, \nabla' : W \to W$ sont linéairement équivalents s'il existe un isomorphisme de K-espaces vectoriels $\sigma : W \to W$ vérifiant $\nabla' \circ \sigma = \sigma \circ \nabla$.

Soit K un corps différentiel. On a une bijection entre les classes d'équivalence linéaire de connexions sur le K-espace vectoriel W ($\dim_K W = n$) et les orbites sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(n, K)$ de l'ensemble des systèmes différentiels d'ordre un et de rang n.

Si $K \subseteq F$ est une extension d'anneaux différentiels, et ∇ est une connexion sur le K-espace vectoriel W, on définit naturellement une connexion $\tilde{\nabla}$ sur le F-module $W \otimes_K F$ par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\nabla} : W \otimes_K F & \to & W \otimes_K F \\ w \otimes f & \mapsto & \nabla(w) \otimes f + w \otimes f'. \end{array}$$

Exercice 1.10 Vérifier que $\tilde{\nabla}$ est bien défini et que c'est une connexion. Soit $\underline{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ est une base de W. Montrer que $\{w_i \otimes 1\}$, $1 \le i \le n$, est une base du F-module $W \otimes_K F$. Si on a $\nabla(w_j) = -\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} w_i$ alors

$$\tilde{\nabla}(w_j \otimes 1) = -\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(w_i \otimes 1). \blacksquare$$

Étant donnée une base $\underline{w}$ de W, on a un isomorphisme de $\mathrm{Const}(F)$-modules entre l'espace des sections horizontales pour $\tilde{\nabla}$ dans $W \otimes_K F$ et $\mathrm{Sol}_F(\Psi_{\underline{w}}(\nabla))$. Si $\underline{v}$ est une autre K-base de W, avec $\underline{v} \cdot Q = \underline{w}$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ vecteurs horizontaux pour } \tilde{\nabla}\,\} & \to & \mathrm{Sol}_L(\Psi_{\underline{w}}(\nabla)) \\ \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n & & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathrm{Sol}_L(\Psi_{\underline{v}}(\nabla)) \\ & & Q \cdot (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sont des isomorphismes.

1.4 Extensions de Picard-Vessiot.

Soit (K, δ) un corps différentiel à corps de constantes algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit (Δ) le système différentiel $Y' = A \cdot Y$ d'ordre un et rang n sur K.

Définition 1.11 (Extensions de Picard-Vessiot de corps. Définition classique) *On dira que l'extension de corps différentiels $K \subseteq L$ est une* extension de Picard-Vessiot de corps *associée au système $Y' = A \cdot Y$ si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i). *Il existe une matrice $U = (u_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, L)$ vérifient $U' = A \cdot U$.*

(ii). *On a $L = K(u_{i,j})$, c'est à dire L est le plus petit sous corps de L qui contient K et les éléments $u_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$.*

(iii). *On a $\mathrm{Const}(K) = \mathrm{Const}(L)$.*

Remarque 1.12 Dans la section 1.4.1.4 on montrera que la condition $\mathrm{Const}(K) = \mathrm{Const}(L)$ peut être remplace par la condition suivante : (iii)' le corps L est le plus petit sous corps différentiel de L vérifiant les propriétés (i) et (ii) de la définition précédente. Si L vérifie (i), (ii) et (iii), il est facile montrer que L vérifie (iii)'. En effet, si $V = (v_{i,j})$ est une autre matrice fondamental dans L, d'après le lemme 1.4 il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{Const}(L))$ telle que $U = V \cdot C$. Comme $\mathrm{Const}(L) = \mathrm{Const}(K)$ on a $K(v_{i,j}) = K(u_{i,j}) = L$. Donc tout sous corps de L contenant une matrice fondamental est égal à L.

Exemple 1.13 Soit $K = \mathbb{C}\{X\}[X^{-1}]$ le corps différentiel des séries méromorphes convergentes à l'origine de $\mathbb{C}$ avec la dérivation usuelle. On considère le système différentiel (Δ) d'ordre un et rang deux

$$Y' = \begin{pmatrix} -X^{-2} & 0 \\ 0 & -2X^{-2} \end{pmatrix} \cdot Y$$

On considère l'anneau des polynômes $K[z, w]$ avec la dérivation qui étend celle de K et vérifient $z' = -X^{-2}z$ et $w' = -2X^{-2}w$. Cette dérivation s'étend sur le corps de fractions $K(z, w)$. La matrice $U = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ est une matrice fondamental pour le système différentiel. Alors le corps $K(z, w)$ vérifie les propriétés (i) et (ii) de la définition ci-dessus, mais il ne vérifie pas la troisième condition car l'élément z^2/w est une constante qui n'appartient pas à K. En fait, la matrice $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}$ est aussi une matrice fondamental dans le corps $K(z)$. On va montrer que $\mathrm{Const}(K(z)) = \mathrm{Const}(K) = \mathbb{C}$. Donc

$K \subseteq K(z)$ est une extension de Picard-Vessiot de corps associée au système différentiel (Δ). Soit $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in K[z]$. On note

$$\begin{aligned} p'(z) &= a_0' + a_1' z + \cdots + a_n' z^n, \\ \frac{\partial\, p(z)}{\partial\, z} &= a_1 + 2a_2 z \cdots + n a_n z^{n-1}. \end{aligned}$$

On a alors

$$p(z)' = p'(z) + z' \frac{\partial\, p(z)}{\partial\, z} = p'(z) - X^{-2} z \frac{\partial\, p(z)}{\partial\, z}$$

Si $p(z)' = 0$, on a $a_0' = 0$ et $a_j' = -jX^{-2} a_j$ pour $1 \leq j \leq n$. L'équation différentiel $y' = -X^{-2} y$ n'a que la solution nulle dans K (si la série $a \in K$ est non nulle et d'ordre ν, alors la série a' est d'ordre $\geq \nu - 1$, et la série $-X^{-2} a$ est d'ordre $\nu - 2$). Alors $a_0 \in \mathrm{Const}(K) = \mathbb{C}$ et $a_j = 0$ pour $1 \leq j \leq n$. Soient $p(z), q(z) \in K[z]$ premiers entre eux et tels que $\big(p(z)/q(z)\big)' = 0$. Ceci entraîne que

$$\big(p'(z) - X^{-2} z \frac{\partial\, p(z)}{\partial\, z}\big) q(z) = p(z) \big(q'(z) - X^{-2} z \frac{\partial\, q(z)}{\partial\, z}\big).$$

Comme $K[z]$ est un domaine de factorisation unique, il existe $a \in K$ tel que $a q(z) = q'(z) - X^{-2} z \frac{\partial\, q(z)}{\partial\, z}$. Soit $q(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$. On a alors $b_j' = a b_j + j X^{-2} b_j$. En raisonnant sur l'ordre de b_j, on montre que $b_j = 0$ pour $1 \leq j \leq m$. Donc $p(z)/q(z) \in \mathrm{Const}(K[z]) = \mathbb{C}$. ∎

Définition 1.14 (Anneau différentiel simple) *On dira que un anneau différentiel E est* simple *si les seuls idéals différentiel de E sont* (0) *et E.*

Définition 1.15 (Extensions de Picard-Vessiot d'anneaux) *On dira que l'extension d'anneaux différentiels $K \subseteq E$ est une* extension de Picard-Vessiot d'anneaux *associée au système $Y' = A \cdot Y$ si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i). *Il existe une matrice $U = (u_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, E)$ vérifient $U' = A \cdot U$.*

(ii). *On a $E = K[u_{i,j}, \frac{1}{\det(U)}]$, c'est à dire E est la sous algèbre de E qui contient K, les éléments $u_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, et $1/\det(U)$.*

(iii). *L'anneau E est un anneau différentiel simple.*

Remarque 1.16 L'anneau $E = K[u_{i,j}, \frac{1}{\det(U)}]$ est un anneau différentiel. En effet, on a

$$\begin{aligned} u_{i,j}' &= \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} u_{j,j} \in E, \\ \left(\frac{1}{\det(U)}\right)' &= -(\sum_{l=1}^{n} a_{i,i}) \frac{1}{\det(U)} \in E. \end{aligned}$$

On remarque que si $K \subseteq F$ est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux (resp. de corps) associée au système (Δ_A), elle est aussi une extension de Picard-Vessiot d'anneaux (resp. de corps) associée à tout système différentiel dans la même orbite de (Δ_A) sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(n, K)$. En effet, soit $U = (u_{i,j})$ une matrice fondamental à coefficients dans F. Soit $Q \in \mathrm{GL}(n, K)$. La matrice $QU \in \mathrm{Mat}_{n,n}(L)$ est une matrice fondamentale pour le système $(\Delta_{Q[A]})$. On a

$$\begin{aligned} K[QU, 1/\det(QU)] &= K[U, 1/\det(U)], \\ K(QU) &= K(U). \end{aligned}$$

Définition 1.17 *Soit ∇ une connexion sur un K-espace vectoriel W de dimension fini. Soit $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ une base de W. Soit A la matrice à coefficients dans K tel que $\nabla(\underline{w}) = -(\underline{w}) \cdot A$. Soit (Δ_A) le système différentiel $Y' = AY$. On dira que l'extension $K \subseteq F$ est de Picard-Vessiot d'anneaux (resp. de corps) associée à la connexion ∇ si $K \subseteq F$ est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux (resp. de corps) associée au système différentiel (Δ_A). D'après la remarque précédente, cette notion ne dépend pas du choix de la base de W.*

Soit $P(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre n sur K. Soit (Δ_{A_P}) le système différentiel associé à $P(y) = 0$. On dira que l'extension $K \subseteq F$ est de Picard-Vessiot d'anneaux (resp. de corps) associée à l'équation $P(y) = 0$ si $K \subseteq F$ est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux (resp. de corps) associée au système différentiel (Δ_{A_P}).

1.4.1 Sur l'existence et l'unicité des extensions de Picard-Vessiot.

1.4.1.1 Propriétés des anneaux différentiels simples

Lemme 1.18 *Soit R un anneau différentiel qui contient $\mathbb{Q}$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal différentiel de R, alors l'idéal $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \{a \in R \mid \exists n, a^n \in \mathfrak{a}\}$ est un idéal différentiel.*

*Preuve.*Soient $a \in R$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $a^n \in \mathfrak{a}$. En dérivant et puis, en divisant par n, on obtient $a^{n-1}a' \in \mathfrak{a}$. Soit $1 \leq k \leq n-1$. Supposons $a^{n-k}(a')^{2k-1} \in \mathfrak{a}$. En dérivant, on obtient que $(n-k)a^{n-k-1}(a')^{2k} + (2k-1)a^{n-k}(a')^{2k-2}a'' \in \mathfrak{a}$. On multiplie cette expression par a' et on obtient que $(n-k)a^{n-k-1}(a')^{2k+1} \in \mathfrak{a}$, donc $a^{n-(k+1)}(a')^{2(k+1)-1} \in \mathfrak{a}$. On applique $n-1$ fois le résultat précédent et on obtient que $(a')^{2n-1} \in \mathfrak{a}$. ∎

Lemme 1.19 *Soit R un anneau différentiel simple contenant $\mathbb{Q}$. Alors R est un domaine d'intégrité et son corps de fractions a le même ensemble de constantes que R.*

Preuve. L'idéal $\{0\}$ est un idéal différentiel et par le lemme précédent $\mathrm{rad}(\{0\})$ aussi. Comme R est simple et $1 \notin \mathrm{rad}(\{0\})$, on a $\mathrm{rad}(\{0\}) = \{0\}$. Soit $a \in R$, l'ensemble $\mathfrak{a} = \{b \in R \mid \exists n, a^n b = 0\}$ est un idéal différentiel (si $a^n b = 0$ alors $na^{n-1}a'b + a^n b' = 0$ et en multipliant par a on a $a^{n+1}b' = 0$). Comme $\mathfrak{a}$ ne peut pas être égal à R (R n'a pas d'éléments nilpotents), on a $\mathfrak{a} = \{0\}$, donc R est un domaine d'intégrité. Soit c une constante du corps de fractions de R. L'ensemble $\{a \in R \mid ac \in R\}$ est un idéal différentiel de R différent de l'idéal zéro, donc égal à R et $c \in R$. ∎

Lemme 1.20 *Soit K un corps différentiel de caractéristique zéro à corps de constantes C algébriquement clos. Soit $K \subseteq E$ une extension d'anneaux différentiels telle que E soit une K-algèbre de type fini et E soit un anneau différentiel simple. Alors l'anneau des constantes de E est C. Si L est le corps de fractions de E (E est un domaine d'intégrité par le lemme 1.19), le corps des constantes de L est C.*

Preuve. Par le lemme 1.19, $\mathrm{Const}(E) = \mathrm{Const}(L)$, donc $\mathrm{Const}(E)$ est un corps. Soit $a \in \mathrm{Const}(E)$. Il suffit de montrer que a est algébrique sur K. En effet, soit $f(X) = X^m + \lambda_{m-1}X^{m-1} + \cdots + \lambda_0$ son polynôme minimal ; en dérivant l'égalité $f(a) = 0$ on obtient $\lambda'_{m-1}a^{m-1} + \cdots + \lambda'_0 = 0$, donc $\lambda'_i = 0$, c'est à dire, a est algébrique sur les constantes de K, et comme C est algébriquement clos, $a \in C$.

On montre que a est algébrique sur K. D'abord, on donne une preuve en utilisant un peut de géométrie algébrique, puis on traduit cette preuve en termes algébriques élémentaires.

On a $E = K[z_1, \ldots, z_m]$, où $z_1, \ldots, z_m \in E$ et $K[z_1, \ldots, z_m]$ est le plus petit sous-anneau de E que contient K et les éléments $z_1, \ldots, z_m$. On peut considérer E comme l'anneau des fonctions polynomiales d'un sous-ensemble algébrique Z de K^m. Alors, l'image par a de Z est, soit un sous-ensemble fini de la droite K, soit la droite entière sauf un nombre fini de points. Pour $r \in \mathbb{Q}$ on a que $a + r$ est inversible dans $\mathrm{Const}(E)$, donc dans E. Alors, l'image de Z par a ne contient pas $\mathbb{Q} \subseteq K$, donc cette image est un nombre fini des points $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in K$. Alors $P(X) = \prod_{j=1}^{s}(X - \lambda_j)$ s'annule en a.

Voici la même preuve en termes algébriques. Supposons que a n'est pas algébrique sur K. Soit L le corps de fractions de E (E est un domaine d'intégrité par le lemme 1.19). Soit $\{x_1, \ldots, x_r\}$ une base de transcendance de L sur K telle que $x_1 = a$ et $x_i \in E$ pour $i = 1, \ldots, r$. Soit $E = K[z_1, \ldots, z_m]$. Alors z_j est algébrique sur $K(x_1, \ldots, x_r)$. Il existe $f_j \in K[x_1, \ldots, x_r]$ tel que

z_j soit entier sur $K[x_1, \ldots, x_r, \frac{1}{f_j}]$. Soit $f = f_1 \cdots f_m$, alors $B = E[\frac{1}{f}]$ est entier sur $A = K[x_1, \ldots, x_r, \frac{1}{f}]$. Pour $r \in \mathbb{Q}$ on a que $a+r = x_1+r \in A$ est inversible dans $\mathrm{Const}(E)$, donc dans B. Si $y \in A$ est inversible dans B, alors y est inversible dans A. En effet, soit $z \in B$ tel que $yz = 1$. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ tels que $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. On multiplie cette égalité par y^{n-1} et on obtient $z \in A$. Alors $x_1 + r$ est inversible dans $K[x_1, \ldots, x_r, \frac{1}{f}]$, donc $x_1 + r$ est un facteur de f dans l'anneau des polynômes $K[x_1, \ldots, x_r]$, mais f ne peut pas avoir qu'un nombre fini de tels facteurs. ∎

Corollaire 1.21 *Soit K un corps différentiel de caractéristique zéro à corps de constantes algébriquement clos. Soit $K \subseteq E$ une extension de Picard-Vessiot d'anneaux associée au système différentiel* (Δ). *Alors*

$$\mathrm{Const}(K) = \mathrm{Const}(E).$$

Soit $V = (v_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, E)$ vérifient $V' = AV$. Alors

$$E = K[v_{i,j}, 1/\det(V)].$$

Preuve. Soit $U = (u_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, E)$ vérifient $U' = AU$ et

$$E = K[u_{i,j}, 1/\det(U)].$$

Alors E est une K-algèbre de type fini et un anneau différentiel simple, donc $\mathrm{Const}(K) = \mathrm{Const}(E)$. Il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{Const}(E))$ telle que $U = VC$. Comme $\mathrm{Const}(E) = \mathrm{Const}(K)$, on a

$$E = K[u_{i,j}, 1/\det(U)] = K[v_{i,j}, 1/\det(V)].$$ ∎

1.4.1.2 Existence des extensions de Picard-Vessiot

Soit K un corps différentiel à corps de constantes algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit (Δ) le système différentiel $Y' = AY$ d'ordre un et rang n sur K.

Lemme 1.22 *Soit $K \subseteq R$ une extension de Picard-Vessiot d'anneaux associée au système* (Δ). *Alors le corps de fractions L de R est une extension de Picard-Vessiot de corps associée a* (Δ).

Preuve. Par le lemme 1.19 l'anneau R est un domaine d'intégrité. Soit L son corps de fractions. Soit $U = (u_{i,j})$ une matrice fondamentale à coefficients dans R. On a $R = K[u_{i,j}, 1/\det(U)]$, alors $L = K(u_{i,j})$. L'anneau R est une K-algèbre de type fini. D'après le lemme 1.20 on a $\mathrm{Const}(K) = \mathrm{Const}(R) = \mathrm{Const}(L)$. ∎

Théorème 1.23 *Il existe une extension $K \subseteq R$ de Picard-Vessiot d'anneaux associée au système (Δ). Le corps de fractions L de E est une extension de Picard-Vessiot de corps associée à (Δ).*

Preuve. Soit $A = (a_{i,j})$. On considère l'anneau de polynômes $K[X_{i,j}; 1 \leq i, j \leq n]$ avec la dérivation qui étend celle de K et qui vérifie

$$X'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} X_{k,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Cette dérivation c'étend sur son corps de fractions $K(X_{i,j})$. Le polynôme $\det(X_{i,j})$ est non nul. On considère l'anneau différentiel

$$T = K[X_{i,j}, \frac{1}{\det(X_{i,j})}] \subseteq K(X_{i,j}).$$

Soit Σ l'ensemble des idéaux différentiels de T différentes de T. L'idéal $(0) \in \Sigma$. Étant donnée une chaîne $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ totalement ordonnée des éléments de Σ, son réunion $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \in \Sigma$. D'après le lemme de Zorn, il existe un idéal différentiel maximal $\mathfrak{a}$ différent de T. L'anneau $R = T/\mathfrak{a}$ est un anneau différentiel simple. Si on écrit $\bar{X}_{i,j} = X_{i,j} + \mathfrak{a}$, on a

$$R = K[\bar{X}_{i,j}, \frac{1}{\det(\bar{X}_{i,j})}].$$

Finalement on a $(\bar{X}_{i,j})' = A(\bar{X}_{i,j})$. Ceci montre que R est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux associée au système différentiel (Δ_A). D'après le lemme précédente, le corps de fractions L de R est une extension de Picard-Vessiot de (Δ). ∎

1.4.1.3 Unicité des extension Picard-Vessiot

Soit K un corps différentiel à corps de constantes algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit (Δ) le système différentiel $Y' = AY$ d'ordre un et rang n sur K.

Théorème 1.24 *Soient $K \subseteq R_1$ et $K \subseteq R_2$ deux extensions de Picard-Vessiot d'anneaux associées au système (Δ). Alors il existe un isomorphisme d'anneaux différentiels $\sigma : R_1 \to R_2$ tel que $\sigma(k) = k$ si $k \in K$.*

Preuve. On suit la preuve présentée dans [12]. On considère l'anneau différentiel $T = R_1 \otimes_K R_2$. Comme K est un corps, on peut considère R_1 et R_2 comme K espaces vectoriels no nulles, donc $T \neq 0$. Alors il existe un idéal différentiel maximal $\mathfrak{a}$ de T différent de T. Soit $\bar{T} = T/\mathfrak{a}$. Donc $\bar{T}$ est un anneau différentiel simple. On considère les homomorphismes différentiels

$$\begin{array}{rcl} j_1 : R_1 & \to & \bar{T}, \quad j_1(r_1) = r_1 \otimes 1 + \mathfrak{a}, \\ j_2 : R_2 & \to & \bar{T}, \quad j_2(r_2) = 1 \otimes r_2 + \mathfrak{a}. \end{array}$$

Comme $1 \otimes 1 + \mathfrak{a} \neq 0$, les homomorphismes j_1 et j_2 sont non nuls. Les anneaux différentiels R_1 et R_2 sont simples, $\mathrm{Ker}(j_1)$ et $\mathrm{Ker}(j_2)$ sont des idéaux différentiels, j_1 et j_2 ne sont pas nulles, alors j_1 et j_2 sont homomorphismes différentiels injectifs. En particulier, $K \subseteq \bar{T}$.

Soient $U = (u_{i,j})$ et $V = (v_{i,j})$ matrices fondamentales pour (Δ) à coefficients dans R_1 et R_2 respectivement. On a

$$R_1 = K[u_{i,j}, \frac{1}{\det(U)}], \quad R_2 = K[v_{i,j}, \frac{1}{\det(V)}].$$

On note $\bar{u}_{i,j} = u_{i,j} \otimes 1 + \mathfrak{a}$, $\bar{v}_{i,j} = 1 \otimes v_{i,j} + \mathfrak{a}$, $\bar{U} = (\bar{u}_{i,j})$ et $\bar{V} = (\bar{v}_{i,j})$. Alors

$$\bar{T} = K[\bar{u}_{i,j}, \bar{v}_{i,j}, \frac{1}{\det(\bar{U})}, \frac{1}{\det(\bar{V})}]$$

Donc $\bar{T}$ est une K algèbre de type fini et un anneau différentiel simple, alors $\mathrm{Const}(\bar{T}) = \mathrm{Const}(K)$. On a

$$\begin{array}{rcl} j_1(R_1) & = & K[\bar{u}_{i,j}, \frac{1}{\det(\bar{U})}] \subseteq \bar{T}, \\ j_2(R_2) & = & K[\bar{v}_{i,j}, \frac{1}{\det(\bar{V})}] \subseteq \bar{T}. \end{array}$$

Les matrices $\bar{U}$ et $\bar{V}$ sont matrices fondamentales pour (Δ) à coefficients dans $\bar{T}$. Alors il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{Const}(\bar{T}))$ tel que $\bar{U} = \bar{V} \cdot C$. Comme $\mathrm{Const}(\bar{T}) \subseteq K$, on a $j_1(R_1) = j_2(R_2)$. Comme j_1 et j_2 sont injectifs, ils sont isomorphismes différentiels avec leurs images $j_1(R_1)$ et $j_2(R_2)$. Alors $j_2^{-1} \circ j_1$ est un isomorphisme différentiel qui laisse fixes les éléments de K. ∎

Théorème 1.25 *Soient $K \subseteq L_1$ et $K \subseteq L_2$ deux extensions de Picard-Vessiot de corps associées au système (Δ). Alors il existe un isomorphisme de corps différentiels $\sigma : L_1 \to L_2$ tel que $\sigma(k) = k$ si $k \in K$.*

Preuve. Soient $K \subseteq R$ l'extension de Picard-Vessiot d'anneaux construite dans le théorème 1.23 et L son corps de fractions.

Soit $K \subseteq M$ une extension de Picard-Vessiot de corps associée au système (Δ). On va montrer qu'il existe un isomorphisme différentiel entre L et M qui laisse fixes les éléments de K.

Soient $U = (u_{i,j})$ et $V = (v_{i,j})$ matrices fondamentales pour (Δ) à coefficients dans R et M respectivement. On a $R = K[u_{i,j}, 1/\det(U)]$ et $M = K(v_{i,j})$.

On considère $T = R \otimes_K M$. Comme K est un corps, R et M sont K espaces vectoriels no nulles, alors $T \neq 0$. L'homomorphisme $M \ni m \mapsto 1 \otimes m \in T$ injecte M dans T. On a

$$R \otimes_K M = M[u_{i,j} \otimes 1, \frac{1}{\det(U)} \otimes 1]. \tag{1.6}$$

Ainsi T est une M-algèbre de type fini. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal différentiel maximale de T différent de T. Soit $\bar{T} = T/\mathfrak{a}$. On considère les homomorphismes différentiels

$$\begin{aligned} j_1 : R &\rightarrow \bar{T}, \quad j_1(r) = r \otimes 1 + \mathfrak{a}, \\ j_2 : M &\rightarrow \bar{T}, \quad j_2(m) = 1 \otimes m + \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Comme R est anneau différentiel simple et M est un corps différentiel, j_1 et j_2 sont homomorphismes différentiels injectifs. Ils sont donc isomorphismes avec leurs images. En particulier $M \subseteq \bar{T}$. D'après l'égalité (1.6) l'algèbre $\bar{T}$ est un M-algèbre de type fini. Par ailleurs $\bar{T}$ est un anneau différentiel simple. D'après le lemme 1.20 on a $\mathrm{Const}(\bar{T}) = \mathrm{Const}(M)$. Comme $K \subseteq M$ est une extension de Picard-Vessiot de corps, on a $\mathrm{Const}(K) = \mathrm{Const}(M)$. Alors $\mathrm{Const}(\bar{T}) = \mathrm{Const}(K)$.

On note $\bar{u}_{i,j} = u_{i,j} \otimes 1 + \mathfrak{a}$, $\bar{v}_{i,j} = 1 \otimes v_{i,j} + \mathfrak{a}$, $\bar{U} = (\bar{u}_{i,j})$ et $\bar{V} = (\bar{v}_{i,j})$. Alors $\bar{U}$ et $\bar{V}$ sont matrices fondamentales à coefficients dans $\bar{T}$. Alors il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{Const}(\bar{T}))$ tel que $\bar{U} = \bar{V} \cdot C$. On a

$$\begin{aligned} j_1(R) &= K[\bar{u}_{i,j}, \frac{1}{\det(\bar{U})}], \\ j_2(M) &= K(\bar{v}_{i,j}). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Const}(\bar{T}) \subseteq K$ et $\bar{U} = \bar{V} \cdot C$ on a $j_1(R) \subseteq j_2(M)$. Alors on peut considérer l'homomorphisme différentiel $\sigma = j_2^{-1} \circ j_1 : R \rightarrow M$. On a $\sigma(k) = k$ si $k \in K$. En particulier σ est non nulle. Alors σ est un homomorphisme différentiel injectif car R est simple. Alors σ s'étend sur le corps de fractions L de R. Finalement, la matrice $(\sigma(u_{i,j}))$ est une matrice fondamental pour (Δ) car σ laisse fixes les éléments de K. Alors il existe une matrice $C \in \mathrm{Const}(M))$ tel que $(\sigma(u_{i,j}) = V \cdot C$ (en fait, cette matrice C est la même que celle de l'équation $\bar{U} = \bar{V} \cdot C$). Comme $\mathrm{Const}(K) = \mathrm{Const}(M)$, on a donc $\sigma\big(U \cdot C^{-1}\big) = V$. Ceci entraîne que $\sigma(L) = K(\sigma(u_{i,j})) = K(v_{i,j}) = M$. Donc σ est un isomorphisme différentiel entre L et M. ∎

Corollaire 1.26 *Soit $K \subseteq M$ une extension de Picard-Vessiot de corps associée su système différentiel (Δ). Soit $V = (v_{i,j})$ une matrice fondamental pour (Δ) à coefficients dans M. On désigne*

$$R(M) = K[v_{i,j}, \frac{1}{\det(V)}].$$

Alors $R(M)$ ne dépend pas du choix de la matrice fondamentale V et $K \subseteq R(M)$ est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux associée au (Δ). En particulier, $R(M)$ est un anneau différentiel simple.

Preuve. Soit $W = (w_{i,j})$ autre matrice fondamentale pour (Δ) à coefficients dans E. Il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{Const}(M))$ tel que $V = WC$. Comme $\mathrm{Const}(M) = \mathrm{Const}(K)$ on a

$$K[w_{i,j}, \frac{1}{\det(W)}] = K[v_{i,j}, \frac{1}{\det(V)}] = R(M).$$

Soit $K \subseteq R$ l'extension de Picard-Vessiot d'anneaux construite dans le théorème 1.23 et L son corps de fractions. On a

$$R = K[u_{i,j}, \frac{1}{\det(U)}].$$

Par le théorème précédente il existe $\sigma : L \to M$ un K-isomorphisme différentiel. Alors $(\sigma(u_{i,j}))$ est une matrice fondamental pour (Δ) à coefficients dans E. Donc

$$\sigma(R) = K[\sigma(u_{i,j}), \frac{1}{\det(\sigma(U))}] = R(M).$$

Alors R et $R(M)$ sont K-isomorphes différentiablement, en particulier $R(M)$ est un anneau différentiel simple. ∎

1.4.1.4 Caractérisations des extensions de Picard-Vessiot

Proposition 1.27 *Soit $K \subseteq M$ une extension différentiel de corps. Le conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'extension $K \subseteq M$ est une extension de Picard-Vessiot de corps associée à (Δ).*

(2) *L'extension $K \subseteq M$ vérifie les propriétés (i) et (ii) de la définition d'extension de Picard-Vessiot de corps, et la propriété :*

(iii)' Le corps M est le plus petite sous corps de M vérifient (i) et (ii).

Preuve. Le sens **(1)⇒(2)**. Si $(v_{i,j})$ et $(w_{i,j})$ sont deux matrices fondamentales à coefficients dans M, il existe une matrice de constantes inversible C vérifiant $(v_{i,j}) = (w_{i,j})C$, donc $K(v_{i,j}) = K(w_{i,j})$.

Le sens **(2)⇒(1)**. D'après les propriétés (i) et (ii) il existe une matrice fondamentale $V = (v_{i,j})$ pour (Δ) à coefficients dans M telle que $M = K(v_{i,j})$. On considère l'anneau différentiel $\tilde{R} = K[v_{i,j}, \frac{1}{\det(V)}]$.

Soit $K \subseteq R = K[u_{i,j}, \frac{1}{\det(U)}]$ l'extension de Picard-Vessiot construite dans le théorème d'existence. Soit $L = K(u_{i,j})$ son corps de fractions. Soit $T = R \otimes_K M$, $\mathfrak{a}$ un idéal différentiel maximale de T différent de T, et $\bar{T} = T/\mathfrak{a}$. Alors $\bar{T}$ est une M-algèbre de type fini et un anneau différentiel simple. Donc $\mathrm{Const}(\bar{T}) = \mathrm{Const}(M)$. On considère les homomorphismes différentiels injectifs $j_1 : R \to \bar{T}$, $j_1(r) = r \otimes 1 + \mathfrak{a}$, et $j_2 : M \to \bar{T}$, $j_2(m) = 1 \otimes m + \mathfrak{a}$. Soit $\bar{U} = (j_1(u_{i,j}))$ et $\bar{V} = (j_2(v_{i,j}))$. On a $\bar{U}' = A\bar{U}$ et $\bar{V}' = A\bar{V}$. Les matrices $\bar{U}$ et $\bar{V}$ sont inversibles. Alors il existe $C \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{Const}(\bar{T}))$ tel que $\bar{U} = \bar{V}C$. Comme $\mathrm{Const}(\bar{T}) = \mathrm{Const}(M)$ on a $j_1(R) \subseteq j_2(M)$. On considère l'homomorphisme différentiel injectif $\sigma = j_2^{-1} \circ j_1 : R \to M$. Il s'étend sur le corps de fractions L de R, $\sigma : L \to M$. Alors le sous corps $\sigma(L)$ de M vérifie les propriétés (i) et (ii). Par la minimalité de M, on a $\sigma(L) = M$. Donc L et M sont corps différentiels K-isomorphes. Alors

$$\mathrm{Const}(M) = \mathrm{Const}(L) = \mathrm{Const}(K). \blacksquare$$

Proposition 1.28 *Soit $K \subseteq E$ une extension différentiel d'anneaux. Le conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'extension $K \subseteq E$ est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux associée à (Δ). C'est à dire vérifie les propriétés suivantes*

(i). *Il existe une matrice $U = (u_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, E)$ vérifient $U' = A \cdot U$.*

(ii). *On a $E = K[u_{i,j}, \frac{1}{\det(U)}]$, c'est à dire E est la sous algèbre de E qui contient K, les éléments $u_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, et $1/\det(U)$.*

(iii). *L'anneau E est un anneau différentiel simple.*

(2) *L'extension $K \subseteq E$ vérifie les propriétés (i) et (iii) de la définition d'extension de Picard-Vessiot d'anneaux et la propriété : (ii)' E est le plus petite sous K-algèbre de E vérifient (i) et (iii).*

Preuve. L'implication **(1)⇒(2)** est une conséquence du corollaire 1.21. Supposons que l'extension $K \subseteq T$ vérifie **(2)**. Alors E est un anneau différentiel simple qui contient un corps de caractéristique zéro, donc il contient $\mathbb{Q}$. D'après le lemme 1.19 l'anneau E est un domaine d'intégrité et $\mathrm{Const}(E) = \mathrm{Const}(M)$, où M est le corps de fractions de E. Soit $V = (v_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, E)$ une matrice fondamentale pour (Δ). L'élément $\det(V)$ est inversible dans

E. En effet, on a $(detV)' = \lambda detV$, avec $\lambda = \text{trace}(A) \in K$. Donc, l'idéal $(detV)$ est un idéal différentiel non nul de E. Alors $1 \in (detV)$. Soit $K \subseteq R = K[u_{i,j}, \frac{1}{\det U}]$ l'extension de Picard-Vessiot d'anneaux construite dans le théorème d'existence. Soient $T = R \otimes_K M$, $\mathfrak{a}$, $\bar{T} = T/\mathfrak{a}$, $j_1 : R \to \bar{T}$, $j_2 : M \to \bar{T}$, $\bar{U}$ et $\bar{V}$ comme dans la preuve de la proposition précédente.La M-algèbre $\bar{T}$ est de type fini, et elle est une algèbre différentielle simple. Donc, on a

$$\text{Const}(\bar{T}) = \text{Const}(M) = \text{Const}(E).$$

Les homomorphismes différentiels j_1 et j_2 sont injectifs. Il existe une matrice $C \in \text{GL}(n, \text{Const}(\bar{T}))$ telle que $\bar{U} = \bar{V}C$. Alors $j_1(R) \subseteq j_2(E)$. L'homomorphisme différentiel $\sigma = j_2^{-1} \circ \jmath_1 : R \to E$ est injectif et laisse fixes les éléments de K. Alors $\sigma(R)$ vérifie les propriétés (i) et (iii). Par minimalité $E = \sigma(R)$, donc E vérifie (ii). ∎

Exercice 1.29 Soit $K = \mathbb{C}\{X\}[X^{-1}]$ le corps de séries méromorphes convergentes à l'origine de $\mathbb{C}$ avec la dérivation usuelle. On considère le système (Δ)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3X^{-2} & 0 \\ 0 & 2X^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{A}$ les germes de fonctions holomorphes dans un voisinage pointé de l'origine de $\mathbb{C}$. Avec la dérivation complexe $\mathcal{A}$ est un anneau différentiel intègre. Soit $\mathcal{H}$ son corps de fractions. Le corps de constantes de $\mathcal{H}$ est $\mathbb{C}$.

Soit $\varphi(X) = \sum_{n \geq n_0} a_n X^n \in K$. Soit $\varphi(x)$ le germe de fonction qui envoie un nombre complexe x de module suffisamment petit sur la somme $\sum_{n \geq n_0} a_n x^n \in \mathbb{C}$. L'application $K \ni \varphi(X) \to \varphi(x) \in \mathcal{H}$ est un homomorphisme différentiel injectif. Alors $K \subseteq \mathcal{H}$ est une extension de corps différentiels. La matrice $\begin{pmatrix} \exp(-3/x) & 0 \\ 0 & \exp(-2/x) \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathcal{H})$ est une matrice fondamentale de solutions.

On considère le corps

$$\mathcal{L} = K(\exp(-3/x), \exp(-2/x)) \subseteq \mathcal{H}.$$

Alors $\mathcal{L}$ est une extension de Picard-Vessiot de corps associé à (Δ). On va construire une autre extension de Picard-Vessiot en suivant la construction algébrique décrite dans la preuve de l'existence des extension de Picard-Vessiot.

On considère l'anneau de polynômes $K[X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}]$ avec la dérivation qui étend celle de K et vérifient

$$X'_{1,1} = 3X^{-2}X_{1,1}, \; X'_{1,2} = 0, \; X'_{2,1} = 0, \; X'_{2,2} = 2X^{-2}X_{2,2}.$$

Cette dérivation s'étend sur le corps de fractions $K(X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}) = K(X)$. La matrice $X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale pour le système différentiel (Δ). Soit $D = \det(X) = X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1}$. On considère le sous anneau

$$T = K[X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}, \frac{1}{D}] \subseteq K(X).$$

Le déterminant de X est est inversible dans T, alors X est une matrice fondamentale dans T. On a que T est isomorphe différentiablement à la K-algèbre

$$T = K[X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}, Z]/(ZD - 1),$$

où $Z' = - - 5X^{-2}Z$.

On va nous aider des solutions géométriques pour trouver un idéal différentiel maximale de T. Les solutions "géométriques" $x_{1,1}(x) = \exp(-3/x)$, $x_{1,2}(x) = x_{2,1}(x) = 0$, $x_{2,2}(x) = \exp(-2/x)$ et $z(x) = \exp(5/x)$ vérifient les relations algébriques $x_{1,1}(x)^2 - x_{2,2}(x)^3 = 0$, $x_{2,2}(x)^5 z(x)^2 - 1 = 0$, $x_{1,1}(x)^5 z(x)^3 - 1 = 0$, et $x_{1,2}(x) = x_{2,1}(x) = 0$. On considère alors l'idéal

$$\mathfrak{a} = (ZD - 1, X_{1,1}^2 - X_{2,2}^3, X_{2,2}^5 Z^2 - 1, X_{1,1}^5 Z^3 - 1, X_{1,2}, X_{2,1}) \subseteq K[X, Z].$$

Ceci est un idéal différentiel car $(X_{1,1}^2 - X_{2,2}^3)' = 6X^{-2}(X_{1,1}^2 - X_{2,2}^3) \in \mathfrak{a}$, $(DZ - 1)' = 0$, $(X_{2,2}^5 Z^2 - 1)' = 0$, $(X_{1,1}^5 Z^3 - 1)' = 0$, $X_{1,2}' = X_{2,1}' = 0$.

On considérer la K-algèbre différentiel $R = K[X, Z]/\mathfrak{a}$. Maintenant on va montrer que R est une K-algèbre différentiel simple. On a l'isomorphisme différentiel

$$R = K[X, Z]/\mathfrak{a} = K[V, W, Z]/(VWZ - 1, V^2 - W^3, W^5 Z^2 - 1, V^5 Z^3 - 1).$$

On vérifie facilement

$$(VWZ - 1, V^2 - W^3, W^5 Z^2 - 1, V^5 Z^3 - 1) = (V - W^4 Z, W^5 Z^2 - 1).$$

Soit Q le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ formé par les paires (j, k) tels que $0 \leq j \leq 4$ ou bien $0 \leq k \leq 1$. Ceci entraîne que tout élément de R a une écriture unique sous la forme

$$r = \sum_{(i,j)\in Q} a_{j,k} W^j Z^k, \quad a_{j,k} \in K.$$

Alors on a

$$r' = \sum_{(i,j)\in Q} \left(a_{j,k}' + (2j - 5k)X^{-2} a_{j,k}\right) W^j Z^k.$$

L'équation différentiel $y' = cX^{-2}y$ avec $c \in \mathbb{C}$ n'a pas des solutions non nulles dans K pourvu $c = 0$ (utiliser un argument sur l'ordre de la série solution). On remarque que si $(j,k) \in Q$, alors $2j - 5k \neq 0$. En particulier, l'anneau des constantes de R est $\mathbb{C}$. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal différentiel de R différent de zéro. Soit $r \in \mathfrak{b}$. Supposons que dans l'écriture unique de r il y a exactement m termes différents de zéro. Alors dans l'écriture de r' il y a au plus m termes différents de zéro. Soit $a_{j_0,k_0}W^{j_0}Z^{k_0}$ un de les termes différents de zéro de l'écriture de r, tel que $(j_0,k_0) \neq (0,0)$. Alors l'élément

$$s = \frac{1}{a_{j_0,k_0}}\big(a'_{j_0,k_0} + (2j_0 - 5k_0)X^{-2}a_{j_0,k_0}\big)r - r' \in \mathfrak{b}$$

a au plus $m-1$ termes différents de zéro dans son écriture unique. On prendre $r \in \mathfrak{b}$, $r \neq 0$, avec la propriété suivante : tout élément différent de zéro de $\mathfrak{b}$ a dans son écriture unique un nombre de termes différents de zéro plus grande ou égal que celui de r. Alors $s = 0$. Ceci entraîne que pour tout coefficient $a_{j,k}$ dans l'écriture unique de r on a

$$\left(\frac{a_{j,k}}{a_{j_0,k_0}}\right)' = -\big(2(j-j_0) - 5(k-k_0)\big)X^{-2}\frac{a_{j,k}}{a_{j_0,k_0}}.$$

Si $(j,k),(j_0,k_0) \in Q$ on a $2(j-j_0) - 5(k-k_0) \neq 0$, sauf si $(i,j) = (i_0,j_0)$. Alors on a $a_{i,j} = 0$ pour $(i,j) \neq (i_0,j_0)$. Donc $r = a_{j_0,k_0}W^{j_0}Z^{k_0} \in \mathfrak{b}$. Mais $(W^{j_0}Z^{k_0}, W^5Z^2 - 1) = (1)$, et alors $\mathfrak{b} = (1)$. Donc R est une K-algèbre différentiel simple. L'extension $K \subseteq R$ est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux associé à (Δ). Si L est le corps de fractions de R, alors $K \subseteq L$ est une extension de Picard-Vessiot d'anneaux de (Δ).

On a construit ainsi L et $\mathcal{L}$ deux extensions de Picard-Vessiot associées a (Δ). Si le corps de base K aurait était $K = \mathbb{C}[[X]][X^{-1}]$, on aurait pu effectuer la seconde construction sans aucune modification. Mais on n'airait pas pu faire la premier construction car on n'a pas un inclusion $\mathbb{C}[[X]][X^{-1}] \subseteq \mathcal{H}$. Un des but du chapitre III sera développer une théorie qui permettra faire une construction ""géométrique" des extension de Picard-Vessiot pour un sous corps $K^{\text{diff}} \subseteq \mathbb{C}[[X]][X^{-1}]$.

1.5 Le groupe de Galois différentiel

Soit (K,δ) un corps différentiel de caractéristique zéro à corps de constantes C algébriquement clos.

Définition 1.30 *Soit $K \subseteq F$ une extension différentielle d'anneaux. Le* groupe de Galois *de F sur K est le groupe formé par les K-automorphismes différentiels de F. On le notera* $\mathrm{Gal}_K(F)$.

Soit (Δ) le système différentiel $Y' = AY$, où $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot de corps associée au système (Δ). Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)^t \in \mathrm{Sol}_L(\Delta)$, et $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$. On désigne $\sigma(f)$ le vecteur $\big(\sigma(f_1), \ldots, \sigma(f_n)\big)^t$. On a

$$\big(\sigma(f)\big)' = \sigma(f') = \sigma(Af) = A\sigma(f),$$

donc $\sigma(f) \in \mathrm{Sol}_F(\Delta)$. Si $\lambda \in C$, on a $\sigma(\lambda f) = \lambda\sigma(f)$, car $C \subseteq K$. Alors σ induit un automorphisme du C-espace vectoriel $\mathrm{Sol}_L(\Delta)$. On a le morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_K(L) & \rightarrow & \mathrm{Aut}_C\big(\mathrm{Sol}_L(\Delta)\big) \\ \sigma & \mapsto & \sigma|_{\mathrm{Sol}_L(\Delta)} \end{array} \tag{1.7}$$

Remarque 1.31 (1). L'homomorphisme (1.7) est injectif. En effet, si $V = (v_{i,j})$ est une matrice fondamentale pour (Δ) dans L, on a $L = K(v_{i,j})$. Donc, $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$ est déterminé par les éléments $\sigma(v_{i,j})$.
(2). On a $\mathrm{Gal}_K\big(R(L)\big) = \mathrm{Gal}_K(L)$, où $R(L) = K[V, (\det V)^{-1}]$. En effet, soit $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$, on a $\sigma(R(L)) \subseteq R(L)$. D'après la partie (1) de cette remarque, l'application $\mathrm{Gal}_K(L) \ni \sigma \mapsto \sigma|_{R(L)} \in \mathrm{Gal}_K\big(R(L)\big)$ est injectif. Soit $\tau \in \mathrm{Gal}_K\big(R(L)\big)$. D'après le corollaire 1.26, l'anneau $R(L)$ est un anneau différentiel simple. Alors $\mathrm{Ker}(\tau) = \{0\}$, donc l'isomorphisme τ s'étend en un K-isomorphisme différentiel du corps de fractions de $R(L)$, qui est L.

Sot $B = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ une base du C-espace vectoriel $\mathrm{Sol}_L(\Delta)$. On a $\underline{v}_j = (v_{1,j}, \ldots, v_{n,j})^t \in L^n$. Soit V la matrice formée par les colonnes $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. Soit $\tau \in \mathrm{Aut}_C\big(\mathrm{Sol}_L(\Delta)\big)$. La matrice de τ par rapport à la base B est la matrice $(c_{i,j})$, où $\tau(\underline{v}_j) = \sum_{i=1}^n c_{i,j}\underline{v}_i$, $c_{i,j} \in C$. On a $\tau(V) = V \cdot (c_{i,j})$. On a l'isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}_C\big(\mathrm{Sol}_L(\Delta)\big) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{GL}(n, C) \\ \tau & \mapsto & (c_{i,j}), \quad \text{où} \quad (c_{i,j}) = V^{-1} \cdot \tau(V). \end{array} \tag{1.8}$$

La composition des homomorphismes (1.7) et (1.8) donne l'homomorphisme injectif de groupes

$$\begin{array}{rcl} \rho_V : \mathrm{Gal}_K(L) & \rightarrow & \mathrm{GL}(n, C) \\ \sigma & \mapsto & (c_{i,j}) = V^{-1} \cdot \sigma(V). \end{array} \tag{1.9}$$

1.5.1 Le groupe de Galois différentiel est algébrique

Dans cette sous-section on va montrer que l'image de l'homomorphisme (1.9) est un groupe linéaire algébrique. On va suivre la preuve donnée par A.M.H. Levelt [6].

Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot de corps associé au système différentiel (Δ) : $Y' = AY$. Soit $V = (v_{i,j})$ une matrice fondamentale pour (Δ). On pose $R = K[v_{i,j}, 1/\det(V)] \subseteq L$. On considère le produit tensoriel $L \otimes_K R$, et les K-homomorphismes différentiels

$$\begin{array}{rcl} i_L : L & \to & L \otimes_K R \\ l & \mapsto & l \otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} i_R : L & \to & L \otimes_K R \\ r & \mapsto & 1 \otimes r \end{array}$$

On considère les matrices $V_L = i_L(V)$, $V_R = i_R(V)$. Les matrices V_L et V_R sont matrices fondamentales pour (Δ) à coefficients dans $L \otimes_K R$. Soit

$$Z = (z_{i,j}) = V_L^{-1} \cdot V_R.$$

D'après le lemme 1.4, on a $Z \in \mathrm{GL}\big(n, \mathrm{Const}(L \otimes_K R)\big)$.

Soit S la sous-algèbre de $L \otimes_K R$ engendrée par les éléments de C (i.e. $i_L(c) = i_R(c)$, $c \in C$), les coefficients $z_{i,j}$ de la matrice Z et l'élément $1/\det Z$. On note

$$S = C[Z, 1/\det Z] \subseteq L \otimes_K R.$$

Les éléments de S sont des constantes de $L \otimes_K R$. L'application $L \times S \to L \otimes_K R$ qui envoie $(l, s) \mapsto l \cdot s$ est une application bilinéaire. Il existe donc un homomorphisme de C-espaces vectoriels

$$\begin{array}{rcl} \Theta : L \otimes_C S & \to & L \otimes_K R \\ \sum l_i \otimes s_i & \mapsto & \sum l_i \cdot s_i \end{array}$$

On considère les homomorphismes injectifs de C-espaces vectoriels

$$\begin{array}{rcl} j_S : S & \to & L \otimes_C S \\ s & \mapsto & 1 \otimes s, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} j_L : L & \to & L \otimes_C S \\ l & \mapsto & l \otimes 1_S, \quad 1_S = 1 \otimes 1 \in S \end{array}$$

Les homomorphismes j_L et j_S sont différentiels. On considère les matrices $W_L = j_L(V)$ et $Z_S = j_S(Z)$. On a $\Theta(W_L) = V_L$ et $\Theta(Z_S) = Z$. Alors

$$\Theta(W_L \cdot Z_S) = V_L \cdot Z = V_R. \tag{1.10}$$

Proposition 1.32 *(a). L'homomorphisme* Θ *est un isomorphisme différentiel de L-algèbres.*
(b). On a une bijection entre l'ensemble $\mathrm{Hom}_C(S, C)$ *des homomorphismes de C-algèbres entre S et C, et l'ensemble* $\mathrm{Hom^{dif}}_K(R, L)$ *des K-homomorphismes différentiels entre R et L :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_C(S, C) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom^{dif}}_K(R, L) \\ \alpha & \mapsto & \tilde{\alpha}, \quad \text{où} \quad \tilde{\alpha}(V) = V \cdot \alpha(Z). \end{array}$$

Preuve. Il est évidente que Θ est un homomorphisme de L-algèbres. L'homomorphisme Θ est différentiel, car on a

$$\Theta\big((l\otimes s)'\big) = \theta(l'\otimes s + l\otimes s') = \Theta(l'\otimes s) = l'\cdot s = (l\cdot s)'.$$

Montrons que Θ est injectif. Il suffit de prouver que si $\tau = \sum_{i=1}^{k} l_i\otimes s_i \in \mathrm{Ker}\Theta$ avec $l_1\cdots l_k \neq 0$ alors les éléments $s_1,\ldots,s_k$ sont linéairement dépendants sur C. Si $k=1$, alors $l_1\,s_1 = 0$, donc $s_1 = \frac{1}{l_1}(l_1\,s_1) = 0$. Si $k>1$, on a que $\sum_{i=1}^{k} l_i\,s_i = 0$, d'où $s_1 + \sum_{i=2}^{k}\frac{l_i}{l_1}\,s_i = 0$, et en dérivant on obtient que $\sum_{i=2}^{k}\left(\frac{l_i}{l_1}\right)'\otimes s_i \in \mathrm{Ker}\Theta$. S'il existe j tel que $\left(\frac{l_j}{l_1}\right)' \neq 0$, par hypothèse de récurrence on a que $s_2,\ldots,s_k$ sont linéairement dépendants sur C. Alors $\left(\frac{l_i}{l_1}\right)' = 0$ pour $i=2,\ldots,n$, donc $l_i = c_i l_1$ avec $c_i\in C$. Par suite $\tau = l_1\sum_{i=1}^{k} c_i\otimes s_i$, et $\Theta(\frac{1}{l_1}\tau) = \sum_{i=1}^{k} c_i\cdot s_i = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\Theta = \{0\}$.

Montrons la surjectivité de Θ. Si on considère $L\otimes_K R$ comme L-algèbre, on a

$$L\otimes_K R = L[1\otimes v_{i,j}, \det(1\otimes v_{i,j})^{-1}] = L[V_R, 1/\det V_R].$$

L'image de Θ est une L-algèbre. D'après l'équation (1.10), l'image de Θ contient les éléments de la matrice V_R. D'autre part, la matrice Z est inversible dans S. On a $Z^{-1} = V_R^{-1}\cdot V_L$, donc $\Theta(Z_S^{-1}) = V_R^{-1}\cdot V_L$. Alors $\Theta(Z_S^{-1}\cdot W_L^{-1}) = V_R^{-1}\cdot V_L\cdot V_L^{-1} = V_R^{-1}$. En particulier, $\det V_R^{-1}$ appartient à l'image de Θ. Donc, Θ est surjectif.

Partie (b). Soit $\alpha : S\to C$ un morphisme de C-algèbres. On considère $(\mathrm{Id}\cdot\alpha)$ l'homomorphisme différentiel de C-algèbres $L\otimes_C S\to L$ qui envoie $l\otimes s$ sur $l\cdot\alpha(s)$. Soit $\tilde\alpha$ la composition des homomorphismes différentiels

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde\alpha: & R & \stackrel{i_R}{\to} & L\otimes_K R & \stackrel{\Theta^{-1}}{\to} & L\otimes_C S & \stackrel{(\mathrm{Id}\cdot\alpha)}{\to} & L \\ & r & \mapsto & 1\otimes r & & l\otimes s & \mapsto & l\cdot\alpha(s). \end{array} \tag{1.11}$$

L'homomorphisme $\tilde\alpha$ est un K-homomorphisme différentiel. D'après l'équation (1.10), on a $\Theta^{-1}(V_R) = W_L\cdot Z_S$. Alors

$$\tilde\alpha(V) = (\mathrm{Id}\cdot\alpha)(W_L\cdot Z_S) = V\cdot\alpha(Z). \tag{1.12}$$

Ceci montre que l'application $\alpha\mapsto\tilde\alpha$ est injective, car $\sigma\in {\mathrm{Hom}^{\mathrm{dif}}}_K(R,L)$ est déterminé par la matrice $\sigma(V)$.

Montrons que l'application $\alpha\mapsto\tilde\alpha$ est surjective. Soit $\sigma\in {\mathrm{Hom}^{\mathrm{dif}}}_K(R,L)$. On considère l'homomorphisme différentiel

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Id}\cdot\sigma) : L\otimes_K R & \to & L \\ l\otimes r & \mapsto & l\cdot\sigma(r). \end{array}$$

On a $(\mathrm{Id}\cdot\sigma)(S) \subseteq \mathrm{Const}(L) = C$, car S est formé des constantes et $(\mathrm{Id}\cdot\sigma)$ est un homomorphisme différentiel. Soit α la restriction de $(\mathrm{Id}\cdot\sigma)$ sur S. Alors $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(S, C)$. On a

$$\alpha(Z) = (\mathrm{Id}\cdot\sigma)(V_L^{-1}\cdot V_R) = V^{-1}\cdot\sigma(V).$$

Alors $\tilde{\alpha}(V) = V\cdot\alpha(Z) = VV^{-1}\sigma(V) = \sigma(V)$. Donc $\tilde{\alpha} = \sigma$. ∎

Remarque 1.33 Soit $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(S, C)$. Soit $\tilde{\alpha}$ défini comme ci-dessus. Le diagramme suivante est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L\otimes_K R & \xleftarrow{\Theta} & L\otimes_C S \\ {\scriptstyle(\mathrm{Id}\cdot\tilde{\alpha})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\mathrm{Id}\cdot\alpha)} \\ L & = & L \end{array}$$

En effet. Les morphismes qui apparaissent dans le diagramme sont tous morphismes de L-algèbres. On a aussi

$$L\otimes_C S = L[1\otimes z_{i,j}, 1/\det(Z_S)].$$

Alors il suffit de montrer la commutativité pour les coefficients $1\otimes z_{i,j}$ de la matrice Z_S. On a

$$(\mathrm{Id}\cdot\tilde{\alpha})(V_L^{-1}\cdot V_R) = V^{-1}\cdot(\mathrm{Id}\cdot\tilde{\alpha})(V_R) = V^{-1}\cdot\tilde{\alpha}(V) = \alpha(Z),$$

où la première égalité est une conséquence du fait que $(\mathrm{Id}\cdot\tilde{\alpha})$ est un morphisme de L-algèbres, et la seconde égalité est une conséquence du l'équation (1.12). On a donc

$$(\mathrm{Id}\cdot\tilde{\alpha})\circ\Theta(Z_S) = \alpha(Z) = (\mathrm{Id}\cdot\alpha)(Z_S).$$ ∎

Lemme 1.34 *On considère l'algèbre $C[X_{i,j}]$ des polynômes sur C en les variables $X_{i,j}$, $1i, jn$, et l'homomorphisme de C-algèbres*

$$\Psi : C[X_{i,j}] \to S,$$

où $\Psi(X_{i,j}) = z_{i,j}$, $\Psi(c) = 1\otimes c = c\otimes 1$, $c \in C$. Alors Ψ est non nul, et on a la bijection

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_C(S, C) & \to & \boldsymbol{V}(\mathrm{Ker}\Psi) \subseteq \mathrm{GL}(n, C) \\ \alpha & \mapsto & \alpha(Z), \end{array}$$

où $\boldsymbol{V}(\mathrm{Ker}\Psi) = \{(c_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C) \mid f(c_{i,j}) = 0, \forall f(X_{i,j}) \in \mathrm{Ker}\Psi\}$. En particulier, l'sous-ensemble $\{\alpha(Z) \mid \alpha \in \mathrm{Hom}_C(S, C)\}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathrm{GL}(n, C)$.

Preuve. Soit $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}\Psi$. On a que $\Psi(\det(X_{i,j})) = \det Z$ est un élément inversible dans S, donc $\det(X_{i,j}) \notin \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ et l'application Ψ est non nulle. L'ensemble $\{(\det(X_{i,j}))^m, m \in \mathbb{N}\}$ est une partie multiplicative de l'anneau $C[X_{i,j}]/\mathfrak{a}$. On note $(C[X_{i,j}]/\mathfrak{a})_{\det(X_{i,j})}$ l'anneau des fractions par rapport à cette partie multiplicative. On a l'isomorphisme de C-algèbres induit par Ψ

$$\begin{array}{rcl} \bar{\Psi} : (C[X_{i,j}]/\mathfrak{a})_{\det(X_{i,j})} & \xrightarrow{\sim} & S \\ X_{i,j} + \mathfrak{a} & \mapsto & z_{i,j}. \end{array} \tag{1.13}$$

Soit $\alpha : S \to C$ un C-homomorphisme. On pose $\alpha(z_{i,j}) = c_{i,j}$. L'homomorphisme $\alpha \circ \Psi$ envoie $X_{i,j}$ sur $c_{i,j}$, et $\alpha \circ \Psi(c) = c$, si $c \in C$. Soit $f \in \mathfrak{a}$, l'évaluation de f au point $(c_{i,j})$ est précisément $f(c_{i,j}) = \alpha \circ \Psi(f) = 0$. De plus $\det(c_{i,j}) \neq 0$, car $1 = \alpha((\det Z)(\det Z)^{-1}) = \det(c_{i,j})\alpha((\det Z)^{-1})$. Donc, on a montré que l'application de l'énoncé, $\alpha \mapsto \alpha(V)$, est bien définie. Elle est injective, car un morphisme de C-algèbres entre S et C est complètement déterminé par les valeurs $\alpha(z_{i,j})$. Montrons la surjectivité : soit $(c_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C)$ telle que

$$f(c_{i,j}) = 0, \quad \forall\, f(X_{i,j}) \in \mathfrak{a},$$

alors l'homomorphisme de C-algèbres $C[X_{i,j}] \to C$, $X_{i,j} \mapsto c_{i,j}$, se factorise à travers $(C[X_{i,j}]/\mathfrak{a})_{\det(X_{i,j})}$, c'est à dire qu'il existe un homomorphisme de C-algèbres $\alpha : S \mapsto C$ tel que $\alpha(z_{i,j}) = c_{i,j}$. ∎

Théorème 1.35 *Soit K un corps différentiel à corps de constantes C algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit $(\Delta) : Y' = AY$ un système différentiel d'ordre un et rang n sur K. Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard–Vessiot de corps associé à (Δ). Soit $V \in \mathrm{GL}(n, L)$ une matrice fondamentale pour (Δ). Alors, l'image de l'homomorphisme de groupes injectif*

$$\begin{array}{rcl} \rho_V : \mathrm{Gal}_K(L) & \to & \mathrm{GL}(n, C) \\ \sigma & \mapsto & V^{-1} \cdot \sigma(V) \end{array}$$

est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(n, C)$. Plus précisément, c'est l'ensemble de zéros des polynômes qui appartiennent au noyau du homomorphisme de C-algèbres

$$\begin{array}{rcl} C[X_{i,j}] & \to & L \otimes_K R \\ X_{i,j} & \mapsto & z_{i,j} \end{array}$$

où $R = K[V, 1/\det V] \subseteq L$, et $(z_{i,j})$ est la matrice $(z_{i,j}) = (v_{i,j} \otimes 1)^{-1} \cdot (1 \otimes v_{i,j})$.

Preuve. D'après le corollaire 1.26, l'anneau différentiel R est simple. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom^{dif}}_K(R, L)$. Le noyau de σ est un idéal différentiel propre de R, car on a $\sigma(1) = 1$. Le seul idéal différentiel propre de R est $\{0\}$, donc σ est un homomorphisme différentiel injectif. Puisque L est un corps, σ s'étend en un K-homomorphisme différentiel entre le corps de fractions de R et L. Le corps de fractions de R est L. Alors σ s'étend sur un élément de $\mathrm{Gal}_K(L)$. L'application de restriction

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_K(L) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom^{dif}}_K(R, L) \\ \sigma & \mapsto & \sigma|_R \end{array}$$

est une bijection. Alors, le théorème est une conséquence de la partie (b) de la proposition 1.32 et du lemme 1.34. ∎

Remarque 1.36 On donne une structure de groupe algébrique à $\mathrm{Gal}_K(L)$ via la représentation ρ_V. Cette structure est clairement indépendante de la matrice fondamentale V choisie. On verra plus tard, que L étant fixé, cette structure est aussi indépendante du système différentiel (Δ).

1.5.2 Interprétation classique du groupe de Galois différentiel

Dans la théorie de Galois algébrique, le groupe de Galois d'un polynôme est formé par les permutations de ses racines qui sont "indiscernables de l'identité au regard du corps de base" (voir la section 1.1). Dans le cas différentiel, on substitue le groupes des automorphismes de l'espace vectoriel des solutions d'un système au groupe des permutations des racines d'un polynôme, et le groupe de Galois différentiel est formé par les automorphismes "indiscernables de l'identité au regard du corps de base" (voir le théorème suivante pour un énoncé précis).

Soit K un corps différentiel à corps de constantes C algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit $(\Delta) : Y' = AY$ un système différentiel d'ordre un et rang n sur K. Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot de corps associée à (Δ).

Soit $(c_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(C)$. On considère l'homomorphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rcl} \phi_{(c_{i,j})} : K[X_{i,j}; 1 \le i, j \le n] & \to & K[X_{i,j}] \\ k & \mapsto & k, \quad k \in K \\ X_{i,j} & \mapsto & \sum_{s=1}^{n} X_{i,s} c_{s,j}. \end{array} \tag{1.14}$$

Si $f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$, on désigne par $f((X_{i,j}) \cdot (c_{i,j}))$ l'élément $\phi_{(c_{i,j})}(F(X_{i,j}))$. Si $(c_{i,j})$ est une matrice inversible, alors $\phi_{(c_{i,j})}$ est un isomorphisme, en fait, $\phi^{-1}_{(c_{i,j})} = \phi_{(c_{i,j})^{-1}}$.

Soient $f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$ et $U = (u_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(L)$, on désigne par $f(U)$ le valeur $f(u_{i,j}) \in L$.

Lemme 1.37 *Soit* $\tau \in \mathrm{Aut}_C\big(\mathrm{Sol}_L(\Delta)\big)$*. Soit* $V \in \mathrm{GL}(n, L)$ *une matrice fondamentale pour* (Δ)*. Soit* $(c_{i,j}) = V^{-1} \cdot \tau(V)$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Pour toute matrice fondamentale $U \in \mathrm{GL}(n, L)$*, et pour tout polynôme* $f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$*, on a*

$$f(U) = 0 \Longleftrightarrow f\big(\tau(U)\big) = 0.$$

(2) Pour tout polynôme $f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$*, on a*

$$f(V) = 0 \Longleftrightarrow f\big(\tau(V)\big) = 0.$$

(3) Pour tout polynôme $f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$*, on a*

$$f(V) = 0 \Longleftrightarrow f\big(V \cdot (c_{i,j})\big) = 0.$$

Preuve. Le sens (1) entraîne (2) est trivial. L'équivalence entre (2) et (3) est évidente. Montrons (2) entraîne (1). Soit $U \in \mathrm{GL}(n, L)$ une matrice fondamentale pour (Δ). Alors $U = V \cdot (d_{i,j})$, où $(d_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C)$. On a $\tau(U) = \tau(V) \cdot (d_{i,j})$. Soit $f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$. On considère $g(X_{i,j}) = \phi_{(d_{i,j})}(f(X_{i,j}))$. Alors

$$f(U) = f(V \cdot (d_{i,j})) = g(V),$$

et

$$f\big(\tau(U)\big) = f\big(\tau(V) \cdot (d_{i,j})\big) = g(\tau(V)).$$

Donc

$$f(U) = 0 \Leftrightarrow g(V) = 0 \Leftrightarrow g(\tau(V)) = 0 \Leftrightarrow f(\tau(U)) = 0. \blacksquare$$

Théorème 1.38 *Soit* $\tau \in \mathrm{Aut}_C\big(\mathrm{Sol}_L(\Delta)\big)$*. Alors*

(I) On a $\tau \in Gal_K(L)$ *si et seulement si* τ *vérifie la propriété* (1) *de l'énoncé du lemme précédent.*

(II) Soit $V \in \mathrm{GL}(n, C)$ *une matrice fondamentale pour* (Δ)*. Soit* $(c_{i,j}) = V^{-1} \cdot \tau(V)$*. Alors, la matrice* $(c_{i,j})$ *appartient à l'image de l'application* $\rho_V : \mathrm{Gal}_K(L) \to \mathrm{GL}(n, C)$ *si et seulement si la matrice* $(c_{i,j})$ *vérifie la propriété* (3) *du lemme précédent.*

Preuve. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer (II). Soit $V = (v_{i,j})$. On a $L = K(v_{i,j})$. On considère l'homomorphisme d'anneaux $\psi : K[X_{i,j}] \to L$, tel que, $\psi(k) = k$, $k \in K$, et $\psi(X_{i,j}) = v_{i,j}$, $1 \le i, j \le n$. On munit $K[X_{i,j}]$ de la dérivation qui étend celle de K, et telle que $X'_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s} X_{s,j}$, où $A = (a_{i,j})$. On vérifie facilement que les homomorphismes ψ et $\phi_{(c_{i,j})}$ sont des homomorphismes différentiels. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal différentiel Kerψ. Puisque L est un corps, $\mathfrak{p}$ est un idéal premier. Le polynôme $\det(X_{i,j}) \notin \mathfrak{p}$, car $\det V \neq 0$. Alors, $S = \{\det(X_{i,j})^m + \mathfrak{p} \mid m \geq 0\}$ est une partie multiplicative de l'anneau différentiel $K[X_{i,j}]/\mathfrak{p}$. On désigne par $(K[X_{i,j}]/\mathfrak{p})_{\det(X_{i,j})}$ l'anneau de fractions de $K[X_{i,j}]/\mathfrak{p}$ par rapport à S. L'homomorphisme ψ factorise via un homomorphisme différentiel

$$\bar{\psi} : (K[X_{i,j}]/\mathfrak{p})_{\det(X_{i,j})} \to L$$

L'homomorphisme $\bar{\psi}$ est injectif, et son image c'est l'anneau $R = K[v_{i,j}, 1/\det V]$. Alors $\bar{\psi}$ induit le isomorphisme différentiel de K-algèbres

$$\bar{\psi} : (K[X_{i,j}]/\mathfrak{p})_{\det(X_{i,j})} \xrightarrow{\sim} R = K[v_{i,j}, 1/\det V].$$

D'après la remarque 1.31, on a $\mathrm{Gal}_K(R) = \mathrm{Gal}_K(L)$. Supposons que la matrice $(c_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C)$ vérifie la propriété (3) du lemme précédent. Soit $f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$, on a

$$f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow f(V) = 0 \Leftrightarrow f(V \cdot (c_{i,j})) = 0 \Leftrightarrow \phi_{(c_{i,j})}(f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p}.$$

Alors, il existe un homomorphisme différentiel $\bar{\phi}_{(c_{i,j})}$ tel que le diagramme suivante soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (K[X_{i,j}]/\mathfrak{p})_{\det(X_{i,j})} & \overset{\bar{\phi}_{(c_{i,j})}}{\longrightarrow} & (K[X_{i,j}]/\mathfrak{p})_{\det(X_{i,j})} \\ \uparrow & & \uparrow \\ K[X_{i,j}] & \overset{\phi_{(c_{i,j})}}{\longrightarrow} & K[X_{i,j}] \end{array} \tag{1.15}$$

L'homomorphisme $\bar{\phi}_{(c_{i,j})}$ induit un homomorphisme différentiel de K-algèbres $\sigma : R \to R$, tel que $\sigma(V) = V \cdot (c_{i,j})$. Alors, σ est surjectif. Puisque R est un anneau différentiel simple et $\sigma(1) = 1$, on a que σ est injectif. Alors $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L) = \mathrm{Gal}_K(R)$. Donc, la matrice $(c_{i,j})$ appartient à l'image de ρ_V.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$, tel que $(c_{i,j}) = \rho_V(\sigma) = V^{-1} \cdot \sigma(V)$. Alors, σ induit un isomorphisme différentiel $\bar{\sigma} : (K[X_{i,j}]/\mathfrak{p})_{\det(X_{i,j})} \to (K[X_{i,j}]/\mathfrak{p})_{\det(X_{i,j})}$, tel que le diagramme (1.15) soit commutatif. Ceci entraîne

$$f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p} \Longrightarrow \phi_{(c_{i,j})}(f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p}.$$

En raisonnant sur $\sigma^{-1} \in \mathrm{Gal}_K(L)$, on a

$$f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p} \Longleftrightarrow \phi_{(c_{i,j})}(f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p}.$$

Alors,

$$f(V) = 0 \Leftrightarrow f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow \phi_{(c_{i,j})}(f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow f(V \cdot (c_{i,j})) = 0. \blacksquare$$

Remarque 1.39 Dans cette remarque on donne une autre preuve du fait que le sous-groupe $\rho_V\big(\mathrm{Gal}_K(L)\big) \subseteq \mathrm{GL}(n, C)$ est algébrique.

D'après la preuve du théorème précédent, il existe un idéal $\mathfrak{p} \subseteq K[X_{i,j}]$, tel que, si $(c_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C)$, on a

$$(c_{i,j}) \in \mathrm{Im}(\rho_V) \Leftrightarrow \big\{\forall f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}], \quad f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow f\big((X_{i,j}) \cdot (c_{i,j})\big) \in \mathfrak{p}\big\}$$

Il suffit de montrer que le sous-ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{GL}(n, C)$ des matrices $(c_{i,j})$ telles que

$$\forall f(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}], \quad f(X_{i,j}) \in \mathfrak{p} \Rightarrow f\big((X_{i,j}) \cdot (c_{i,j})\big) \in \mathfrak{p} \tag{1.16}$$

est un ensemble algébrique. En effet, le morphisme $\mathrm{GL}(n, C) \ni (c_{i,j}) \mapsto (c_{i,j})^{-1} \in \mathrm{GL}(n, C)$ est algébrique, donc $\mathcal{A}^{-1}$ serait un ensemble algébrique. On a $\mathrm{Im}(\rho_V) = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{-1}$.

Soit $\{f_1(X_{i,j}), \ldots, f_l(X_{i,j})\}$ un système de générateurs d l'idéal $\mathfrak{p}$. Puisque $\phi_{(c_{i,j})}$ est un morphisme d'anneaux, la propriété (1.16) est satisfaite si et seulement si

$$\phi_{(c_{i,j})}(f_s(X_{i,j}) = f_s((X_{i,j}) \cdot (c_{i,j})) \in \mathfrak{p}, \quad 1 \leq s \leq l. \tag{1.17}$$

Soit d le maximum des degrés des $f_s(X_{i,j})$, $1 \leq s \leq l$. Soit $K[X_{i,j}]_d$ l'ensemble des polynômes de $K[X_{i,j}]$ de degré plus petite ou égal à d. Alors $K[X_{i,j}]_d$ est un K-espace vectoriel de dimension fini, et $\mathfrak{p} \cap K[X_{i,j}]$ est un sous-espace vectoriel. Soit $\{g_1(X_{i,j}), \ldots, g_t(X_{i,j})\}$ une K-base de $K[X_{i,j}]_d$, tel que $\{g_1(X_{i,j}), \ldots, g_r(X_{i,j})\}$ soit une K-base de $\mathfrak{p} \cap K[X_{i,j}]_d$. Le degré de $\phi_{(c_{i,j})}(f(X_{i,j})$ est plus petit ou égal à celui de $f(X_{i,j})$. On a $\phi_{(c_{i,j})}\big(K[X_{i,j}]_d\big) \subseteq K[X_{i,j}]_d$. Alors, il existe des polynômes $\lambda_{h,h'}(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$, tels que

$$g_h\big((X_{i,j}) \cdot (c_{i,j})\big) = \sum_{h'=1}^{t} \lambda_{h,h'}(c_{i,j}) g_{h'}(X_{i,j}).$$

La propriété (1.17) est satisfaite si et seulement si

$$\lambda_{h,h'}(c_{i,j}) = 0, \quad 1 \leq h \leq r, \quad r+1 \leq h' \leq t. \tag{1.18}$$

Soit $\{k_\beta\}_{\beta \in B}$ une base du C-espace vectoriel K. Soit $\lambda(X_{i,j}) \in K[X_{i,j}]$. On a

$$\lambda(X_{i,j}) = \sum_{\beta \in B} k_\beta \lambda_\beta(X_{i,j}), \quad \text{où}, \quad \lambda_\beta(X_{i,j}) \in C[X_{i,j}].$$

Soit $(c_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C)$, on a

$$\lambda(c_{i,j}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_\beta(c_{i,j}) = 0, \quad \forall \beta \in B.$$

Alors, la propriété (1.16) est satisfaite si et seulement si

$$\lambda_{h,h',\beta}(c_{i,j}) = 0, \quad 1 \leq h \leq r, \quad r+1 \leq h' \leq t, \quad \beta \in B.$$

Donc, le sous-ensemble $\mathrm{Im}(\rho_V)$ est un sous-ensemble algébrique. ∎

1.6 Correspondance de Galois différentielle

Soit K un corps différentiel à corps de constantes C algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit (Δ) le système différentiel $Y' = AY$, où $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot de corps associée au système (Δ). Soit $V \in \mathrm{GL}(n, C)$ une matrice fondamentale pour le système (Δ).

Soit F un sous-corps différentiel *intermédiaire* de l'extension $K \subseteq L$, c'est à dire, $K \subseteq F \subseteq L$. Soit

$$G^F = \{\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L) \mid \sigma(a) = a, \quad \forall a \in F\}.$$

Alors G^F est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}_K(L)$. Réciproquement, soit H un sous-groupe de $\mathrm{Gal}_K(L)$, on définit

$$L^H = \{l \in L \mid \sigma(l) = l, \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)\}.$$

Alors L^H est un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq L$.

Proposition 1.40 *Soit F un sous-corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq L$. Alors le sous-groupe G^F est un sous-groupe algébrique de* $\mathrm{Gal}_K(L)$.

Preuve. Comme $K \subseteq L$ est de Picard-Vessiot, alors l'extension différentielle $F \subseteq L$ est de Picard-Vessiot associée au même système différentiel (Δ). La matrice V est aussi une matrice fondamentale pour le système (Δ) sur F. D'après les définitions, on a $\mathrm{Gal}_F(L) = G^F$. D'après le théorème 1.35, $\rho_V\big(\mathrm{Gal}_F(L)\big)$ est un sous-ensemble algébrique. ∎

Proposition 1.41 *On a $L^{\mathrm{Gal}_K(L)} = K$.*

Preuve. Soit $z \in L^{\mathrm{Gal}_K(L)}$, c'est à dire, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$ on a $\sigma(z) = z$. On considère l'anneau $R = R(L)$ défini dans le corollaire 1.26. Soit $z = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in R$. Alors, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$ on a $b\sigma(a) - a\sigma(b) = 0$. Soit $w = b \otimes a - a \otimes b \in L \otimes_K R$. Soit $(\mathrm{Id} \cdot \sigma) : L \otimes_K R \to L$ l'homomorphisme différentiel défini dans la preuve de la proposition 1.32. On a $(\mathrm{Id} \cdot \sigma)(w) = 0$, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$.

Soit $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(S, C)$. Soit $\tilde{\alpha}$ le K-isomorphisme associé à α dans la proposition 1.32. D'après la remarque 1.33, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_K R & \overset{\Theta^{-1}}{\rightarrow} & L \otimes_C S \\ {\scriptstyle (\mathrm{Id} \cdot \tilde{\alpha})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Id} \cdot \alpha)} \\ L & = & L \end{array}$$

Soit $\Theta^{-1}(w) = \sum_{i=1}^m l_i \otimes s_i$ où $l_1, \ldots, l_m$ sont linéairement indépendants sur C. On a

$$0 = (\mathrm{Id} \cdot \tilde{\alpha})(w) = (\mathrm{Id} \cdot \alpha) \circ \Theta^{-1}(w) = \sum_{i=1}^{m} l_i \cdot \alpha(s_i).$$

Donc $\alpha(s_i) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(S, C)$. Par la proposition 2.53 (page 89), l'algèbre S est une algèbre réduite de type fini. Comme C est un corps de caractéristique zéro, pour tout élément non nul $s \in S$ il existe $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(S, C)$ avec $\alpha(s) \neq 0$. Donc $s_1 = \cdots = s_m = 0$ et $w = 0$. Ceci entraîne que $z \in K$. En effet, soit $(r_i)_{i \in I}$ une base du K-espace vectoriel R, $a = \sum k_i r_i$ et $b = \sum h_j r_j$ avec $k_i, h_j \in K$; on a

$$0 = a \otimes b - b \otimes a = \sum_{i,j \in I} (k_i h_j - k_j h_i) r_i \otimes r_j,$$

donc, pour tous i, j, on a $k_i h_j = k_j h_i$. Donc

$$h_j a = \sum_i h_j k_i r_i = \sum_i k_j h_i r_i = k_j b,$$

et $z = a/b \in K$. ∎

Corollaire 1.42 *Soit F un sous-corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq L$. On a* $\mathrm{Gal}_F(L) \subseteq \mathrm{Gal}_K(L)$ *et*

$$L^{\mathrm{Gal}_F(L)} = F.$$

Preuve. L'extension $F \subseteq L$ est de Picard-Vessiot associée au même système que l'extension $K \subseteq L$. On déduit le résultat de la proposition précédente. ∎

Alors l'application $F \mapsto G^F$ est une application injective entre les corps différentiels intermédiaires de l'extension $K \subseteq L$ et les sous-groupes algébriques de $\mathrm{Gal}_K(L)$.

Proposition 1.43 *Soient H un sous-groupe de* $\mathrm{Gal}_K(L)$ *et $F = L^H$. On désigne par $\bar{H}$ l'adhérence de Zariski de H. Alors*

$$G^F = \bar{H}.$$

Preuve. Il est clair que $H \subseteq G^F$. Comme G^F est fermé pour la topologie de Zariski (proposition 1.40) on a $\bar{H} \subseteq G^F$. Supposons qu'il existe $\xi \in G^F$, tel que $\xi \notin \bar{H}$. On va arriver à une contradiction.

Soit $E(X_{i,j})$ un polynôme sur C (ou sur L) en les variables $X_{i,j}$, avec $1 \leq i, j \leq n$, et $B = (b_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(L)$, on désigne par $E(B)$ l'évaluation de $E(X_{i,j})$ dans B, c'est-à-dire, $E(b_{i,j}) \in C$. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$ on désigne par $\sigma(B)$

la matrice $(\sigma(b_{i,j}))$. Soit $V = (v_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C)$ une matrice fondamentale pour (Δ). On note

$$E(\sigma) = E(\rho_V(\sigma)) = E(V^{-1} \cdot \sigma(V)).$$

Comme $\xi \notin \bar{H}$, il existe $S(X_{i,j}) \in C[X_{i,j}]$ tel que

$$S(\sigma) = 0 \text{ pour tout } \sigma \text{ de } H \text{ et, } S(\xi) \neq 0.$$

On considère le polynôme

$$D(X_{i,j}) = S\big(V^{-1} \cdot (X_{i,j})\big) \in L[X_{i,j}].$$

On a $D(\sigma(V)) = S(V^{-1}\sigma(V)) = S(\sigma) = 0$, pour $\sigma \in H$. On a $D(\xi(V)) = S(\xi) \neq 0$. Soit Σ le sous-ensemble de $L[X_{i,j}]$ formé par les polynômes $E(X_{i,j})$ qui satisfont les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} (P.1) & E(\sigma(V)) = 0 \text{ pour tout } \sigma \text{ de } H. \\ (P.2) & \text{Il existe } \tau \in G^F \text{ tel que } E(\tau(V)) \neq 0. \end{array}$$

L'ensemble Σ n'est pas vide, car $D(X_{i,j}) \in \Sigma$.

Soient $\gamma \in \mathrm{Gal}_K(L)$ et $E(X_{i,j}) \in L[X_{i,j}]$. On désigne par $E^\gamma(X_{i,j})$ le polynôme que on obtient en applicant γ aux coefficients de $E(X_{i,j})$. On a

$$\gamma\big(E(\sigma(V))\big) = E^\gamma(\gamma\sigma(V)), \quad \gamma, \sigma \in \mathrm{Gal}_K(L).$$

Soit $\gamma \in H$. Si $E(X_{i,j})$ vérifie la propriété (P.1), alors $E^\gamma(X_{i,j})$ vérifie la propriété (P.1). En effet, $\sigma \in H$, on a

$$E^\gamma(\sigma(V)) = \gamma(E(\gamma^{-1}\sigma(V))) = \gamma(0) = 0.$$

Soit $E(X_{i,j}) \in F[X_{i,j}]$, alors $E(X_{i,j}) \notin \Sigma$. En effet, si $\tau \in G^F$, on a $E^\tau(X_{i,j}) = E(X_{i,j})$. Supposons que $E(X_{i,j})$ vérifie la propriété (P.1). En particulière ($\mathrm{Id} \in \mathrm{Gal}_K(L)$), on a $E(V) = 0$. Soit $\tau \in G^F$, on a

$$E(\tau(V)) = \tau\big(E^{\tau^{-1}}(V)\big) = \tau\big(E(V)\big) = 0.$$

Donc $E(X_{i,j})$ ne vérifie pas la propriété (P.2). En particulière, le polynôme nul n'appartient pas à Σ.

Soit $E(X_{i,j}) \in \Sigma$ avec le plus petit nombre de monômes possible. On peut supposer que le coefficient d'un monôme de $E(X_{i,j})$ est égal à 1. Puisque $E(X_{i,j}) \notin F[X_{i,j}]$, il existe $\gamma \in H$, tel que $E(X_{i,j}) - E^\gamma(X_{i,j}) \neq 0$. Le polynôme $E(X_{i,j}) - E^\gamma(X_{i,j})$ vérifie la propriété (P.1), et il a un nombre de monômes plus petit que celui de $E(X_{i,j})$. Donc, il ne vérifie pas la propriété

(P.2), c'est à dire, pour tout $\tau \in G^F$, on a $E(\tau(V) - E^\gamma(\tau(V)) = 0$. Il existe $a \in L$, tel que, le polynôme

$$P(X_{i,j}) = E(X_{i,j}) - a\big(E(X_{i,j}) - E^\gamma(X_{i,j})\big),$$

ait un nombre de monômes plus petit que celui de $E(X_{i,j})$. Par ailleurs, $P(X_{i,j}) \in \Sigma$, qui est en contradiction avec la minimalité de $E(X_{i,j})$. Finalement $\bar{H} = G^F$. ∎

Comme corollaire, on a que, si H est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Gal}_K(L)$ et $F = L^H$, alors $H = \bar{H} = G^F$. On a ainsi prouvé le théorème suivant

Théorème 1.44 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{sous-corps différentiels} \\ \textit{intermédiaires de } K \subseteq L \end{array} \right\} & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{sous-groupes algébriques} \\ \textit{de } \mathrm{Gal}_K(L) \end{array} \right\} \\ F & \mapsto & G^F, \end{array} \tag{1.19}$$

est une bijection.

Corollaire 1.45 *Soit H un sous-groupe de $G = \mathrm{Gal}_K(L)$. Alors H est Zariski dense dans G si et seulement si le corps L^H des éléments fixes par les éléments de H est K.*

Preuve. On pose $F = L^H$. D'après la proposition 1.43, on a $G^F = \bar{H}$. D'après la bijection du théorème, $\bar{H} = G$ si et seulement si $F = K$. ∎

Proposition 1.46 *Soient F_1 et F_2 deux corps différentiels intermédiaires de l'extension de Picard-Vessiot de corps $K \subseteq L$ associée au système (Δ). Soit $\tau : F_1 \to F_2$ un K-isomorphisme différentiel, alors il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$ tel que $\sigma|_{F_1} = \tau$.*

Preuve. L'extension différentielle $F_1 \subseteq L$ est de Picard-Vessiot associée au même système (Δ). Soit $\tilde{L}$ la réunion disjointe des ensembles F_1 et $L \setminus \tau(F_1)$. Soit $\varphi : \tilde{L} \to L$ la bijection donné par $\varphi(f) = \tau(f)$, si $f \in F_1$, et $\varphi(l) = l$, si $l \in L \setminus \tau(F_1)$. On munit $\tilde{L}$ de l'structure de corps différentiel via la bijection φ. La structure de corps différentiel de F_1 est compatible avec celui de $\tilde{L}$, c'est à dire, l'extension $F_1 \subseteq \tilde{L}$ est une extension différentielle de corps. De plus, $F_1 \subseteq \tilde{L}$ est une extension de Picard-Vessiot de corps associée au système (Δ). D'après le théorème sur l'unicité des extensions de Picard-Vessiot de corps, il existe un F_1-isomorphisme différentiel $\bar{\sigma} : L \to \tilde{L}$. Alors, $\sigma = \varphi \circ \bar{\sigma} : L \to L$ est un isomorphisme différentiel. Si $f \in F_1$, on a $\sigma(f) = \varphi\bar{\sigma}(f) = \varphi(f) = \tau(f)$. Donc, $\sigma|_{F_1} = \tau$. ∎

Lemme 1.47 *Soit F un corps différentiel intermédiaire de l'extension de Picard-Vessiot $K \subseteq L$. Soit $H = G^F$. On considère*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L) \mid \sigma^{-1} H \sigma = H\}, \\ H_2 &= \{\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L) \mid \sigma(F) = F\}. \end{aligned}$$

Alors on a

(i). *$H_1 = H_2$.*

(ii). *H_1 est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Gal}_K(L)$.*

Preuve. (i) D'après le corollaire 1.42, on a $F = L^H$. Par suite,

$$\sigma^{-1} H \sigma \subseteq H \Leftrightarrow \forall \tau \in H, \sigma^{-1}\tau\sigma \in H \Leftrightarrow \forall \tau \in H, \forall l \in F,\ \sigma^{-1}\tau\sigma(l) = l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \tau \in H, \forall l \in F,\ \tau\sigma(l) = \sigma(l) \Leftrightarrow \forall l \in F,\ \sigma(l) \in F \Leftrightarrow \sigma(F) \subseteq F.$$

Alors, $H \subseteq \sigma^{-1} H \sigma \Leftrightarrow \sigma H \sigma^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow \sigma^{-1}(F) \subseteq F$. On a

$$\sigma \in H_1 \Leftrightarrow \sigma^{-1} H \sigma \subseteq H,\ \ H \subseteq \sigma^{-1} H \sigma \Leftrightarrow \sigma(F) \subseteq F,\ \ \sigma^{-1}(F) \subseteq F \Leftrightarrow \sigma \in H_2.$$

(ii) Soit $\tau \in H$, on considère les applications $\Psi_\tau : \mathrm{Gal}_K(L) \to \mathrm{Gal}_K(L)$, $\Psi_\tau(\sigma) = \sigma^{-1}\tau\sigma$, et $\Phi_\tau(\sigma) = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Les applications Ψ_τ et Φ_τ sont continues pour la topologie de Zariski dans $\mathrm{Gal}_K(L)$. D'après la proposition 1.40, H est fermé pour la topologie de Zariski, alors $\Psi_\tau^{-1}(H) \cap \Phi_\tau^{-1}(H)$ est aussi fermé. On a

$$H_1 = \bigcap_{\tau \in H} \left(\Psi_\tau^{-1}(H) \cap \Phi_\tau^{-1}(H) \right).$$

Donc H_1 est fermé. ∎

Définition 1.48 *Soit $E \subseteq F$ une extension des corps différentiels. On dira que F est normal sur E si pour tout élément $l \in F$, $l \notin E$ il existe un E-automorphisme différentiel σ de F tel que $\sigma(l) \neq l$.*

Théorème 1.49 *La correspondance du théorème 1.44 induit la bijection suivante*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sous-corps différentiels intermé-} \\ \text{diaires de } K \subseteq L \text{ et normaux sur } K \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-groupes algébriques} \\ \text{et normaux de } \mathrm{Gal}_K(L) \end{array} \right\}$$

$$F \mapsto G^F,$$

Preuve. Soit F un sous-corps intermédiaire de l'extension différentielle $K \subseteq L$, normal sur K. Soient H_1 et H_2 comme dans le lemme précédent. Soit $l \in L$. Si $l \notin F$, comme l'extension $F \subseteq L$ est de Picard-Vessiot, d'après la proposition 1.41, il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_F(L) \subseteq H_2$, tel que $\sigma(l) \neq l$. Si $l \in F$ et $l \notin K$, comme F est normal sur K, il existe τ un K-automorphisme différentiel de F tel que $\tau(l) \neq l$. D'après la proposition 1.46, il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$, tel que $\sigma|_F = \tau$. Donc, on a $L^{H_2} = K$. Comme H_2 est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Gal}_K(L)$, d'après la correspondance de Galois, on a $H_2 = \mathrm{Gal}_K(L)$. Comme $H_1 = H_2$, le sous-groupe $H = G^F$ est normal. Réciproquement, soit H un sous-groupe normal et algébrique de $\mathrm{Gal}_K(L)$. D'après la correspondance de Galois, il existe un sous-corps différentiel F, tel que $H = G^F$. Comme H est normal, on a $H_2 = H_1 = \mathrm{Gal}_K(L)$. Si $l \in F$, $l \notin K$, il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$ tel que $\sigma(l) \neq l$. Comme $\sigma(F) = F$, on a que F est normal sur K. ∎

Remarque 1.50 Soit H est un sous-groupe normal de $\mathrm{Gal}_K(L)$, pas nécessairement algébrique. Alors, le corps différentiel $F = L^H$ est normal sur K. En effet, le corps L est normal sur K, donc il suffit de prouver que si $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$, alors $\sigma(F) \subseteq F$. Soient $l \in F$ et $\tau \in H$. Il existe $\tau_1 \in H$, tel que $\tau\sigma = \sigma\tau_1$, car H est normal. On a $\tau\sigma(l) = \sigma\tau_1(l) = \sigma(l)$, donc $\sigma(l) \in L^H = F$.

D'après la proposition 1.46, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}_K(L) & \to & \mathrm{Gal}_K(F) \\ \sigma & \mapsto & \sigma|_F \end{array}$$

est surjective. Son noyau est $G^F = \mathrm{Gal}_F(L)$. On a donc l'isomorphisme de groupes

$$\frac{\mathrm{Gal}_K(L)}{\mathrm{Gal}_F(L)} \equiv \mathrm{Gal}_K(F). \blacksquare$$

1.7 Extensions de Liouville.

Définition 1.51 *Soit $E \subseteq F$ une extension de corps différentiels. On dira que l'extension $E \subseteq F$ est de* type Liouvillien *s'il existe une tour de corps différentiels $E = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_m = F$ telle que pour tout indice $i = 1, \ldots, m$ on ait $E_i = E_{i-1}<t_i>$ où l'élément t_i satisfait l'une des propriétés suivantes :*

(1) $t_i' \in E_{i-1}$,

(2) $\dfrac{t_i'}{t_i} \in E_{i-1}$.

On dira que l'extension est de type Liouvillien généralisé *si on permet aussi la propriété*

(3) t_i *algébrique sur* E_{i-1}.

Remarque 1.52 Une extension $E \subseteq F$ est de type Liouvillien si et seulement s'il existe un tour de corps différentiels $E = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_s = F$, tel que pour indice $i = 1, \ldots, s$, on a $M_i = M_{i-1}(z_i, w_i)$, où z_i et w_i sont deux solutions différents d'une équation différentielle linéaire de première ordre sur M_{i-1}

$$y' + a_i y = b_i, \quad a_i, b_i \in M_{i-1}.$$

En effet, si l'élément $t_i \in F_i$ vérifie $t_i' = b_i \in F_{i-1}$, on pose $z_i = t_i$ et $w_i = t_i + 1$, et on a $F_i = F_{i-1}(z_i, w_i)$. Si t_i vérifie $t_i'/t_i = a_i \in F_{i-1}$, on pose $z_i = t_i$ et $w_i = 0$, qui sont solutions de l'équation $y' - a_i y = 0$. Réciproquement, soient z et w deux solutions différentes de l'équation $y' + ay = b$, où $a, b \in E$. Alors $v = z - w$ est une solution non nulle de l'équation homogène $y' + ay = 0$. On a $(z/v)' = b/v \in E(v)$. Soit $t_1 = v$ et $t_2 = z/v$. On a que $E \subseteq E(t_1, t_2) = E(z, w)$ est une extension de type Liouvillien. ∎

Exemples 1.53 (1). Soit $E \subseteq F$ une extension de corps différentiels de caractéristique zéro. Soit $t \in F$ tel que $t' \in E$ et que l'élément t' n'est pas la dérivée d'un élément de E. Alors t est transcendant sur E, et le corps $E(t)$ est différentiel avec le même corps de constantes que E. De plus, l'extension $E \subseteq E(t)$ est de Picard-Vessiot associée à l'équation différentielle $y'' - \frac{a'}{a} y' = 0$, et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}_E(E(t))$ est isomorphe au groupe additif $(\mathrm{Const}(E), +)$. En effet, si t était algébrique sur E, soit $f(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0$ son polynôme minimal, on aurait

$$0 = \big(f(t)\big)' = (mt' + a_{m-1}')t^{m-1} + \cdots + (a_1 t' + a_0'),$$

et par suite $mt' + a_{m-1}' = 0$. Ainsi l'élément t' serait la dérivée de l'élément $\frac{-1}{m} a_{m-1} \in E$, en contradiction avec l'hypothèse sur t'. Comme $t' \in E$ on a que $E<t> = E(t, t', t'', \ldots) = E(t)$, donc $E(t)$ est un corps différentiel. Si $f(t) \in E[t]$ est tel que $\big(f(t)\big)' = 0$, le même raisonnement que ci-dessus montre que $f(t) \in \mathrm{Const}(E)$. Donc $\mathrm{Const}(E[t]) = \mathrm{Const}(E)$. Soit $c = \frac{f(t)}{g(t)}$ une constante de $E(t)$, avec $f(t), g(t) \in E[t]$. On montre par récurrence sur le degré de g que $c \in \mathrm{Const}(E)$. Si le degré de g est zéro, alors $c \in \mathrm{Const}(E[t]) = \mathrm{Const}(E)$. Soit $d > 0$ le degré de g. Quitte à multiplier numérateur et dénominateur de c par un élément non nul de E, on peut supposer que le coefficient du terme de plus haut degré de $g(t)$ est 1. Comme $c' = 0$, on a $c = \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{(f(t))'}{(g(t))'}$. On applique l'hypothèse de récurrence, car le degré de $(g(t))'$ est plus petit que

d. Alors $\mathrm{Const}(E) = \mathrm{Const}(E(t))$. Donc, $u_1 = 1$ et $u_2 = t$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle linéaire $y'' - \frac{a'}{a} y' = 0$. Donc l'extension $E \subseteq E(t)$ est de Picard-Vessiot. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}_E(E(t))$ on a $\sigma(u_1) = 1 = u_1$ et $\big(\sigma(u_2)\big)' = \sigma(u_2') = \sigma(t') = t'$, car $t' \in E$. Alors $\big(u_2 - \sigma(u_2)\big)' = 0$, donc $\sigma(u_2) = u_2 + c$ où $c \in \mathrm{Const}(E)$. Réciproquement, si $c \in \mathrm{Const}(E)$, l'endomorphisme de $E[t]$ qui laisse fixe tout élément de E et qui envoie t sur $t + c$ est un isomorphisme différentiel, donc il s'étend à $E(t)$. Alors, le groupe $\mathrm{Gal}_E(E(t))$ est formé, via l'application (1.9), par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathrm{Const}(E).$$

Donc $\mathrm{Gal}_E(E(t)) \equiv (\mathrm{Const}(E), +)$.

(2). Soit $E \subseteq F$ une extension de corps différentiels. Soient $a \in E$ et $0 \neq u \in F$ tels que $u' - au = 0$. Supposons que $\mathrm{Const}(E<u>) = \mathrm{Const}(E)$. Alors, l'extension $E \subseteq E<u>$ est de Picard-Vessiot associée à l'équation différentielle $y' - ay = 0$. Le groupe $\mathrm{Gal}_E(E<u>)$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif

$$\mathrm{GL}(1, \mathrm{Const}(E)) \equiv \mathrm{Const}(E)^*.$$

Comme $\mathrm{Gal}_E(E<u>)$ est un sous-groupe algébrique, ou bien $\mathrm{Gal}_E(E<u>) = \mathrm{Const}(E)^*$, ou bien $\mathrm{Gal}_E(E<u>)$ est un sous-groupe fini de $\mathrm{Const}(E)^*$. Dans le dernier cas, $\mathrm{Gal}_E(E<u>)$ doit être un groupe cyclique, donc $\mathrm{Gal}_E(E<u>) = \{\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^m = 1\}$. Si $\sigma(u) = cu$, comme $\sigma^m = 1$, on a que $c^m = 1$, donc $\sigma(u^m) = \sigma(u)^m = c^m u^m = u^m$, alors u^m est fixé par les éléments de $\mathrm{Gal}_E(E<u>)$, donc $u^m \in E$. ∎

1.7.1 La partie algébrique

Lemme 1.54 (i). *Soit $E \subseteq F$ une extension de corps différentiels. Soit $a \in F$ algébrique sur E. Le corps $E(a)$ est un corps différentiel.*

(ii). *Soient $E \subseteq F$ et $E \subseteq M$ deux extensions algébriques et différentielles de corps. Soit $\tau : F \to M$ un E-homomorphisme de corps. Alors, τ est un homomorphisme différentiel.*

Preuve. On montre d'abord la seconde partie. Soient $a \in F$ et $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in E[X]$ son polynôme minimal sur E. On a $f(a) = 0$ et $f(\tau(a)) = 0$. En dérivant ceux égalités on obtient

$$a' = -\frac{f'(a)}{\frac{\partial f}{\partial X}(a)}, \qquad \big(\tau(a)\big)' = -\frac{f'(\tau(a))}{\frac{\partial f}{\partial X}(\tau(a))}, \tag{1.20}$$

où $f'(X) = a'_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a'_0$. Alors

$$\tau(a') = -\tau\left(\frac{f'(a)}{\frac{\partial f}{\partial X}(a)}\right) = -\frac{f'(\tau(a))}{\frac{\partial f}{\partial X}(\tau(a))} = \big(\tau(a)\big)'.$$

Ceci montre que τ est différentiel. La première partie du lemme est une conséquence de l'équation (1.20), car $a' \in E(a)$. ∎

Lemme 1.55 *Soit $E \subseteq F = E(v_1, \ldots, v_l)$ une extension de corps, F finiment engendré sur E. Soit M un sous-corps intérmediare de l'extension $E \subseteq F$. Alors M est finiment engendré sur E.*

Preuve. Supposons d'abord que M est algébrique sur E. Soit $x_1, \ldots, x_t$ une base de transcendance de F sur E. Le degré $d = [F : E(x_1, \ldots, x_t)]$ est fini. Soient $m_1, \ldots, m_r \in M$ linéairement indépendants sur E, alors il sont linéairement indépendants sur $E(x_1, \ldots, x_t)$. Donc $[M : E] \leq d$, et M est finiment engendré sur E. Dans le cas général, soit T une base de transcendance de M sur E. Alors M est finiment engendré sur $E(T)$, donc sur E. ∎

Proposition 1.56 *Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot à corps des constantes algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit $\bar{K}$ le corps des éléments de L algébriques sur K. Soit G^0 la composante connexe de l'identité du groupe algébrique $\mathrm{Gal}_K(L)$. Alors*

$$\bar{K} = L^{G^0},$$

i.e. $\bar{K}$ est le corps des éléments fixés par les éléments de G^0. De plus, l'extension $K \subseteq \bar{K}$ est de type fini.

Preuve. D'après le lemme 1.65, G^0 est un sous-groupe normal et algébrique de $\mathrm{Gal}_K(L)$. L'indice $[\mathrm{Gal}_K(L) : G^0] = m$ est fini. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathrm{Gal}_K(L)$, tels que

$$\mathrm{Gal}_K(L)/G^0 = \{\sigma_1 G^0, \ldots, \sigma_m G^0\}.$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$, on a

$$\{\sigma_1 G^0, \ldots, \sigma_m G^0\} = \{\sigma\sigma_1 G^0, \ldots, \sigma\sigma_m G^0\}.$$

Soit $F = L^{G^0}$. D'après la correspondance de Galois différentiel, on a $G^0 = \mathrm{Gal}_K(L)^F$. Soit $a \in F$, on considère le polynôme $f_a(X) = \prod_{i=1}^m \big(X - \sigma_i(a)\big)$. Les éléments de $\mathrm{Gal}_K(L)$ laissent fixes les coefficients de $f_a(X)$, donc $f_a(X) \in K[X]$. On a $f_a(a) = 0$. Donc $F \subseteq \bar{K}$.

Soit $a \in \bar{K}$. Soit $f(X)$ son polynôme minimal sur F. Soit $T = \{a_1, \ldots, a_t\}$ les racines de $f(X)$ dans L. D'après le lemme 1.54, le corps $M = F(a_1 \ldots, a_t)$ est différentiel. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}_K(L)$, alors $\sigma(T) = T$, donc $\sigma(M) = M$. Alors l'extension M est normal sur F, car l'extension $F \subseteq L$ est de Picard-Vessiot, donc normal. Soit $H = \mathrm{Gal}_F(L)^M$. D'après la remarque 1.50, on a

$$\mathrm{Gal}_F(M) \cong \frac{\mathrm{Gal}_F(L)}{\mathrm{Gal}_M(L)} = \frac{G^0}{H}.$$

Le groupe $\mathrm{Gal}_F(M)$ est fini car il est contenu dans le groupe des permutations de $\{a_1, \ldots, a_s\}$. Le groupe H est un sous-groupe normal linéaire et algébrique de G^0, et G^0 est un groupe linéaire algébrique connexe. Par le lemme 1.66 on a que $H = G^0$, donc $M = F$, $a \in F$, et $F = \bar{K}$. D'après le lemme 1.55, l'extension $K \subseteq \bar{K}$ est de type fini. ∎

1.7.2 Extensions de Liouville et résolubilité

Proposition 1.57 *Soit $E \subseteq F$ une extension de corps différentiels telle que F est normal sur E, $F = E{<}v_1, \ldots, v_m{>}$, et pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_E(F)$ il existe des constantes $\lambda^\sigma_{i,j} \in \mathrm{Const}(F)$ tels que*

$$\sigma(v_i) = \lambda^\sigma_{i,i} v_i + \lambda^\sigma_{i,i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda^\sigma_{i,m} v_m, \quad i = 1, \ldots m. \tag{1.21}$$

Alors, l'extension $E \subseteq F$ est de type Liouvillien.

Preuve. On procède par récurrence sur m. Si $m = 0$ on a que $E = F$, donc elle est de type Liouvillien. Si $m > 0$ on divise les égalités (1.21) par $\sigma(v_m) = \lambda^\sigma_{m,m} v_m$, on dérive, et on obtient les égalités

$$\sigma\left(\left(\frac{v_i}{v_m}\right)'\right) = \frac{\lambda^\sigma_{i,i}}{\lambda^\sigma_{m,m}}\left(\frac{v_i}{v_m}\right)' + \cdots + \frac{\lambda^\sigma_{i,m-1}}{\lambda^\sigma_{m,m}}\left(\frac{v_{m-1}}{v_m}\right)', \quad i = 1, \ldots m-1.$$

Notons $K = E{<}\left(\frac{v_1}{v_m}\right)', \ldots, \left(\frac{v_{m-1}}{v_m}\right)'{>}$. D'après les égalités ci-dessus on a que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_E(F)$, $\sigma(K) \subseteq K$. Comme F est normal sur E, K est normal sur E. Par hypothèse de récurrence l'extension $E \subseteq K$ est de type Liouvillien. D'après les égalités (1.21), on a que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_E(F)$, $\sigma(v_m) = \lambda^\sigma_{m,m} v_m$, donc pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_E(F)$, on a $\sigma\left(\frac{v'_m}{v_m}\right) = \frac{v'_m}{v_m}$. Comme F est normal sur E, $\frac{v'_m}{v_m} \in E \subseteq K$, donc l'extension $K \subseteq K{<}v_m{>}$ est de type Liouvillien. Comme $\left(\frac{v_i}{v_m}\right)' \in K$, l'extension $K{<}v_m{>} \subseteq K{<}v_m{>}{<}\frac{v_1}{v_m}, \ldots, \frac{v_{m-1}}{v_m}{>}$ est de type Liouvillien. Donc, l'extension $E \subseteq F$ est aussi de type Liouvillien. ∎

Théorème 1.58 *Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot à corps des constantes algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit G^0 la composante connexe de l'identité du groupe $\mathrm{Gal}_K(L)$. Alors*

- *Si le groupe G^0 est résoluble, l'extension $K \subseteq L$ est de type Liouvillien généralisé.*
- *Si'l existe une extension de type Liouvillien généralisé $K \subseteq F$ telle que $L \subseteq F$ et $\mathrm{Const}(F) = \mathrm{Const}(K)$, alors G^0 est résoluble.*

Preuve. Supposons que G^0 soit résoluble. D'après la proposition 1.56, l'extension $K \subseteq L^{G^0}$ est algébrique de type fini, donc elle est de type Liouvillien généralisé. L'extension $L^{G^0} \subseteq L$ est de Picard-Vessiot et $G^0 = \mathrm{Gal}_{L^{G^0}}(L)$. D'après le théorème 1.76, il existe une base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ des solutions du système (Δ), telle que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_{L^{G^0}}(L)$, on ait

$$\sigma(\underline{v}_j) = \lambda^\sigma_{j,j}\underline{v}_j + \cdots + \lambda^\sigma_{j,n}\underline{v}_n, \qquad \lambda^\sigma_{j,k} \in \mathrm{Const}(K),\ j = 1, \dots, n.$$

On pose $\underline{v}_j = (v_{1,j}, \dots, v_{n,j})^t \in L^n$. Si on ordonne les éléments $v_{i,j}$ par l'ordre lexicographique dans les sous-indices (i,j), l'hypothèse de la proposition 1.57 est satisfaite, donc l'extension $L^{G^0} \subseteq L$ est de type Liouvillien. Donc l'extension $K \subseteq L$ est de type Liouvillien généralisé.

On va montrer la seconde partie du théorème par récurrence sur la longueur de la tour $K = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_m = F$ qui définit l'extension de type Liouvillien généralisé $K \subseteq F$. Si $m = 0$ c'est trivial. Soit $\bar{K}$ le corps des éléments de L qui sont algébriques sur K. D'après la proposition 1.56, on a $\bar{K} = L^{G^0}$, donc $\mathrm{Gal}_{\bar{K}}(L) = G^0$. Soit $F_i = F_{i-1}{<}t_i{>}$, pour $i = 1, \dots, m$. La tour $\bar{K} \subseteq \bar{K}{<}t_1{>} \subseteq \ldots \subseteq \bar{K}{<}t_1, \dots, t_m{>} = F$ définit l'extension de type Liouvillien généralisé $\bar{K} \subseteq F$. Donc, on peut supposer que $\bar{K} = K$ et que le groupe $\mathrm{Gal}_K(L)$ est connexe.

Soit $V = (v_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, L)$ une matrice fondamentale pour le système (Δ). Puisque $\mathrm{Const}(F) = \mathrm{Const}(K)$, l'extension $K{<}t_1{>} \subseteq L{<}t_1{>}$ est de Picard-Vessiot associée au même système (Δ), et $V \in \mathrm{GL}(n, L{<}t_1{>})$ est encore une matrice fondamentale pour (Δ). Pout tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_{K<t_1>}(L{<}t_1{>})$ on a que $\sigma(L) \subseteq L$. On considère l'homomorphisme de groupes injectif

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_{K<t_1>}(L{<}t_1{>}) & \to & \mathrm{Gal}_K(L) \\ \sigma & \mapsto & \sigma|_L \end{array}$$

Via la représentation ρ_V, l'homomorphisme ci-dessus est l'inclusion, donc il est un homomorphisme de groupes algébriques.

Soit $H = \mathrm{Gal}_{K<t_1>}(L{<}t_1{>})$. On peut considérer $H \subseteq \mathrm{Gal}_K(L)$. Le sous-groupe H est un sous-groupe algébrique linéaire de $\mathrm{Gal}_K(L)$. Comme la tour $K{<}t_1{>} = F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_m = F$ est de longueur $m-1$, par hypothèse de récurrence, la composante connexe de l'identité H^0 de H est résoluble. On a $L^H = L \cap K{<}t_1{>}$. En effet, si $\sigma \in \mathrm{Gal}_{K<t_1>}(L{<}t_1{>})$, il est évident que $\sigma|_{L\cap K<t_1>} = \mathrm{Id}$. Si $a \in L\setminus(L\cap K{<}t_1{>})$, puisque l'extension $K{<}t_1{>} \subseteq L{<}t_1{>}$ est normale, il existe $\sigma \in H$, tel que $\sigma(a) \neq a$.

Supposons que t_1 est algébrique sur K. Alors $K{<}t_1{>}$ est algébrique sur K (voir le lemme 1.54). Par hypothèse $K = \bar{K}$, donc $L \cap K{<}t_1{>} = K$. D'après la correspondance de Galois différentiel, on a $H = \mathrm{Gal}_K(L)$. Donc $\mathrm{Gal}_K(L) = G^0 = H^0$ est résoluble.

Supposons que $t_1' \in K$, ou bien $\frac{t_1'}{t_1} \in K$. D'après les exemples 1.53, on a que l'extension $K \subseteq K{<}t_1{>}$ est de Picard-Vessiot et $\mathrm{Gal}_K(K{<}t_1{>})$ est commutatif. Donc, l'extension $K \subseteq K{<}t_1{>} \cap L$ est normale par le théorème 1.49 appliqué à l'extension de Picard-Vessiot $K \subseteq K{<}t_1{>}$. D'après le même théorème appliqué à l'extension $K \subseteq L$, H est un sous-groupe normal de $\mathrm{Gal}_K(L)$. Alors, le groupe algébrique linéaire et connexe $\mathrm{Gal}_K(L)$ a un sous-groupe H qui est algébrique, normal, et tel que le groupe

$$\frac{\mathrm{Gal}_K(L)}{H} \equiv \mathrm{Gal}_K(L \cap K{<}t_1{>})$$

est commutatif, et la composante connexe de l'identité H^0 de H est résoluble. D'après le lemme 1.75, le groupe $\mathrm{Gal}_K(L)$ est résoluble. ∎

Remarque 1.59 En particulière on a montré que la composante connexe de l'identité G^0 de $\mathrm{Gal}_K(L)$ est résoluble si et seulement si l'extension $K \subseteq L$ est de type Liouvillien généralisé. Mais ce dernier énoncé est, a priori, plus faible que celui du théorème. Dans la pratique, si on montre que le groupe G^0 n'est pas résoluble, d'après le théorème, on pourra pas exprimer les solutions du système (Δ) dans une extension Liouvillien généralisé de K.

1.8 Quelques résultats sur les groupes linéaires algébriques.

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats concernant la géométrie algébrique affine et les groupes algébriques linéaires. Pour une introduction dans ce sujet nous renvoyons aux ouvrages [1, Hum, 16].

1.8.1 Rappels de géométrie algébrique affine

Soit C un corps algébriquement clos. Un polynôme $F \in C[X_1, \ldots, X_m]$ induit une fonction, dite polynomiale, $F : C^m \to C$, que par abus de notations on désigne avec le même nom. Soit $J = \{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ une famille de fonctions polynomiales sur C^m. L'ensemble $\boldsymbol{V}(J)$ des zéros de J est le sous-ensemble de C^m formé par les $\underline{c} \in C^m$ tels que $F_\alpha(\underline{c}) = 0$, pour tout $\alpha \in A$.

Un sous-ensemble $V \subseteq C^m$ est dite algébrique s'il existe une famille de fonctions polynomiales J, tel que $V = \boldsymbol{V}(J)$. La topologie de Zariski de C^m est la topologie pour laquelle les ensembles fermes sont les sous-ensembles algébriques de C^m.

Soit $V \subseteq C^m$ un sous-ensemble de C^m. On désigne par $\boldsymbol{I}(V)$ l'ensemble des polynômes $F(X) \in C[X_1 \ldots, X_m]$ tels que $F(\underline{c}) = 0$, pour tout $\underline{c} \in V$. L'ensemble $\boldsymbol{I}(V)$ est un idéal radical de $C[X_1 \ldots, X_m]$. D'après le théorèmes des zéros (Nullstellensatz), les applications $V \mapsto \boldsymbol{I}(V)$ et $J \mapsto \boldsymbol{V}(J)$, sont bijections, l'une inverse de l'autre, entre l'ensemble de sous-ensembles algébriques de C^m et celui de idéaux radicaux de $C[X_1 \ldots, X_m]$. En particulier, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximale, $\boldsymbol{V}(\mathfrak{m})$ est un point.

Soit T un espace topologique. On dit que T est irréductible si T n'est pas l'union de deux fermes propres de T. Soit $S \subseteq T$, alors S est irréductible si et seulement si son adhérence $\overline{S}$ est irréductible. Une composante irréductible d'un espace topologique T, est un sous-espace irréductible maximale de T (qui est nécessairement fermé). Par le lemme de Zorn, un espace topologique peut s'écrire comme l'union de ses composantes irréductibles. Si $\varphi : T \to T'$ est une application continue et T irréductible, alors $\varphi(T)$ est irréductible.

La noethérianité de $C[X_1, \ldots, X_m]$ entraîne tout sous-ensemble algébrique de C^m, avec la topologie de Zariski, a un nombre fini de composantes irréductibles.

Un sous-ensemble algébrique $V \subseteq C^m$ est irréductible si et seulement si l'idéal $\boldsymbol{I}(V)$ est premier.

Soient $V \subseteq C^m$ et $W \subseteq C^n$ sous-ensembles algébriques. Le sous-ensemble $V \times W \subseteq C^{m+n}$ est un sous-ensemble algébrique de C^{m+n}. Si V et W sont irréductibles, alors $V \times W$ est irréductible (avec la topologie de Zariski hérité de C^{n+m}).

Soit $V \subseteq C^m$ un sous-ensemble algébrique. Une fonction $\bar{F} : V \to C$ est dite polynomiale s'il existe un polynôme $F(X) \in C[X_1 \ldots, X_m]$ tel que $\bar{F}(\underline{c}) = F(\underline{c})$, pour tout $\underline{c} \in V$. Les fonctions polynomiales sur V formaient une C-algèbre qu'on désigne par $C[V]$ et qui est isomorphe à $C[X_1, \ldots, X_m]/\boldsymbol{I}(V)$. Alors $C[V]$ est une C-algèbre de type fini et réduite (n'a pas des éléments nilpotents, car $\boldsymbol{I}(V)$ est un idéal radical). Si V est un sous-ensemble algébrique irréductible, $C[V]$ est un domaine d'intégrité, car $\boldsymbol{I}(V)$ est un idéal premier. Dans ce cas, on désigne par $C(V)$ le corps de fractions de $C[V]$.

Soit V un sous-ensemble algébrique irréductible. On définit la dimension de V comme le degré de transcendance du corps $C(V)$ sur C (c'est le nombre maximum de fonctions polynomiales sur V algébriquement indépendants sur

C). Si $W \subseteq V$ est un ensemble algébrique irréductible et différent à V, alors la dimension de W est strictement plus petite que celui de V. Par suite, si W_n, $n \in \mathbb{N}$, est une famille de sous-ensembles algébrique irréductibles tels que $W_n \subseteq W_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, alors il existe k tel que $W_k = W_n$, pour $n \geq k$.

Soit A une C-algèbre de type fini et réduite. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et un sous-ensemble algébrique $V \subseteq C^m$ tel que $A = C[V]$ (plus précisément, A et $C[V]$ sont C-algèbres isomorphes). En effet, on a $A = C[a_1, \ldots, a_m]$. L'homomorphisme de C-algèbres $\varphi : C[X_1, \ldots, X_m] \to A$ qui envoi X_i sur a_i est surjectif. Soit $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}\varphi$. On a $A = C[X]/\mathfrak{a}$. L'idéal $\mathfrak{a}$ est radical, car A est réduite. D'après le théorème des zéros $\boldsymbol{IV}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Alors $A = C[\boldsymbol{V}(\mathfrak{a})]$.

Soient $V \subseteq C^m$ et $W \subseteq C^n$ deux sous-ensembles algébriques. Un morphisme de sous-ensembles algébriques est une application $\varphi : V \to W$, $\varphi(\underline{c}) = (\varphi_1(\underline{c}), \ldots, \varphi_n(\underline{c}))$, telle que chaque fonction $\varphi_j : V \to C$ est une fonction polynomiale sur V. Le morphisme φ est continue pour la topologie de Zariski. Le morphisme φ induit le morphisme de C-algèbres $\varphi^* : C[W] \to C[V]$ donné par $\varphi(G) = G \circ \varphi$. Réciproquement, soit $f : C[W] \to C[V]$ un morphisme de C-algèbres, alors il existe un morphisme de sous-ensembles algébriques $\varphi : V \to W$ tel que $\varphi^* = f$. En effet, si Y_i est l'i-ème projection de C^n, alors $C[W] = C[Y_1, \ldots, Y_n]/\mathfrak{b}$. Soit $\varphi_i = \varphi^*(Y_i + \mathfrak{b})$. Alors $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Soit $V \subseteq C^m$ un sous-ensemble algébrique. Soit $f \in C[V]$. On désigne par V_f l'ensemble $\{\underline{c} \in V \mid f(\underline{c}) \neq 0\}$. L'ensemble V_f est un ouvert de V. On considère l'injection $j : V_f \to C^{m+1}$ donné par $j(\underline{c}) = (\underline{c}, 1/f(\underline{c}))$. On identifie V_j avec son image par l'application j. Alors $V_f \subseteq C^{m+1}$ est un sous-ensemble algébrique de C^{m+1}. Si $f \neq 0$, l'ensemble $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ est une partie multiplicative de $C[V]$. On désigne par $C[V]_f$ l'anneau de fractions $S^{-1}C[V]$. On a $C[V_f] = C[V]_f$. En effet, si $\boldsymbol{I}(V) = \{Q_\alpha(X_1, \ldots, X_m) \mid \alpha \in A\}$, alors V_f est l'ensemble de zéros de $\{f(X_1, \ldots, X_m)Y - 1\} \cup \{Q_\alpha(X_1, \ldots, X_m) \mid \alpha \in A\}$. Une fonction algébrique sur V_f est une fonction $G : V_f \to C$, tel qu'il existe un polynôme $\bar{G}(X_1, \ldots, X_m, Y)$, vérifiant $G(\underline{c}) = \bar{G}(c_1, \ldots, c_m, 1/f(\underline{c}))$, pour $\underline{c} \in V_f$. On a un morphisme de C-algèbres $\psi : C[V]_f \to C[V_f]$, donné par $\psi\big(g/f^s\big)(\underline{c}) = g(\underline{c})/f^s(\underline{c})$, $\underline{c} \in V_f$. Le morphisme ψ est surjectif. Il est aussi injectif, car $f^{s'}(f^{s_2}g_1 - f^{s_1}g_2) = 0$ entraîne $f^{s_2}(\underline{c})g_1(\underline{c}) = f^{s_1}(\underline{c})g_2(\underline{c})$, $\underline{c} \in V_f$. Alors ψ est un isomorphisme.

Soit $h : V \to W$ un morphisme de sous-ensembles algébriques tel que $h(V)$ soit dense dans W. L'homomorphisme $h^* : C[W] \to C[V]$ est injectif, car si une application continue s'annule sur un ensemble dense, elle est nulle. On dit que h est *fini* si $C[V]$ est entier sur $C[W]$ (via h^*).

Lemme 1.60 *Soit $h : V \to W$ un morphisme fini de sous-ensembles algébriques sur un corps C algébriquement clos. Alors :*

(i). *L'application h est surjective.*

(ii). *Si V et W sont irréductibles, et si $Z \subseteq V$ est un fermé propre de V, alors $h(Z)$ est un fermé propre de W.*

Preuve. (i). Soient $C[V]$ et $C[W]$ les anneaux de coordonnées de V et W respectivement. Puisque $C[V]$ est une $C[W]$-algèbre finiment engendrée et entière, $C[V]$ est un $C[W]$-module de type fini. Soient $y \in W$, et $\mathfrak{m}_y$ l'idéal maximal de $C[W]$ des fonctions qui s'annulent en y. D'après le lemme suivante, l'idéal $\mathfrak{a} = h^*(\mathfrak{m}_y)C[V]$ est un idéal propre de $C[V]$, donc il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $C[V]$ contenant $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{m}_x \cap C[W] = \mathfrak{m}_y$ car $\mathfrak{m}_y$ est maximal. D'après le théorème des zéros, $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal des fonctions qui s'annulent en un point $x \in V$. Donc $h(x) = y$.

(ii). Soit $I \subseteq C[V]$ l'idéal associé à Z. Il suffit montrer que $I \cap C[W] \neq (0)$. Soit $a \in I$, $a \neq 0$. Alors $a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$. On peut supposer que $b_0 \neq 0$ car $C[V]$ est intègre. Alors $b_0 \in aC[V] \cap C[W] \subseteq I \cap C[W]$. ∎

Lemme 1.61 *Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux telle que B soit un A-module de type fini. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel que $\mathfrak{a} \neq A$ alors $\mathfrak{a}B \neq B$.*

Preuve. Supposons $\mathfrak{a}B = B$. Soit $m_1, \ldots, m_s$ une système de générateurs du A-module B, on a $m_i = \sum \lambda_{i,j} m_j$, avec $\lambda_{i,j} \in \mathfrak{a}$. Soit $\mu = \det((\lambda_{i,j}) - I)$ où I est la matrice identité de rang s, on a que $\mu B = 0$ (car si H est la matrice adjointe de la matrice $((\lambda_{i,j}) - I)$ on a que $H \cdot ((\lambda_{i,j}) - I) = \mu I$, et $((\lambda_{i,j}) - I) \cdot (m_1, \ldots, m_s)^t = 0$). Alors $\mu = 0$ car $1 \in B$. On a que $\mu = 1 + \lambda$, avec $\lambda \in \mathfrak{a}$, donc $1 \in \mathfrak{a}$. ∎

Lemme 1.62 *Soit C un corps algébriquement clos. Soit $h : V \to W$ un morphisme de sous-ensembles algébriques, tel que $h(V)$ soit dense dans W. Alors $h(V)$ contient un ouvert non vide de W. Supposons de plus que h soit injectif, alors il existe $f \in C[W]$ tel que la restriction de h à l'ouvert $V_f = V \setminus \{f = 0\}$, $h_{|V_f} : V_f \to W_f$ soit un morphisme fini. Donc, si V et W sont irréductibles, le corps $C(V)$ est algébrique sur $C(W)$.*

Preuve. On peut supposer que V et W sont des variétés irréductibles. L'homomorphisme de C-algèbres injectif $h^* : C[W] \to C[V]$ s'étend en morphisme de corps $h^* : C(W) \to C(V)$. On considère h^* comme l'inclusion. $C[V]$ est une C-algèbre de type fini, on pose $C[V] = C[x_1, \ldots, x_m]$. Soit $u_1, \ldots, u_r \in C[V]$ une base de transcendance de $C(V)$ sur $C(W)$. Alors x_j est un élément algébrique sur $C(W)(u_1, \ldots, u_r)$, donc x_j est algébrique sur $C[W][u_1, \ldots, u_r]$. Il existe $f_j \in C[W][u_1, \ldots, u_r]$ tel que x_j est entier sur $C[W][u_1, \ldots, u_r, 1/f_j]$. Soit $f = f_1 \cdots f_m$, alors $C[V]_f$ est entier sur $C[W][u_1, \ldots, u_r, 1/f]$. Alors $h_{|V_f} = h_2 \circ h_1$, où $h_1 : V_f \to W \times \mathbb{A}^r \setminus \{f = 0\}$ et h_2 est la projection $W \times \mathbb{A}^r \setminus \{f = 0\} \to W$. L'application h_1 est surjective car elle est finie. Soit $f = \sum a_\alpha u^\alpha$, alors l'image de h_2 est l'ouvert non vide $U = \{\underline{c} \in W \mid \exists \alpha,\, a_\alpha(\underline{c}) \neq 0\}$, car C est un corps infini. Donc U est contenu dans l'image de h. De plus, si $r \geq 1$ et $y \in U$, le cardinal de $h_2^{-1}(y)$ est infini. Donc, si h est bijective, on a $r = 0$, donc $C(V)$ est algébrique sur $C(W)$. ∎

1.8.2 Groupes linéaires algébriques

Soit C un corps, on désigne par $\mathrm{GL}(n, C)$ l'ensemble des matrices non singulières de rang n sur C. On considère $\mathrm{GL}(n, C)$ comme un sous-ensemble de C^{n^2+1} via l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(n, C) & \rightarrow & C^{n^2+1} \\ A = (a_{i,j}) & \mapsto & (a_{i,j}, \frac{1}{\det A}). \end{array}$$

Alors, $\mathrm{GL}(n, C)$ est le sous-ensemble algébrique de C^{n^2+1} donné par les zéros du polynôme $Z \det(X_{i,j}) - 1$, où $X_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, et Z sont des coordonnées sur C^{n^2+1}. Une *application polynomiale sur* $\mathrm{GL}(n, C)$ est une application $f : \mathrm{GL}(n, C) \rightarrow C$ telle qu'il existe un polynôme $F(X_{i,j}, Z)$ sur C en les indéterminées $X_{i,j}$ et Z, avec $f(A) = F(a_{i,j}, (\det A)^{-1})$ pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}(n, C)$.

Définition 1.63 *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, C)$. On dit que G est un groupe algébrique linéaire si G est un sous-ensemble fermé, pour la topologie de Zariski, de $\mathrm{GL}(n, C)$, plus précisément s'il existe un ensemble I des polynômes sur C dans les indéterminées $X_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, tel que*

$$G = \boldsymbol{V}(I) = \{(a_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n, C) \mid f(a_{i,j}) = 0,\ \forall f \in I\}.$$

Si $G_1 \subseteq \mathrm{GL}(n, C)$ et $G_2 \subseteq \mathrm{GL}(m, C)$ sont deux groupes algébriques linéaires, un morphisme de groupes algébriques linéaires *est une application $\xi : G_1 \rightarrow G_2$ telle que ξ est un morphisme de groupes et de variétés affines, c'est-à-dire, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ où chaque ξ_j est la restriction sur G_1 d'une application polynomiale sur* $\mathrm{GL}(n, C)$.

Soit G un groupe. Un groupe algébrique affine *sur C est un homomorphisme de groupes injectif $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, C)$ tel que l'image $\mathrm{Im}(\rho)$ de ρ soit un groupe algébrique linéaire. On considère sur G la topologie induite par l'application ρ et la topologie de Zariski de $\mathrm{GL}(n, C)$. Soient $\rho_1 : G_1 \rightarrow \mathrm{GL}(n, C)$ et $\rho_2 : G_2 \rightarrow \mathrm{GL}(m, C)$ deux groupes algébriques affines. Un* morphisme de groupes algébriques affines *est un morphisme de groupes $\xi' : G_1 \rightarrow G_2$ tel qu'il existe un morphisme de groupes algébriques linéaires $\xi : \mathrm{Im}(\rho_1) \rightarrow \mathrm{Im}(\rho_2)$ avec $\xi\rho_1 = \rho_2\xi'$. Soit $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, C)$ un groupe algébrique affine, une* structure de groupe algébrique affine *sur G est la classe d'équivalence de ρ à isomorphisme près.*

Exemple 1.64 Les sous-groupes

$$\begin{aligned}\mathrm{SL}(n,C) &= \{(a_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n,C) \mid \det(a_{i,j}) = 1\},\\ \mathrm{T}(n,C) &= \{(a_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n,C) \mid a_{i,j} = 0, \text{ si } i > j\},\end{aligned}$$

sont linéaires algébriques. Le groupe formé par les matrices de $\mathrm{GL}(n,C)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi^3 = 1 \text{ et } c \in C,$$

est aussi linéaire algébrique. ∎

Soit $B \in \mathrm{GL}(n,C)$. Les applications de $\mathrm{GL}(n,C)$ dans $\mathrm{GL}(n,C)$, $A \mapsto A^{-1}$, $A \mapsto A \cdot B$, $A \mapsto B \cdot A$, $A \mapsto A \cdot B \cdot A^{-1}$ et $A \mapsto B \cdot A \cdot B^{-1}$ sont des applications algébriques, donc elles sont continues, et leurs inverses sont continues, elles sont donc des homéomorphismes.

Soit G un groupe linéaire algébrique. Soit Id la matrice identité de G. Il existe une seule composante irréductible de G qui contient la matrice identité. En effet, soient $T_1, \ldots, T_s$ les composantes irréductibles de G que contient Id. Le sous-ensemble algébrique $T_1 \times \cdots \times T_s$ est irréductible. On considère l'application $\varphi : T_1 \times \cdots \times T_s \to G$ donnée par le produit des matrices. La application φ est continue, donc son image $T_1 \cdots T_s$ est un ensemble irréductible de G que contient Id. On a $T_j \subseteq T_1 \cdots T_s$, alors $T_j = T_1 \cdots T_s$, pour $j = 1, \ldots, s$. Donc $s = 1$. On désigne par G^0 la seule composante irréductible de G qui contient Id et elle est dite la composante connexe de l'identité de G.

Lemme 1.65 *Soit G un groupe algébrique affine. Soit G^0 la composante connexe de l'identité de G. Alors Le groupe G^0 est un sous-groupe algébrique affine, normal dans G, et l'indice $[G : G^0]$ de G^0 dans G est fini. Les composantes connexes de G sont les classes G/G^0, en particulier G^0 est une composante connexe de G.*

Preuve. L'image de G^0 par l'homéomorphisme $A \mapsto A^{-1}$ de G est une composante irréductible de G qui contient l'identité, donc $(G^0)^{-1} = G^0$. Soit $B \in G^0$, l'image de G^0 par l'homéomorphisme $A \mapsto A \cdot B$ est une composante irréductible de G qui contient l'identité, donc $G^0 \cdot G^0 = G^0$, alors G^0 est un sous-groupe de G. Le groupe G^0 est fermé pour la topologie de Zariski, car c'est une composante irréductible, donc G^0 est un sous-groupe linéaire algébrique. Soit $B \in G$, l'image de G^0 par l'homéomorphisme $A \mapsto B^{-1} \cdot A \cdot B$ est aussi irréductible, donc $G^0 = B^{-1} \cdot G^0 \cdot B$. Puisque l'image de G^0 par l'homéomorphisme $A \mapsto B \cdot A$ est une composante irréductible de G, l'ensemble $B \cdot G^0$ est une composante irréductible de G. Puisque le nombre des composantes connexes de G est fini, l'indice de G^0 dans G est fini. Alors les composantes irréductibles de G sont disjoints et en nombre fini, donc elles sont aussi les composantes connexes de G. ∎

Lemme 1.66 *Soit G un groupe algébrique affine connexe. Soit H un sous-groupe algébrique de G tel que le nombre de classes à droite de G sur H soit fini. Alors $H = G$.*

Preuve. Soient $A_1 \cdot H, \ldots, A_m \cdot H$ les classes à droite de G sur H. Comme H est fermé on a que $A_i \cdot H$ est fermé (c'est l'image de H par l'homéomorphisme $X \mapsto A_i \cdot X$). Comme $G = \bigcup_{i=1}^m A_i \cdot H$ et $A_i \cdot H \cap A_j \cdot H = \emptyset$ si $i \neq j$, donc $A_i \cdot H$ est fermé et ouvert. Comme G est connexe, $m = 1$. ∎

Lemme 1.67 *Soit G un groupe algébrique affine, soient $U, V \subseteq G$ des ouverts denses dans G. Alors $U \cdot V = G$.*

Preuve. Le sous-ensemble $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ est un ouvert dense dans G car l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme de G. Si $x \in G$, alors $x \cdot U^{-1}$ est aussi un ouvert dense de G, donc $x \cdot U^{-1} \cap V \neq \emptyset$, donc $x \in U \cdot V$. ∎

Lemme 1.68 *Soient G un groupe algébrique affine et H un sous-groupe de G. Alors, l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-groupe de G. Si H contient un ouvert de $\overline{H}$ alors $H = \overline{H}$.*

Preuve. On a que $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}}$ car l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme. L'application $y \mapsto xy$ est un homéomorphisme de G. Soit $x \in H$, alors $x \cdot \overline{H} = \overline{x \cdot H} = \overline{H}$. Si $y \in \overline{H}$, on a $\overline{H} \cdot y = \overline{H \cdot y} \subseteq \overline{H}$, donc $\overline{H} \cdot \overline{H} = \overline{H}$. Si H contient un ouvert U dense dans $\overline{H}$, on a $U \cdot U \subseteq H$, et d'après le lemme précédent $U \cdot U = \overline{H}$. ∎

Proposition 1.69 *Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupes algébriques affines. Alors :*

(i). *L'image de ϕ est un sous-groupe algébrique affine de G'.*

(ii). *Soit G^0 la composante connexe de l'identité de G. Alors la composante connexe de l'identité de* $\mathrm{Im}(\phi)$ *est $\phi(G^0)$.*

Preuve. La partie (i) est une conséquence des lemmes 1.62 et 1.68. D'après le lemme 1.65, G^0 est un sous-groupe algébrique affine, donc $\phi(G^0)$ est aussi un sous-groupe algébrique affine et connexe, donc $\phi(G^0) \subseteq \phi(G)^0$. Le nombre de classes à droite de $\phi(G)^0$ sur $\phi(G^0)$ est fini car $[G : G^0]$ est fini. D'après le lemme 1.66 on a $\phi(G^0) = \phi(G)^0$. ∎

1.8.2.1 Groupes résolubles.

Definitions 1.70 *Soit G un groupe. On dira que G est résoluble s'il existe une chaîne de sous-groupes $G = G^0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = \{1\}$ tels que pour tout $i = 0, \ldots, m-1$ le groupe G_{i+1} est normal dans G_i et le groupe G_i/G_{i+1} est commutatif.*

Soit G un groupe, le commutateur $[G, G]$ de G est le sous-groupe de G engendré par les éléments $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$.

La série dérivée *de G est la série $G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \ldots$ où $G^{(0)} = G$ et $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, et sa longueur est le plus petit entier m tel que $G^{(m)} = \{1\}$.*

Lemme 1.71 *Le groupe G est résoluble si et seulement si la série dérivée de G a longueur finie.*

Preuve. Le commutateur H d'un groupe G est le plus petit sous-groupe normal de G tel que le groupe G/H est commutatif. Si G est résoluble, on a par récurrence que $G_i \supseteq G^{(i)}$, donc $G^{(m)} = \{1\}$. ∎

Corollaire 1.72 *Un sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble et l'image d'un groupe résoluble par un homomorphisme est un groupe résoluble.*

Proposition 1.73 *Soit G un groupe linéaire algébrique. Soit $(X_i, f_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles algébrique irréductibles avec les morphismes de sous-ensembles algébriques $f_i : X_i \to G$. Supposons que la matrice identité* Id $\in Y_i = f_i(X_i)$*, pour $i \in I$. Soit H le plus petit sous-groupe algébrique linéaire de G contenant tous $f_i(X_i)$. Alors H est connexe. De plus, il existe $(i_1, \ldots, i_s) \in I^s$ et des signes $\varepsilon_j \in \{+1, -1\}$, tels que $H = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{i_s}^{\varepsilon_s}$.*

Preuve. On élargit l'ensemble I tel sorte que l'ensemble Y_i^{-1} se trouve parmi les Y_j. Pour $a = (i_1, \ldots, i_s) \in I^s$ on désigne par $Y_{(a)}$ l'image de l'application $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_s} \ni (x_1, \ldots, x_s) \mapsto f(x_1) \cdots f(x_s) \in G$. L'ensemble $Y_{(a)}$ est irréductible, donc l'est aussi son adhérence $\bar{Y}(a)$. On a $\bar{Y}(a) \cdot \bar{Y}(b) \subseteq \bar{Y}(a, b)$. En effet, si $x \in Y(a)$, on a $x \cdot Y(b) \subseteq Y(a, b)$, donc $x \cdot \bar{Y}(b) = \overline{x \cdot Y_{(b)}} \subseteq \bar{Y}(a, b)$. Alors $Y_{(a)} \cdot \bar{Y}_{(b)} \subseteq \bar{Y}(a, b)$. Soit $y \in \bar{Y}_{(b)}$. On a $Y_{(a)} \cdot y \subseteq \bar{Y}_{(a,b)}$, donc $\bar{Y}_{(a)} \cdot y \subseteq \bar{Y}_{(a,b)}$, alors $\bar{Y}(a) \cdot \bar{Y}(b) \subseteq \bar{Y}(a, b)$. Soit a tel que la dimension de $\bar{Y}_{(a)}$ soit maximale. Soit $b \in I^{s'}$, on a $\bar{Y}_{(a)} \subseteq \bar{Y}_{(a)} \cdot \bar{Y}_{(a,b)}$, alors $\bar{Y}_{(a)} = \bar{Y}_{(a,b)}$, pour tout b. En particulier, $\bar{Y}_{(a)} \cdot \bar{Y}_{(a)} \subseteq \bar{Y}_{(a)}$ et $\bar{Y}_{(a)}^{-1} \cdot \bar{Y}_{(a)} \subseteq \bar{Y}_{(a)}$. Alors $\bar{Y}_{(a)}$ c'est un sous-group, donc $H = \bar{Y}_{(a)}$. Puisque $Y_{(a)}$ est l'image d'un morphisme de sous-ensembles algébriques, $Y_{(a)}$ contient un ouvert dense de $\bar{Y}_{(a)}$. D'après le lemme 1.68, $Y_{(a)} = \bar{Y}_{(a)} = H$. Alors H est irréductible, en particulier est connexe. ∎

Proposition 1.74 *Soit G un groupe linéaire algébrique. Soit G^0 la composante connexe de l'identité. Le commutateur $[G^0, G^0]$ de G^0 est un sous-groupe algébrique et connexe de G.*

Preuve. Soit $x \in G^0$, on considère le morphisme de sous-ensembles algébriques $f_x : G^0 \to G$, $f_x(y) = xyx^{-1}y^{-1}$. Soit H le plus petit sous-groupe algébrique de G contenant $f_x(G^0) = Y_x$, pour tout $x \in G^0$.On a $[G^0, G^0] \subseteq H$. D'après la proposition précédente H est connexe et il existe $x_1, \ldots, x_s$, $\varepsilon_j \in \{1, -1\}$, tels que $H = Y_{x_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{x_s}^{\varepsilon_s}$, donc $H \subseteq [G^0, G^0]$. Alors $[G^0, G^0] = H$ est un sous-groupe algébrique et connexe de G. ∎

Lemme 1.75 *Soit G un groupe algébrique affine connexe. Soit H un sous-groupe algébrique et normal de G tel que le groupe G/H soit commutatif. Soit H^0 la composante connexe de l'identité de H. Si H^0 est résoluble, alors G est résoluble.*

Preuve. Comme G/H est commutatif on a $[G, G] \subseteq H$. Comme $G^{(1)} = [G, G]$ est connexe car G est connexe, on a que $G^{(1)} \subseteq H^0$, donc $G^{(m)} \subseteq (H^0)^{(m-1)}$. ∎

Théorème 1.76 (Lie-Kolchin) *Soit C un corps algébriquement clos. Soit $G \subseteq \mathrm{GL}(n, C)$ un groupe linéaire algébrique connexe et résoluble. Alors, il existe une base $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ du C-espace vectoriel C^n telle que pour tout A de G on ait*

$$A\underline{v}_i = \lambda_{i,1}\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_{i,i}\underline{v}_i, \quad \lambda_{i,j} \in C, \ i = 1, \ldots, n.$$

(Par $\underline{v}$ on note ici des vecteurs colonnes).

Preuve. On suit la preuve présentée dans [4].

(1). S'il existe un sous-espace vectoriel V de C^n tel que $G(V) \subseteq V$ (i.e. pour tout $A \in G$ on a $A(V) \subseteq V$), on considère une base $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ de C^n telle que $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$ soit une base de V. Soit B la matrice $(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n)$, alors l'endomorphisme de $\mathrm{GL}(n, C)$ qui envoie chaque matrice X sur la matrice $B^{-1} \cdot X \cdot B$ est algébrique. Les éléments de l'image de G par cette application sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_A & * \\ 0 & \mu_A \end{pmatrix}, \quad \lambda_A \in \mathrm{GL}(s, C),\ \mu_A \in \mathrm{GL}(n-s, C).$$

Les applications $A \to \lambda_A$ et $A \to \mu_A$ sont algébriques. Donc, l'image de G par ces applications est un groupe linéaire algébrique connexe et résoluble. Comme $0 < s < n$, par hypothèse de récurrence, il existe des matrices $B_1 \in \mathrm{GL}(s, C)$ et $B_2 \in \mathrm{GL}(n-s, C)$, telles que, pour toute matrice A de G, les matrices $B_1^{-1}\lambda_A B_1$ et $B_2^{-1}\mu_A B_2$ soient de la forme triangulaire supérieure. Alors, si $D = B\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, pour toute matrice A de G, la matrice $D^{-1}AD$ est triangulaire supérieure. Ainsi, on peut supposer qu'il n'y a pas de sous-espaces vectoriels propres invariants par G.

(2). On procède par récurrence sur la longueur m de la série dérivée de G. Si $m = 0$ on a $G = \{1\}$, et le théorème est trivial. Soit $m > 0$. D'après la proposition 1.74, le groupe $G^{(1)} = [G, G]$ est connexe. Le groupe $G^{(1)}$ est résoluble et sa série dérivée est de longueur $m - 1$. Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que l'assertion du théorème est vraie pour $G^{(1)}$. Il existe $0 \neq \underline{v} \in C^n$, tel que pour tout $A \in G^{(1)}$, on ait $A\underline{v} = c_A \cdot \underline{v}$, où $c_A \in C$.

(3). Soit W le sous-espace vectoriel de C^n engendré par

$$W_0 = \{\underline{v} \in C^n \mid \forall A \in G^{(1)}, \exists c_{A,\underline{v}} \in C,\ A\underline{v} = c_{A,\underline{v}} \cdot \underline{v}\}.$$

Par l'étape précédente $W_0 \neq \{0\}$. On a que $G(W_0) \subseteq W_0$. En effet, si $B \in G$, $\underline{v} \in W_0$ et $A \in G^{(1)}$, il existe $A_1 \in G^{(1)}$ telle que $AB = BA_1$ (le sous-groupe $G^{(1)}$ est normal dans G) donc

$$AB\underline{v} = BA_1\underline{v} = Bc_{A_1,\underline{v}} \cdot \underline{v} = c_{A_1,\underline{v}} \cdot B\underline{v},$$

donc $B\underline{v} \in W_0$. Alors, $G(W_0) \subseteq W_0$ et par l'étape (1) on a que $W_0 = C^n$, donc il existe une base $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ de C^n avec $\underline{v}_i \in W_0$.

(4). Les éléments de $G^{(1)}$ commutent avec les éléments de G. En effet, soit $A \in G^{(1)}$ et $B \in G$. Si $\underline{v} \in W_0$, on a que

$$B^{-1}AB\underline{v} = B^{-1}c_{A,B\underline{v}} \cdot B\underline{v} = c_{A,B\underline{v}} \cdot \underline{v}.$$

Comme $B^{-1}AB$ est déterminée par les valeurs $B^{-1}AB\underline{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$ et l'ensemble $\{c_{A,\underline{v}} \mid \underline{v} \in W_0\}$ est fini (c'est l'ensemble des valeurs propres de A), alors l'ensemble $\{B^{-1}AB \mid B \in G\}$ est fini. Donc, l'image de l'application qui envoie $X \in G$ sur $X^{-1}AX \in G$ doit être un sous-ensemble connexe d'un ensemble fini, donc $X^{-1}AX = A$ pour tout $X \in G$.

(5). Les matrices de $G^{(1)}$ sont scalaires. En effet, soit $A \in G^{(1)}$. Puisque le corps C est algébriquement clos, il existe $c \in C$ et $0 \neq \underline{v}$ tels que $A\underline{v} = c \cdot \underline{v}$. On considère $W_c = \{\underline{v} \in C^n \mid A\underline{v} = c \cdot \underline{v}\}$. Soit $B \in G$ et $\underline{v} \in W_c$, comme $BA = AB$ on a que $AB\underline{v} = BA\underline{v} = c \cdot B\underline{v}$, donc $B\underline{v} \in W_c$ et $G(W_c) \subseteq W_c$. Par l'étape (1) on a que $W_c = C^n$, donc $A = c \cdot \mathrm{I}$.

(6). Si $A \in G^{(1)} = [G, G]$ on a que $\det A = 1$. Comme $A = c\mathrm{I}$, on a $c^n = 1$. Donc $G^{(1)}$ est fini. Par la proposition 1.74, $G^{(1)}$ est connexe. Donc $G^{(1)} = \{1\}$, et G est commutatif.

(7). Soit $A \in G$. Comme le corps C est algébriquement clos, il existe $0 \neq \underline{v} \in C^n$ et $c \in C$, tels que $A\underline{v} = c \cdot \underline{v}$. On considère l'espace vectoriel W_c de l'étape (5). Comme G est commutatif on a que $G(W_c) \subseteq W_c$, donc $W_c = C^n$, donc $A = c \cdot \mathrm{I}$ qui est triangulaire. ∎

1.8.3 Unicité de la structure du groupe algébrique affine du groupe de Galois différentiel

Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot de corps associée au système (Δ). On a muni $\mathrm{Gal}_K(L)$ d'une structure de groupe algébrique affine qui dépend "a priori" de (Δ). On va montrer que cette structure est (L étant fixé) indépendante du système différentiel (Δ).

Lemme 1.77 *Soit K un corps différentiel à corps de constantes C algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soient Δ_A et Δ_B deux systèmes d'équations différentielles sur K. Soit $K \subseteq L$ une extension de Picard-Vessiot de corps associée au système Δ_A et aussi au système Δ_B. Soient U et V deux matrices fondamentales pour Δ_A et Δ_B respectivement. Soient $\rho_U : \mathrm{Gal}_K(L) \to \mathrm{GL}(n, C)$ et $\rho_V : \mathrm{Gal}_K(L) \to \mathrm{GL}(m, C)$ les représentations de $\mathrm{Gal}_K(L)$ associées. Alors les structures ρ_U et ρ_V de groupes algébriques affines sur $\mathrm{Gal}_K(L)$ sont isomorphes.*

Preuve. Il faut montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes algébriques linéaires $\xi : \mathrm{Im}(\rho_U) \to \mathrm{Im}(\rho_V)$ tel que $\xi \circ \rho_U = \rho_V$. On désigne par $(A\|B)$la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. On considère le système d'équations différentielles sur K $\Delta_{(A\|B)}$. On a que $K \subseteq L$ est une extension Picard-Vessiot associée a $\Delta_{(A\|B)}$ car $(U\|V)$ est une matrice fondamentale. On considère $\rho_{(U\|V)} : \mathrm{Gal}_K(L) \to \mathrm{GL}(n+m, C)$ la représentation associée. L'application $\rho_U \circ \rho_{(U\|V)}^{-1} : \mathrm{Im}(\rho_{(U\|V)}) \to \mathrm{Im}(\rho_U)$ est l'application $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \mapsto X$ qui est un morphisme bijectif de groupes algébriques linéaires. D'après la prosposition suivante, cette morphisme est un isomorphisme. ∎

Proposition 1.78 *Soient G_1 et G_2 deux groupes algébriques linéaires sur un corps C algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit $\phi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes algébriques linéaires bijectif. Alors ϕ est un isomorphisme de groupes algébriques linéaires.*

Remarque 1.79 Cette proposition est une conséquence du théorème principal de Zariski (voir (3.20) dans [Mum]). On en donne ici une preuve.

Lemme 1.80 *Soit G un groupe linéaire algébrique. Alors G est une variété algébrique affine non singulière. Si G est connexe l'anneau $C[G]$ de coordonnes sur G est régulier.*

Preuve. Soit e l'identité de G et $g \in G$. L'application $x \mapsto xg$ est un isomorphisme de variétés algébriques affines. Alors le point e est singulier en G si et seulement si le point g est singulier. D'après l'existence de points réguliers dans toute variété affine algébrique, on a que tous les point de G sont réguliers. ∎

Proposition 1.81 *Soit $h : X \to Y$ un morphisme injectif de variétés affines irréductibles (sur un corps C algébriquement clos et de caractéristique zéro) tel que $h(X)$ soit dense dans Y. Alors $C(X) = C(Y)$, c'est-à-dire que h est un morphisme birationnel.*

Preuve. D'après la proposition 1.62, $C(X)$ est algébrique sur $C(Y)$. Soient $f \in C(X)$ et $p(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$ son polynôme minimal. Supposons que $n \geq 2$. Soient $g \in C[Y]$ et $l \in C[X]$ tels que $a_i \in C[Y]_{(g)}$, $f \in C[X]_{(gl)}$. On considère l'extension entière $C[Y]_{(g)} \subseteq C[Y]_{(g)}[f]$. Soient k un corps de caractéristique zéro, et $Q(T) = T^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j T_j$ un polynôme sur k. On a que si $Q(T) = (T-\alpha)^n$, $\alpha \in \bar{k}$ alors $n^n b_0 - b_{n-1} = 0$. Soit $d = a_{n-1} - n^n a_0 \in C[Y]_{(g)}$. On a $d \neq 0$, car on est en caractéristique zéro. Soit $D(d)$ l'ensemble des idéaux maximaux de $C[Y]_{(g)}$ qui ne contiennent pas l'élément d. Soit $\mathfrak{m} \in D(d)$. Il existe au moins deux idéaux maximaux différents $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ de $C[Y]_{(g)}[f]$ tels que $\mathfrak{m}_j \cap C[Y]_{(g)} = \mathfrak{m}$, $j = 1, 2$. En effet, soit $\phi : C[Y]_{(g)} \to C[Y]_{(g)}/\mathfrak{m} = C$ l'homomorphisme naturel. Soit $P^\phi = T^n + \sum \phi(a_i) T^i \in C[T]$. On a $\phi(d) \neq 0$, donc $P^\phi(T)$ a deux racines dans C, soient α_1 et α_2. Soit $C[Y]_{(g)}[T]$ l'anneau des polynômes sur $C[Y]_{(g)}$ en la variable T. On a $C[Y]_{(g)}[f] \equiv C[Y]_{(g)}[T]/P(T)$; pour ceci il suffit de montrer que, si $Q(T) = R(T)P(T)$ et $Q(T) \in C[Y]_{(g)}[T]$, alors $R(T) \in C[Y]_{(g)}[T]$, et ceci se déduit du fait que $P(T)$ est unitaire. Soit $\psi_j : C[Y]_{(g)}[T] \to C$ l'homomorphisme qui étend ϕ et qui envoie T sur α_j, $j = 1, 2$. Alors ψ_j se factorise à travers $\tau_j : C[Y]_{(g)}[f] \to C$ où $\tau_j(f) = \alpha_j$. L'idéal $\mathfrak{m}_j = \mathrm{Ker}(\tau_i)$ satisfait la propriété demandée. Soient Y_g, W, et X_{gl} les variétés affines irréductibles associées à $C[Y]_{(g)}$, $C[Y]_{(g)}[f]$ et $C[X]_{(gl)}$ respectivement. Soient $X_{(gl)} \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\phi} Y_g$ les morphismes associés aux inclusions. L'ensemble $\psi(X_{gl})$ est dense dans W (car ψ^* est l'inclusion), alors il existe un ouvert dense $U \subseteq W$ tel que $U \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$. Soit Z le fermé propre $W \setminus U$. D'après le lemme 1.60, $\phi(Z)$ est un fermé propre de Y_g, donc $\phi^{-1}\phi(Z)$ est un fermé propre de W, car ϕ est surjectif. Soit $\mathfrak{m} \in D(d) \cap \big(\phi\psi(X_{gl}) \setminus \phi(Z)\big)$. D'après ce qui précède, il existe $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in W$, $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$, $\phi(\mathfrak{m}_1) = \phi(\mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \notin Z$, donc

$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \mathrm{Im}(\psi)$, et il existe $\eta_1, \eta_2 \in X_{gl}$ tels que $\psi(\eta_j) = \mathfrak{m}_j$, $j = 1, 2$, donc $\eta_1 \neq \eta_2$ et $\phi\psi(\eta_j) = \mathfrak{m}$. Puisque $\phi\psi$ est la restriction de h à X_{gl} on a une contradiction avec l'injectivité de h. ∎

Proposition 1.82 *Soit $h : X \to Y$ un morphisme bijectif de variétés affines irréductibles sur un corps C algébriquement clos et de caractéristique zéro. Supposons que Y est régulier. Alors il existe $f \in C[Y]$ tel que la restriction de h à X_f, $h|_{X_f} : X_f \to Y_f$ soit un isomorphisme de variétés affines.*

Preuve. D'après le lemme 1.62, il existe $f \in C[Y]$ tel que $h|_{X_f} : X_f \to Y_f$ soit fini. D'après la proposition précédente on a $C(X) = C(Y)$. On a Y_f régulier car Y est régulier, donc l'anneau $C[Y]_{(f)}$ est intégralement clos. L'extension $C[Y]_{(f)} \subseteq C[X]_{(f)}$ est entière et $C[X]_{(f)} \subseteq C(Y)$, alors $C[Y]_{(f)} = C[X]_{(f)}$. ∎

Preuve de la proposition 1.78. Soit $\phi : G_1 \to G_2$ un morphisme bijectif de groupes algébriques linéaires. Il faut montrer que ϕ^{-1} est un morphisme de variétés affines. Pour cela il suffit de montrer que, pour tout $y \in G_2$, il existe un ouvert W, $y \in W \subseteq G_2$ tel que $\phi^{-1}|_W$ soit un morphisme de variétés. Soient G_1^0 et G_2^0 les composantes connexes de l'identité de G_1 et G_2 respectivement. D'après la proposition 1.69, on a $\phi(G_1^0) = G_2^0$. Si $\phi|_{G_1^0} : G_1^0 \to G_2^0$ était un isomorphisme de groupes algébriques, pour tout $x \in G_1$ l'application $\phi|_{x \cdot G_1^0} : x \cdot G_1^0 \to \phi(x^{-1}) \cdot G_1^0$ serait la composition des isomorphismes de variétés affines

$$\begin{array}{ccccccc} x \cdot G_1^0 & \to & G_1^0 & \to & G_1^0 & \to & \phi(x^{-1}) \cdot G_2^0 \\ y & \mapsto & xy & \mapsto & \phi(xy) & \mapsto & \phi(x^{-1})\phi(xy) = \phi(y). \end{array}$$

Alors on peut supposer que G_1 et G_2 sont connexes, donc des variétés affines irréductibles. Par le lemme 1.80 et la proposition 1.82, il existe $f \in C[G_2]$ tel que si $U = G_1 \setminus \{f = 0\}$ et $W = G_2 \setminus \{f = 0\}$ alors $\phi|_U : U \to W$ est un isomorphisme de variétés affines. Ainsi U et W sont des ouverts denses dans G_1 et G_2 respectivement. Soit $x \in U$, alors $\phi : x \cdot U \to \phi(x^{-1}) \cdot W$ est la composition des isomorphismes de variétés affines $x \cdot U \to U \xrightarrow{\phi} W \to \phi(x^{-1}) \cdot W$. D'après le lemme 1.67 on a $W \cdot W = G_2$, donc $\phi : G_1 \to G_2$ est un isomorphisme de groupes algébriques. ∎

Chapitre 2

Le groupe de Galois formel.

2.1 La réduction formelle des équations différentielles.

2.1.1 L'anneau des opérateurs différentiels.

Le corps $\hat{K}_\infty$: On désigne par $\hat{K}$ le corps différentiel $\mathbb{C}[[X]]\,[X^{-1}]$ des séries formelles méromorphes à une indéterminée sur $\mathbb{C}$ muni de la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}$. Soit ν un entier positif ; le polynme $Y^\nu - X$ est irréductible sur l'anneau de polynmes $\hat{K}[Y]$, alors $\hat{K}_\nu = \hat{K}[Y]/(Y^\nu - X)$ est un corps. On désigne par $X^{1/\nu}$ l'élément $Y \bmod (Y^\nu - X)$, alors $\hat{K}_\nu = \hat{K}[X^{1/\nu}]$ et $\{1, X^{1/\nu}, \ldots, (X^{1/\nu})^{\nu-1}\}$ est une $\hat{K}$-base de $\hat{K}_\nu$. La dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}$ se prolonge d'une seule manière en une dérivation sur $\hat{K}_\nu$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}(X^{1/\nu}) = 1/\nu\, X^{1/\nu} X^{-1}$. Si $\nu' = h\nu$ il existe un homomorphisme injectif de corps différentiels $\hat{K}_\nu \to \hat{K}_{\nu'}$ tel que $X^{1/\nu} \mapsto (X^{1/\nu'})^h$. On définit le corps différentiel $\hat{K}_\infty$ comme la limite inductif du système inductif formé par les corps $\hat{K}_\nu$ et les morphismes $\hat{K}_\nu \to \hat{K}_{\nu'}$ si ν divise ν'. On a $\hat{K}_\infty = \bigcup_\nu \hat{K}_\nu$. Si $\hat{F} \in \hat{K}_\nu$ il existe des éléments uniques $\hat{F}_0, \ldots, \hat{F}_{\nu-1} \in \hat{K}$, tels que $F = \hat{F}_0 + \hat{F}_1 X^{1/\nu} + \cdots + \hat{F}_{\nu-1}(X^{1/\nu})^{\nu-1}$. Si $\hat{F}_j = \sum_{k \geq k_0} a_{k+\frac{j}{\nu}} X^k$, on représente $\hat{F}$ par la série $\sum a_{l/\nu} X^{l/\nu}$. Avec cette représentation on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}(\sum a_{p/\nu} X^{p/\nu}) = \sum \frac{p}{\nu} a_{p/\nu} X^{\frac{p}{\nu}-1}$.

On désigne par $\mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$ la $\mathbb{C}$-algèbre associative engendrée comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par tout les mots qu'on peut écrire avec la lettre ∂ et les éléments $g \in \hat{K}_\infty$, modulo toutes les relations qui se déduisent par associativité des relations

$$\partial g = g\partial + \frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,X}, \quad g \in \hat{K}_\infty$$

ainsi que des relations exprimant la loi d'anneau dans $\hat{K}_\infty$. Pour tout élément

$P \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$, il existe une écriture unique

$$P = \sum_{j=0}^{m} a_j \, \partial^j, \quad \text{avec } a_j \in \hat{K}_\infty.$$

Par exemple, on obtient par récurrence la formule de Leibniz :

$$\partial^i X^r = X^r \partial^i + \sum_{k=1}^{i} c_k X^{r-k} \partial^{i-k}, \quad c_k \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

L'anneau non commutatif $\mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$ est appelé *l'anneau des opérateurs différentiels* à coefficients dans $\hat{K}_\infty$. On note par $\mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ (resp. $\mathcal{D}_{\hat{K}}$) le sous-anneau de $\mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$ formé par les éléments sous la forme $\sum a_j \partial^j$ avec $a_j \in \hat{K}_\nu$ (resp. $a_j \in \hat{K}$).

Si $P = \sum_0^m a_j \partial^j$, avec $a_m \neq 0$, on dit que m est le degré de P.

Lemme 2.1 (Division euclidienne) *On désigne par $\mathcal{D}$ l'anneau $\mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$ ou bien $\mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$. Soient P et Q en $\mathcal{D}$. Il existe S et R uniques vérifiant $P = QS + R$ avec le degré de R plus petit que le celui Q. De mme, il existe S' et R' vérifiant $P = S'Q + R'$ avec le degré de R' plus petit que celui de Q.*

Preuve. On montre l'existence par récurrence sur le degré de P. On pose $P = \sum_{i=0}^m a_i \partial^i$ et $Q = \sum_{i=0}^n b_i \partial^i$, avec $m = \deg P$ et $n = \deg Q$. Si $m < n$ on pose $S = 0$ et $R = P$. Supposons que $m \geq n$. Par la formule de Leibniz on a que le degré de $T = P - Q \frac{a_m}{b_n} \partial^{m-n}$ est plus petit que m. Donc, il existe S_1 et R tels que $T = QS_1 + R$ et $\deg R_1 < n$. Alors $S = S_1 + \frac{a_m}{b_n} \partial^{m-n}$ et R satisfont les propriétés demandées. L'unicité se déduit du fait que $\deg(PQ) = \deg P + \deg$ Q. ∎

2.1.2 $\mathcal{D}$-modules et connexions.

On désigne par L le corps $\hat{K}_\infty$ ou bien le corps $\hat{K}_\nu$, et par $\mathcal{D}_L$ l'anneau d'opérateurs différentiels correspondant.

Lemme 2.2 *Soit M un $\mathcal{D}_L$-module à gauche. Supposons que M est un L-espace vectoriel de dimension fini. Alors l'application linéaire $\nabla : M \to M$ donnée par $\nabla(m) = \partial m$ est une connexion sur M.*

Réciproquement, soit (M, ∇) un vectoriel à connexions sur L. Alors l'application $\mathcal{D}_L \times M \to M$ donnée par

$$(\sum a_j \partial^j, m) \mapsto \sum a_j \nabla^j(m)$$

fournit une structure de $\mathcal{D}_L$-module à gauche sur M.

Preuve. On déduit la première partie du fait que si $f \in L$ et $m \in M$ alors

$$\nabla(fm) = \partial fm = f\partial m + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}m = f\nabla(m) + f'm.$$

Pour la seconde partie il faut montrer que $P(Qm) = (PQ)m$ pour tout $P, Q \in \mathcal{D}_L$ et $m \in M$. Par linéarité et récurrence sur le degré de P, on peut supposer que $P = a\partial$ et $Q = b\partial^s$, $a, b \in L$, et alors l'égalité est évidente. ∎

Définition 2.3 *Soient (M_1, ∇_1) et (M_2, ∇_2) deux vectoriels à connexions sur L. Soit $\phi : M_1 \to M_2$ un morphisme de L-espaces vectoriels. On dit que ϕ est un morphisme de vectoriels à connexions si on a que $\nabla_2 \phi = \phi \nabla_1$.*

Remarque 2.4 L'application $\phi : M_1 \to M_2$ est un morphisme de vectoriels à connexions si et seulement si ϕ est un morphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche.

Définition 2.5 *Soient (M_1, ∇_1) et (M_2, ∇_2) deux vectoriels à connexions sur L. On muni l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_L(M_1, M_2)$ de la connexion ∇ :*

$$\nabla(\phi)m = \nabla_2(\phi(m)) - \phi(\nabla_1(m)), \quad \phi \in \mathrm{Hom}_L(M_1, M_2).$$

Si $M_2 = L$ et $\nabla_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$, on obtient ainsi la connexion duale ∇_1^* de ∇_1.

Remarque 2.6 (i). Les section horizontales de ∇ sont les morphismes de vectoriels à connexions entre (M_1, ∇_1) et (M_2, ∇_2).
(ii). Si $\underline{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de M_1 et $A = (a_{i,j})$ est la matrice de ∇_1 par rapport à $\underline{e}$ (i.e. $\nabla_1(e_j) = -\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$), alors la matrice de ∇_1^* par rapport à la base duale de $\underline{e}$ est la matrice $-A^t$.

Lemme 2.7 *Soit (M, ∇) un vectoriel à connexion sur L. Soit $e \in M$ un vecteur cyclique de M (i.e. $\{e, \nabla(e), \ldots, \nabla^{n-1}(e)\}$ est une L-base de M). Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in L$ tels que*

$$a_0 e + a_1\nabla(e) + \ldots + a_{n-1}\nabla^{n-1}(e) + \nabla^n(e) = 0.$$

On considère $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\partial^i + \partial^n \in \mathcal{D}_L$, l'idéal à gauche $\mathcal{D}_L P$, et le $\mathcal{D}_L$-module à gauche $\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P$. Alors l'homomorphisme de L-espaces vectoriels

$$\phi : M \to \mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P$$

défini par $\phi(\nabla^i(e)) = \partial^i \mathrm{mod}\, \mathcal{D}_L P$, $0 \leq i \leq n-1$, est un isomorphisme de $\mathcal{D}_L$-modules à gauche, donc de vectoriels à connexions .

Preuve. Par l'algorithme de division dans $\mathcal{D}_L$ on a que $\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P$ est un L-espace vectoriel avec $\{\bar{1}, \bar{\partial}, \ldots, \bar{\partial}^{n-1}\}$ comme base. Alors ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_L$-modules il suffit de montrer que $\phi\nabla = \partial\phi$. Ceci est vrai car on a $\phi\nabla(\nabla^i(e)) = \partial\phi(\nabla^i(e)$, $0 \leq i \leq n-1$, et l'applications $\phi\nabla - \partial\phi$ est L-linéaire. ∎

Remarque 2.8 Soit $P = \sum_{j=0}^n a_j \partial^j \in \mathcal{D}_L$. Soit $L \subseteq F$ une extension de corps différentiels. On considère sur F la structure de $\mathcal{D}_L$-module à gauche donnée par $(\sum b_k \partial^k) f = \sum b_k \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\, X^k}$. Soit $\phi : \mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P \to F$ un morphisme de $\mathcal{D}_L$-modules à gauche. Alors $\phi(\bar{1})$ est une solution dans F de l'équation différentielle linéaire $\sum a_j \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\, X^k} = 0$. En effet, on a que $P\phi(\bar{1}) = \phi(\bar{P}) = 0$. Réciproquement, si $f \in F$ est une solution de $\sum a_j \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\, X^k} = 0$, alors l'application $\phi : \mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P \to F$ donnée par

$$\phi(\sum b_k \partial^k \text{mod } \mathcal{D}_L P) = \sum b_k \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\, X^k}$$

est un morphisme de $\mathcal{D}_L$-modules à gauche. Alors on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_L}(\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P, F) \equiv \mathrm{Sol}_F(P).$$

On considère sur le F-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_L(\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P, F)$ la connexion ∇, où $\nabla(\phi)(\bar{Q}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, X}(\phi(\bar{Q})) - \phi(\overline{\partial Q})$. Alors l'ensemble des sections horizontales de ∇ est $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_L}(\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P, F)$. On considère la connexion ∇_2 sur le F-espace vectoriel

$$F \otimes_L \mathrm{Hom}_L(\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P, L)$$

donné par $\nabla_2(f \otimes \phi) = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, X} \otimes \phi + f \otimes \partial^*(\phi)$, où ∂^* est la connexion duale de ∂. On a l'isomorphisme de vectoriels à connexions sur F

$$\mathrm{Hom}_L(\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P, F) \simeq F \otimes_L \big(\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P\big)^*.$$

Donc, on a une bijection entre les sections horizontales de $F \otimes_L (\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P)^*$ et les solutions de P dans le corps F.

La matrice de la connexion ∂^* par rapport à la base duale de $\{\bar{1}, \bar{\partial}, \ldots, \overline{\partial^{n-1}}\}$ est la matrice

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{-a_0}{a_n} & \frac{-a_1}{a_n} & \frac{-a_2}{a_n} & \cdots & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Donc le vectoriel à connexion $(\mathcal{D}_L/\mathcal{D}_L P)^*$ est associé au système d'équations $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A_P Y, Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$; et celui-ci est associé à l'équation différentielle linéaire $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}\,X^n} = 0$.

2.1.3 Le polygone de Newton.

Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial^i \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$, avec $a_i = \sum \alpha_{i,r} X^r$. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{T}_{(u,v)} = \{(u', v') \in \mathbb{R}^2 \mid u' \leq u,\ v' \geq v\}$. On considère l'ensemble $M(P) = \{(i, r-i) \mid \alpha_{i,r} \neq 0\}$. Le polygone de Newton $N(P)$ associé à P est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{(u,v)\in M(P)} \mathcal{T}_{(u,v)}$.

Remarque 2.9 Si on pose $\mathrm{ord}_X(a_i) = \min\{r \mid \alpha_{i,r} \neq 0\}$, alors $N(P)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{T}_{(i,\mathrm{ord}(a_i)-i)}$.

Notation 2.10 Soient $v_0 \in \mathbb{R}$, $0 \leq \mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_r$, $\mu_i \in \mathbb{Q}$, et $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On désigne par

$$\mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), (\mu_1, h_1), \ldots, (\mu_r, h_r)\}$$

l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{i=0}^{r} \mathcal{T}_{(u_i,v_i)}$, où les points (u_i, v_i) sont définis comme suit : $(u_0, v_0) = (0, v_0)$, $(u_{i+1}, v_{i+1}) = (u_i, v_i) + (h_i, \mu_i h_i)$. On appelle pentes de l'ensemble ainsi décrit les valeurs $\mu_0, \ldots, \mu_r \in \mathbb{Q}$.

Remarque 2.11 (i). Soit P un opérateur différentiel non nul, alors il existe v_0, $\mu_0, \ldots, \mu_r$, $h_0, \ldots, h_r$ tels que

$$N(P) = \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), (\mu_1, h_1), \ldots, (\mu_r, h_r)\}.$$

Alors $\deg(P) = h_0 + h_1 + \cdots + h_r$.
(ii). Soient $\mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_r$ et $\mu'_0 < \mu'_1 < \cdots < \mu'_{r'}$. Supposons que

$$\mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), (\mu_1, h_1), \ldots, (\mu_r, h_r)\} = \mathcal{N}\{v'_0; (\mu'_0, h'_0), (\mu'_1, h'_1), \ldots, (\mu'_{r'}, h'_{r'})\},$$

alors $r = r'$, $v_0 = v'_0$, $\mu_i = \mu'_i$, et $h_i = h'_i$ pour $0 \leq i \leq r$.

Définition 2.12 (La fonction d'appui) *Soit*

$$N = \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), (\mu_1, h_1), \ldots, (\mu_r, h_r)\}.$$

On définit la fonction d'appui

$$\begin{aligned} \omega(t, N) &= \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N\}, \quad t \geq 0, \\ \omega(t, N) &= \omega(0, N), \quad t < 0. \end{aligned}$$

Si $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$, on pose $\omega(t, P) = \omega(t, N(P))$. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial^i$, on a que $\omega(t, P) = \inf\{\mathrm{ord}_X(a_i) - i(t+1) \mid 0 \leq i \leq n\}$, si $t \geq 0$.

Soient $N = \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), (\mu_1, h_1), \ldots, (\mu_r, h_r)\}$, et les points (u_i, v_i) définies comme ci-dessus. On a $\omega(0, N) = v_0$, $\omega(t, N) = v_{i+1} - tu_{i+1}$ si $\mu_i \leq t \leq \mu_{i+1}$, $0 \leq i \leq r$ (on pose $\mu_{r+1} = \infty$). Alors la fonction d'appui est continue, linéaire par morceaux, et les points de discontinuité de sa dérivée sont les pentes de N. On peut reconstruire N a partir de sa fonction d'appui : Soient $\mu'_0 < \mu'_1 < \ldots < \mu'_{r'}$ les points de discontinuité de la dérivée de $\omega(t, N)$. On pose

$$\begin{aligned} h'_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\big(\omega(\mu'_i - 0, N)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\big(\omega(\mu'_i + 0, N)\big), \\ v'_0 &= \omega(0, N). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $N = \mathcal{N}\{v'_0; (\mu'_0, h'_0), \ldots, (\mu'_{k'}, h'_{k'})\}$.

Lemme 2.13 *Soient*

$$\begin{aligned} N_1 &= \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), \ldots, (\mu_r, h_r)\}, \\ N_2 &= \mathcal{N}\{v'_0; (\mu'_0, h'_0), \ldots, (\mu'_{r'}, h'_{r'})\}. \end{aligned}$$

On considère l'ensemble

$$N_1 + N_2 = \{(u + u', v + v') \mid (u, v) \in N_1,\ (u', v') \in N_2\}.$$

Alors il existe $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$ et $l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$N_1 + N_2 = \mathcal{N}\{v_0 + v'_0; (\lambda_1, l_1), \ldots, (\lambda_s, l_s)\},$$

où $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \{\mu_0, \ldots, \mu_r\} \cup \{\mu'_0, \ldots, \mu'_{r'}\}$, et $l_i = \sum_{\mu_j = \lambda_i} h_j + \sum_{\mu'_j = \lambda_i} h'_j$. De plus on a que

$$\omega(t, N_1 + N_2) = \omega(t, N_1) + \omega(t, N_2).$$

Preuve. L'ensemble $N_1 + N_2$ est convexe car c'est la somme de deux convexes. Alors il est l'enveloppe convexe de $\bigcup_{i,j} \mathcal{T}_{(u_i + u'_j, v_i + v'_j)}$, où les points (u_i, v_i) et (u'_j, v'_j) sont les points associés à N_1 et N_2 respectivement avec la notation 2.10 ci-dessus. Alors il existe $v''_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, l_1 \ldots, l_s$ tels que $N_1 + N_2 = \mathcal{N}\{v''_0; (\lambda_1, l_1), \ldots, (\lambda_s, l_s)\}$. D'après la définition de $\omega(t, N)$ on a $\omega(t, N_1 + N_2) = \omega(t, N_1) + \omega(t, N_2)$. Ceci donne les valeurs des l_i en vertu de la reconstruction de N à partir de sa fonction d'appui. ∎

Lemme 2.14 *Soient $P, Q \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$. On a*

$$\omega(t, PQ) = \omega(t, P) + \omega(t, Q).$$

Alors $N(PQ) = N(P) + N(Q)$.

Preuve. On montre d'abord que

$$\omega(t, PQ) \geq \omega(t, P) + \omega(t, Q). \tag{2.2}$$

Par récurrence sur i, on montre facilement que $\omega(t, a\partial^i b\partial^j) = \omega(t, a\partial^i) + \omega(t, b\partial^j)$ avec $a, b \in \hat{K}_\infty$. Si $P = \sum_{i=0}^n a_i\partial^i$ et $Q = \sum_{i=0}^m b_i\partial^i$ on a $PQ = \sum_{i,j} a_i\partial^i b_j\partial^j$, alors si $t \geq 0$ on a que $\omega(t, PQ) = \inf\{\omega(t, a_i\partial^i) + \omega(t, b_j\partial^j) \mid i, j\} \geq \inf\{\omega(t, a_i\partial^i) \mid i\} + \inf\{\omega(t, b_j\partial^j) \mid j\} = \omega(t, P) + \omega(t, Q)$.

Soit $\mu \geq 0$. Soit $(w, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose

$$M_{(w,d)} = X^\alpha \partial^d, \quad \text{où } \alpha = w + d(\mu + 1).$$

On remarque que $\omega(\mu, M_{(w,d)}) = w$, et $\deg(M_{(w,d)}) = d$. On définit l'ordre $(w, d) < (w', d')$ si $w < w'$ ou bien $w = w'$ et $d > d'$. D'après la formule de Leibniz, si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a alors

$$\alpha M_{(w,d)} \beta M_{(w',d')} = \alpha\beta M_{(w+w',d+d')} + \sum_{(w+w',d+d')<(w'',d'')} \gamma_{(w'',d'')} M_{(w'',d'')}. \tag{2.3}$$

Soit $w_0 = \omega(\mu, P)$, il existe $\Omega_\mu(P) = \sum_{d=0}^{d_0} \gamma_d M_{(w_0,d)}$, $\gamma_d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\omega\big(\mu, P - \Omega_\mu(P)\big) > \omega(\mu, P).$$

On écrit $\Omega_\mu(Q) = \sum_{d=0}^{d'_0} \gamma'_d M_{(w'_0,d)}$. D'après la formule de Leibniz on a

$$\Omega_\mu(P)\Omega_\mu(Q) = \gamma_{d_0}\gamma'_{d'_0} M_{(w_0+w'_0,d_0+d'_0)} + \sum_{(w_0+w'_0,d_0+d'_0)<(w'',d'')} \gamma_{(w'',d'')} M_{(w'',d'')}.$$

Donc $\omega(\mu, \Omega_\mu(P)\Omega_\mu(Q)) = \omega(\mu, \Omega_\mu(P)) + \omega(mu, \Omega_\mu(Q))$. On pose $P_1 = P - \Omega_\mu(P)$ et $Q_1 = Q - \Omega_\mu(Q)$, alors $PQ = P_1Q_1 + P_1\Omega_\mu(Q) + \Omega_\mu(P)Q_1 + \Omega_\mu(P)\Omega_\mu(Q)$. En utilisant l'inégalité 2.2, on a $\omega(\mu, PQ - \Omega_\mu(P)\Omega_\mu(Q)) = \omega[\mu, P_1Q_1 + P_1\Omega_\mu(Q) + \Omega_\mu(P)Q_1) > w_0 + w'_0$, donc

$$\omega(\mu, PQ) = \omega(\mu, \Omega_\mu(P)\Omega_\mu(Q)) = \omega(\mu, P) + \omega(\mu, Q).$$

Par le lemme 2.13 on a que $\omega(t, N(P) + N(Q)) = \omega(t, N(P)) + \omega(t, N(Q)) = \omega(t, P) + \omega(t, Q) = \omega(t, PQ) = \omega(t, N(PQ))$, donc les ensembles $N(P) + N(Q)$ et $N(PQ)$ sont des polygones qui ont la mme fonction d'appui, par suite $N(P) + N(Q) = N(PQ)$. ∎

Lemme 2.15 *Soit $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ de pentes $\mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_r$. Supposons que $r \geq 1$, et soit s un entier avec $0 \leq s \leq r - 1$. Il existe alors Q et R (resp. Q' et R') uniques dans $\mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i). $P = QR$ *(resp.* $P = R'Q'$*),* $Q, R, Q', R \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$.

(ii). *Les pentes de* Q *(resp.* Q'*) sont* $\mu_0, \ldots, \mu_s$*, et celles de* R *(resp.* R'*) sont* $\mu_{s+1}, \ldots, \mu_r$.

(iii). *On a* $R = 1 + r_1(X)\partial + \cdots + r_m(X)\partial^m$ *(resp.* $Q' = 1 + q_1(X)\partial + \cdots + q_{m'}\partial^{m'}$*).*

Preuve. On regarde seulement le cas $P = QR$, la décomposition $P = R'Q'$ étant analogue. Soit $N(P) = \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), \ldots, (\mu_r, h_r)\}$. On considère

$$\begin{aligned} N_1 &= \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), \ldots, (\mu_s, h_s)\}, \\ N_2 &= \mathcal{N}\{0; (\mu_{s+1}, h_{s+1}), \ldots, (\mu_r, h_r)\}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.13 on a $N(P) = N_1 + N_2$. On désigne par $\frac{1}{\nu}\mathbb{Z}$ l'ensemble des rationnels a/ν avec $a \in \mathbb{Z}$. On pose $A_i = N_i \cap (\mathbb{N} \times \frac{1}{\nu}\mathbb{Z})$, $i = 1, 2$, et $B = N(P) \cap (\mathbb{N} \times \frac{1}{\nu}\mathbb{Z})$. Choisissons $\mu \in]\mu_s, \mu_{s+1}[$, en particulier on a $\mu > 0$. On considère le changement linéaire de coordonnées dans $\mathbb{R}^2$, $(u, v) = (w, d)$ où $w = v - \mu u$ et $d = v$. Si $p, p' \in \mathbb{R}^2$ on a $w(p + p') = w(p) + w(p')$ et $d(p + p') = d(p) + d(p')$. Pour (w, d) avec $d \in \mathbb{N}$ on note $M_{(w,d)} = X^\alpha \partial^d$, où $\alpha = w + d(\mu + 1)$, c'est-à-dire, $\omega(\mu, M_{(w,d)}) = w$. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ordre lexicographique suivant les coordonnées $(w, -d)$. On a alors les propriétés suivantes :

P1 Le nombre des points de B, A_1 ou A_2 qui sont inférieurs à un point donné est fini. On peut numéroter A_1, A_2 et B respectivement en suivant l'ordre défini. Soient $(\bar{w}, \bar{d})$ les coordonnées du point minimum de A_1. Le point minimum de A_2 est $(0, 0)$.

P2 Soient $(w_1, d_1) \in A_1$, $(w_2, d_2) \in A_2$, et $(w, d) \in B$ tels que

$$(w_1, d_1) + (w_2, d_2) \leq (w, d).$$

Alors $(w_1, d_1) \leq (w, d)$ et $(w_2, d_2) \leq (w - \bar{w}, d - \bar{d})$. Ceci se déduit du fait suivant : si $(\bar{w}, d_1) \in A_1$ alors $d_1 = \bar{d}$, et si $(0, d_2) \in A_2$ alors $d_2 = 0$.

P3 Soit $(w, d) \in B$. Si $d \leq \bar{d}$, alors $(w, d) \in A_1$. Si $d > \bar{d}$, alors $(w - \bar{w}, d - \bar{d}) \in A_2$. Ceci provient du fait que $(\bar{w}, \bar{d}) \in B$ et que $N_1 + N_2 = N(P)$.

Soient T un opérateur différentiel, $p \in N(T)$ et $(w', d') = (w(p), d(p))$. Pour tout $(w, d) \leq (w', d')$ il existe un unique $t_{(w,d)} \in \mathbb{C}$ tels que, si

$$T^{\leq(w',d')} = \sum_{(w,d) \leq (w',d')} t_{(w,d)} M_{(w,d)} \tag{2.4}$$

on a $\omega(\mu, T - T^{\leq(w',d')}) > w'$ ou bien $\omega(\mu, T - T^{\leq(w',d')}) = w'$ et $\deg(T - T^{\leq(w',d')}) < d'$. Les coefficients $t_{(w,d)}$ sont indépendants de (w', d'). On écrit donc $T = \sum_{(w,d)\in N(T)} t_{(w,d)} M_{(w,d)}$ si pour tout (w', d') on a l'égalité 2.4, et on note $\mathrm{Coeff}_{(w,d)}(T) = t_{(w,d)}$. On pose

$$T^{<(w',d')} = \sum_{(w,d)<(w',d')} t_{(w,d)} M_{(w,d)}.$$

On écrit $P = \sum p_{(w,d)} M_{(w,d)}$. Cherchons Q et R vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii) de l'énoncé. On pose

$$Q = \sum q_{(w,d)} M_{(w,d)} \quad \text{et} \quad R = \sum r_{(w,d)} M_{(w,d)}.$$

On considère les propriétés suivantes

T1 Si $(w, d) \notin A_1$ alors $q_{(w,d)} = 0$. Si $(w, d) \notin A_2$ alors $r_{(w,d)} = 0$.

T2 On a $r_{(w,0)} = 0$ si $w > 0$, et $r_{(0,0)} = 1$.

T3 On a $p_{(w,d)} = \mathrm{Coeff}_{(w,d)}(QR)$ pour tout (w, d).

Les propriétés (i), (ii), et (iii) de l'énoncé sont équivalentes aux propriétés **T1**, **T2** et **T3**. En effet, supposons que l'on ait **T1**, **T2** et **T3**. La propriété **T1** entrane que $Q, R \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ et que $N(Q) \subseteq N_1$ et $N(R) \subseteq N_2$. La propriété **T2** plus le fait que $N(R) \subseteq N_2$ entranent la propriété (iii) de l'énoncé. La propiété **T3** entrane que $P = QR$. D'après le lemme 2.13, les pentes de P sont la réunion des pentes de Q et des pentes de R. Puisque $N(R) \subseteq N_2$ et $(0, 0) \in N(R)$ (propriété **T2**) les pentes de $N(R)$ sont plus grandes que μ_s, alors ce sont $\mu_{s+1}, \ldots, \mu_r$, et donc celles de $N(Q)$ (d'après le lemme 2.13) sont $\mu_0, \ldots, \mu_s$. Réciproquement, supposons que l'on ait (i), (ii) et (iii). Le fait que $P = QR$ entrane **T3** et $N(P) = N(Q) + N(R)$. Alors (ii) et (iii) entranent que $N(R) = N_2$, et donc $N(Q) = N_1$. On a **T1** car $Q, R \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$. La propriété (iii) entrane **T2**.

D'après la formule de Leibniz 2.3, la propriété **P2** et la propriété **T1** on a

$$\mathrm{Coeff}_{(w,d)}(QR) = \mathrm{Coeff}_{(w,d)}\big(Q^{\leq (w,d)} R^{\leq (w-\bar{w}, d-\bar{d})}\big)$$

On pose

$$\begin{aligned} Q^{\leq (w,d)} &= q_{(w,d)} M_{(w,d)} + Q^{<(w,d)}, \\ R^{\leq (w-\bar{w},d-\bar{d})} &= r_{(w-\bar{w},d-\bar{d})} M_{(w-\bar{w},d-\bar{d})} + R^{<(w-\bar{w},d-\bar{d})}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Leibniz, la propriété **P1** et le fait que $r_{(0,0)} = 1$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Coeff}_{(\bar{w},\bar{d})}(QR) &= q_{(\bar{w},\bar{d})}, \quad \text{et si } (\omega, d) > (\bar{\omega}, \bar{d}) \text{ alors} \\ \mathrm{Coeff}_{(w,d)}(QR) &= q_{(w,d)} + q_{(\bar{w},\bar{d})} r_{(w-\bar{w},d-\bar{d})} + \mathrm{Coeff}_{(w,d)}(Q^{<(w,d)} R^{<(w-\bar{w},d-\bar{d})}). \end{aligned}$$

Alors, (**T1**, **T2** et **T3**) est équivalent à (**T1**, **T2** et **T'3**), où

T'3

$$\begin{aligned} p_{(\bar{w},\bar{d})} &= q_{(\bar{w},\bar{d})}, \quad \text{et si } (\omega,d) > (\bar{\omega},\bar{d}) \text{ alors} \\ p_{(w,d)} &= q_{(w,d)} + q_{(\bar{w},\bar{d})} r_{(w-\bar{w},d-\bar{d})} + \mathrm{Coeff}_{(w,d)}(Q^{<(w,d)} R^{<(w-\bar{w},d-\bar{d})}). \end{aligned}$$

Pour monter l'existence et l'unicité de Q et R il suffit de montrer l'existence et l'unicité de coefficients $q_{(w,d)}$ et $r_{(w,d)}$ vérifiant **T1**, **T2** et **T'3**. Si $(w,d) < (\bar{w},\bar{d})$, le coefficient $q_{(w,d)}$ vérifie **T1** si et seulement si $q_{(w,d)} = 0$. Si $(w,d) < (0,0)$, $r_{(w,d)}$ vérifie **T1** si et seulement si $r_{(w,d)} = 0$. Par **T'3** on a $q_{(\bar{w},\bar{d})} = p_{(\bar{w},\bar{d})}$, et par **T2**, $r_{(0,0)} = 1$. Le point $(\bar{w},\bar{d})$ est un point extrémal de $N(P)$, donc $p_{(\bar{w},\bar{d})} \neq 0$, donc $q_{(\bar{w},\bar{d})} \neq 0$. Soit $(w,d) > (\bar{w},\bar{d})$. Par hypothèses de récurrence, les valeurs $q_{(w',d')}$ et $r_{(w'-\bar{w},d'-\bar{d})}$ ont été fixées de manière unique pour $(w',d') < (w,d)$ vérifiant les propriétés **T1**, **T2**, et **T'3**. Si $(w,d) \notin B$, on pose $q_{(w,d)} = 0$ et $r_{(w-\bar{w},d-\bar{d})} = 0$. La propriété **T'3** est vérifiée car par hypothèse de récurrence $N(Q^{<(w,d)}) \subseteq A_1 \subseteq N_1$ et $N(R^{<(w-\bar{w},d-\bar{d})}) \subseteq A_2 \subseteq N_2$, donc $N(Q^{<(w,d)} R^{<(w-\bar{w},d-\bar{d})}) \subseteq N_1 + N_2 \cap (\mathbb{N} \times \frac{1}{\nu}\mathbb{Z})$. Les propriétés **T1** et **T2** sont vérifiées trivialement. Supposons que $(w,d) \in B$. Si $d \leq \bar{d}$, alors $(w,d) \in A_1$ et $(\omega - \bar{\omega}, d - \bar{d}) \notin A_2$, donc

$$\begin{aligned} r_{(w-\bar{w},d-\bar{d})} &= 0, \quad \text{par } \mathbf{T1} \\ q_{(w,d)} &= p_{(w,d)} - \mathrm{Coeff}_{(w,d)}(Q^{<(w,d)} R^{<(w-\bar{w},d-\bar{d})}), \quad \text{par } \mathbf{T'3}. \end{aligned}$$

Si $d > \bar{d}$, on a $(w,d) \notin N_1$ et $(w-\bar{w}, d-\bar{d}) \in A_2$, on pose

$$\begin{aligned} q_{(w,d)} &= 0, \quad \text{par } \mathbf{T1} \\ r_{(w-\bar{w},d-\bar{d})} &= \frac{1}{q_{(\bar{w},\bar{d})}} \big(p_{(w,d)} - \mathrm{Coeff}_{(w,d)}(Q^{<(w,d)} R^{<(w-\bar{w},d-\bar{d})}) \big), \text{ par } \mathbf{T'3} \end{aligned}$$

Donc $q_{(\omega,d)}$ et $r_{(w-\bar{w},d-\bar{d})}$ existent et sont uniques vérifiant les propriétés **T1**, **T2** et **T'3**. ∎

Lemme 2.16 *Soient P_1 et P_2 deux opérateurs non nuls de $\mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ sans aucune pente en commun. Supposons qu'il existe $M, N \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ vérifiant :*

(i). *Ou bien $P_1 M = N P_2$, ou bien $M P_1 = N P_2$.*

(ii). *Ou bien* $\deg(M) < \deg(P_2)$, *ou bien* $\deg(N) < \deg(P_1)$.

Alors $M = N = 0$.

Preuve. Supposons que $\deg(M) < \deg(P_2)$. Si $M \neq 0$ on a $N(M) = \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), \ldots, (\mu_s, h_s)\}$. On pose $N(P_2) = \mathcal{N}\{w_0; (\lambda_0, l_0), \ldots, (\lambda_r, l_r)\}$. D'après les lemmes 2.13 et 2.14 on a

$$\begin{aligned} &\{\lambda_0, \ldots, \lambda_r\} \subseteq \{\mu_0, \ldots, \mu_s\}, \\ &l_0 + \cdots + l_r \leq h_0 + \cdots + h_s, \end{aligned}$$

donc $\deg(P_2) = l_0 + \cdots + l_r \leq h_0 + \cdots + h_s \leq \deg(M)$, en contradiction avec l'hypothèse. Alors $M = 0$, et ceci entrane que $N = 0$, car $\mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ est intègre. ∎

Lemme 2.17 *Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$ ou bien $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$. Soit $P = QR = R'Q' \in \mathcal{D}$. Supposons que $N_1 = N(Q) = N(Q')$, $N_2 = N(R) = N(R')$, et que N_1 et N_2 n'ont pas de pentes en commun. Alors on a des isomorphismes de $\mathcal{D}$-modules à gauche$\mathcal{D}/\mathcal{D}P \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}Q \bigoplus \mathcal{D}/\mathcal{D}R$, $\mathcal{D}/\mathcal{D}Q \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}Q'$, et $\mathcal{D}/\mathcal{D}R \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}R'$.*

Preuve. On considère les suites exactes suivantes de $\mathcal{D}$-modules à gauche :

$$\begin{array}{ccc} 0 \to \mathcal{D}/\mathcal{D}Q \stackrel{\lambda}{\to} & \mathcal{D}/\mathcal{D}P & \stackrel{\mu}{\to} \mathcal{D}/\mathcal{D}R \to 0 \\ 0 \to \mathcal{D}/\mathcal{D}R' \stackrel{\lambda'}{\to} & \mathcal{D}/\mathcal{D}P & \stackrel{\mu'}{\to} \mathcal{D}/\mathcal{D}Q' \to 0 \end{array}$$

où $\lambda(H \bmod \mathcal{D}Q) = HR \bmod \mathcal{D}P$, $\lambda'(H \bmod \mathcal{D}R') = HQ' \bmod \mathcal{D}P$, et μ et μ' sont définies par passage au quotient. On montre que le morphisme $\mu \circ \lambda'$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche : si $\mu \circ \lambda'(H \bmod \mathcal{D}R') = 0$, il existe $H' \in \mathcal{D}$ tel que $HQ' = H'R$. Par division euclidienne $H = H_1R' + H_2$ avec $\deg(H_2) < \deg(R') = \deg(R)$. Donc $H_2Q' = (H' - H_1Q)R$. D'après le lemme 2.16 on a $H_2 = 0$, et alors $\mu \circ \lambda'$ est injectif. Mais $\mu \circ \lambda'$ est un morphisme de $\hat{K}_\nu$ (ou bien $\hat{K}_\infty$) espaces vectoriels entre espaces qui ont la mme dimension $\deg(R) = \deg(R')$. Alors $\mu \circ \lambda'$ est aussi surjectif, donc un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules. Un raisonnement similaire montre que $\mu' \circ \lambda$ est un isomorphisme. Alors les suites exactes ci-dessus sont scindées, car $\lambda'(\mu\lambda')^{-1}$ relève μ et $\lambda(\mu'\lambda)^{-1}$ relève μ', ce qui achève la démonstration. ∎

Lemme 2.18 *Soient $P, Q \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}$ ou bien $\mathcal{D} = \hat{K}_\nu$) sans aucune pente en commun. Alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{D}/\mathcal{D}Q\big) = \{0\}.$$

Preuve. Soit ψ un homomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche entre $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ et $\mathcal{D}/\mathcal{D}Q$. Soit $H \in \mathcal{D}$ tel que $\psi(1 \bmod \mathcal{D}P) = H \bmod \mathcal{D}Q$. On a $P\psi(1 \bmod \mathcal{D}P) = \psi(0) = 0$. Il existe donc H' tel que $PH = H'Q$. Par division euclidienne on a $H = H_1Q + H_2$, avec $\deg(H_2) < \deg(Q)$. Alors $PH_2 = (H' - PH_1)Q$. D'après le lemme précédent on a $H_2 = 0$, et donc $H \bmod \mathcal{D}Q = 0$. ∎

Remarque 2.19 Soit $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$, et $N(P) = \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), \ldots, (\mu_r, h_r)\}$. On a $\deg(P) = \sum_{i=0}^{r} h_i$, et $\deg(P) = \dim_{\hat{K}_\nu}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P)$. Alors $\sum_{i=0}^{r} h_i$ est un invariant du module $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$. Dans le théorème suivant on montre que le polygone $N(P)$ après translation verticale est un invariant de $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$.

Théorème 2.20 *Soit (M, ∇) une connexion sur $\hat{K}_\nu$ (resp. sur $\hat{K}_\infty$).*

(i). *Soient* $e \in M$ *un vecteur cyclique de* M *et* $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \hat{K}_\nu$ *(resp.* $\in \hat{K}_\infty$*) tels que*

$$a_0 + a_1 \nabla e + \cdots + a_{m-1} \nabla^{m-1} e + \nabla^m e = 0.$$

On considère $P = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \partial^i + \partial^m$*. Alors le polygone* $N(P)$ *est indépendant du vecteur cyclique* e*. On dit que* $N(P)$ *est le polygone de Newton de* (M, ∇)*.*

(ii). *On a une décomposition* $M = \bigoplus_{i=1}^s M_i$ *dans laquelle les* M_i *n'ont qu'une pente, ces pentes étant deux à deux distinctes. Si* $M = \bigoplus_{i=1}^t M_i'$ *est une autre décomposition satisfaisant les mmes propriétés, on a* $t = s$*, et après une permutation convenable* $M_i = M_i'$*.*

Preuve. D'après le lemme 2.7 on a l'isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche $\xi : M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}P$. Soient $\mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_r$ les pentes de P. Alors $N(P) = \mathcal{N}\{v_0; (\mu_0, h_0), \ldots, (\mu_r, h_r)\}$. En appliquant successivement les lemmes 2.15 et 2.17 on obtient une décomposition $P = P_0 P_1 \cdots P_r$ telle que chaque P_i n'a que la pente μ_i, avec un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche

$$\bar{\phi} : \mathcal{D}/\mathcal{D}P \simeq \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{D}/\mathcal{D}P_i.$$

On considère l'isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules $\phi = \bar{\phi}\xi$. Soit $f \in M$ un autre vecteur cyclique, soit Q l'opérateur différentiel associé à f, et $\xi' : M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}Q$ l'isomorphisme associé. On considère une décomposition $Q = Q_0 \cdots Q_s$ tel que Q_j n'a qu'une seule pente μ_j', et $\mu_0' < \cdots < \mu_s'$. Par application successive des lemmes 2.15 et 2.17 on obtient un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules $\bar{\varphi} : \mathcal{D}/\mathcal{D}Q \simeq \bigoplus_{i=0}^s \mathcal{D}/\mathcal{D}Q_j$. Soit $\varphi = \bar{\varphi}\xi'$. Pour chaque couple (i, j) on considère le morphisme de $\mathcal{D}$-modules $\tau_{(i,j)} = pr_j \varphi \phi^{-1}|_{\mathcal{D}/\mathcal{D}P_i} : \mathcal{D}/\mathcal{D}P_i \to \mathcal{D}/\mathcal{D}Q_j$, où pr_j est la projection $\bigoplus \mathcal{D}/\mathcal{D}Q_j \to \mathcal{D}/\mathcal{D}Q_j$. On a $\varphi\phi^{-1}|_{\mathcal{D}/\mathcal{D}P_i} = \sum_j \tau_{(i,j)}$. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, il existe j_i, $1 \leq j_i \leq s$, tel que $\tau_{(i,j_i)} \neq 0$ car ϕ et φ sont des isomorphismes. D'après le lemme 2.18 on a $\mu_i = \mu_{j_i}'$ et $\tau_{(i,j)} = 0$ si $j \neq j_i$. Alors $\tau_{(i,j_i)}$ est injectif car $\varphi\phi^{-1}|_{\mathcal{D}/\mathcal{D}P_i} = \tau_{(i,j_i)}$. On a

$$\dim_{\hat{K}_\nu} \big(\mathcal{D}/\mathcal{D}P_i\big) = h_i \leq h_j' = \dim_{\hat{K}_\nu} \big(\mathcal{D}/\mathcal{D}Q_{j_i}\big).$$

On a donc finalement $\{\mu_0, \ldots, \mu_r\} \subseteq \{\mu_0', \ldots, \mu_s'\}$ et $h_i \leq h_{j_i}'$. En particulier, $r \leq s$. Par un raisonnement symetrique on obtient $r = s$, $\mu_i = \mu_i'$ et $h_i = h_i'$, pour $1 \leq i \leq r$. D'près la remarque 2.19 on a $N(P_i) = \mathcal{N}\{v_i; (\mu_i, h_i)\}$ et $N(Q_i) = \mathcal{N}\{w_i; (\mu_i, h_i)\}$. Donc $N(P)$ et $N(Q_0) + \cdots + N(Q_r) = N(Q)$ coïncident modulo une translation verticale. Les opérateurs P et Q sont "unitaires", donc le point $(\deg P, -\deg P)$, est un sommet de $N(P)$ et de $N(Q)$. Donc $N(P) = N(Q)$. Le seconde partie du théorème se montre par un raisonnement analogue. ∎

Définition 2.21 *On dit que la connexion (M, ∇) est singulière régulière si son polygone de Newton n'a que la pente nulle.*

Lemme 2.22 *Soit $P = \sum_{i=0}^{h} a_i \partial^i \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$ avec une seule pente $\mu > 0$. Supposons que $N(P) = \mathcal{N}\{0; (\mu, h)\}$. On écrit*

$$P = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{j,j(1+\mu)} X^{j(1+\mu)} \partial^j + Q,$$

où $\omega(\mu, Q) > 0$, $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$, $\lambda_{(0,0)} \neq 0$, et $\lambda_{h,h(1+\mu)} \neq 0$. On appelle polynme déterminant de P le polynme

$$\Phi(Z) = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{j,j(1+\mu)} Z^j.$$

Si $\alpha \in \hat{K}_\nu$, on désigne par P^α l'opérateur $\sum_{i=0}^{h} a_i (\partial - \alpha)^i$. On pose $\alpha = -\beta X^{-(\mu+1)}$, avec $\beta \in \mathbb{C}$. Alors

$$P^\alpha = \sum_{j=0}^{h} c_{j,j(1+\mu)} X^{j(1+\mu)} \partial^j + Q', \quad \omega(\mu, q') > 0, \tag{2.5}$$

où

$$\Phi(Z + \beta) = \sum_{j=0}^{h} c_{j,j(1+\mu)} Z^j.$$

En particulier $\deg(P) = \deg(P^\alpha)$. *Si β était une racine du polynme déterminante, on aurait deux possibilités :*

(i). *$N(P^\alpha)$ a deux ou plusieurs pentes.*

(ii). *$N(P^\alpha)$ n'a qu'un seule pente μ'. Dans ce cas on a que $P^\alpha \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$, et que*

$$\mu' \leq \nu - \frac{1}{\nu \deg(P)}.$$

Preuve. On écrit $M_{(w,d)} = X^a \partial^d$, avec $\omega(\mu, M_{(w,d)}) = w$. Étant donné que $\mu > 0$, on a

$$\beta M_{(w,d)} \beta' M_{(w',d')} = \beta\beta' M_{(w+w',d+d')} + Q,\ \omega(\mu, Q) > w + w',\ \deg(Q) \leq d + d'.$$

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ et $\alpha = -\beta X^{-(\mu+1)}$, alors

$$M^\alpha_{(0,j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \beta^k M_{(0,j-k)} + Q, \quad \omega(\mu, Q) > 0,\ \text{et}\ \deg(Q) < j.$$

Alors l'égalité 2.5 est établie si P est sous la forme $P = \alpha_{j,j(1+\mu)} X^{j(1+\mu)} \partial^j + Q$ avec $\omega(\mu, Q) > 0$. Le cas général s'en déduit par linéarité.

Supposons que β est une racine du polynme déterminant de P. D'après l'égalité 2.5 on a $N(P^\alpha) \subseteq N(P)$, $(h, \mu h) \in N(P^\alpha)$, et le point $(0,0) \notin N(P^\alpha)$. Supposons que $N(P^\alpha)$ n'a qu'une seule pente ν', alors le seul point de la droite $(u, \mu u)$ qui appartient à $N(P^\alpha)$ est le point $(h, \mu h)$, donc $\Phi(Z+\beta) = Z^h$, c'est à dire, $\Phi(Z) = (Z-\beta)^h$, donc $\alpha_{j,j(1+\mu)} \neq 0$ pour tout $0 \leq j \leq h$. On pose $\mu = p/q$ avec p et q premiers entre eux. Alors $X^{1+\frac{p}{q}} \partial \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$, donc q divise ν, et alors $P^\alpha \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$. Ceci entrane que μ' est plus petit ou égal à la pente du segment qui joint les points $(0, 1/\nu)$ et $(h, \mu h)$. ∎

On désigne par L le corps $\hat{K}_\nu$ ou bien le corps $\hat{K}_\infty$. Soient M et N deux $\mathcal{D}_L$-modules à gauche. L'espace vectoriel $M \otimes_L N$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_L$-module à gauche par $\partial(m \otimes n) = \partial m \otimes n + m \otimes \partial n$. Ainsi, si F est un $\mathcal{D}_L$-module, $\phi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F)$ et $\phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N, F)$, l'application $\phi_1 \otimes \phi_2$ est aussi un homomorphisme de $\mathcal{D}$-modules.

Lemme 2.23 *On désigne par L le corps $\hat{K}_\nu$ ou bien le corps $\hat{K}_\infty$, et par $\mathcal{D}$ l'anneau $\mathcal{D}_L$. Soient $\alpha \in L$, $P = \sum a_i \partial^i \in \mathcal{D}$, et $P^\alpha = \sum a_i (\partial - \alpha)^i \in \mathcal{D}$. On a un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche*

$$\mathcal{D}/\mathcal{D}P^\alpha \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - \alpha) \otimes_L \mathcal{D}/\mathcal{D}P.$$

Preuve. On considère l'homomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche $\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - \alpha) \otimes_L \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ donné par $\psi(Q) = Q(e \otimes \bar{1})$, où $e = 1 \bmod \mathcal{D}(\partial - \alpha)$ et $\bar{1} = 1 \bmod \mathcal{D}P$. On a

$$\begin{aligned} (\partial - \alpha)(e \otimes \bar{1}) &= \partial e \otimes \bar{1} + e \otimes \partial \bar{1} - \alpha e \otimes \bar{1} \\ &= (\partial - \alpha) e \otimes \bar{1} + e \otimes \partial \bar{1} = e \otimes \partial \bar{1}. \end{aligned}$$

Alors, si $Q \in \mathcal{D}$ on a $Q^\alpha(e \otimes \bar{1}) = e \otimes Q\bar{1}$. Ceci montre que $\psi(P^\alpha) = 0$, et que ψ est surjectif. Alors ψ se factorise au travers de $\bar{\psi} : \mathcal{D}/\mathcal{D}P^\alpha \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - \alpha) \otimes_L \mathcal{D}/\mathcal{D}P$. L'application $\bar{\psi}$ est un homomorphisme de L-espaces vectoriels de mme dimension $\deg(P)$, donc $\bar{\psi}$ est une bijection et un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules. ∎

Corollaire 2.24 *Soient $\alpha, \beta \in L$. Alors*

$$\mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - \alpha) \otimes_L \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - \beta) \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - (\alpha + \beta)).$$

Proposition 2.25 *On désigne par L le corps $\hat{K}_\nu$ ou bien le corps $\hat{K}_\infty$, et par $\mathcal{D}$ l'anneau $\mathcal{D}_L$. Soient $\alpha, \beta \in L$. Les $\mathcal{D}$-modules $E_\alpha = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - \alpha)$ et $E_\beta = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial - \beta)$ sont isomorphes si et seulement si*

$$\alpha - \beta \in \delta_{log}(L) = \{\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,X} \mid a \in L,\, a \neq 0\}.$$

Preuve. Soit $\psi : E_\alpha \to E_\beta$ un morphisme de $\mathcal{D}$-modules non nul. Soit

$$\psi\big(1 \operatorname{mod} \mathcal{D}(\partial-\alpha)\big) = H \operatorname{mod} \mathcal{D}(\partial-\beta).$$

Par division euclidienne on peut supposer que $\deg(H) < \deg(\partial-\beta) = 1$, c'est à dire $H \in L$. Alors il existe $T \in \mathcal{D}$

$$(\partial-\alpha)H = T(\partial-\beta),$$

car $(\partial-\alpha)\psi = 0$. Ceci entrane $\deg(T) = 0$, donc $T \in L$. Alors$(\partial-\alpha)H = H\partial + \frac{\mathrm{d}\,H}{\mathrm{d}\,X} - \alpha H = T\partial - T\beta$, donc $T = H$, $\frac{\mathrm{d}\,H}{\mathrm{d}\,X} = (\alpha-\beta)H$ et $\alpha-\beta \in \delta_{\log}(L)$. Réciproquement, soit $\alpha-\beta \in \delta_{\log}(L)$. Soit $H \in L$ tel que $\frac{\mathrm{d}\,H}{\mathrm{d}\,X} = H(\alpha-\beta)$. Alors le morphisme de $\mathcal{D}$-modules

$$\psi\big(Q \operatorname{mod} \mathcal{D}(\partial-\alpha)\big) = QH \operatorname{mod} \mathcal{D}(\partial-\beta)$$

est un isomorphisme. ∎

Lemme 2.26 *On a*

$$\begin{array}{rcl} \delta_{log}(\hat{K}_\nu) & = & \frac{1}{\nu}\mathbb{Z}X^{-1} + \hat{K}_\nu^{>-1}, \\ \delta_{log}(\hat{K}_\infty) & = & \mathbb{Q}X^{-1} + \hat{K}_\infty^{>-1}. \end{array}$$

où $\hat{K}_\infty^{>-1} = \{\sum_{r>-1} a_r X^r \in \hat{K}_\infty\}$ *et* $\hat{K}_\nu^{>-1} = \hat{K}_\infty^{>-1} \cap \hat{K}_\nu$.

Preuve. Voir lemme 2.60 et remarque 2.61 page 92. ∎

Proposition 2.27 *Soient* $\alpha, \beta \in L$ *tels que*

$$\alpha - \beta \notin \hat{K}_\infty^{\geq -1} = \{\sum_{r\geq -1} a_r X^r \in \hat{K}_\infty\}.$$

Soient M et N deux vectoriels à connexion singulière régulière. Alors

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(E_\alpha \otimes M, E_\beta \otimes N) = \{0\}.$$

Preuve. On a $M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ et $N \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}Q$ avec P et Q ayant une seule pente nulle. On fait le produit tensoriel par $E_{-\alpha}$, et on est ramené à montrer que l'espace $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(M, E_\gamma \otimes N)$ est nul, où $\gamma = \beta - \alpha = cX^{-(1+\mu)} + \sum_{j>-(1+\mu)} c_j X^j$, avec $c \neq 0$ et $\mu > 0$. On vérifie facilement que Q^γ n'a qu'une seule pente μ. La proposition se déduit des lemmes 2.18 et 2.23. ∎

Théorème 2.28 *Soit M une connexion sur $\hat{K}_\infty$. Il existe une décomposition*

$$M = \bigoplus_{\text{fini}} (E_\alpha \otimes M_\alpha), \tag{2.6}$$

où $\alpha \in \hat{K}_\infty$, $E_\alpha = \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}/\mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}(\partial - \alpha)$, et les M_α sont des connexions singulière régulière sur $\hat{K}_\infty$. Si on suppose que les α sont distincts module $\hat{K}_\infty^{\geq -1}$, la décomposition est unique.

Preuve. On montre d'abord l'existence. Soit N une connexion sur $\hat{K}_\infty$, on pose $I(N) = (d, \nu, \mu)$ où d est le rang de N (la dimension de N comme $\hat{K}_\infty$-espace vectoriel), μ est la plus grande pente du polygone de Newton de N, et ν est le plus petit entier pour lequel il existe $P \in \hat{K}_\nu$ avec $N \simeq \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}/\mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}P$. On a que $I(N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}_{(\geq 0)}$. On pose

$$(d', \nu', \mu') \ll (d, \nu, \mu)$$

si (d', ν', μ') est plus petit que $(d, \nu, \mu - \frac{1}{d\nu})$ pour l'ordre lexicographique. Il est clair que dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}_{(\geq 0)}$ il n'existe pas de chane infinie decroisante pour la relation $\ll$.

Si $I(N) = (d, \nu, 0)$ alors N est une connexion régulière, et $N = N$ est la décomposition demandée. Il suffit de montrer la propriété $(*)$ suivante : Soit (d, ν, μ) avec $\mu > 0$, si, pour les connexions N avec $I(N) \ll (d, \nu, \mu)$, il existe une décomposition du type 2.6, alors il existe une décomposition pour une connexion M avec $I(M) = (d, \nu, \mu)$. En effet, supposons que la propriété $(*)$ est vraie et qu'il existe une connexion M pour laquelle il n'existe pas une décomposition du type 2.6 ; on a $I(M) = (d_1, \nu_1, \mu_1)$ avec $\mu > 0$; d'après la propriété $(*)$, il existe une connexion M_2, avec $I(M_2) \ll I(M)$, pour laquelle il n'existe pas une telle décomposition. On applique successivement ce raisonnement et on obtient une chane infinie décroissante pour l'ordre $\ll$, ce qui est absurde. Montrons maintenant la propriété $(*)$. Si le polygone de Newton de M a plusieurs pentes, d'après le théorème 2.20, $M = \bigoplus_1^t M_j$, avec $t \geq 2$, donc le rang de M_j est plus petit que celui de M et donc $I(M_j) \ll I(M)$. Alors chaque connexion M_j admet une décomposition du type 2.6, donc M admet aussi une telle décomposition. Soit M une connexion avec une seule pente μ, $\mu > 0$. On a $I(M) = (d, \nu, \mu)$. Alors il existe $P \in \hat{K}_\nu$ telle que $M \simeq \mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}/\mathcal{D}_{\hat{K}_\infty}P$. D'après le théorème 2.20, le polygone de Newton de M est celui de P. Soient β une racine du polynme déterminant de P, et $\alpha = -\beta X^{-(1+\mu)}$. D'après le lemme 2.22, on a deux possibilités : ou bien P^α a plusieurs pentes, et dans ce cas $\mathcal{D}/\mathcal{D}P^\alpha \simeq \bigoplus M_j$, avec le rang de M_j plus petit que celui de M ; ou bien P^α n'a qu'une seule pente et $I(\mathcal{D}/\mathcal{D}P^\alpha) =$

(d,ν,μ'), avec $(d,\nu,\mu') \ll I(M)$. Alors $\mathcal{D}/\mathcal{D}P^{\alpha}$ admet une décomposition du type 2.6. D'après le lemme 2.23 on a

$$M = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial+\alpha) \otimes_{\hat{K}_\infty} \mathcal{D}/\mathcal{D}P^{\alpha}.$$

Le fait que le produit tensoriel commutent avec la somme directe et le lemme 2.24 achèvent la démonstration de l'existence. Pour montrer l'unicité, on utilise un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans le théorème 2.20, en appliquant la proposition 2.27. ∎

Théorème 2.29 *Soit* (M,∇) *une connexion singulière régulière sur* $\hat{K}_\nu$. *Alors il existe une base de* M *dans laquelle la matrice de la connexion est de la forme*

$$\frac{1}{X}C, \quad C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Preuve. On a $M \simeq \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}/\mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}P$, où

$$P = a_0(X) + a_1(X)\partial + \cdots + a_{n-1}(X)\partial^{n-1} + \partial^n \in \mathcal{D}_{\hat{K}_\nu}$$

n'a que la pente nulle. Donc $\mathrm{ord}_X(a_i) \geq i-n$, $0 \leq i \leq n-1$. On considère la base $\{1, X\partial, X^2\partial^2, \ldots, X^{n-1}\partial^{n-1}\}$. La matrice de (M,∇) dans cette base est de la forme

$$A(X) = \frac{1}{X}\{A_0 + X^{1/\nu}A_1 + X^{2/\nu}A_2 + \cdots\}, \quad A_k \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

On peut supposer que la matrice A_0 satisfait la propriété suivante : si λ et μ sont des valeurs propres distincts de A_0, alors $\lambda - \mu \notin \frac{1}{\nu}\mathbb{Z}$. En effet, on considère le système d'équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = A(X)Y.$$

Après un changement de variable $Y = GZ$ avec $G \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ on peut supposer que $A_0 = \begin{pmatrix} A_0' & 0 \\ 0 & A_0'' \end{pmatrix}$, où la matrice A_0' n'a qu'une seule valeur propre λ, et la matrice A_0'' n'a pas λ comme valeur propre. Après le changement de variable

$$Y = \begin{pmatrix} X^k\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} Z, \quad k \in \frac{1}{\nu}\mathbb{Z},$$

on obtient le système $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}X} = \frac{1}{X}\{B_0 + X^{1/\nu}B_1 + \cdots\}Z$ avec $B_0 = \begin{pmatrix} B_0' & 0 \\ 0 & B_0'' \end{pmatrix}$, où $B_0' = A_0' - k\mathrm{Id}$ et $B_0'' = A_0''$. Ainsi on peut supposer que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de A_0 sont telles que

$$0 \leq \Re(\lambda_j) < 1/\nu, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Ceci entrane l'hypothèse faite ci-dessus sur la matrice A_0. On considère, sur le système $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A(X)Y$, le changement de variable

$$Y = (\mathrm{Id} + X^{l/\nu} Q_l)Z, \quad Q_l \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}),\ l \geq 1.$$

On obtient le système d'équations

$$\frac{\mathrm{d}\,Z}{\mathrm{d}\,X} = \frac{1}{X}\{B_0 + X^{1/\nu} B_1 + \cdots\}Z,$$

où $B_j = A_j$ si $0 \leq j \leq l-1$ et

$$B_l = A_l + A_0 Q_l - Q_l A_0 - \frac{l}{\nu} Q_l.$$

Pour vérifier ceci, on a utilisé la formule

$$(\mathrm{Id} + X^{l/\nu} Q)^{-1} = \mathrm{Id} - X^{l/\nu} Q + X^{2l/\nu} Q^2 + \cdots .$$

D'après l'hypothèse faite sur A_0, il existe une matrice Q_l tel que $B_l = 0$. En effet, considérons l'endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, où $\varphi(H) = A_0 H - H A_0 - l/\nu\, H$. Si $\varphi(H) = 0$ on a

$$\big(A_0 - (\lambda + l/\nu)\mathrm{Id}\big)^j H = H\big(A_0 - \lambda \mathrm{Id}\big)^j, \lambda \in \mathbb{C},\ j \in \mathbb{N}.$$

D'après les hypothèses faites sur A_0, si λ est une valeur propre de A_0, alors $\lambda + l/\nu$ ne l'est pas. Ainsi, si λ est une valeur propre de A_0, $A_0 - (\lambda + l/\nu)\mathrm{Id}$ est une matrice non singulière, donc $\mathrm{Ker}(H) \supseteq \mathrm{Ker}\big((A_0 - \lambda \mathrm{Id})^j\big)$. Ceci entrane que $H = 0$. Alors φ est injectif, donc surjectif. On détermine ainsi les matrices Q_l, pour $l \geq 1$. Le changement de variable

$$Y = \prod_{l=1}^{\infty} (\mathrm{Id} + x^{l/\nu} Q_l) Z$$

transforme alors le système $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A(X)Y$ en le système $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = \frac{1}{X} A_0 Z$. ∎

Théorème 2.30 *On considère le système d'équations différentielles linéaires*

$$(\hat{\Delta}_\nu) \qquad \frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A(X) \cdot Y, \quad A(X) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\hat{K}_\nu),\ \textit{et}\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors il existe une matrice non-singulière

$$P(X) \in \mathrm{GL}_n(\hat{K}_{\nu'})$$

telle que après le changement de variable

$$Y = P(X) \cdot Z \tag{2.7}$$

le système $(\hat{\Delta}_\nu)$ s'écrive

$$\text{(SNF)} \qquad \frac{\mathrm{d}\, Z}{\mathrm{d}\, X} = M(X) \cdot Z$$

où la matrice $M(X)$ est diagonale par blocs

$$M(X) = \left(\begin{array}{cc|cc} M_1(X) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & M_l(X) \end{array} \right) = \operatorname{diag}[M_1(X), \dots, M_l(X)]$$

et chaque sous-matrice $M_i(X)$ est de la forme

$$M_i(X) = \lambda_i(X) \cdot I_{n_i} + \frac{C_i}{X}$$

avec

(i). *La matrice I_{n_i} est la matrice identité de rang n_i.*

(ii). $C_i \in \mathrm{Mat}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$, $i = 1, \dots, l$.

(iii). *Ou bien $\lambda_i(X) = 0$, ou bien*

$$\lambda_i(X) = \sum_{k=1}^{N_i} \lambda_{i,k} X^{-\nu_k}, \ \ 1 < \nu_1 < \cdots < \nu_{N_i}, \ \ \nu_i \in \mathbb{Q}, \ \ \lambda_{i,k} \in \mathbb{C}, \ \ \lambda_{i,N_i} \neq 0.$$

Preuve. On considère la connexion $\nabla : (\hat{K}_\infty)^n \to (\hat{K}_\infty)^n$ donnée par $\nabla(Y) = \frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} - A(X)Y$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^t$. La matrice de ∇ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$, est la matrice $A(X)$. On considère la décomposition

$$(\hat{K}_\infty)^n \simeq \bigoplus_{i=1}^{l} E_{-\lambda_i} \otimes M_i,$$

où $\lambda_i \in \hat{K}_\infty$ et M_i est une connexion singulière régulière pour $i = 1, \dots, l$. Par la proposition 2.25 on peut supposer que les λ_i sont comme dans l'énoncé du théorème. On considère une $\hat{K}_\infty$-base $B_i = \{f_{i,1}, \dots, f_{i,n_i}\}$ de M_i dans laquelle la matrice de ∇ soit $\frac{1}{X}C_i$, $C_i \in \mathrm{Mat}_{n_i,n_i}(\mathbb{C})$. Alors $1 \otimes B_i = \{\bar{1} \otimes f_{i,1}, \dots, \bar{1} \otimes f_{i,n_i}\}$ est une base de $E_{-\lambda_i} \otimes M_i$ dans laquelle la matrice de ∇ est $\lambda_i(X) I_{n_i} + \frac{1}{X} C_i$ car on a que

$$\nabla(\bar{1} \otimes f) = \bar{\partial} \otimes f + \bar{1} \otimes \nabla(f) = -\lambda_i(X)(\bar{1} \otimes f) + \bar{1} \otimes \nabla(f).$$

Ainsi $B = B_1 \cup \cdots \cup B_l$ est une $\hat{K}_\infty$-base de $(\hat{K}_\infty)^n$, dans laquelle la matrice de ∇ est sous la forme décrite dans l'énoncé du théorème. ∎

2.2 Le groupe de Galois formel

On considère le système d'équations différentielles

$$(\hat{\Delta}) \qquad \frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A \cdot Y, \quad A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\hat{K}), \text{ et } Y = (y_1, \ldots, y_n)^t.$$

On s'intéresse au groupe de Galois différentiel du système $(\hat{\Delta})$ sur le corps $\hat{K}$. Pour ceci on va construire une extension de Picard–Vessiot $\hat{K} \subseteq \hat{K}(\hat{\Delta})$ associée au système $(\hat{\Delta})$. D'après le théorème 2.30, il existe $\nu \in \mathbb{N}$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\hat{K}_\nu)$ telle que la matrice PH est une matrice fondamentale de solutions de $(\hat{\Delta})$ pourvu que la matrice H soit une matrice fondamentale de solutions du système (SNF) décrit dans l'énoncé du théorème 2.30. Le système (SNF) est définie sur le corps K de germes de fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}$. Donc, on peut trouver un système fondamental de solutions dans le corps $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty$ de germes de fonctions méromorphes définies sur la surface de Riemman du logarithme (voir la sous-section 2.2.2). En fait, il suffit d'ajouter à K des éléments du type x^α avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $\log \tilde{x}$, $\exp(\Lambda(x))$ où les $\Lambda(x)$ sont des polynmes en $x^{-1/\nu}$. On désigne par $\boldsymbol{K}$ le corps différentiel ainsi obtenu. On a donc $K \subseteq \boldsymbol{K} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$. Alors les éléments de la matrice PH appartiennent à l'anneau différentiel $\hat{K} \otimes_K \boldsymbol{K}$. Cet anneau est un domaine d'intégrité. En utilisant les résultats de la section 2.2.1, on montre que le corps des constantes du corps de fractions de $\hat{K} \otimes_K \boldsymbol{K}$ est le corps $\mathbb{C}$. Donc, il existe une extension de Picard–Vessiot de $(\hat{\Delta})$ contenue dans le corps de fractions de $\hat{K} \otimes_K \boldsymbol{K}$. A la fin du chapitre on décrira des générateurs topologiques du groupe de Galois de cette extension : la monodromie formelle et le tore exponentiel.

2.2.1 Le groupe de Galois de certaines extensions de type Liouvillien

Soit (L, δ) un corps différentiel et f un élément non nul de L. On note par $\delta_{\log}(f)$ l'élément $\frac{\delta f}{f}$, et par $\delta_{\log}(L)$ l'ensemble des éléments $\delta_{\log}(f)$ avec $f \in L^* = L \setminus \{0\}$. On remarque que

$$\begin{aligned} \delta_{\log}(f \cdot g) &= \delta_{\log}(f) + \delta_{\log}(g), \quad f, g \in L^*, \\ \delta_{\log}(1/f) &= -\delta_{\log}(f), \quad f \in L^*. \end{aligned} \tag{2.8}$$

L'ensemble $\delta_{\log}(L)$ a une structure de $\mathbb{Z}$-module.

Proposition 2.31 *Soit (L, δ) un corps de caractéristique zéro. Soit $L \subseteq M$ une extension différentielle, avec le mme corps des constantes, et telle que*

$M = L{<}f_1, \ldots, f_m{>}$, *avec* $\delta(f_i) = f_i' = a_i f_i$, *où* $a_i \in L$ *pour* $i = 1, \ldots, m$. *Alors, on a l'égalité*

$$L \cap \delta_{log}(M) = \delta_{log}(L) + \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_m.$$

Preuve (**M. Singer**). L'inclusion $\supseteq$ est claire par les égalités (2.8). On montre l'inclusion en sens contraire. Le corps M est le corps des fractions de l'anneau $L[f_1, \ldots, f_m]$. Il existe une L-base du L-espace vectoriel $L[f_1, \ldots, f_m]$ formée par des monmes $\{u_i\}_{i \in I}$, $u_i = f_1^{e_1} \cdots f_m^{e_m}$. Soit $g \in M$ tel que $g' = dg$ avec $d \in L$. Car $g \in M$, il existe des éléments $a_i, b_j \in L^*$ tels que

$$g(\sum_{j \in I_2} b_j u_j) = \sum_{i \in I_1} a_i u_i.$$

On a $\delta_{\log}(a_i u_i) \in L$ et $\delta_{\log}(g b_j u_j) \in L$. Comme $\{u_i\}$ est une L-base on a

$$\frac{a_i u_i}{a_{i'} u_{i'}} \notin L, \quad \frac{g b_j u_j}{g b_{j'} u_{j'}} \notin L, \quad \forall i, i' \in I_1,\ \forall j, j' \in I_2,\ i \neq i',\ j \neq j'.$$

En vertu du lemme qui suit, il existe $i \in I_1$ et $j \in I_2$ tels que $g b_j u_j = h a_i u_i$ avec $h \in L^*$. Donc

$$\delta_{\log}(g) = \delta_{\log}(\frac{u_i}{u_j}) + \delta_{\log}(\frac{h a_i}{b_j}) \in \delta_{\log}(L) + \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_m. \blacksquare$$

Lemme 2.32 *Soit* $L \subseteq M$ *une extension de corps différentiels avec le mme corps de constantes. Soient* $m_1, \ldots, m_N \in M^* = M \setminus \{0\}$, *tels que*

$$\begin{aligned} \delta_{log}(m_i) &\in L, \quad 1 \leq i \leq N, \\ m_i/m_j &\notin L, \quad 1 \leq i < j \leq N. \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \neq 0.$$

Preuve. Par récurrence sur N. Si $N = 1$, c'est trivial. Supposons que l'énoncé est vrai pour $k < N$. Soit $\sum_{i=1}^{N} m_i = 0$. On divise cette expression par m_1, ensuite on dérive l'égalité obtenue, et on obtient $\sum_{i=2}^{N} \alpha_i = 0$, où $\alpha_i = (m_i/m_1)'$. On a $\delta_{\log}(\alpha_i) \in L$ et $\alpha_i/\alpha_j \notin L$, si $1 \leq i, j \leq N$ et $i \neq j$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $(m_i/m_1)' = 0$, pour $2 \leq i \leq N$, donc $m_i/m_1 \in \mathrm{Const}(M) = \mathrm{Const}(L)$, ce qui est en contradiction avec les hypothèses faites sur les éléments m_i. $\blacksquare$

Lemme 2.33 *Soit (L, δ) un anneau différentiel. On considère l'anneau de polynmes $A = L[X_1, \dots, X_m, Z]$. Soient $a_1, \dots, a_m, b \in L$. Alors, il existe une dérivation $\tilde{\delta}$ sur A telle que $\tilde{\delta}_{|L} = \delta$, $\tilde{\delta}(X_i) = a_i X_i$, $1 \leq i \leq m$, et $\tilde{\delta}(Z) = b$. En particulier, si L est un domaine d'intégrité, la dérivation $\tilde{\delta}$ s'étend au corps de fractions de A.*

Preuve. On considère l'anneau B de polynmes différentiels en les variables $Y_1, \dots, Y_m$ et W,

$$B = L\{Y_1, \dots, Y_m, W\} = L[Y_{i,j}, W_j]_{1 \leq i \leq m,\ j \in \mathbb{N}},$$

muni de la dérivation $\tilde{\delta}$ telle que $\tilde{\delta}(Y_{i,j}) = Y_{i,j+1}$ et $\tilde{\delta}(W_j) = W_{j+1}$. Soit I l'idéal différentiel de B engendré par les éléments $Y_{i,1} - a_i Y_{i,0}$, $1 \leq i \leq m$, et $W_1 - b$. Alors, l'idéal I est engendré (algébriquement) par des éléments $Y_{i,j} - \phi_j$, avec $\phi_j \in L[Y_{1,0}, \dots, Y_{m,0}, W_0]$, $1 \leq i \leq m$, et $W_j - b^{(j)}$, $j \geq 1$. Donc $I \cap L[Y_{1,0}, \dots, Y_{m,0}, W_0] = \{0\}$, et ceci entrane que l'homomorphisme d'anneaux

$$L[X_1, \dots, X_m, Z] \to L\{Y_1, \dots, Y_m, W\}/I$$

est un isomorphisme. On muni l'anneau $L[X_1, \dots, X_m, Z]$ de la dérivation $\tilde{\delta}$ via l'isomorphisme ci-dessus. ∎

Remarque 2.34 L'anneau des constantes de $L(X_1, \dots, X_m, Z)$ peut tre plus grand que celui de L. Par exemple, si $a_2 = 3a_1$, alors X_1^3/X_2 est une nouvelle constante.

Lemme 2.35 *Soit L un corps différentiel, soient $a_1, \dots, a_m, b \in L$. On considère l'anneau de polynmes $L[X_1, \dots, X_m, Z]$ avec la dérivation $\bar{\delta}$ telle que $\bar{\delta}(X_i) = a_i X_i$ et $\bar{\delta}(Z) = b$. Soit $\sigma : L \to M$ un homomorphisme de corps différentiels. Soient $g_1, \dots, g_m, h \in M$ tels que $g_i' = \sigma(a_i)\, g_i$ et $h' = \sigma(b)$. Alors il existe un unique homomorphisme d'anneaux différentiels*

$$\Psi : L[X_1, \dots, X_m, Z] \to M$$

tel que $\Psi_{|L} = \sigma$, $\Psi(X_i) = g_i$, $1 \leq i \leq m$ et $\Psi(Z) = h$. Si l'homomorphisme Ψ est injectif, alors il s'étend en un isomorphisme différentiel

$$\bar{\Psi} : L(X_1, \dots, X_m, Z) \xrightarrow{\sim} \sigma(L)\,(g_1, \dots, g_m, h).$$

Preuve. On reprend les notations du lemme précédent. D'après les propriétés d'un l'anneau de polynmes différentiels, il existe un homomorphisme $\phi : L\{Y_1, \dots, Y_m, W\} \to M$ tel que $\phi_{|L} = \sigma$, $\phi(X_i) = g_i$, et $\phi(W) = h$. Il est clair que le noyau de ϕ contient l'idéal I défini dans le lemme précédent. Alors, l'homomorphisme différentiel Ψ se factorise à travers $L[X_1, \dots, X_m, Z]$. ∎

Corollaire 2.36 *On pose* $\boldsymbol{C} = \operatorname{Const}\big(L(X_1,\ldots,X_m,Z)\big)$. *On a l'isomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Gal}_L\big(L(X_1,\ldots,X_m,Z)\big) & \to & (\boldsymbol{C}^*)^m \times (\boldsymbol{C},+) \\ \sigma & \mapsto & \big((\frac{\sigma(X_i)}{X_i})_{1\le i\le m}, \sigma(Z)-Z \big). \end{array}$$

Lemme 2.37 *Soit* $L \subseteq M$ *une extension de corps différentiels avec le mme corps* $\boldsymbol{C}$ *des constantes supposé algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit* $f \in M$ *tel que* $M = L(f)$ *et* $f' = af$ *avec* $a \in L$. *Les énoncés suivantes sont équivalents :*

(i). *L'homomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Gal}_L(M) & \to & \boldsymbol{C}^* \\ \sigma & \mapsto & f^{-1}\sigma(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

(ii). *L'élément* f *est transcendant sur* L.

(iii). *Le* $\mathbb{Z}$*-sous-module*

$$\mathbb{Z}\cdot\bar{a} \subseteq L/\delta_{log}(L), \quad \bar{a} = a \bmod \delta_{log}(L),$$

est libre de rang 1.

De plus, si les propriétés ci-dessus ne sont pas satisfaites, alors il existe un entier m *tel que* $f^m \in L$ *et le groupe* $\operatorname{Gal}_L(M)$ *est finie et cyclique.*

Preuve. L'équivalence entre (i) et (ii) a été montrée dans l'exemple 1.53 (page 42). Dans le mme exemple on voit que, si la propriété (ii) n'est pas satisfaite, alors il existe un entièr m tel que $f^m \in L$, donc $m \cdot a = \delta_{\log}(f^m) \in \delta_{\log}(L)$. Réciproquement, si $ma \in \delta_{\log}(L)$ avec $m \in \mathbb{N}$, il existe $h \in L^*$ tel que $h' = mah$, donc $(f^m/h)' = 0$, et il existe une constante $c \in \operatorname{Const}(L) = \operatorname{Const}(M)$ tel que $f^m = ch \in L$. ∎

Lemme 2.38 *Soit* $L \subseteq M$ *une extension de corps différentiels. Soit* $\boldsymbol{C} = \operatorname{Const}(L)$ *un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soit* $a \in L$ *tel que*

$$a \notin \delta(L) = \{f' \mid f \in L\}.$$

Soit $g \in M$ *tel que* $g' = a$. *Alors (i) l'élément* g *est transcendant sur* L, *(ii) le corps des constantes de* $L(g)$ *est* $\boldsymbol{C}$, *(iii) l'homomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Gal}_L(L(g)) & \to & (\boldsymbol{C},+) \\ \sigma & \mapsto & \sigma(g) - g \end{array}$$

est un isomorphisme, et (iv) on a $L \cap \delta_{log}(\,L(g)\,) = \delta_{log}(L)$.

Preuve. Les trois premières assertions ont été montrées dans l'exemple 1.53 (page 42). Soit $b \in L \cap \delta_{\log}(L(g))$, on considère $f \in L(g)$ tel que $f' = bf$. On pose $f = (l_0 + \cdots + l_k g^k)/(t_0 + \cdots + t_s g^s)$ avec $l_i, t_i \in L$. Du fait que $f' = bf$, $g' = a \in L$, $b \in L$, et g est transcendant sur L on déduit que $l'_k t_s - l_k t'_s = b l_k t_s$, donc $b = \delta_{\log}(\frac{l_k}{t_s}) \in \delta_{\log}(L)$. ∎

Lemme 2.39 *Soit $L \subseteq M$ une extension de Picard-Vessiot associée au système d'équations différentielles*

$$y'_i = a_i y_i, \quad 1 \le i \le m, \;\; a_i \in L,$$

avec corps des constantes $\boldsymbol{C}$ algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soient $g_1, \ldots, g_m \in M$ tels que $g'_i = a_i g_i$, $1 \le i \le m$, et $M = L(g_1, \ldots, g_m)$. Les énoncés suivants sont équivalentes :

(i). *L'homomorphisme injectif de groupes algébriques*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_L M & \to & (\boldsymbol{C}^*)^m \\ \sigma & \mapsto & \big(g_1^{-1}\sigma(g_1), \ldots, g_m^{-1}\sigma(g_m)\big) \end{array} \tag{2.9}$$

est un isomorphisme.

(ii). *La partie $\{g_1, \ldots, g_m\}$ est algébriquement indépendante sur L, c'est-à-dire, l'homomorphisme d'anneaux*

$$L[X_1, \ldots, X_m] \to M \tag{2.10}$$

qui envoie X_i sur g_i est injectif, où $L[X_1, \ldots, X_m]$ est l'anneau de polynmes sur L en les variables $X_1, \ldots, X_m$.

(iii). *Le $\mathbb{Z}$-sous-module*

$$\mathbb{Z} \cdot \bar{a}_1 + \cdots + \mathbb{Z} \cdot \bar{a}_m \subseteq L/\delta_{log}(L), \quad \bar{a}_i = a_i \bmod \delta_{log}(L),$$

est libre de rang m, c'est-à-dire, l'homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^m & \to & L/\delta_{log}(L) \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) & \mapsto & \sum \lambda_i \bar{a}_i \end{array}$$

est injectif.

Preuve. Par récurrence sur m. Le cas $m = 1$, est le lemme 2.37. Supposons que le résultat est vrai pour $m - 1$. On pose $L_{m-1} = L(g_1, \ldots, g_{m-1})$.

(i)⇒(iii). Comme l'homomorphisme 2.9 est surjectif, l'homomorphisme $\mathrm{Gal}_L(L_{m-1}) \to (\boldsymbol{C}^*)^{m-1}$ donné par $\sigma \mapsto \big(\sigma(g_i)/g_i\big)_{1 \le i \le m-1}$ est aussi surjectif, c'est donc un isomorphisme. D'après l'hypothèse de récurrence, le sous-module $\mathbb{Z}\bar{a}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a}_{m-1} \subseteq L/\delta_{\log}(L)$ est libre de rang $m-1$. Si le sous-module $\mathbb{Z}\bar{a}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a}_m$ n'était pas libre de rang m, on aurait $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m$ avec $\lambda_m \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \in \delta_{\log}(L)$. D'après la proposition 2.31, on aurait $\lambda_m a_m \in \delta_{\log}(L_{m-1})$, donc $\mathrm{Gal}_{L_{m-1}}(L_m)$ serait fini d'après le lemme 2.37, ce qui serait en contradiction avec la surjectivité de l'application 2.9.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Comme $\mathbb{Z}\bar{a}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a}_m$ est libre de rang m, d'après l'hypothèse de récurrence, la partie $\{g_1, \ldots, g_{m-1}\}$ est algébriquement indépendante sur L. Si $\{g_1, \ldots, g_m\}$ était une partie algébriquement dépendante sur L, alors g_m serait algébrique sur L_{m-1}, et d'après le lemme 2.37 il existerait un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$ka_m \in \delta_{\log}(L_{m-1}) \cap L = \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_{m-1} + \delta_{\log}(L),$$

ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse (iii).

(ii)$\Rightarrow$(i). D'après les lemmes 2.33 et 2.35, l'homomorphisme 2.10 est un homomorphisme d'anneaux différentiels, si l'on considère sur $L[X_1, \ldots, X_m]$ la dérivation telle que $X_i' = a_i X_i$. Alors les corps différentiels $L(X_1, \ldots, X_m)$ et M sont isomorphes. Donc la propriété (i) est satisfaite d'après le corollaire 2.36. ∎

Corollaire 2.40 *Soit (L, δ) un corps différentiel à corps des constantes algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soient $a_1, \ldots, a_m \in L$ tels que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}\bar{a}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a}_m \subseteq L/\delta_{log}(L)$ soit libre de rang m. Soit $L(X_1, \ldots, X_m)$ le corps de fractions rationnelles sur L en les variables $X_1, \ldots, X_m$ muni de la dérivation $\bar{\delta}$, où $\bar{\delta}|_L = \delta$, $\bar{\delta}(X_i) = a_i X_i$, $1 \leq i \leq m$. Alors*

$$\mathrm{Const}\big(L(X_1, \ldots, X_m)\big) = \mathrm{Const}\big(L\big).$$

Preuve. Soit M une extension de Picard-Vessiot associée au système d'équations différentielles $y_i' = a_i y_i$, $1 \leq i \leq m$. D'après le lemme précédente, les corps différentiels $L(X_1, \ldots, X_m)$ et M sont isomorphes. ∎

Proposition 2.41 *Soit $L \subseteq M$ une extension de Picard–Vessiot à corps $\boldsymbol{C}$ des constantes algébriquement clos associée au système d'équations différentielles $y_i' = a_i\, y_i$, $1 \leq i \leq m$, $z' = b$ (i.e. $z'' - (b'/b)z' = 0$). Soient $g_1, \ldots, g_m, h \in M$ tels que $g_i' = a_i g_i$, $1 \leq i \leq m$, et $h' = b$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i). *L'homomorphisme injectif de groupes algébriques*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_L(M) & \to & (\boldsymbol{C}^*)^m \times (\boldsymbol{C}, +), \\ \sigma & \mapsto & \big(g_1^{-1}\sigma(g_1), \ldots, g_m^{-1}\sigma(g_m), \sigma(h) - h\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

(ii). *L'homomorphisme d'anneaux*

$$L[X_1, \dots, X_m, Z] \to M \tag{2.11}$$

qui envoie X_i sur g_i et Z sur h est injectif.

(iii). *Le $\mathbb{Z}$-sous–module*

$$\mathbb{Z}\bar{a_1} + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a_m} \subseteq L/\delta_{log}(L)$$

est libre de rang m, et

$$b \notin \delta(L) = \{f' \mid f \in L\}.$$

Preuve. (i)⇒(iii). D'après le lemme précédent, le $\mathbb{Z}$-sous–module $\mathbb{Z}\bar{a_1}+\cdots+\bar{a_m}$ est libre de rang m. D'après la correspondance Galois, $h \notin L$, car il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_L(M)$ tel que $\sigma(h) \neq h$. Si $f \in M$ et $f' = b$, alors $f - h \in \mathrm{Const}(L)$, alors $f \notin L$. Donc $b \notin \delta(L)$.

(iii)⇒(ii). D'après le lemme précédent, l'ensemble $\{g_1, \dots, g_m\}$ est algébriquement indépendant sur L. Si $\{g_1, \dots, g_m, h\}$ n'était pas algébriquement indépendant sur L, alors $\{g_1, \dots, g_m\}$ ne serait pas algébriquement indépendant sur $L{<}h{>}$, et d'après le lemme précédent, le $\mathbb{Z}$-sous–module

$$\mathbb{Z}\bar{a_1} + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a_m} \subseteq L{<}h{>}/\delta_{\log}(L{<}h{>})$$

ne serait pas libre de rang m. Alors il existerait $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m \in \delta_{\log}(L{<}h{>})$. D'après le lemme 2.38, $\delta_{\log}(L{<}h{>}) \cap L = \delta_{\log}(L)$, car $b \notin \delta(L)$. Alors $\mathbb{Z}\bar{a_1} + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a_m} \subseteq L/\delta_{\log}(L)$ ne serait pas libre de rang m.

(ii)⇒(i). On considère l'anneau de polynmes $L[X_1, \dots, X_m, Z]$ muni de la dérivation $\bar{\delta}$ telle que $\bar{\delta}|_L = \delta$, $\bar{\delta}(X_i) = a_i X_i$ et $\bar{\delta}(Z) = b$. D'après le lemme 2.35, l'homomorphisme 2.11 et un morphisme d'anneaux différentiels, qui est injectif par hypothèse, donc il s'étend sur en un isomorphisme différentiel entre $L(X_1, \dots, X_m, Z)$ et M. On obtient l'assertion (i) par le corollaire 2.36. ∎

Corollaire 2.42 *Soit (L, δ) un corps différentiel à corps de constantes $\boldsymbol{C}$ algébriquement clos et de caractéristique zéro. Soient $a_1, \dots, a_m, b \in L$ tels que le $\mathbb{Z}$-module*

$$\mathbb{Z}\bar{a_1} + \cdots + \mathbb{Z}\bar{a_m} \subseteq L/\delta_{log}(L), \quad \bar{a_i} = a_i \bmod \delta_{log}(L),$$

soit libre de rang m, et que $b \notin \delta(L)$. On considère les corps des fonctions rationnelles $L(X_1, \dots, X_m, Z)$ sur L en les variables $X_1, \dots, X_m, Z$ muni de la dérivation $\bar{\delta}$ tel que $\bar{\delta}|_L = \delta$, $\bar{\delta}(X_i) = a_i X_i$ et $\bar{\delta}(Z) = b$. Alors

$$\mathrm{Const}\big(L(X_1, \dots, X_m, Z)\big) = \mathrm{Const}(L).$$

En particulier, $L(X_1, \dots X_m, Z)$ est une extension de Picard– Vessiot de L associée au système d'équations différentielles $y' = a_i y_i$, $1 \leq i \leq m$, $z' = b$.

Preuve. Soit $L \subseteq M$ une extension Picard–Vessiot associée au système d'équations différentielles ci-dessus. D'après la proposition précédente, les corps différentiels $L(X_1, \dots, X_m, Z)$ et M sont isomorphes. ∎

2.2.2 La surface de Riemann du logarithme

On considère l'espace

$$\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{R} \times [0, \infty[$$

avec la topologie produit. L'application

$$\begin{array}{rcl} \pi : \widetilde{\mathbb{C}} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (\theta, r) & \mapsto & re^{i\theta} \end{array}$$

est continue. Soit $\mathcal{M}$ le faisceau des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble $\Gamma(U, \mathcal{M})$ des sections de $\mathcal{M}$ au dessus de U est par définition la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions méromorphes sur U. On construit un faisceau $\widetilde{\mathcal{M}}$ sur $\widetilde{\mathbb{C}}$ de la façon suivante :

On pose $\widetilde{S} = \pi^{-1}(0) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Soit $W \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ un ouvert. Par définition $F \in \Gamma(W, \widetilde{\mathcal{M}})$, si F est une fonction

$$F : (\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}) \cap (W \setminus \text{pôl}(F)) \rightarrow \mathbb{C}$$

où $\text{pôl}(F) \subseteq (\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}) \cap W$ est un ensemble discret dans $(\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}) \cap W$, et F vérifie la propriété suivante : Pour tout élément $(\theta, r) \in W$ avec $r \neq 0$, il existe un ouvert U

$$(\theta, r) \in U \subseteq W \cap \{(\alpha, l) \in \widetilde{\mathbb{C}} \mid l > 0, \; \theta - \pi < \alpha < \theta + \pi\}$$

et une fonction méromorphe $f \in \Gamma(\pi(U), \mathcal{M})$ telle que

$$F(\tilde{x}) = f \circ \pi(\tilde{x}), \quad \forall \, \tilde{x} \in U, \; \tilde{x} \neq (\theta, r).$$

Deux fonctions F et G sont considérése comme égales si elles co'incident en dehors de l'ensemble $\text{pôl}(F) \cup \text{pôl}(G)$.

Exemple 2.43 La fonction

$$\begin{array}{rcl} \text{Lg} : \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (\theta, r) & \mapsto & \ln r + i\theta \end{array}$$

appartient à $\Gamma(\widetilde{\mathbb{C}}, \widetilde{\mathcal{M}})$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ on désigne par $\tilde{x}^\lambda$ l'application $\tilde{x} \mapsto \exp(\lambda \text{Lg} \tilde{x})$. Alors $\tilde{x}^\lambda \in \Gamma\big(\widetilde{\mathbb{C}}, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$. ∎

Notation 2.44 Si $\tilde{x} = (\theta, r) \in \widetilde{\mathbb{C}}$, on pose $|\tilde{x}| = r$ et $\arg \tilde{x} = \theta$.
L'application de ramification : Soit $\alpha > 0$, on considère l'homéomorphisme $\bar{\rho}_\alpha : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ où $\bar{\rho}_\alpha(\theta, r) = (\alpha\theta, r^\alpha)$ si $r > 0$, et $\bar{\rho}_\alpha(\theta, 0) = (\alpha\theta, 0)$. Pour chaque ouvert $U \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$, on a l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\rho_\alpha : \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{M}}) \to \Gamma(\bar{\rho}_\alpha(U), \mathcal{M}),$$

où $\rho_\alpha(F)(\tilde{x}) = F\big((\bar{\rho}_\alpha)^{-1}(\tilde{x})\big) = F\big(\bar{\rho}_{1/\alpha}(\tilde{x})\big)$.
L'application de translation : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'homéomorphisme $\bar{\mathcal{T}}_\alpha : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ où $\bar{\mathcal{T}}_\alpha(\theta, r) = (\theta + \alpha, r)$. On a l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathcal{T}_\alpha : \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{M}}) \to \Gamma(\bar{\mathcal{T}}_\alpha(U), \widetilde{\mathcal{M}}),$$

où $\mathcal{T}_\alpha\big(F\big)(\tilde{x}) = F\big(\bar{\mathcal{T}}_\alpha^{-1}(\tilde{x})\big) = F\big(\bar{\mathcal{T}}_{-\alpha}(\tilde{x})\big)$.

Remarque 2.45 La fibre $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tilde{x}}$ du faisceau $\widetilde{\mathcal{M}}$ au point $\tilde{x} = (\theta, r)$ avec $r > 0$ s'identifie à $\mathcal{M}_x$ où $x = re^{i\theta}$; si $r = 0$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tilde{x}}$ est la limite inductive du système $\{\Gamma\big(V(\alpha, \beta; R), \mathcal{M}\big)\}_{\alpha<\theta<\beta; R>0}$ où

$$V(\alpha, \beta; R) = \{x \in \mathbb{C} \mid x = |x|\, e^{i\gamma},\ 0 < |x| < R,\ \alpha < \gamma < \beta\}. \tag{2.12}$$

2.2.2.1 Le faisceau $\widetilde{\mathcal{M}}$ sur $\widetilde{S}$.

Soit Z un sous-ensemble de $\widetilde{\mathbb{C}}$, on désigne par $\Gamma\big(Z, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$la limite inductive du système

$$\{\Gamma\big(U, \widetilde{\mathcal{M}}\big) \mid U \text{ est un ouvert de } \widetilde{\mathbb{C}},\ Z \subseteq U\},$$

avec les morphismes de restriction. Ainsi un représentant d'un élément $F \in \Gamma\big(Z, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$ est donné par un ouvert U contenant Z et une fonction $\bar{F} \in \Gamma\big(U, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$; si $\bar{G} \in \Gamma\big(V, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$ est un autre représentant de F, alors il existe un ouvert W, $Z \subseteq W \subseteq U \cap V$ tel que $\bar{F}_{|W} = \bar{G}_{|W}$, où $\bar{F}_{|W}$ est l'image de $\bar{F}$ par l'application de restriction $\Gamma\big(U, \widetilde{\mathcal{M}}\big) \to \Gamma\big(W, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$. En particulier, l'application

$$I \subseteq \widetilde{S}, \quad I \mapsto \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$$

est un faisceau sur $\widetilde{S}$ que l'on désigne aussi par $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$ et $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$. Soient $\bar{F}$ et $\bar{G}$ deux représentants de F qui appartiennent à $\Gamma\big(W, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$ où

$$W = \{\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{C}} \mid \arg \tilde{x} \in]a, b[,\ 0 \le |\tilde{x}| < R\}, \quad I \subseteq W.$$

D'après le théorème sur les zéros des fonctions holomorphes on a

$$\bar{F}(\tilde{x}) = \bar{G}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in W \setminus (\widetilde{S} \cup \text{pôl}(F) \cup \text{pôl}(G)).$$

Dans ce cas, on dit que F est une fonction définie sur W et on pose $F(\tilde{x}) = \bar{F}(\tilde{x})$.

Soient $J \subseteq I \subseteq \widetilde{S}$, et $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$, alors on note $F_{|J}$ l'image de F par l'application de restriction $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{M}}\big) \to \Gamma\big(J, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$. Si J est un point a, on pose $F_{|a} \in \Gamma\big(\{a\}, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$ à la place de $F_{|\{a\}}$.

Remarque 2.46 On construit de façon analogue le faisceau $\widetilde{\mathcal{O}}$ sur $\widetilde{\mathbb{C}}$ et sur $\widetilde{S}$, à partir du faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Lemme 2.47 *On désigne par $\mathcal{F}$ ou bien le faisceau $\widetilde{\mathcal{O}}$ ou bien le faisceau $\widetilde{\mathcal{M}}$. Soit $I = [a, b] \subseteq \widetilde{S}$ et $F \in \Gamma\big(I, \mathcal{F}\big)$. Soit $\alpha = b - a$. Supposons que la restriction $F_{|b}$ de F en b est égale à la restriction de $\mathcal{T}_\alpha F$ en b. Alors il existe une fonction $G \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \mathcal{F}\big)$ telle que la restriction $G_{|I}$ de G en I est égale à F et telle que $G = \mathcal{T}_\alpha G$.*

Preuve. Il existe $U =]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\times [0, \varepsilon[\subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ et $\bar{F} \in \Gamma\big(U, \mathcal{F}\big)$ un représentant de F. Soient $W_a =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times [0, \varepsilon[$ et $W_b =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\times [0, \varepsilon[$. Par hypothèse et d'après le théorème sur les zéros on a $\mathcal{T}_\alpha(\bar{F}_{|W_a}) = \bar{F}_{|W_b}$. On pose $G(\tilde{x}) = \bar{F}(\theta, r)$ si $\tilde{x} = (\theta', r)$ et $0 < r < \varepsilon$, $\theta' = \theta + k\alpha,\ \ k \in \mathbb{Z}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$. ∎

Corollaire 2.48 *Si $\alpha = 2\pi$, alors il existe $R > 0$ et une fonction g holomorphe si $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{O}}$ (resp. méromorphe si $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{M}}$) sur le disque épointé $\{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < R\}$ telle que $G = g \circ \pi$.*

Définition 2.49 *Soient U un ouvert de $\widetilde{\mathbb{C}}$ et $F \in \Gamma\big(U, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$, on définit $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ comme la seule fonction de $\Gamma\big(U, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$ qui satisfait la propriété suivante : si $W \subseteq U$ et $f \in \Gamma\big(\pi(W), \mathcal{M}\big)$ sont tels que $F(\tilde{x}) = f \circ \pi(\tilde{x}),\ \ \tilde{x} \in W$, alors $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(\tilde{x}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \circ \pi(\tilde{x}),\ \ \tilde{x} \in W$.*

On remarque que pour tout ensemble Z, la $\mathbb{C}$-algèbre $\Gamma\big(z, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$ est un corps différentiel avec la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Définition 2.50 (L'application de monodromie) *On désigne par $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty$ le corps différentiel $\Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{M}}\big)$. On appelle application de monodromie l'application $\mathcal{T}_{-2\pi} : \widetilde{\mathcal{M}}_\infty \to \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$ et on la note par*

$$m : \widetilde{\mathcal{M}}_\infty \to \widetilde{\mathcal{M}}_\infty.$$

Exemple 2.51 On a que $m(\mathrm{Lg})\big((\theta, r)\big) = \mathrm{Lg}(\theta + 2\pi, r) = i\theta + 2\pi i + \ln r = \mathrm{Lg}(\theta, r) + 2\pi i$, donc $m(\mathrm{Lg}) = 2\pi i + \mathrm{Lg}$. De mme, on a $m(\tilde{x}^\lambda) = e^{\lambda 2\pi i}\tilde{x}^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.52 *L'application de monodromie m est un automorphisme différentiel de $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty$.*

Preuve. En général on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big(\mathcal{T}_\alpha(F)\big) = e^{-\alpha i}\mathcal{T}_\alpha\big(\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,x}\big),$$

donc, si $\alpha = -2\pi$, $\mathcal{T}_{-2\pi}$ est un isomorphisme différentiel. ∎

2.2.2.2 Les corps $K \subseteq K_\nu \subseteq K_\infty \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$.

On désigne par K le corps différentiel de germes de fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}$ muni de la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$. Un élément de K est représenté par un couple (u, f) où f est une fonction méromorphe sur un ouvert U contenant l'origine. Deux couples (U, f) et (V, g) représentent le mme élément de K si et seulement s'il existe un ouvert W, $0 \in W \subseteq U \cap V$ tel que $f_{|W} = g_{|W}$.

On considère l'homomorphisme injectif de corps différentiels

$$K \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$$

défini comme suit : soit (u, f) un représentant d'un élément de K, on peut supposer que le seul ple de f est l'origine. L'image de (u, f) par l'application $K \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$ est la fonction $(\theta, r) \mapsto f(re^{i\theta})$, $(\theta, r) \in \pi^{-1}(U) \setminus \widetilde{S}$.

Soit $\nu \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\tilde{x}^{1/\nu} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$, on désigne par K_ν le plus petit sous–corps différentiel de $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty$ qui contient K et l'élément $\tilde{x}^{1/\nu}$. On considère le corps différentiel $K_\infty = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu$.

2.2.3 Certaines propriétés du produit tensoriel.

Proposition 2.53 *Soient $A \subseteq B$ et $A \subseteq C$ deux extensions de corps. Alors :*

(i). *Si l'extension $A \subseteq B$ est algébrique et séparable, et A est algébriquement clos dans C (i.e. tout élément de C algébrique sur A appartient à A), alors l'algèbre $B \otimes_A C$ est un corps.*

(ii). *Soit B purement transcendent sur A, et $(b_i)_{i\in I}$ une base de transcendance de B sur A. Alors, l'algèbre $B \otimes_A C$ est intègre et son corps de fractions Q est purement transcendent sur C et une base de transcendance de l'extension $C \subseteq Q$ est $(1\otimes b_i)_{i\in I}$. Si, de plus, A est algébriquement clos dans C, alors B est algébriquement clos dans Q.*

(iii). *Si l'extension $A \subseteq B$ est séparable et A est algébriquement clos dans C, alors l'algèbre $B \otimes_A C$ est intègre.*

(iv). *Supposons que l'extension $A \subseteq B$ est séparable. Soit E une A-algèbre intègre. Alors l'algèbre $B \otimes {}_A E$ est réduite (i.e. n'a pas d'éléments nilpotentes non nuls).*

Preuve. On donne ici les preuves de (i), (iii) et (iv). Pour (ii) et des énoncés plus généraux voir [Jac] ch.8.18.

Pour montrer (i) il suffit de considérer les cas où l'extension $A \subseteq B$ est de degré fini. On suppose donc que $B = A[X]/(p(X))A[X]$, où $p(X)$ est un polynme irréductible et séparable sur A. Alors $B \otimes {}_A C \simeq C[X]/(p(X)C[X]$. Soit $P(X) = P_1(X) \cdots p_r(X)$ avec $p_i(X) \in C[X]$. Soit C' un corps de rupture de $p(X)$ sur C. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C'$ les racines de $p(X)$, alors les coefficients de $p_i(X)$, $1 \leq i \leq r$, appartiennent au corps $A[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ qui est algébrique sur A. Donc les coefficients des polynmes $p_i(X)$ sont algébriques sur A, alors $p_i(X) \in A[X]$, et $r = 1$. Donc $p(X)$ est irréductible sur C et l'algèbre $B \otimes {}_A C$ est un corps. Montrons la partie (iii) : soit $(b_i)_{i \in I}$ une base de transcendance de B sur A. On note $A(b_I) = A(b_i,\, i \in I)$. Alors

$$B \otimes {}_A C = B \otimes {}_{A(b_I)} A(b_I) \otimes {}_A C.$$

D'après la partie (ii), $A(b_I) \otimes {}_A C$ est un domaine d'intégrité et $A(b_I)$ est algébriquement clos dans le corps de fractions Q de $A(b_I) \otimes {}_A C$. Comme B est algébrique et séparable sur A, d'après la partie (i), $B \otimes {}_{A(b_I)} Q$ est un corps. L'algèbre $B \otimes {}_A C$ est intègre, car $B \otimes {}_A C \subseteq B \otimes {}_{A(b_I)} Q$.

Montrons la partie (iv) : soit $(b_i)_{i \in I}$ une base de transcendance de B sur A. Alors $B \otimes {}_A E = B \otimes {}_{A(b_I)} A(b_I) \otimes {}_A E$. L'algèbre $A(b_I) \otimes {}_A E$ est intègre d'après (ii). Alors il suffit de considérer le cas où B est algébrique et fini sur A. Donc, $B = A[X]/(f)$ et $B \otimes {}_A E \simeq E[X]/(f)E[X]$, qui est réduit car f se décompose en facteurs linéaires dans un corps qui contient E. ∎

Remarque 2.54 Si B et C sont des A-algèbres commutatives et unitaires on a $B \otimes {}_A C \neq 0$. En particulier, si B est un corps l'homomorphisme $B \to B \otimes {}_A C$, $b \mapsto b \otimes 1$ est injectif.

2.2.4 Les corps K, $\boldsymbol{K}_F$, $\boldsymbol{K}_{F,s}$, $\hat{K}$, $\hat{\boldsymbol{K}}_F$ et $\hat{\boldsymbol{K}}_{F,s}$.

On a défini précédemment K comme le corps de germes de fonctions méromorphes à l'origine, et $\hat{K}$ comme le corps $\mathbb{C}[[X]]\,[X^{-1}]$ des séries de Laurent formelles bornées à gauche sur $\mathbb{C}$ en la variable X. L'inclusion différentielle $K \subseteq \hat{K}$ est définie comme suit : Un élément de K est donné par un ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant l'origine et par une fonction méromorphe f sur U ; on peut supposer que l'origine est le seul ple de f et que U est connexe. Soit γ un cercle centré à l'origine et contenu dans U. On associé à f

la série $J(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ où $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$. Cette construction est indépendante du représentant (U, f) et du cercle γ. L'application $f \mapsto J(F)$ donne une injection de corps différentiels $K \subseteq \hat{K}$. L'image de K par cette application est formée par les séries convergentes, c'est-à-dire, les séries $\sum a_n X^n$ pour lesquelles il existe des constantes $c > 0$ et $R > 0$ telles que $|a_n| \leq cR^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

La proposition suivante est une conséquence du théorème de Puiseux, on ne donne pas ici sa démonstration.

Proposition 2.55 *Le corps K est algébriquement clos dans le corps $\hat{K}$, c'est-à-dire, que, si $H(Y)$ est un polynme sur K en la variable Y, et $\hat{f} \in \hat{K}$ est tel que $H(\hat{f}) = 0$, alors $\hat{f} \in K$.*

Corollaire 2.56 *Soient L et M des corps, $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$, et $K \subseteq M \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$. Alors l'anneau*

$$L \otimes_K M$$

est intègre, on désigne par $\mathbb{Q}(L \otimes_K M)$ son corps de fractions.

Corollaire 2.57 *Soit $\nu \in \mathbb{N}$. On considère l'élément $\tilde{x}^{1/\nu} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$, et le corps $K_\nu = K(\tilde{x}^{1/\nu}) \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$. Soit L un corps $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. On note*

$$L_\nu = L \otimes_K K_\nu, \quad \text{et } L_\infty = L \otimes_K K_\infty.$$

On désigne par $X^{1/\nu}$ l'élément $1 \otimes \tilde{x}^{1/\nu}$. Alors $L_\nu = L[X^{1/\nu}]$, et L_∞ sont des corps. De plus $\{1, X^{1/\mu}, (X^{1/\nu})^2, \ldots, (X^{1/\nu})^{\nu-1}\}$ est une L-base de L_ν. Tout élément de L_ν a une écriture unique $\sum_{i=0}^{\nu-1} \hat{f}_i (X^{1/\nu})^i$, avec $\hat{f}_i \in L$. On peut représenter les éléments de $L_\nu$comme des séries $\sum_{i\geq n} c_i X^{i/\nu}$, $c_i \in \mathbb{C}$, et dans cette représentation on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\sum c_i X^{i/\nu}) = \sum \frac{i}{\nu} c_i X^{\frac{i-\nu}{\nu}}$.

Notation 2.58 Dorénavant on emploiera la notation du corollaire précédent. En particulier, $\hat{K}_\nu = \hat{K} \otimes_K K_\nu$, $\hat{K}_\infty = \hat{K} \otimes_K K_\infty$.

On a une unique valuation $v : \hat{K} \to \mathbb{Z}$ telle que $v(\sum_{n\geq m} a_n X^n) = m$ si $a_m \neq 0$. On étend v à $\hat{K}_\nu$ de la façons suivante : si $\hat{g} \in \hat{K}_\nu$ il existe des éléments uniques $\hat{f}_i \in \hat{K}$ tels que $g = \sum_{i=0}^{\nu-1} \hat{f}_i X^{i/\nu}$. On pose alors $v(g) = \min_{0\leq i\leq \nu-1}\{v(\hat{f}_i) + \frac{i}{\nu}\}$. Ainsi $v : \hat{K}_\nu \to \frac{1}{\nu}\mathbb{Z}$ est une valuation. Les valuations correspondantes sont compatibles pour les différents ν, donc on obtient une valuation $v : \hat{K}_\infty \to \mathbb{Q}$. Soit $r \in \mathbb{R}$ on note

$$\begin{aligned} \hat{K}_\infty^{>r} &= \{\hat{f} \in \hat{K}_\infty \mid v(\hat{f}) > r\}, \\ \hat{K}_\infty^{\geq r} &= \{\hat{f} \in \hat{K}_\infty \mid v(\hat{f}) \geq r\}, \end{aligned}$$

et pout tout sous-corps M de $\hat{K}_\infty$ on pose

$$M^{>r} = M \cap \hat{K}_\infty^{>r}, \quad \text{et } M^{\geq r} = M \cap \hat{K}_\infty^{\geq r}.$$

Lemme 2.59 *Soit L un corps différentiel, $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. Si on considère L comme $\mathbb{Z}$-module, on a les décompositions :*

$$\begin{aligned} L_\nu &= X^{-1}\mathbb{C}[X^{\frac{-1}{\nu}}] \bigoplus L_\nu^{>-1}, \quad \nu \geq 1, \\ L_\infty &= X^{-1}\big(\bigcup_{\nu\geq 1} \mathbb{C}[X^{\frac{-1}{\nu}}]\big) \bigoplus L_\infty^{>-1}. \end{aligned}$$

Preuve. On a $X^{-1}\mathbb{C}[X^{\frac{-1}{\nu}}] \subseteq L$ car $K \subseteq L$. ∎

Lemme 2.60 *Soit L un corps différentiel, $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. Soit δ la dérivation induite sur $L_\infty = L \otimes_K K_\infty$. On a*

$$\begin{aligned} X^{-1}\cdot\mathbb{C}[X^{\frac{-1}{\nu}}] \cap \delta_{log}(L_\nu) &= \big(\tfrac{1}{\nu}\mathbb{Z}\big)\cdot X^{-1}, \quad \nu \geq 1, \\ X^{-1}\cdot\big(\bigcup_{\nu} \mathbb{C}[X^{\frac{-1}{\nu}}]\big) \cap \delta_{log}(L_\infty) &= \mathbb{Q}\cdot X^{-1}. \end{aligned}$$

Supposons que $L^{>-1} \subseteq \delta_{log}(L)$, alors

$$\begin{aligned} \delta_{log}(L_\nu) &= \big(\tfrac{1}{\nu}\mathbb{Z}\big)\cdot X^{-1} \bigoplus L_\nu^{>-1}, \quad \nu \geq 1, \\ \delta_{log}(L_\infty) &= \mathbb{Q}\cdot X^{-1} \bigoplus L_\infty^{>-1}. \end{aligned}$$

Preuve. Si $\hat{f} = a_r X^r + \hat{g}$ avec $\hat{g} \in L_\infty^{>r}$ et $a_r \neq 0$, alors $\delta_{\log}(\hat{f}) = rX^{-1} + \hat{h}$ avec $\hat{h} \in L_\infty^{>-1}$. ∎

Remarque 2.61 On désigne par L un des corps suivants : K, K_ν, K_∞, $\hat{K}$, $\hat{K}_\nu$, $\hat{K}_\infty$. Alors $L^{>-1} \subseteq \delta_{\log}(L)$. En effet, soit $f = \sum_{r>-1} a_r X^r \in L$. On pose $\int f = \sum_{r>-1} \frac{a_r}{r+1} X^{r+1}$. On a $\int f \in L$ et $v(\int f) > 0$. L'élément $g = \exp(\int f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\int f)^n}{n!} \in L$ est bien défini. Alors $\delta_{\log}(g) = f$. ∎

Lemme 2.62 *On a*

$$X^{-1} \notin \delta(\hat{K}_\infty) = \{\delta(f) \mid f \in \hat{K}_\infty\}.$$

Preuve. Soit $f = \sum a_r X^r$, alors $\delta(f) = \sum r a_r X^{r-1}$. Si on avait $\delta(f) = X^{-1}$, on aurait $0 \cdot a_0 = 1$, ce qui est absurde. ∎

Notation 2.63 Soit $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\nu &= \tilde{x}^{-1/\nu}\mathbb{C}[\tilde{x}^{-1/\nu}] \subseteq K_\nu \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty, \quad \nu \geq 1 \\ \boldsymbol{E} &= \bigcup_{\nu\geq 1} \boldsymbol{E}_\nu \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty, \\ \boldsymbol{E}'_\nu &= \{\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,x} \mid q \in \boldsymbol{E}_\nu\} = \tilde{x}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}_\nu, \\ \boldsymbol{E}' &= \{\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,x} \mid q \in \boldsymbol{E}\} = \tilde{x}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}. \end{aligned}$$

Lemme 2.64 *Soit L un corps différentiel tel que $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. Les homomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules suivants sont injectifs :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_\nu \bigoplus \big(\mathbb{C}/(\tfrac{1}{\nu}\mathbb{Z})\big) &\rightarrow L_\nu/\delta_{log}(L_\nu), \\ \boldsymbol{E}' \bigoplus \big(\mathbb{C}/\mathbb{Q}\big) &\rightarrow L_\infty/\delta_{log}(L_\infty), \end{aligned}$$

les applications étant données par

$$\begin{aligned} \big(q, \beta \bmod \tfrac{1}{\nu}\mathbb{Z}\big) &\mapsto 1{\otimes}q + \beta X^{-1} \bmod \delta_{log}(L_\nu), \\ \big(q, \beta \bmod \mathbb{Q}\big) &\mapsto 1{\otimes}q + \beta X^{-1} \bmod \delta_{log}(L_\infty) \end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme 2.60. ∎

Soit $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$, on note

$$K{<}\tilde{x}^\alpha{>} = K{<}\tilde{x}^{\alpha_1}, \dots, \tilde{x}^{\alpha_m}{>} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty.$$

On considère le $\mathbb{Z}$-sous-module de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$

$$F(\alpha) = \mathbb{Z} \cdot \bar{\alpha_1} + \cdots \mathbb{Z} \cdot \bar{\alpha_m} \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \quad \bar{\alpha_i} = \alpha_i \bmod \mathbb{Z}.$$

Soit $\mathcal{Q}(\alpha)$ le $\mathbb{Z}$-sous-module de torsion de $F(\alpha)$. Comme $\mathbb{Z}$ est un domaine d'intégrité principal, il existe des éléments $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{C}$ tels que

$$F(\alpha) = \mathbb{Z}\bar{\beta}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{Z}\bar{\beta}_r \bigoplus \mathcal{Q}(\alpha). \tag{2.13}$$

Le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{Q}(\alpha)$ est de type fini car il est un sous-module d'un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Soient $\bar{g_1}, \dots, \bar{g_s} \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ un système de $\mathbb{Z}$-générateurs de $\mathcal{Q}(\alpha)$. On pose $\bar{g_i} = p_i/q_i \bmod \mathbb{Z}$ avec $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ et $(p_i, q_i) = 1$. Si ν_0 est le plus petit commun multiple de $q_1, \dots, q_s$ on a $\mathcal{Q}(\alpha) = \big(\frac{1}{\nu_0}\mathbb{Z}\big)/\mathbb{Z}$. Donc

$$F(\alpha) = \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_1 \bigoplus \dots \bigoplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_r \bigoplus \mathbb{Z} \cdot (\tfrac{1}{\nu_0} \bmod \mathbb{Z}).$$

On a

$$K{<}\tilde{x}^\alpha{>} = K{<}\tilde{x}^{\beta_1}, \dots, \tilde{x}^{\beta_r}, \tilde{x}^{1/\nu_0}{>} = K_{\nu_0}{<}\tilde{x}^{\beta_1}, \dots, \tilde{x}^{\beta_r}{>}.$$

En effet, $\beta_i \bmod \mathbb{Z} \in F(\alpha)$, donc il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Z}$, tels que $\beta_i = \lambda_0 + \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$. Donc $\tilde{x}^{\beta_i} = \tilde{x}^{\lambda_0}(\tilde{x}^{\alpha_1})^{\lambda_1} \cdots (\tilde{x}^{\alpha_m})^{\lambda_m} \in K{<}\tilde{x}^\alpha{>}$, d'où $K_{\nu_0}{<}\tilde{x}^{\beta_1}, \dots, \tilde{x}^{\beta_r}{>} \subseteq K{<}\tilde{x}^\alpha{>}$; l'inclusion inverse se montre de façon analogue.

On considère l'anneau différentiel

$$\hat{K} \otimes_K K{<}\tilde{x}^\alpha, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>}.$$

D'après le corollaire 2.56 cet anneau est intègre, on note $\mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K K{<}\tilde{x}^\alpha, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>})$ son corps de fractions. On considère $\hat{K}{<}1{\otimes}\tilde{x}^{\alpha_1}, \dots, 1{\otimes}\tilde{x}^{\alpha_m}, 1{\otimes}\mathrm{Lg}\tilde{x}{>}$ le plus petit sous-corps différentiel de $\mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K K{<}\tilde{x}^\alpha, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>})$ contenant $\hat{K}$ et les éléments $1{\otimes}\tilde{x}^{\alpha_1}, \dots, 1{\otimes}\tilde{x}^{\alpha_m}, 1{\otimes}\mathrm{Lg}\tilde{x}$.

Lemme 2.65 *On a*

$$\hat{K}<1\otimes\tilde{x}^{\alpha_1},\ldots,1\otimes\tilde{x}^{\alpha_m},1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x}> = \mathbb{Q}(\hat{K}\otimes{}_K K<\tilde{x}^{\alpha},\mathrm{Lg}\tilde{x}>)$$

Preuve. Il suffit de montrer que tout élément de la forme $1\otimes t$ avec $t \in K<\tilde{x}^{\alpha},\mathrm{Lg}\tilde{x}>$ appartient à $\hat{K}<1\otimes\tilde{x}^{\alpha_1},\ldots,1\otimes\tilde{x}^{\alpha_m},1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x}>$. On pose

$$t = \frac{p(\tilde{x}^{\alpha_1},\ldots,\tilde{x}^{\alpha_m},\mathrm{Lg}\tilde{x})}{q(\tilde{x}^{\alpha_1},\ldots,\tilde{x}^{\alpha_m},\mathrm{Lg}\tilde{x})},$$

où p et q sont des polynmes sur K ; alors

$$1\otimes t = \frac{p(1\otimes\tilde{x}^{\alpha_1},\ldots,1\otimes\tilde{x}^{\alpha_m},1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x})}{q(1\otimes\tilde{x}^{\alpha_1},\ldots,1\otimes\tilde{x}^{\alpha_m},1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x})} \blacksquare$$

Avec la notation précédente on a

$$\begin{aligned}\hat{K}<1\otimes\tilde{x}^{\alpha_1},\ldots,1\otimes\tilde{x}^{\alpha_m},1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x}> &= \hat{K}<1\otimes\tilde{x}^{\beta_1},\ldots,1\otimes\tilde{x}^{\beta_r},1\otimes\tilde{x}^{1/\nu_0},1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x}> \\ &= \hat{K}_{\nu_0}<1\otimes\tilde{x}^{\beta_1},\ldots,1\otimes\tilde{x}^{\beta_r},1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x}>.\end{aligned}$$

Notation 2.66 si $\beta \in \mathbb{C}$, on pose

$$\begin{aligned}X^{\beta} &= 1\otimes\tilde{x}^{\beta}, \\ \mathrm{Lg}X &= 1\otimes\mathrm{Lg}\tilde{x}.\end{aligned}$$

Théorème 2.67 *Soit $\alpha = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$. Il existe $\beta_1,\ldots,\beta_r \in \mathbb{C}$ et $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que le $\mathbb{Z}$-module*

$$F(\alpha) = \mathbb{Z}\cdot\bar{\alpha_1} + \cdots + \mathbb{Z}\cdot\bar{\alpha_m} \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i \bmod \mathbb{Z}$$

admet la décomposition

$$F(\alpha) = \mathbb{Z}\cdot\bar{\beta}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{Z}\cdot\bar{\beta}_r \bigoplus \mathbb{Z}(\tfrac{1}{\nu_0} \bmod \mathbb{Z}).$$

Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. On a

(i).

$$\begin{aligned}L<X^{\alpha}> = L<X^{\alpha_1},\ldots,X^{\alpha_m}> = L_{\nu_0}<X^{\beta_1},\ldots,X^{\beta_r}> \\ L<X^{\alpha_1},\ldots,X^{\alpha_m},\mathrm{Lg}X> = L_{\nu_0}<X^{\beta_1},\ldots,X^{\beta_r},\mathrm{Lg}X>.\end{aligned}$$

(ii). *Le corps des constantes de $L<X^{\alpha},\mathrm{Lg}\,X>$ est $\mathbb{C}$, et les extensions $L \subseteq L<X^{\alpha}>$ et $L \subseteq L<X^{\alpha},\mathrm{Lg}\,X>$ sont des extensions de Picard–Vessiot.*

(iii). *Les homomorphismes suivants de groupes algébriques sont des isomorphismes :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_{L_{\nu_0}}\big(L{<}X^{\alpha}{>}\big) & \to & (\mathbb{C}^*)^r \\ \sigma & \mapsto & \big(\frac{\sigma(X^{\beta_1})}{X^{\beta_1}}, \ldots, \frac{\sigma(X^{\beta_r})}{X^{\beta_r}}\big) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_{L_{\nu_0}}\big(L{<}X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X{>}\big) & \to & (\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}, +) \\ \sigma & \mapsto & \big(\frac{\sigma(X^{\beta_1})}{X^{\beta_1}}, \ldots, \frac{\sigma(X^{\beta_r})}{X^{\beta_r}}, \sigma(\mathrm{Lg}X) - \mathrm{Lg}X\big), \end{array}$$

où $L{<}X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X{>} = L{<}X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X{>}$.

Preuve. Il ne reste à montrer que les parties (ii) et (iii). D'après la décomposition de $F(\alpha)$ en somme directe, le $\mathbb{Z}$-module

$$\mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_1 + \cdots + \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_r \subseteq \mathbb{C}/(\tfrac{1}{\nu_0}\mathbb{Z}), \quad \bar{\beta}_i = \beta_i \bmod (\tfrac{1}{\nu_0}\mathbb{Z})$$

est libre de rang r. D'après le lemme 2.64, le $\mathbb{Z}$-sous-module

$$\mathbb{Z} \cdot \big(\beta_1 X^{-1} \bmod \delta_{\log}(L_{\nu_0})\big) + \cdots + \mathbb{Z} \cdot \big(\beta_r X^{-1} \bmod \delta_{\log}(L_{\nu_0})\big) \subseteq L_{\nu_0}/\delta_{\log}(L_{\nu_0})$$

est libre de rang r. D'après le lemme 2.62 on a

$$X^{-1} = \delta(\mathrm{Lg}X) \notin \delta(L_{\nu_0}).$$

Alors la partie (ii) est une conséquence du corollaire 2.42, et la partie (iii) de la proposition 2.41. ∎

Théorème 2.68 *Soit* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$. *On considère le* $\mathbb{Z}$*-module*

$$F_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \mathbb{Z} \cdot \bar{\alpha_1} + \cdots + \mathbb{Z} \cdot \bar{\alpha_m} \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Q}, \quad \bar{\alpha} = \alpha \bmod \mathbb{Q}.$$

Le $\mathbb{Z}$*-module* $F_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ *est sans torsion, donc il existe* $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$F_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_r.$$

Alors on a les mmes énoncés (i), (ii) et (iii) que dans le théorème précédent en substituent L_∞ *à* L *et* L_{ν_0}.

Preuve. Elle est analogue à celle du théorème précédente.

Lemme 2.69 *Soient* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$ *et* $\alpha' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m'}\} \subseteq \mathbb{C}$, *tels que, les* $\mathbb{Z}$*-modules* $F(\alpha) \subseteq F(\alpha') \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. *Alors* $K{<}\tilde{x}^{\alpha}{>} \subseteq K{<}\tilde{x}^{\alpha'}{>}$.

Preuve. Il existe $\lambda_{j,k} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\alpha_j = \lambda_{j,0} + \sum_1^{m'} \lambda_{j,k}\alpha'_k, \quad 1 \leq j \leq m,$$

donc

$$\tilde{x}^{\alpha_j} = \tilde{x}^{\lambda_{j,0}} \cdot \prod_{k=1}^{m'} (\tilde{x}^{\alpha'_k})^{\lambda_{j,k}} \in K{<}\tilde{x}^{\alpha'}{>}. \blacksquare$$

On considère le système inductif ($K{<}\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>}$, $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$), où $\alpha \leq \alpha'$ si $F(\alpha) \subseteq F(\alpha')$, et les morphismes $K{<}\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>} \to K{<}\tilde{x}^{\alpha'}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>}$ sont les morphismes d'inclusion. On définit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_F &= \varinjlim_{\alpha} K{<}\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>} = \bigcup_{\alpha \subseteq \mathbb{C}} K{<}\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty, \\
\boldsymbol{K}_{F,s} &= \varinjlim_{\alpha} K{<}\tilde{x}^{\alpha}{>} = \bigcup_{\alpha \subseteq \mathbb{C}} K{<}\tilde{x}^{\alpha}{>} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty.
\end{aligned}$$

Si L est un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$, on désigne par $\boldsymbol{L}_F$ le corps de fractions de $L \otimes_K \boldsymbol{K}_F$, et par $\boldsymbol{L}_{F,s}$ les corps de fractions de $L \otimes_K \boldsymbol{K}_{F,s}$. Dans cette notation le "F" provient du mot Fuchs et le "s" du mot semisimple.

Remarque 2.70 D'après le lemme 2.65, le corps $\boldsymbol{L}_{F,s}$ (resp. $\boldsymbol{L}_F$) est le plus petit sous-corps différentiel de $\mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty)$ qui contient L et les éléments $X^\lambda = 1 \otimes \tilde{x}^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (resp. l'élément $\mathrm{Lg}X = 1 \otimes \mathrm{Lg}\tilde{x}$).

2.2.5 L'automorphisme de monodromie formelle.

On considère l'anneau différentiel $\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$. Cet anneau est intègre car K est algébriquement clos dans $\hat{K}$. On considère le morphisme d'anneaux différentiels

$$\begin{aligned}
\hat{m} : \hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty &\to \hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty \\
\hat{f} \otimes g &\mapsto \hat{f} \otimes m(g)
\end{aligned}$$

Le morphisme de monodromie m est un isomorphisme différentiel, donc le morphisme $\mathrm{Id} \otimes m^{-1}$ est l'inverse de $\hat{m}$, donc $\hat{m}$ est un isomorphisme différentiel. Alors $\hat{m}$ s'étend à $\mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty)$ (corps de fractions de $\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$). L'isomorphisme différentiel $\hat{m} : \mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty) \to \mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty)$ est appelé l'automorphisme de monodromie formelle.

Exemple 2.71 On a $\hat{m}(X^{1/\nu}) = 1 \otimes m(\tilde{x}^{1/\nu}) = e^{\frac{2\pi i}{\nu}} X^{1/\nu}$. Si $f \in \hat{K}_\infty = \hat{K} \otimes_K K_\infty \subseteq \hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$, on peut représenter f par la série $\sum_{k \geq n} a_k X^{k/\nu}$, alors $\hat{m}(f) = \sum a_k e^{\frac{2\pi i k}{\nu}} X^{k/\nu}$.

Lemme 2.72 *Soient $\nu \in \mathbb{N}^*$, et L un corps intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. Alors, l'extension $L \subseteq L_\nu = L \otimes_K K_\nu$ est algébrique et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}_L(L_\nu)$ est le groupe cyclique engendré par $\hat{m}|_{L_\nu}$, l'automorphisme de monodromie formelle restreint à L_ν.*

$$\mathrm{Gal}_L(L_\nu) = \{\mathrm{Id}, \hat{m}|_{L_\nu}, \ldots, (\hat{m}|_{L_\nu})^{\nu-1}\}$$

Preuve. D'après le corollaire 2.57 on a $L_\nu = L[X^{1/\nu}]$. L'élément $X^{1/\nu}$ satisfait l'équation algébrique $Y^\nu - X = 0$, donc l'extension $L \subseteq L_\nu$ est algébrique de degré plus petit ou égal à ν. On a $\hat{m}|_{L_\nu} \in \mathrm{Gal}_L(L_\nu)$, donc $\{(\hat{m}|_{L_\nu})^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{Gal}_L(L_\nu)$. Ceci termine la démonstration car $\hat{m}^k(X^{1/\nu}) \neq \hat{m}^{k'}(X^{1/\nu})$, si $0 \leq k < k' \leq \nu - 1$. ∎

Corollaire 2.73 *Les corps intermédiaires de l'extension $L \subseteq L_\nu$ sont les corps $L_{\nu'}$ où ν' est un diviseur de ν.*

Preuve. C'est une conséquence inmédiate de la correspondance de Galois algébrique. ∎

Corollaire 2.74 *Soit $\xi \in L_\infty = L \otimes_K K_\infty$ tel que*

$$\hat{m}(\xi) = \xi.$$

Alors $\xi \in L$.

Preuve. C'est une conséquence de la correspondance de Galois et du fait que $L_\infty = \bigcup_\nu L_\nu$. ∎

Corollaire 2.75 *Soit μ_ν le groupe multiplicatif des racines ν-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. On a l'isomorphisme de groupes algébriques*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_L(L_\nu) & \to & \mu_\nu \\ \sigma & \mapsto & X^{\frac{-1}{\nu}} \sigma(X^{1/\nu}). \end{array}$$

Théorème 2.76 *Soit $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$. On considère le $\mathbb{Z}$- module $F(\alpha) = \mathbb{Z} \cdot \bar{\alpha_1} + \cdots + \bar{\alpha_m}$, $\bar{\alpha_j} = \alpha_j \bmod \mathbb{Z}$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ et $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$F(\alpha) = \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_r \bigoplus \mathbb{Z} \cdot (\tfrac{1}{\nu_0} \bmod \mathbb{Z}).$$

Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. On note $L<X^{\alpha}> = L<X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_m}>$ et $L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X> = L<X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X>$. L'homomorphisme de groupes algébriques suivant est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_L(L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>) & \to & \mu_{\nu_0} \times (\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}, +) \\ \sigma & \mapsto & \left(\frac{\sigma(X^{1/\nu_0})}{X^{1/\nu_0}}, \frac{\sigma(X^{\beta_1})}{X^{\beta_1}}, \ldots, \frac{\sigma(X^{\beta_1})}{X^{\beta_1}}, \sigma(\mathrm{Lg}X) - \mathrm{Lg}X \right). \end{array}$$

Preuve. D'après le lemme 2.69 on a $L_{\nu_0} \subseteq L<X^{\alpha}>$. L'extension $L \subseteq L_{\nu_0}$ est de Picard– Vessiot. Alors on a la suite exacte

$$\{1\} \to \mathrm{Gal}_{L_{\nu_0}} L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X> \to \mathrm{Gal}_L L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X> \to \mathrm{Gal}_L L_{\nu_0} \to \{1\}$$

où la flèche $\mathrm{Gal}_L L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X> \to \mathrm{Gal}_L L_{\nu_0}$ est le morphisme de restriction qui est surjectif en vertu de la proposition 1.46. On montre que cette suite est scindée. Pour ceci on construit une section de l'homomorphisme de restriction. D'après le théorème 2.67, il existe $\psi \in \mathrm{Gal}_{L_{\nu_0}} L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \psi(X^{\beta_k}) & = & e^{-2\pi i \beta_k} X^{\beta_k}, \quad 1 \leq k \leq r \\ \psi(\mathrm{Lg}X) & = & \mathrm{Lg}X - 2\pi i. \end{array}$$

Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} s : \mathrm{Gal}_L L_{\nu_0} & \to & \mathrm{Gal}_L L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X> \\ \left(\hat{m}|_{L_{\nu_0}} \right)^k & \mapsto & \left(\psi \circ \hat{m}|_{L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>} \right)^k, \quad 0 \leq k \leq \nu_0 - 1, \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes car

$$\left(\psi \circ \hat{m}|_{L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>} \right)^{\nu_0} = \mathrm{Id}|_{L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>}.$$

Ainsi s est une section de l'application restriction, car $\psi(X^{1/\nu_0}) = X^{1/\nu_0}$. (On remarque que la section s dépend de la base $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ choisie). Donc la suite exacte ci-dessus est scindée, et on a l'isomorphisme (non canonique) de groupes algébriques :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{Gal}_{L_{\nu_0}} L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X> \rtimes \mathrm{Gal}_L L_{\nu_0} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}_L L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X> \\ \left(\tau, (\hat{m}|_{L_{\nu_0}})^k \right) & \mapsto & \tau \circ (\psi \circ \hat{m}|_{L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>})^k. \end{array}$$

Le sous-groupes $s\left(\mathrm{Gal}_L L_{\nu_0} \right)$ et $\mathrm{Gal}_{L_{\nu_0}} L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>$ commutent ; en effet, si $\tau \in \mathrm{Gal}_{L_{\nu_0}} L<X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X>$, avec $\tau(X^{\beta_i}) = c_i X^{\beta_i}$ et $\tau(\mathrm{Lg}X) = \mathrm{Lg}X + c$ on a

$$\begin{array}{rcl} \psi \hat{m} \tau(X^{\beta_i}) = & c_i X^{\beta_i} & = \tau \psi \hat{m}(X^{\beta_i}), \\ \psi \hat{m} \tau(\mathrm{Lg}X) = & \mathrm{Lg}X + c & = \tau \psi \hat{m}(\mathrm{Lg}X), \\ \psi \hat{m} \tau(X^{1/\nu_0}) = & e^{\frac{2\pi i}{\nu_0}} X^{1/\nu_0} & = \tau \psi \hat{m}(X^{1/\nu_0}). \end{array}$$

Alors le produit semi-direct ci-dessus est en fait un produit direct de groupes. Finalement, si $\sigma \in \mathrm{Gal}_L L{<}X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X{>}$, il existe k tel que $\sigma(X^{1/\nu_0}) = e^{\frac{2\pi i k}{\nu_0}} X^{1/\nu_0}$, alors

$$\Phi^{-1}(\sigma) = \left(\tau, \hat{m}|_{L_{\nu_0}}^{k}\right),$$

où $\tau = \sigma \circ (\psi \hat{m}|_{L<X^{\alpha},\mathrm{Lg}X>})^{-k}$. On a $\tau(X^{\beta_j}) = \sigma(X^{\beta_j})$, $1 \leq j \leq r$, $\tau(\mathrm{Lg}X) = \sigma(\mathrm{Lg}X)$ et $\sigma(X^{1/\nu_0}) = \hat{m}(X^{1/\nu_0})$. Alors l'homomorphisme donné dans l'énoncé de ce théorème est la composition de l'isomorphisme Φ^{-1} et des isomorphismes donnés dans le théorème 2.67 et le corollaire 2.75, ce qui démontre le résultat. ∎

Théorème 2.77 *Soit $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$. Soit L un corps intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. Soit $\xi \in L{<}X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X{>}$ tel que*

$$\hat{m}(\xi) = \xi.$$

Alors $\xi \in L$.

Preuve. On a $\hat{m}|_{L<X^{\alpha},\mathrm{Lg}X>} \in \mathrm{Gal}_L L{<}X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X{>}$. Soit H le sous-groupe

$$H = \{(\hat{m}|_{L<X^{\alpha},\mathrm{Lg}X>})^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathrm{Gal}_L L{<}X^{\alpha}, \mathrm{Lg}X{>}.$$

L'image du groupe H par l'isomorphisme donné dans le théorème 2.76 est le sous-groupe

$$T = \{(e^{\frac{2\pi i k}{\nu_0}}, e^{\beta_1 2\pi i k}, \ldots, e^{\beta_r 2\pi i k}, k2\pi i) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mu_{\nu_0} \times (\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}, +).$$

Les propositions qui suivent montrent que T est Zariski dense, donc par la proposition 1.43 et par la correspondance de Galois, le corps des élément fixés par H est L. ∎

Corollaire 2.78 *Soit $\xi \in \hat{\boldsymbol{K}}_F$ tel que $\hat{m}(\xi) = \xi$, alors $\xi \in \hat{K}$.*

Proposition 2.79 *Soient $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\} \subseteq \mathbb{C}$ tels que le $\mathbb{Z}$-module*

$$\mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_1 + \cdots + \mathbb{Z} \cdot \bar{\beta}_r \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \quad \bar{b_j} = \beta_j \bmod \mathbb{Z},$$

soit libre de rang r. Alors le sous-groupe T de $(\mathbb{C}^*)^r$ engendré par l'élément $(e^{\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{\beta_r 2\pi i})$ est Zariski dense.

Preuve. Soit $f = \sum f_j Y_1^{j_1} \cdots Y_r^{j_r}$ un polynme qui s'annule sur T. Soit χ_j la j-ième projection de $(\mathbb{C}^*)^r$. Chaque χ_j est un caractère sur le groupe $(\mathbb{C}^*)^r$.

Si $(j_1, \ldots, j_r) \neq (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, les caractères $\chi^{j_1} \cdots \chi^{j_r}$ et $\chi^{\gamma_1} \cdots \chi^{\gamma_r}$ sur T sont différents ; en effet, s'ils étaient égaux on aurait

$$e^{2\pi i((j_1-\gamma_1)\beta_1+\cdots+(j_r-\gamma_r)\beta_r} = 1,$$

en contradiction avec le fait que $(\mathbb{Z}\beta_1 + \cdots + \mathbb{Z}\beta_r) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. D'apès le lemme d'indépendance des caractères sur un groupe on a $f_{\underline{j}} = 0$ pour tout $\underline{j} = (j_1, \ldots, j_r)$, donc $f = 0$. ∎

Lemme 2.80 *Soient $\beta_1, \ldots, \beta_r$ comme dans le lemme précédent. Soit T le sous-groupe de $\mu_\nu \times (\mathbb{C}^*)^r$ engendré par l'élément $(e^{\frac{2\pi i}{\nu}}, e^{\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{\beta_r 2\pi i})$. Alors T est Zariski dense dans $\mu_\nu \times (\mathbb{C}^*)^r$.*

Preuve. Soit $f(Y_0, Y_1, \ldots, Y_r) \in \mathbb{C}[Y_0, \ldots, Y_r]$ un polynme qui s'annule sur T. On écrit $f = \sum f_{\underline{j}}(Y_0) \cdot Y_1^{j_1} \cdots Y_r^{j_r}$. On considère le sous-groupe

$$T_0 = \{(1, e^{k\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{k\beta_r 2\pi i}) \mid k \in \nu\mathbb{Z}\} \subseteq T.$$

Le polynme $f(1, Y_1, \ldots, Y_r)$ s'annule sur T_0. D'après le lemme précédent on a $f_{\underline{j}}(1) = 0$, pour tout $\underline{j}$. Soit $0 \leq q \leq \nu$, on considère

$$T_q = (e^{\frac{2\pi i q}{\nu}}, e^{q\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{q\beta_r 2\pi i}) \cdot T_0 \subseteq T.$$

On considère la projection $pr : \mu_\nu \times (\mathbb{C}^*)^r \to (\mathbb{C}^*)^r$. Alors $pr(T_q) = t^q pr(T_0)$, où $t = (e^{\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{\beta_r 2\pi y})$ et $pr(T_q)$ est homéomorphe à $pr(T_0)$, en particulier il est Zariski dense dans $(\mathbb{C}^*)^r$. Finalement $f_{\underline{j}}(e^{\frac{2\pi i q}{\nu}}) = 0$, donc f s'annule sur $\mu_\nu \times (\mathbb{C}^*)^r$. ∎

Proposition 2.81 *Soient $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ tels que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}\bar{\beta}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\bar{\beta}_r \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ soit libre de rang r. Soit T le sous-groupe du groupe*

$$\mu_\nu \times (\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}, +)$$

engendré par l'élément

$$\xi = \left(e^{\frac{2\pi i}{\nu}}, e^{\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{\beta_r 2\pi i}, a\right), \quad a \neq 0.$$

Alors T est Zariski dense.

Preuve. Soit $\bar{T}$ l'adhérence de T. D'après le lemme 1.68, $\bar{T}$ est un sous-groupe fermé, donc algébrique. On a $\xi = \xi_s \cdot \xi_u$, où

$$\begin{aligned} \xi_s &= (e^{\frac{2\pi i}{\nu}}, e^{\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{\beta_r 2\pi i}, 0), \\ \xi_u &= (1, \ldots, 1, a). \end{aligned}$$

L'élément ξ_s est semisimple et ξ_u est unipotent. Alors $\xi_s \in \bar{T}$ et $\xi \in \bar{T}$ (voir le théorème 15.3 du [Hum]). Donc $\xi_s^m, \xi_u^m \in \bar{T}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Soit $f(Y_0, Y_1, \ldots, Y_r, W) \in \mathbb{C}[Y_0, \ldots, Y_r, W]$ un polynme qui s'annule sur T, donc il s'annule sur $\bar{T}$, en particulier sur les éléments $\xi_s^m \cdot \xi_u^{m'}$, $m, m' \in \mathbb{Z}$. On écrit $f = \sum_{j=0}^N f_j(Y_0, \ldots, Y_r) \cdot W^j$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ le polynme $g(W) = f(e^{\frac{m2\pi i}{\nu}}, e^{m\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{m\beta_r 2\pi i}, W)$ s'annule sur $m' \cdot a$ pour tout $m' \in \mathbb{Z}$, donc $g(W) = 0$. Alors $f_j(e^{\frac{m2\pi i}{\nu}}, e^{m\beta_1 2\pi i}, \ldots, e^{m\beta_r 2\pi i}) = 0$ pour $0 \leq j \leq N$ et $m \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 2.80 on a $f_j = 0$, $0 \leq j \leq N$, donc $f = 0$. ∎

2.2.6 Le tore exponentiel.

On reprend les notations précédentes, en particulier

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\nu &= \tilde{x}^{-1/\nu}\mathbb{C}[\tilde{x}^{-1/\nu}] \subseteq K_\nu \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}^*, \\
\boldsymbol{E} &= \bigcup_{\nu \geq 1} \boldsymbol{E}_\nu \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty, \\
\boldsymbol{E}'_\nu &= \{\frac{\mathrm{d}\, q}{\mathrm{d}\, x} \mid q \in \boldsymbol{E}_\nu\} = \tilde{x}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}^*, \\
\boldsymbol{E}' &= \{\frac{\mathrm{d}\, q}{\mathrm{d}\, x} \mid q \in \boldsymbol{E}\} = \tilde{x}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}.
\end{aligned}
$$

Soit $q \in \boldsymbol{E}$, on désigne par e^q l'élément du corps $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty$ donné par la fonction $\tilde{x} \mapsto \exp(q(\tilde{x}))$. Soit $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$, on désigne par $K{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$ le plus petit sous-corps différentiel de $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty$ contenant K et $\{e^{q_1}, \ldots, e^{q_m}\}$. Soient $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\} \subseteq \mathbb{C}$, et L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. On désigne par $K{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}$ le plus petit sous-corps différentiel du corps $\mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty)$ contenant L, $\{X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_{m'}}\}$, $1{\otimes}\mathrm{Lg}\tilde{x}$, et les éléments $1{\otimes}e^{q_1}$, $\ldots$, $1{\otimes}e^{q_m}$.

Le lemme suivant sera utile pour montrer que le corps des constantes de $L{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}$ est $\mathbb{C}$.

Lemme 2.82 *Soit* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. *On a*

$$\hat{K}_\infty \bigcap \delta_{log}\big(\hat{K}_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}\big) = (\mathbb{Z} \cdot \alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z} \cdot \alpha_m + \mathbb{Q}) \cdot X^{-1} \bigoplus \hat{K}_\infty^{\geq -1}.$$

Preuve. On montre d'abord que

$$X^{-1} \notin \delta\big(\hat{K}_\infty{<}X^\alpha{>}\big).$$

D'après le théorème 2.68, le corps des constantes de $\hat{K}_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}$ est $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $f \in \hat{K}_\infty{<}X^\alpha{>}$ tel que $X^{-1} = \delta(f)$. On aurait alors $f = \mathrm{Lg}X + c$, avec $c \in \mathbb{C}$ car $\delta(f - \mathrm{Lg}X) = 0$, donc $\hat{K}_\infty{<}X^\alpha{>} =$

$\hat{K}_\infty<X^\alpha, \mathrm{Lg}X>$. D'après le théorème 2.68, la projection $(\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*)^r$ serait un isomorphisme, ce qui est absurde. Alors $X^{-1} \notin \delta(\hat{K}_\infty<X^\alpha>)$, et d'après le lemme 2.38 on a

$$\hat{K}_\infty<X^\alpha> \bigcap \delta_{\log}\big(\hat{K}_\infty<X^\alpha, \mathrm{Lg}X>\big) = \delta_{\log}\big(\hat{K}_\infty<X^\alpha>\big).$$

D'après la proposition 2.31 on a

$$\hat{K}_\infty \bigcap \delta_{\log}\big(\hat{K}_\infty<X^\alpha>\big) = \big(\mathbb{Z}\alpha_1 + \cdot + \mathbb{Z}\alpha_m\big) \cdot X^{-1} + \delta_{\log}(\hat{K}_\infty).$$

La preuve est achevée en utilisant le lemme 2.60 et la remarque 2.61. ∎

Corollaire 2.83 *Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. Soit $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$. On a*

$$\big(\boldsymbol{E}' \bigoplus \mathbb{C} \cdot X^{-1}\big) \bigcap \delta_{log}\big(L_\infty<X^\alpha, \mathrm{Lg}X>\big) = (\mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots \mathbb{Z}\alpha_m + \mathbb{Q}) \cdot X^{-1}.$$

Preuve. L'inclusion $\subseteq$ est une conséquence du lemme car $L_\infty<X^\alpha, \mathrm{Lg}X> \subseteq \hat{K}_\infty<X^\alpha, \mathrm{Lg}X>$. L'inclusion en sens contraire est évidente. ∎

Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. On note

$$\boldsymbol{L}_F = \bigcup_{\alpha \subseteq \mathbb{C}} L<X^\alpha, \mathrm{Lg}X>$$

Corollaire 2.84 *On a*

$$\big(\boldsymbol{E}' \bigoplus \mathbb{C} \cdot X^{-1}\big) \bigcap \delta_{log}(\boldsymbol{L}_F) = \mathbb{C} \cdot X^{-1}.$$

Preuve. C'est une conséquence du corollaire précédent. ∎

Notation 2.85 Soit $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$. On considère les $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\mathfrak{q}) &= \mathbb{Z} \cdot q_1 + \cdots + \mathbb{Z}q_m \subseteq \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{E}'(\mathfrak{q}) &= \mathbb{Z} \cdot \frac{\mathrm{d}\, q_1}{\mathrm{d}\, x} + \cdots + \mathbb{Z}\frac{\mathrm{d}\, q_m}{\mathrm{d}\, x} \subseteq \boldsymbol{E}'. \end{aligned}$$

Remarque 2.86 (i). Les applications $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{E}_\nu \to \boldsymbol{E}'_\nu$ données par la dérivation $q \mapsto \frac{\mathrm{d}\, q}{\mathrm{d}\, x}$ sont des isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules.
(ii). Les $\mathbb{Z}$-modules $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$ et $\boldsymbol{E}'(\mathfrak{q})$ sont sans torsion, donc il existe une $\mathbb{Z}$-base $\{p_1, \ldots, p_r\}$ de $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$. D'après la remarque précédente $\{\frac{\mathrm{d}\, p_1}{\mathrm{d}\, x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\, p_r}{\mathrm{d}\, x}\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\boldsymbol{E}'(\mathfrak{q})$.

Lemme 2.87 *Soient $\mathfrak{q}_1 = \{q_1, \ldots, q_m\}$ et $\mathfrak{q}_2 = \{p_1, \ldots, p_{m'}\}$ tels que $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q}_1) \subseteq \boldsymbol{E}(\mathfrak{q}_2)$. Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. Alors*

$$\boldsymbol{L}_F<e^{\mathfrak{q}_1}> \subseteq \boldsymbol{L}_F<e^{\mathfrak{q}_2}>.$$

Preuve. Il suffit de montrer que $e^{q_j} \in \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}_2}{>}$, $1 \le j \le m$. Par hypothèse il existe $\lambda_{j,k} \in \mathbb{Z}$ tels que $q_j = \sum \lambda_{j,k} p_k$. Alors

$$e^{q_j} = \prod_{1 \le k \le m'} (e^{p_k})^{\lambda_{j,k}} \in \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}_2}{>}. \blacksquare$$

Théorème 2.88 *Soient $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}\} \subseteq \mathbb{C}$ et $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$. Soit $\{p_1, \ldots, p_r\}$ une base du $\mathbb{Z}$-module $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$. Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$. Alors :*

(i). *$L_\infty{<}e^{q_1}, \ldots, e^{q_m}{>} = L_\infty{<}e^{p_1}, \ldots, e^{p_r}{>}$.*

(ii). *L'extension $L_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>} \subseteq L_\infty{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}$ est de Picard–Vessiot, en particulier, le corps des constantes de $L_\infty{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}$ est $\mathbb{C}$.*

(iii). *On a l'isomorphisme de groupes algébriques :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_{L_\infty<X^\alpha,\mathrm{Lg}X>}\big(L_\infty{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}\big) & \to & (\mathbb{C}^*)^r \\ \sigma & \mapsto & \big(\frac{\sigma(e^{p_1})}{e^{p_1}}, \ldots, \frac{\sigma(e^{p_r})}{e^{p_r}}\big). \end{array}$$

Preuve. La partie (i) est un conséquence du lemme 2.87. L'homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^r & \to & L_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}/\delta_{\log}(L_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}) \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) & \mapsto & \lambda_1 \frac{\mathrm{d}\,p_1}{\mathrm{d}\,x} + \cdots + \lambda_r \frac{\mathrm{d}\,p_r}{\mathrm{d}\,x} \bmod \delta_{\log}(L_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}) \end{array}$$

est injectif car $\boldsymbol{E}'(\mathfrak{q}) \cap \delta_{\log}(L_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}) = \emptyset$, en vertu du corollaire 2.83. D'après le corollaire 2.40, le corps des constantes de $L_\infty{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}$ est le corps des constantes de $L_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}$. Donc le corps des constantes de $L_\infty{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}$ est $\mathbb{C}$, d'après le théorème 2.67. Alors l'extension

$$L_\infty{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>} \subseteq L_\infty{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}$$

est de Picard–Vessiot associée au système d'équations différentielles $y_i' = \frac{\mathrm{d}\,q_i}{\mathrm{d}\,x} y_i$, $1 \le i \le m$. L'isomorphisme de la partie (iii) est une conséquence du lemme 2.39. $\blacksquare$

Théorème 2.89 *Soient $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$ et $\{p_1, \ldots, p_r\}$ une base du $\mathbb{Z}$-module $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$. Soit L un corps différentiel $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. Alors*

(i). *$\boldsymbol{L}_F{<}e^{q_1}, \ldots, e^{q_m}{>} = \boldsymbol{L}_F{<}e^{p_1}, \ldots, e^{p_r}{>}$.*

(ii). *L'extension $\boldsymbol{L}_F \subseteq \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$ est de Picard– Vessiot.*

(iii). *On a un isomorphisme de groupes algébriques*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}\big(\boldsymbol{L}_F{<}e^{q_1}, \ldots, e^{q_m}{>}\big) & \to & (\mathbb{C}^*)^r \\ \sigma & \mapsto & \big(e^{-p_1}\sigma(e^{p_1}), \ldots, e^{-p_r}\sigma(e^{p_r})\big). \end{array}$$

Preuve. Elle est analogue à celle du théorème précédent. ∎

Soit $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$. On considère le groupe de caractères

$$\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) = \{\chi : \boldsymbol{E}(\mathfrak{q}) \to \mathbb{C}^* \mid \chi \text{ est un homomorphisme de groupes}\}.$$

Soit $\{p_1, \ldots, p_r\}$ une $\mathbb{Z}$-base de $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$, on a l'isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\{p_1,\ldots,p_r\}} : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{C}^*)^r \\ \chi & \mapsto & \big(\chi(e^{p_1}), \ldots, \chi(e^{p_r})\big). \end{array}$$

On munit $\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$ d'une structure de groupe algébrique via l'isomorphisme $\Psi_{\{p_1,\ldots,p_r\}}$. Cette structure est indépendante de la base $\{p_1, \ldots, p_r\}$ choisie. En effet, si $\{l_1, \ldots, l_r\}$ est une autre $\mathbb{Z}$-base de $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$ on a $l_i = \sum \lambda_{i,j} p_j$, avec $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Z}$; alors

$$\Psi_{l_1,\ldots,l_r\}} \circ \Psi^{-1}_{\{p_1,\ldots,p_r\}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \Big(\prod_j \alpha_j^{\lambda_{1,j}}, \ldots, \prod_j \alpha_j^{\lambda_{r,j}} \Big).$$

Donc $\Psi_{l_1,\ldots,l_r\}} \circ \Psi^{-1}_{\{p_1,\ldots,p_r\}}$ est un isomorphisme de groupes algébriques.

Théorème 2.90 *Sous les hypothèses et notations du théorème précédent, on a les isomorphismes de groupes algébriques :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_{L_\infty<X^\alpha, \mathrm{Lg}X>}\big(L_\infty<X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X>\big) & \to & \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \\ \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}\big(\boldsymbol{L}_F<e^{\mathfrak{q}}>\big) & \to & \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \\ \sigma & \mapsto & \chi, \quad \chi(e^q) = \frac{\sigma(e^q)}{e^q},\ \forall q \in \boldsymbol{E}(\mathfrak{q}). \end{array}$$

Preuve. C'est une conséquence des théorèmes 2.88, 2.89 et de l'isomorphisme $\Psi_{\{p_1,\ldots,p_r\}}$. ∎

On considère l'ensemble des parties finies $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$; on munit cet ensemble de l'ordre $\mathfrak{q}_1 \leq \mathfrak{q}_2$ si $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q}_1) \subseteq \boldsymbol{E}(\mathfrak{q}_2)$; cet ordre est inductif. Pour chaque partie $\mathfrak{q}$ on considère le corps différentiel $\boldsymbol{K}_F<e^{\mathfrak{q}}>$, et pour toute paire de parties $\mathfrak{q}_1 \leq \mathfrak{q}_2$ on considère l'homomorphisme d'inclusion $\boldsymbol{K}_F<e^{\mathfrak{q}_1}> \subseteq \boldsymbol{K}_F<e^{\mathfrak{q}_2}>$. Ceci constitue un système inductif. On désigne par

$$\boldsymbol{K} = \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{q}}} \boldsymbol{K}_F<e^{\mathfrak{q}}> = \bigcup_{\mathfrak{q}} \boldsymbol{K}_F<e^{\mathfrak{q}}> \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty.$$

Soit L un corps différentiel, $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$, on désigne par $\boldsymbol{L}$ le corps de fractions de l'anneau différentiel $L \otimes_K \boldsymbol{K}$:

$$\boldsymbol{L} = \mathbb{Q}(L \otimes_K \boldsymbol{K}).$$

Par une preuve analogue à celle du lemme 2.65, on montre que $\boldsymbol{L}$ est le plus petit sous-corps différentiel de $\mathbb{Q}(\hat{K} \otimes_K \widetilde{\mathcal{M}}_\infty)$ qui contient L, les éléments $1 \otimes \tilde{x}^\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $1 \otimes \mathrm{Lg}\tilde{x}$, et $1 \otimes e^q$ avec $q \in \boldsymbol{E}$.

D'après le théorème 2.88, $\mathbb{C}$ est le corps des constantes de $\boldsymbol{L}$.

Définition 2.91 (Groupe pro-algébrique) *On dit qu'un groupe G est un groupe pro-algébrique s'il est la limite projective de groupes algébriques G_j, les morphismes $\psi_{j,j'} : G_{j'} \to G_j$ étant des morphismes de groupes algébriques. Soient $G = \varprojlim_{j \in J} G_j$ et $G' = \varprojlim_{t \in T} G'_t$ deux groupes pro-algébriques. Un morphisme de groupes $\Phi : G \to G'$ est dit un morphisme de groupes pro-algébriques si pour tout $t \in T$ il existe $j \in J$ et un morphisme de groupes algébriques $\phi : G_j \to G'_t$ tels que $\phi\psi_j = \psi'_t\Phi$. En particulier, si G' est un groupe algébrique, il est pro-algébrique, et un morphisme $\Phi : G \to G'$ est un morphisme de groupes pro-algébriques si Φ se factorise à travers un homomorphisme de groupes algébriques $\phi : G_j \to G'$.*

Définition 2.92 (Le pro-tore exponentiel) *On considère le groupe de caractères*

$$\boldsymbol{T}_e = \{\chi : \boldsymbol{E} \to \mathbb{C}^* \mid \chi \textit{ est un homomorphisme de groupes}\}.$$

Soit $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$, on dit que $\mathfrak{q}$ est stable par la monodromie si on a $\mathfrak{q} = \{m(q_1), \ldots, m(q_m)\}$. Le $\mathbb{Z}$-module $\boldsymbol{E}$ est la limite inductive du système de réseau $\{\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{q}$ une partie fini de $\boldsymbol{E}$ stable par la monodromie$\}$. *Alors $\boldsymbol{T}_e$ est la limite projective des groupes*

$$\boldsymbol{T}_e = \varprojlim_{\mathfrak{q}} \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}),$$

où les $\mathfrak{q}$ sont les parties finis de $\boldsymbol{E}$ stables par la monodromie. Donc $\boldsymbol{T}_e$ est un groupe pro-algébrique, il est appelé le pro-tore exponentiel.

Remarque 2.93 Soit L un corps différentiel $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. On a un isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}) & \to & \varprojlim_{\mathfrak{q}} \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}) \\ \tau & \mapsto & \left(\tau|_{\boldsymbol{L}_F<e^{\mathfrak{q}}>}\right)_{\mathfrak{q}}. \end{array}$$

En effet, pour toute partie finie $\mathfrak{q} \subseteq \boldsymbol{E}$, l'extension $\boldsymbol{L}_F \subseteq \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$ est de Picard–Vessiot, alors $\tau|_{\boldsymbol{L}_F<e^{\mathfrak{q}}>} \in \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>})$, donc l'application ci-dessus est bien définie. Il est évidement injectif car $\boldsymbol{L} = \bigcup_{\mathfrak{q}} \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$. Il est surjectif : si $(\tau_{\mathfrak{q}}) \in \varprojlim_{\mathfrak{q}} \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>})$ on définit le morphisme différentiel $\tau : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ donné par $\tau(\xi) = \tau_{\mathfrak{q}}(\xi)$ si $\xi \in \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$. Ainsi $\mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L})$ est un groupe pro-algébrique.

Théorème 2.94 *On a l'isomorphisme de groupes pro-algébriques*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_F : \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}) & \to & \boldsymbol{T}_e \\ \tau & \mapsto & \chi, \quad \chi(q) = e^{-q}\sigma(e^q),\ q \in \boldsymbol{E}. \end{array}$$

Preuve. C'est une conséquence des définitions et du théorème 2.90. ∎

Soit L un corps différentiel, $K \subseteq L \subseteq \hat{K}$. On considère l'homomorphisme injectif de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : \boldsymbol{T}_e & \to & \mathrm{Gal}_L(\boldsymbol{L}) \\ \chi & \mapsto & (\mathcal{T}_F)^{-1}(\chi). \end{array}$$

Lemme 2.95 *L'image du pro-tore exponentiel dans* $\mathrm{Gal}_L(\boldsymbol{L})$ *est un sous-groupe normal.*

Preuve. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}_L(\boldsymbol{L})$ et $\tau \in \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L})$. Car les corps des constantes de $\boldsymbol{L}$ est $\mathbb{C}$ on a que $\sigma(X^\lambda) = c_\lambda X^\lambda$, avec $c_\lambda \in \mathbb{C}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et que $\sigma(\mathrm{Lg}X) = \mathrm{Lg}X + c$ avec $c \in \mathbb{C}$. Alors $\sigma\tau\sigma^{-1}(X^\lambda) = X^\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, et $\sigma\tau\sigma^{-1}(\mathrm{Lg}X) = \mathrm{Lg}X$, donc $\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L})$. ∎

2.3 Le groupe fondamental sauvage formel.

Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$.

On désigne par $(\hat{\gamma}_0)$ le groupe multiplicatif libre engendré par la lettre $\hat{\gamma}_0$. On considère l'homomorphisme injectif de groupes

$$\begin{array}{rcl} (\hat{\gamma}_0) & \to & \mathrm{Gal}_L(\boldsymbol{L}) \\ \hat{\gamma}_0 & \mapsto & \hat{m}|_{\boldsymbol{L}}, \end{array}$$

où $\hat{m}$ est l'automorphisme de monodromie formelle. Cette application est bien définie car $\hat{m}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ et $\hat{m}$ fixe les éléments de L. L'homomorphisme ci-dessus est injectif car $X^{1/\nu} \in \boldsymbol{L}$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$ et on a que $\hat{m}^k(X^{1/\nu}) = e^{\frac{2\pi i k}{\nu}} X^{1/\nu}$.

On considère l'action à gauche du groupe $(\hat{\gamma}_0)$ sur $\boldsymbol{T}_e$:

$$\begin{array}{rcl} (\hat{\gamma}_0) \times \boldsymbol{T}_e & \to & \boldsymbol{T}_e \\ (\hat{\gamma}_0, \chi) & \mapsto & \hat{\gamma}_0\chi, \quad (\hat{\gamma}_0\chi)(q) = \chi(m^{-1}(q)). \end{array}$$

L'action ayant été ainsi définie on a $\mathcal{T}_F^{-1}(\hat{\gamma}_0\chi) = \hat{m}\tau\hat{m}^{-1}$, si $\tau = \mathcal{T}_F^{-1}(\chi)$. On désigne par

$$\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0)$$

le produit semi-direct de groupes associé à cette action. Les éléments de $\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0)$ sont les paires $(\chi, \hat{\gamma}_0^k)$, et la loi de groupe est donné par $(\chi_1, \hat{\gamma}_0^{k_1})(\chi_2, \hat{\gamma}_0^{k_2}) = \big(\chi_1(\hat{\gamma}_0^{k_1}\chi_2), \hat{\gamma}_0^{k_1+k_2}\big)$. Le groupe $\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0)$ est appelé *groupe fondamental sauvage formel.* On a un homomorphisme injectif de groupes

$$\begin{array}{rcl} \hat{\mu}_f : \boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0) & \to & \mathrm{Gal}_L(\boldsymbol{L}) \\ (\chi, \hat{\gamma}_0^k) & \mapsto & \tau\hat{m}^k, \quad \tau = \mathcal{T}_F^{-1}(\chi). \end{array}$$

Théorème 2.96 *Soit* $\xi \in \boldsymbol{L}$ *tel que*

$$\begin{aligned} \hat{m}(\xi) &= \xi, \\ \tau(\xi) &= \xi, \quad \forall \tau \in \hat{\mu}_f(\boldsymbol{T}_e) = \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}). \end{aligned}$$

Alors $\xi \in L$.

Preuve. Il existe $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$ tel que $\xi \in \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$. On montre d'abord que l'application de restriction

$$\mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}) \to \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>})$$

est surjective. Pour cela il suffit de montrer que l'application

$$\boldsymbol{T}_e \to \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$$

est surjective. Soit $\chi \in \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$. Soit Σ l'ensemble des paires (M, ϕ) où M est un $\mathbb{Z}$-sous-module de $\boldsymbol{E}$ contenant $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$ et $\phi : M \to \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules tel que $\phi|_{\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})} = \chi$. On considère l'ordre $(M_1, \phi_1) \leq (M_2, \phi_2)$ si $M_1 \subseteq M_2$ et $\phi_2|_{M_1} = \phi_1$. L'ordre $\leq$ est inductif, il existe donc un élément maximal (M_0, ϕ_0) dans Σ. Si $M_0 \neq \boldsymbol{E}$ il existe $p \in \boldsymbol{E} \backslash M_0$. On considère l'idéal $I = \{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda p \in M_0\}$, alors $I = \lambda_0 \cdot \mathbb{Z}$. On construit $\phi : \mathbb{Z}p + M_0 \to \mathbb{C}^*$ de la façon suivante : (i) si $\lambda_0 = 0$, $\phi(\lambda p + m_0) = \phi(m)$, $m \in M_0$. (ii) si $\lambda_0 \neq 0$, $\phi(\lambda p + m) = \phi_0(m) + \lambda/\lambda_0\, \phi_0(\lambda_0 p)$, $m \in M_0$. Ainsi ϕ est bien définie (si $m_1 + \lambda_1 p = m_2 + \lambda_2 p$ on a $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_0 h$, et $\phi_0(m_1) - \phi_0(m_2) = h\phi_0(\lambda_0 p)$). Donc $(M_0, \phi_0) < (\mathbb{Z}p + M_0, \phi)$, ce qui contradit la maximalité. On étend χ à $\boldsymbol{E}$. Alors ξ est invariante par les éléments de $\mathrm{Gal}_{\boldsymbol{L}_F}(\boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>})$. Donc $\xi \in \boldsymbol{L}_F$ car l'extension $\boldsymbol{L}_F \subseteq \boldsymbol{L}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$ est de Picard–Vessiot. Donc il existe $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$ tels que $\xi \in L{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X{>}$. D'après le théorème 2.77 on a que $\xi \in L$. ∎

2.4 Invariantes formels.

Soit L un corps différentiel intermédiaire de l'extension $K \subseteq \hat{K}$.

Théorème 2.97 *Soit* $(\hat{\Delta})$ *le système d'équations différentielles linéaires*

$$\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A(X)\,Y, \quad A(X) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\hat{K}).$$

Alors il existe une extension de Picard–Vessiot $\hat{K}(\hat{\Delta})$ *associée à* $(\hat{\Delta})$ *tel que*

$$\hat{K} \subseteq \hat{K}(\hat{\Delta}) \subseteq \hat{\boldsymbol{K}} = \varinjlim_{\alpha, \mathfrak{q}} \hat{K}{<}X^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}X{>}.$$

Preuve. D'après la section précédente, le corps des constantes de $\hat{\boldsymbol{K}}$ est $\mathbb{C}$, il suffit donc de trouver un système fondamental de solutions de $(\hat{\Delta})$ dans $\hat{\boldsymbol{K}}$. D'après le théorème 2.30 il existe une matrice

$$P(X) \in \mathrm{GL}_n(\hat{K}_\infty)$$

telle que, après le changement de variable $Y = P(X)Z$, le système $(\hat{\Delta})$ s'écrive

$$\text{(SNF)} \qquad \frac{\mathrm{d}\,Z}{\mathrm{d}\,X} = M(X) \cdot Z$$

où la matrice $M(X)$ est diagonale par blocs

$$M(X) = \mathrm{diag}[M_1(X), \ldots, M_l(X)]$$

et chaque sous-matrice $M_i(X)$ est de la forme

$$M_i(X) = q_i(X) \cdot \mathrm{Id}_{n_i} + \frac{1}{X} C_i,$$

avec $q_i(X) \in \boldsymbol{E}'$ et $C_i \in \mathrm{Mat}_{n_i,n_i}(\mathbb{C})$.

Si $C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ on désigne par $\tilde{x}^C$ une matrice non-singulière ayant ses coefficients dans le corps $K_F = \varinjlim_{\vec{\alpha}} K<\tilde{x}^\alpha, \mathrm{Lg}\tilde{x}>$, telle que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,\tilde{x}^C = \frac{C}{\tilde{x}}\tilde{x}^C.$$

(On se reportera à la sous-section 3.2.2 pour l'existence de ces matrices.) Soit $Q_i(\tilde{x}) \in \boldsymbol{E}$ tel que $\frac{\mathrm{d}\,Q_i(\tilde{x})}{\mathrm{d}\,x} = q_i(\tilde{x})$, $1 \leq i \leq l$. On considère les matrices

$$\begin{aligned} \tilde{x}^C &= \mathrm{diag}[\tilde{x}^{C_1}, \ldots, \tilde{x}^{C_l}] \in \mathrm{GL}_n(\boldsymbol{K}_F), \\ e^{Q(\tilde{x})} &= \mathrm{diag}[e^{Q_1(\tilde{x})}\mathrm{Id}_{n_1}, \ldots, e^{Q_l(\tilde{x})}\mathrm{Id}_{n_l}] \in \mathrm{GL}_n(\boldsymbol{K}). \end{aligned}$$

Alors la matrice $H(\tilde{x}) = \tilde{x}^C \cdot e^{Q(\tilde{x})} \in \mathrm{GL}_n(\boldsymbol{K})$ est une matrice fondamentale pour le système (SNF) et la matrice

$$F(X) = P(X) \cdot \tilde{x}^C \cdot e^{Q(\tilde{x})} \in \mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}})$$

est une matrice fondamentale de solutions du système $(\hat{\Delta})$. ∎

Remarque 2.98 Avec la notation précédente on a $\tilde{x}^C e^{Q(\tilde{x})} = e^{Q(\tilde{x})}\tilde{x}^C$.

Lemme 2.99 *Soient*

$$\begin{aligned} F_1(X) &= \Psi_1(X) \cdot e^{Q_1(\tilde{x})}, \\ F_2(X) &= \Psi_2(X) \cdot e^{Q_2(\tilde{x})}, \end{aligned}$$

deux matrices fondamentales dans $\hat{\boldsymbol{K}}$ pour le système $(\hat{\Delta})$ vérifiant

$$\begin{array}{rcl} \Psi_k(X) & \in & \mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}}_F), \quad k=1,2. \\ Q_k(\tilde{x}) & = & \mathrm{diag}[\Lambda_{k,1}(\tilde{x}),\ldots,\Lambda_{k,n}(\tilde{x})], \quad \Lambda_{k,j}(\tilde{x}) \in \boldsymbol{E},\ 1\leq j\leq n,\ k=1,2. \\ e^{Q_k(\tilde{x})} & = & \mathrm{diag}[e^{\Lambda_{k,1}(\tilde{x})},\ldots,e^{\Lambda_{k,n}(\tilde{x})}], \ \ ,k=1,2. \end{array}$$

Alors il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

(i). *On a $F_2(X) = F_1(X)\cdot C$.*

(ii). *On a $\Psi_2(X) = \Psi_1(X)\cdot C$.*

(iii). *On a $C^{-1}\cdot Q_1\cdot C = Q_2$. En particulier, il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\Lambda_{1,j} = \Lambda_{2,\sigma(j)}$, $1\leq j\leq n$.*

Preuve. Les matrices $F_1, F_2 \in \mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}})$ sont deux matrices fondamentales du système $(\hat{\Delta})$, alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(F_1^{-1}\cdot F_2) = 0$. Donc $C = F_1^{-1}\cdot F_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ car le corps de constantes de $\hat{\boldsymbol{K}}$ est $\mathbb{C}$. On a

$$e^{Q_1(\tilde{x})}\cdot C\cdot e^{-Q_2(\tilde{x})} = \Psi_1^{-1}(X)\cdot\Psi_2(X) \in \mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}}_F). \tag{2.14}$$

Si $C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, l'élément (i,j) de la matrice $\Psi_1^{-1}(X)\cdot\Psi_2(X)$ est

$$c_{i,j}\, e^{\Lambda_{1,i}(\tilde{x})-\Lambda_{2,j}(\tilde{x})} \in \hat{\boldsymbol{K}}_F, \quad 1\leq i,j\leq n.$$

Compte tenu du théorème 2.89, si $e^{\Lambda(\tilde{x})} \in \hat{\boldsymbol{K}}_F$ et $\Lambda(\tilde{x}) \in \boldsymbol{E}$, alors $\Lambda(\tilde{x}) = 0$. Donc

$$c_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \Lambda_{1,i}(\tilde{x}) = \Lambda_{2,j}(\tilde{x}), \quad 1\leq i,j\leq n.$$

Ceci entrane que $e^{Q_1(\tilde{x})}Ce^{-Q_2(\tilde{x})} = C$, et que $C^{-1}\cdot Q_1(\tilde{x})\cdot C = Q_2(\tilde{x})$. On a (ii) par l'équation 2.14. Le polynmes caractéristiques de $Q_1(\tilde{x})$ et $Q_2(\tilde{x})$ coíncident ; on a la seconde partie de (iii) car Q_1 et Q_2 sont des matrices diagonales. ∎

Corollaire 2.100 *Soit $F(X) = \Psi(X)\cdot e^{Q(\tilde{x})}$ un système fondamental de solutions de $(\hat{\Delta})$ avec*

$$\begin{array}{rcl} \Psi(X) & \in & \mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}}_F), \\ Q(\tilde{x}) & = & \mathrm{diag}[\Lambda_1(\tilde{x}),\ldots,\Lambda_n(\tilde{x})], \quad \Lambda_j(\tilde{x}) \in \boldsymbol{E}. \end{array}$$

Soit $\hat{m}$ l'automorphisme de monodromie formelle. Alors il existe une matrice $\hat{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\begin{array}{rcl} \hat{m}(F(X)) & = & F(X)\cdot\hat{M} \\ \hat{m}(\Psi(X)) & = & \Psi(X)\cdot\hat{M} \\ \hat{m}(Q(\tilde{x})) & = & \hat{M}^{-1}\cdot Q(\tilde{x})\cdot\hat{M}. \end{array}$$

Preuve. On a $\hat{m} \in \mathrm{Gal}_{\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{K}})$, alors $\hat{m}(F(X))$ est une autre solution fondamentale de $(\hat{\Delta})$. ∎

Définition 2.101 *Une matrice $F(X) = \Psi(X) \cdot e^{Q(\tilde{x})}$ fondamentale pour le système $(\hat{\Delta})$ est dite sous* forme d'Hukuhara–Turrittin *si $\Psi(X) \in \mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}}_F)$ et $Q(\tilde{x}) = \mathrm{diag}[\Lambda_1(\tilde{x}), \ldots, \Lambda(n(\tilde{x})]$ avec $\Lambda_j(\tilde{x}) \in \boldsymbol{E}$ pour $1 \leq j \leq n$. On dit que $F(X)$ est sous forme* d'Hukuhara–Turrittin précisé *si, de plus, on a $\Psi(X) = \hat{H}(X) \cdot \tilde{x}^L$, avec $\hat{H}(X) \in \mathrm{GL}_n(\hat{K})$ et $L \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$.*

Lemme 2.102 *Il existe une matrice fondamentale $F(X)$ pour le système $(\hat{\Delta})$ sous forme d'Hukuhara–Turrittin précisé.*

Preuve. D'après la démonstration du théorème 2.97, il existe une matrice fondamentale
$$F(X) = \hat{P}(X) \cdot \tilde{x}^C \cdot e^{Q(\tilde{x})},$$
avec $\hat{P}(X) \in \mathrm{GL}_n(\hat{K}_\infty)$, $C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$. On pose $\Psi(X) = \hat{P}(X) \cdot \tilde{x}^C$. D'après le corollaire 2.100 il existe une matrice $\hat{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\hat{m}(F) = F \cdot \hat{M}$. Soit $L \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que
$$e^{2\pi i L} = \hat{M}.$$
On pose $\hat{H}(X) = \Psi(X) \cdot \tilde{x}^{-L} \in \mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}}_F)$. Il est clair que
$$m(\tilde{x}^L) = \tilde{x}^L \cdot e^{2\pi i L} = e^{2\pi i L} \tilde{x}^L.$$
Donc $m(\tilde{x}^{-L}) = e^{-2\pi i L} \cdot \tilde{x}^{-L}$. D'après le corollaire 2.100, on a $\hat{m}(\Psi) = \Psi \cdot \hat{M}$, et donc
$$\hat{m}(\hat{H}) = \hat{m}(\Psi) \cdot \hat{m}(\tilde{x}^{-L}) = \Psi \cdot \hat{M} \cdot e^{-2\pi i L} \cdot \tilde{x}^{-L} = \hat{H}.$$
Ainsi les coefficients de la matrice $\hat{H}(X)$ sont invariants par la monodromie formelle. D'après le théorème 2.77, on a
$$\hat{H}(X) \in \mathrm{GL}_n(\hat{K}).$$
Alors $F(X) = \hat{H}(X) \cdot \tilde{x}^L \cdot e^{Q(\tilde{x})}$ est sous forme d'Hukuhara–Turrittin précisé. ∎

2.4.0.1 Les couples formels.

Remarque 2.103 Soit $F(X) = \hat{H}(X) \tilde{x}^L e^{Q(\tilde{x})}$ une matrice fondamentale de $(\hat{\Delta})$ sous forme d'Hukuhara–Turrittin précisé. On a
$$\hat{m}(F) = F \cdot \hat{M}, \quad \text{avec } \hat{M} = e^{2\pi i L}.$$
En effet, d'après le corollaire 2.100 on a $\hat{m}(\hat{H}\tilde{x}^L) = \hat{m}(\hat{H}) \cdot \hat{m}(\tilde{x}^L) = \hat{H}\tilde{x}^L\hat{M}$. On a $\hat{m}(\hat{H}) = H$, car $H \in \mathrm{GL}_n(\hat{K})$. Alors $\hat{m}(\tilde{x}^L) = \tilde{x}^L \cdot \hat{M} = \tilde{x}^L \cdot e^{2\pi i L}$.

Définition 2.104 *Un couple formel de rang n est un élément $(\hat{M}, Q)$ où $\hat{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et*

$$Q = \mathrm{diag}[\Lambda(\tilde{x}), \ldots, \Lambda_n(\tilde{x})], \quad \Lambda_j(\tilde{x}) \in \boldsymbol{E},\ 1 \leq j \leq n,$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i). *La matrice Q est invariante par l'automorphisme de monodromie formelle à permutation près, c'est-à-dire qu'il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\hat{m}(\Lambda_j(\tilde{x})) = \Lambda_{\sigma(j)}(\tilde{x})$, $1 \leq j \leq n$.*

(ii). *On a $\hat{m}(Q) = \hat{M}^{-1} \cdot Q \cdot \hat{M}$.*

On dit que deux couples formels $(\hat{M}_1, Q_1)$ et $(\hat{M}_2, Q_2)$ sont équivalents s'il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\hat{M}_1 = C^{-1}\hat{M}_2 C \quad \textit{et} \quad Q_1 = C^{-1}Q_2 C.$$

Soit $F(X) = \Psi(X)e^Q$ une matrice fondamentale pour le système $(\hat{\Delta})$. On associe au système $(\hat{\Delta})$ la classe d'équivalence du couple formel $(\hat{M}, Q)$, où $\hat{m}(F(x)) = F(X) \cdot \hat{M}$. La classe d'équivalence de $(\hat{M}, Q)$ est indépendante de la matrice fondamentale $F(X)$ choisie. En effet, si $F_2 = \Psi_2 Q^{Q_2}$ est une autre matrice fondamentale de $(\hat{M})$ sous forme d'Hukuhara–Turrittin, d'après le lemme 2.99 il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, telle que $\Psi_2 = \Psi C$ et $Q_2 = C^{-1}QC$. D'après le corollaire 2.100 on a $\hat{m}(\Psi_2) = \Psi_2\hat{M}_2 = \Psi C\hat{M}_2$ et $\hat{m}(\Psi) = \Psi\hat{M}$, $\hat{m}(\Psi_2) = \hat{m}(\Psi C) = \Psi\hat{M}C$. Alors $\hat{M}_2 = C^{-1}\hat{M}C$, car Ψ est une matrice non-singulière. Donc, les couples $(\hat{M}, Q)$ et $(\hat{M}_2, Q_2)$ sont équivalents.

Lemme 2.105 *Soient $(\hat{\Delta}_1)$ et $(\hat{\Delta}_2)$ respectivement des systèmes d'équations différentielles $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A_1 Y$ et $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A_2 Y$ avec $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\hat{K})$. Supposons que $(\hat{\Delta}_1)$ et $(\hat{\Delta}_2)$ sont des systèmes équivalentes sur le corps $\hat{K}$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\hat{K})$ telle que $A_2 = P^{-1}A_1P - P^{-1}\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,X}$. Alors $(\hat{\Delta}_1)$ et $(\hat{\Delta}_2)$ ont la mme classe d'équivalence de couples formels associée.*

Preuve. Soit $F_2 = \Psi_2 e^{Q_2}$ une matrice fondamentale pour $(\hat{\Delta}_2)$ sous la forme de Hukuhara–Turrittin . La matrice $F_1 = P \cdot F_2$ est une matrice fondamentale pour $(\hat{\Delta}_1)$. Soit $\hat{M}_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\hat{m}(F_2) = F_2\hat{M}_2$. D'après le corollaire 2.100 on a $\hat{m}(\Psi_2) = \Psi_2\hat{M}_2$. Alors $\hat{m}(P\Psi_2) = \hat{m}(P) \cdot \hat{m}(\Psi_2) = P \cdot \Psi_2\hat{M}_2$. D'après le mme corollaire on a $\hat{m}(F_1) = F_1\hat{M}_2$. Alors la classe de $(\hat{M}_2, Q_2)$ est la classe de couples formels associée à $(\hat{\Delta}_1)$. ∎

Lemme 2.106 *Soient $(\hat{\Delta}_1)$ et $(\hat{\Delta}_2)$ respectivement les systèmes d'équations différentielles $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A_1 Y$ et $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A_2 Y$ avec $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\hat{K})$. Supposons que $(\hat{\Delta}_1)$ et $(\hat{\Delta}_2)$ ont la mme classe d'équivalence de couple formelle associée. Alors $(\hat{\Delta}_1)$ et $(\hat{\Delta}_2)$ sont des systèmes différentielles linéaires équivalentes sur le corps $\hat{K}$.*

Preuve. Soit $F_j = \Psi_j e^{Q_j}$ une solution fondamentale pour $(\hat{\Delta}_j)$ sous forme d'Hukuhara–Turrittin, $j = 1, 2$. Par hypothèse il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\hat{M}_1 = C^{-1}\hat{M}_2 C$ et $Q_1 = C^{-1}Q_2 C$. On considère

$$F_3 = F_2 C = \Psi_2 e^{Q_2} C = \Psi_2 C C^{-1} e^{Q_2} C = \Psi_2 C e^{Q_1}.$$

Alors F_3 est une matrice fondamentale pour $(\hat{\Delta}_2)$. Soit $\Psi_3 = \Psi_2 C$, alors $\hat{m}(\Psi_3) = \Psi_2 \hat{M}_2 C = \Psi_2 C C^{-1} \hat{M}_2 C = \Psi_3 \hat{M}_1$. Soit $L \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ tel que $e^{2\pi i L} = \hat{M}_1$. Alors $\Psi_1 \cdot \tilde{x}^{-L}$ et $\Psi_3 \cdot \tilde{x}^{-L}$ appartiennent à $\mathrm{GL}_n(\hat{\boldsymbol{K}}_F)$. Pour $j = 1, 3$ on a $\hat{m}(\Psi_j \cdot \tilde{x}^{-L}) = \Psi_j \hat{M}_1 e^{-2\pi i L} \tilde{x}^{-L} = \Psi_j \tilde{x}^{-L}$. Alors $\Psi_j \tilde{x}^{-L} \in \mathrm{GL}_n(\hat{K})$, pour $j = 1, 3$. On a

$$F_1 = (\Psi_1 \tilde{x}^{-L})(\Psi_3 \tilde{x}^{-L})^{-1} \Psi_3 \tilde{x}^{-L} \tilde{x}^{L} e^{Q_1} = P F_3,$$

où $P = (\Psi_1 \tilde{x}^{-L})(\Psi_3 \tilde{x}^{-L})^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\hat{K})$. Alors $A_2 = P^{-1} A_1 P - P^{-1} \frac{\mathrm{d}\, P}{\mathrm{d}\, X}$, et les systèmes $(\hat{\Delta}_1)$ et $(\hat{\Delta}_2)$ sont équivalents sur le corps $\hat{K}$. ∎

Lemme 2.107 *Soit $(\hat{M}, Q)$ un couple formel de rang n. Il existe un système d'équations différentielles $(\hat{\Delta})$ sur $\hat{K}$ telle que la classe d'équivalence de $(\hat{M}, Q)$ est la classe de couples formels associée à $(\hat{\Delta})$. Plus précisément, si $L \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ est telle que $e^{2\pi i L} = \hat{M}$, alors la matrice $\tilde{x}^L e^Q$ est une matrice fondamentale d'un système d'équations différentielles sur K.*

Preuve. On pose $F = \tilde{x}^L e^Q$. On a

$$\frac{\mathrm{d}\, F}{\mathrm{d}\, x} = \{\frac{L}{\tilde{x}} + \tilde{x}^L \cdot \frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, x} \cdot \tilde{x}^{-L}\} \cdot F.$$

On a $\frac{L}{\tilde{x}} + \tilde{x}^L \cdot \frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, x} \cdot \tilde{x}^{-L} \in \mathrm{GL}_n(\boldsymbol{K}_F)$. D'autre part

$$\begin{aligned} \hat{m}\Big(\frac{L}{\tilde{x}} + \tilde{x}^L \cdot \frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, x} \cdot \tilde{x}^{-L}\Big) &= \frac{L}{\tilde{x}} + \tilde{x}^L \cdot \hat{M} \cdot \hat{m}(\frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, x}) \cdot \hat{M}^{-1} \cdot \tilde{x}^{-L} \\ &= \frac{L}{\tilde{x}} + \tilde{x}^L \hat{M} \hat{M}^{-1} \frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, x} \hat{M} \hat{M}^{-1} \tilde{x}^{-L} = \frac{L}{\tilde{x}} + \tilde{x}^L \cdot \frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, x} \cdot \tilde{x}^{-L}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{L}{\tilde{x}} + \tilde{x}^L \cdot \frac{\mathrm{d}\, Q}{\mathrm{d}\, x} \cdot \tilde{x}^{-L} \in \mathrm{GL}_n(K)$. ∎

Les trois lemmes précédents entranent le théorème suivant :

Théorème 2.108 *Il existe une bijection entre l'ensemble des connexions sur $\hat{K}^n$ et l'ensemble des classes d'équivalence de couples formels de rang n.*

2.4.1 Représentations du groupe fondamental sauvage formel.

Soit $\mathfrak{q} \subseteq \boldsymbol{E}$ stable par l'isomorphisme de monodromie m, alors $m\big(\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})\big) = \boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$. Donc le groupe $(\hat{\gamma}_0)$ agit (algébriquement) à gauche sur le groupe algébrique $\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$: Si $\chi \in \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$ on a que $(\hat{\gamma}_0\chi)(q) = \chi(m^{-1}(q))$, $q \in \boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$.

Définition 2.109 *Une représentation du groupe $\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0)$ de rang n est un morphisme de groupes $\psi : \boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que le morphisme $\boldsymbol{T}_e \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ soit un morphisme de groupes pro-algébriques. Deux représentations ψ et ψ' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme linéaire h de $\mathbb{C}^n$ tel que $\psi(g) = h^{-1} \circ \psi'(g) \circ h$, pour tout $g \in \boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0)$.*

Soit $(\hat{\Delta})$ un système d'équations différentielles linéaires sur $\hat{K}$, on désigne par $\hat{K}(\hat{\Delta})$ l'unique extension de Picard–Vessiot associée à $(\hat{\Delta})$ contenue dans le corps $\hat{\boldsymbol{K}}$. Soit $V(X) = \phi(X) \cdot e^{Q(\tilde{x})}$ une matrice fondamentale pour $(\hat{\Delta})$ sous forme d'Hukuhara–Turrittin. On désigne par $\rho_{(\hat{\Delta},V)}$ la composition des morphismes de groupes

$$\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0) \xrightarrow{\hat{\mu}_f} \mathrm{Gal}_{\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{K}}) \to \mathrm{Gal}_{\hat{K}}\big(\hat{K}(\hat{\Delta})\big) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \tag{2.15}$$

où la flèche du milieu est l'homomorphisme de restriction, et la flèche de droite est $\sigma \mapsto V^{-1}\cdot\sigma(V)$. L'application $\rho_{(\hat{\Delta}),V)}$ est une représentation de $\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0)$. En effet, si $Q(\tilde{x}) = \mathrm{diag}[q_1(\tilde{x}), \ldots, q_n(\tilde{x})]$ il existe $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$ avec $m \geq n$, stable par la monodromie, tel que $\hat{K}(\hat{\Delta}) \subseteq \hat{\boldsymbol{K}}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}$. Alors le morphisme $\mathrm{Gal}_{\hat{\boldsymbol{K}}_F}(\hat{\boldsymbol{K}}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ se factorise à travers le morphisme $\mathrm{Gal}_{\hat{\boldsymbol{K}}_F}(\hat{\boldsymbol{K}}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donné par $\tau \mapsto e^{-Q(\tilde{x})} \cdot \tau(e^{Q(\tilde{x})})$. Soit $\{p_1, \ldots, p_r\}$ une base du $\mathbb{Z}$-module $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$. On pose $q_j = \sum_{k=0}^{r} \lambda_{j,k} p_k$, avec $\lambda_{j,k} \in \mathbb{Z}$. Soit $\tau \in \mathrm{Gal}_{\hat{\boldsymbol{K}}_F}(\hat{\boldsymbol{K}}_F{<}e^{\mathfrak{q}}{>})$ tel que $\tau(e^{p_k}) = c_k e^{p_k}$, $c_k \in \mathbb{C}$ $1 \leq k \leq r$, alors

$$e^{-Q(\tilde{x})} \cdot \tau(e^{Q(\tilde{x})}) = \mathrm{diag}[\prod_{1\leq k\leq r} c_k^{\lambda_{1,k}}, \ldots, \prod_{1\leq k\leq r} c_k^{\lambda_{n,k}}].$$

Alors, d'après le théorème 2.89, l'application $\tau \mapsto e^{-Q(\tilde{x})}\cdot\tau(e^{Q(\tilde{x})})$ est un morphisme de groupes algébriques. Ceci montre que $\rho_{(\hat{\Delta},V)}$ est une représentation, qui est appelée représentation de monodromie formelle sauvage de $(\hat{\Delta})$ relativement à la base $V(\tilde{x})$. On a

$$\begin{aligned} \rho_{(\hat{\Delta},V)}(\hat{\gamma}_0) &= \hat{M}, \quad \hat{m}(V) = V \cdot \hat{M}, \\ \rho_{(\hat{\Delta},V)}(\chi) &= \mathrm{diag}[\chi(q_1(\tilde{x})), \ldots, \chi(q_n(\tilde{x}))], \quad \chi \in \boldsymbol{T}_e. \end{aligned}$$

Lemme 2.110 *Soit* $(\hat{M}, Q)$ *un couple formel de rang* n. *Alors il existe une représentation* $\rho_{(\hat{M},Q)}$ *du groupe* $\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\Delta})$ *dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\rho_{(\hat{M},Q)}(\hat{\gamma}_0) = \hat{M}$ *et* $\rho_{(\hat{M},Q)}(\chi) = \mathrm{diag}[\chi(q_1), \ldots, \chi(q_n)]$ *si* $Q = \mathrm{diag}[q_1, \ldots, q_n]$. *De plus,* $(\hat{M}_1, Q_1)$ *et* $(\hat{M}_2, Q_2)$ *sont deux couples formels équivalents si et seulement si* $\rho_{(\hat{M}_1,Q_1)}$ *et* $\rho_{(\hat{M}_2,Q_2)}$ *sont deux représentations équivalentes.*

Preuve. On définit $\rho_{(\hat{M},Q)}(\chi, \hat{\gamma}_0^k) = C_\chi \cdot \hat{M}^k$, où

$$C_\chi = \chi(Q) = \mathrm{diag}[\chi(q_1), \ldots, \chi(q_n)].$$

Du fait que $\hat{m}(Q) = \hat{M}^{-1}Q\hat{M}$ on obtient que $C_{\hat{\gamma}_0\chi} = \hat{M}C_\chi\hat{M}^{-1}$. Ceci entrane que $\rho_{(\hat{M},Q)}$ est un homomorphisme de groupes. On montre comme ci-dessus que $\boldsymbol{T}_e \ni \chi \mapsto \chi(Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un morphisme de groupes pro-algébriques. Donc, $\rho_{(\hat{M},Q)}$ est une représentation. Pour la seconde partie il suffit de remarquer qu'il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\hat{M}_1 = C^{-1}\hat{M}_2C$ et $Q_1 = C^{-1}Q_2C$ si et seulement si $\rho_{(\hat{M}_1,Q_1)} = C^{-1}\rho_{(\hat{M}_2,Q_2)}C$. ∎

Lemme 2.111 *Soient* $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$, *et* $\rho : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \to \mathbb{C}^*$ *un morphisme de groupes algébriques. Alors il existe* $p \in \boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$ *tel que* $\rho(\chi) = \chi(p)$, *pour tout* $\chi \in \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$.

Preuve. Si $t : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme de groupes algébriques alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $t(z) = z^m$. En effet, l'homomorphisme des anneaux de coordonnées $t^* : \mathbb{C}[T, T^{-1}] \to \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ doit tre tel que $t^*(T)$ ait un inverse dans $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$, alors $t^*(T) = aT^m$, $a \in \mathbb{C}$. Par suite $t(1) = a1^m$, et donc $a = 1$, car $t(1) = 1$. Ainsi, si $\bar{\rho} : (\mathbb{C}^*)^r \to \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme de groupes algébriques, il existe $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$ tels que $\bar{\rho}(a_1, \ldots, a_r) = a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r}$. Soit $\{p_1, \ldots, p_r\}$ une $\mathbb{Z}$-base de $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$. L'application $\psi : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \ni \chi \mapsto \big(\chi(p_1), \ldots, \chi(p_r)\big) \in (\mathbb{C}^*)^r$ est un isomorphisme de groupes algébriques. Soit $\rho : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \to \mathbb{C}^*$ un homomorphisme de groupes algébriques. Alors $\bar{\rho} = \rho\psi^{-1}$ est aussi un homomorphisme de groupes algébriques, donc $\bar{\rho}(a_1, \ldots, a_r) = a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r}$, et $\rho(\chi) = \chi(p_1)^{n_1} \cdots \chi(p_r)^{n_r} = \chi(n_1p_1 + \cdots + n_rp_r)$, pout tout χ. ∎

Proposition 2.112 *Soient* $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$ *et* $\rho : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *un homomorphisme de groupes algébriques. Alors il existe une matrice* $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *telle que*

$$C^{-1} \cdot \rho(\chi) \cdot C \in \mathbb{D}(n, \mathbb{C}), \quad \forall \chi \in \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}),$$

où $\mathbb{D}(n, \mathbb{C})$ *désigne le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *formé des matrices diagonales.*

Preuve. Un morphisme de groupes algébriques préserve la décomposition en partie semi-simple et unipotente (voir [Hum], théorème 15.3). Les éléments de $\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$ sont semi-simples car on a un isomorphisme de groupes algébriques $\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \simeq (\mathbb{C}^*)^r$. On sait aussi que $\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$ est commutatif. Donc $\rho\big(\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})\big)$ est un ensemble de matrices semi-simples qui commutent entre elles. D'après la proposition 15.4 de [Hum], le sous-groupe $\rho\big(\check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})\big)$ est diagonalizable. ∎

Lemme 2.113 *Soit $\rho : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un homomorphisme de groupes algébriques. Alors il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et des éléments $t_1, \ldots, t_n$ dans $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$ tels que*

$$\rho(\chi) = C^{-1} \cdot \mathrm{diag}[\chi(t_1), \ldots, \chi(t_n)] \cdot C, \quad \chi \in \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}).$$

Preuve. D'après la proposition précédente, il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $\bar{\rho} : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \to \mathbb{D}(n, \mathbb{C})$, $\bar{\rho}(\chi) = C\rho(\chi)C^{-1}$ soit un homomorphisme de groupes algébriques. Le lemme se déduit alors du lemme 2.111 et du fait que les projections $(\mathbb{C}^*)^r \to \mathbb{C}^*$ sont des morphismes de groupes algébriques.
∎

Proposition 2.114 *Il existe une bijection entre l'ensemble de classes d'équivalence de couples formels de rang n et l'ensemble de classes d'équivalence des représentations du groupe fondamental sauvage formel dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Preuve. Le lemme 2.110 décrit l'application entre les deux ensembles et montre qu'elle est injective. On va montrer la surjectivité. Soit $\rho : \boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation. Par définition d'une représentation du groupe fondamental sauvage formel, la composition $\boldsymbol{T}_e \to \boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un morphisme de groupes pro-algébriques, donc il existe $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$, stable par l'automorphisme de monodromie tel que $\rho_{\mathfrak{q}} : \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q}) \ni \chi \to \rho(\chi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ soit un morphisme de groupes algébriques. D'après le lemme précédent, il existe un matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et des éléments $t_1, \ldots, t_n \in \boldsymbol{E}(\mathfrak{q})$ tels que

$$\rho_{\mathfrak{q}}(\chi) = C^{-1} \cdot \mathrm{diag}[\chi(t_1), \ldots, \chi(t_n)] \cdot C.$$

Soit $\bar{\rho}$ la représentation équivalente à ρ donnée par $\bar{\rho} = C \cdot \rho \cdot C^{-1}$. Alors, si $\chi \in \boldsymbol{T}_e$, on a $\bar{\rho}(\chi) = \mathrm{diag}[\chi(t_1), \ldots, \chi(t_n)]$. On pose $Q = \mathrm{diag}[t_1, \ldots, t_n]$ et $\hat{M} = \bar{\rho}(\hat{\gamma}_0)$. On a

$$\hat{M} \cdot \chi(Q) = \bar{\rho}\big((1, \hat{\gamma}_0)(\chi, \hat{\gamma}_0^0)\big) = \bar{\rho}\big((\hat{\gamma}_0\chi, \hat{\gamma}_0)\big) = \hat{\gamma}_0\chi(Q) \cdot \hat{M} = \chi\big(m^{-1}(Q)\big) \cdot \hat{M}.$$

Si $\hat{M} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, l'équation précédente entrane que

$$m_{i,j}\, \chi(t_j) = \chi\, m^{-1}(t_i)\, m_{i,j}, \quad \forall \chi \in \boldsymbol{T}_e,\ 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.16}$$

Dans la preuve du théorème 2.96 on a montré que l'application $\boldsymbol{T}_e \to \check{\boldsymbol{E}}(\mathfrak{q})$ est surjective. Ceci entrane que, si $p \neq q \in \boldsymbol{E}$, alors il existe $\chi \in \boldsymbol{T}_e$, tel que $\chi(p) \neq \chi(q)$. L'équation 2.16 entrane que $m_{i,j}t_j = m^{-1}(t_i)m_{i,j}$ pour $1 \leq i,j \leq n$, donc $\hat{M} \cdot Q = m^{-1}(Q) \cdot \hat{M}$. Ainsi $\{t_1, \ldots, t_n\}$ est stable par l'automorphisme de monodromie, $(\hat{M}, Q)$ est un couple formel, et la repré-sen-tation $\bar{\rho}$ est la représentation associée à $(\hat{M}, Q)$ dans le lemme 2.110.
∎

La proposition précédente et le théorème 2.108 montrent le théorème suivant :

Théorème 2.115 *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'i-somorphisme de connexions sur $\hat{K}^n$ et l'ensemble de classes d'équivalence de représentations du groupe fondamental sauvage formel $\boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Remarque 2.116 Cette correspondance satisfait des propriétés naturelles de telle sorte qu'elle peut tre interprétée comme une équivalence de catégories entre la catégorie des connexions formelles méromorphes et celle des représentations linéaires finies du groupe fondamental sauvage. Ceci permet de relier le point de vue adopté ici et le point de vue Tannakien [**?**].

Chapitre 3

Le corps des séries sommables.

3.1 Développements asymptotiques.

On considère l'anneau des séries de Puiseux formelles

$$\mathbb{C}[[X]]^* = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbb{C}[[X^{1/q}]].$$

Soient $I =]a, b[\subseteq \widetilde{S}$ et $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$. Soit U un ouvert connexe de $\widetilde{\mathbb{C}}$ contenant I, et $\bar{F} \in \Gamma\big(U, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ un représentant de F. On dit que F admet un développement asymptotique sur $]a, b[$ dans $\mathbb{C}[[X]]^*$, s'il existe $q \geq 1$ et une série formelle $\hat{F}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i/q} X^{i/q} \in \mathbb{C}[[X]]^*$ telle que pour tout intervalle fermé $J \subseteq I$ et $R > 0$ satisfaisant $J \times [0, R] \subset U$, et pour tout nombre rationnel $r > 0$ il existe une constante $C_r(J, R)$ telle que

$$\left| \bar{F}(\tilde{x}) - \sum_{i/q<r} a_{i/q} \cdot \tilde{x}^{i/q} \right| \leq C_r(J, R) \cdot |\tilde{x}|^r, \quad \forall \tilde{x} \in J \times]0, R]. \tag{3.1}$$

On remarque qu'il suffit de vérifier la condition pour les rationnels $r = n/q$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par $\Gamma\big(]a, b[, A\big)$ le sous-ensemble de $\Gamma\big(]a, b[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ formé par les fonctions admettant un développement asymptotique sur $]a, b[$ dans $\mathbb{C}[[X]]^*$.

Lemme 3.1 *Soit $F \in \Gamma\big(]a, b[, A\big)$ asymptote sur $]a, b[$ à la série $\hat{F}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i/q} X^{i/q}$. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$. Alors la fonction $\rho_\alpha(F) \in \Gamma\big(]\alpha \cdot a, \alpha \cdot b[, A\big)$ est asymptote à la série $\hat{\rho}_\alpha(\hat{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i/q} X^{i/\alpha \cdot q}$.*

Preuve. Soient $\alpha \cdot a < a' < b' < \alpha \cdot b$ et $R > 0$. Si $\tilde{x} \in [a', b'] \times]0, R]$ on a que

$$\left| (\rho_\alpha F)(\tilde{x}) - \sum_{\frac{i}{\alpha q} < r} a_{\frac{i}{q}} \cdot \tilde{x}^{\frac{i}{\alpha q}} \right| = \left| F(\bar{\rho}_{\frac{1}{\alpha}}(\tilde{x})) - \sum_{\frac{i}{q} < \alpha r} a_{\frac{i}{q}} (\bar{\rho}_{\frac{1}{\alpha}}(\tilde{x}))^{i/q} \right|$$
$$\leq C_{\alpha r}(J, R^{1/\alpha}) \left| \bar{\rho}_{\frac{1}{\alpha}}(\tilde{x}) \right|^{\alpha r},$$

où $J = [a'/\alpha, b'/\alpha]$. ∎

Corollaire 3.2 *Soient $F \in \Gamma\big(]a, b[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ et $\hat{F}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i/q} X^{i/q}$. Alors F est asymptote à $\hat{F}$ sur $]a, b[$ si et seulement si $\rho_{1/q}(F)$ est asymptote à $\sum_{i=0}^{\infty} c_{i/q} X^i$ sur $]a/q, b/q[$. (On se reportera à la sous-section 2.2.2 pour la définition de l'application de ramification ρ_α).*

On montre de façon analogue le lemme suivant :

Lemme 3.3 *Soit $F \in \Gamma\big(]a, b[, A\big)$ asymptote sur $]a, b[$ à la série $\hat{F}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n/q} X^{n/q}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $\mathcal{T}_\theta F$ translatée de F par θ (voir la sous section 2.2.2 pour la définition) est asymptote sur $]a + \theta, b + \theta[$ à la série*

$$\hat{F}(Xe^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n/q} e^{-i\frac{n}{q}} X^{n/q}.$$

Lemme 3.4 *Soient $F \in \Gamma\big(]a, b[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ et $\hat{F} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$. Soient $I_1, \ldots, I_k$ des intervalles ouverts de longueur plus petite (plus petit voulant dire ici strictement plus petit) que 2π tels que $]a, b[= \cup_{i=1}^{k} I_i$. Soit $\bar{F}$ un représentant de F sur un ouvert connexe U de $\widetilde{\mathbb{C}}$. Soit f_i la seule fonction sur $\pi(U \cap \{I_i \times]0, \varepsilon[\})$ telle que*

$$f_i \circ \pi(\tilde{x}) = F(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in I_i \times]0, \varepsilon[.$$

Alors F est asymptote à $\hat{F}$ sur $]a, b[$ si et seulement si toute fonction f_i est asymptote (au sens classique de Poincaré, voir [19]) à $\hat{F}$ sur tout sous-secteur $\pi(U \cap \{J_j \times]0, \varepsilon[\})$ où les J_j sont des intervalles ouverts de I_i tels que leurs adhérences soient contenues dans I_i.

Preuve. C'est évidente. ∎

L'opérateur $X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, X}$ est une dérivation sur $\mathbb{C}[[X]]^*$. On considère aussi la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}$ sur $\Gamma\big(U, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$. Les propriétés élémentaires des développements asymptotiques (voir [19], ch. II) et le lemme précédent permettent de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.5 *Soient $F, G \in \Gamma\big(]a,b[, A\big)$, F et G asymptotes, respectivement, à $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sur $]a,b[$. On a :*

(i). *Si $F = G$ alors $\hat{F} = \hat{G}$.*

(ii). *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\lambda F + \mu G$ est asymptote sur $]a,b[$ à $\lambda\hat{F} + \mu\hat{G}$.*

(iii). *La fonction $F \cdot G$ est asymptote sur $]a,b[$ à $\hat{F} \cdot \hat{G}$.*

(iv). *La fonction $\tilde{x} \cdot \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ est asymptote sur $]a,b[$ à $X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}$.*

(v). *Si $\hat{F}(0) \neq 0$, alors $1/F$ est asymptote sur $]a,b[$ à $1/\hat{F}$.*

(vi). *Soient $F_1, \ldots, F_p \in \Gamma\big(]a,b[, A\big)$, telles que F_i est asymptote sur l'intervalle $]a,b[$ à la série $\hat{F}_i$. Soit $\Phi(x, y_1, \ldots, y_p)$ une fonction holomorphe au voisinage de $(0, a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$, où $a_i = \hat{F}_i(0)$. Alors $\Phi(x, F_1, \ldots, F_p)$ est asymptote sur $]a,b[$ à la série $\Phi(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_p)$.*

On définit *l'application de Taylor* :

$$J : \Gamma\big(]a,b[, A\big) \to \mathbb{C}[[X]]^*,$$

par $J(F) = \hat{F}$, si F est asymptote à $\hat{F}$ sur $]a,b[$. La proposition précédente montre que l'application de Taylor J est un homomorphisme d'algèbres différentielles. On étend J aux anneaux différentiels

$$J : \Gamma\big(]a,b[, A\big)[\tilde{x}^{-1}] \to \mathbb{C}((X))^* = \mathbb{C}[[X]]\,[X^{-1}].$$

Définition 3.6 *On désigne par $\widetilde{\mathcal{A}}$ le faisceau sur $\widetilde{S}$ tel que si $I =]a,b[$ alors $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big) = \Gamma\big(I, A\big)$; on désigne par $\widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]$ le faisceau sur $\widetilde{S}$ tel que $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big) = \Gamma\big(I, A\big)[\tilde{x}^{-1}]$. Soit $\theta \in \widetilde{S}$, les fibres respectives des faisceaux $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]$ en θ sont notées $\Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$ et $\Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$; sont des $\mathbb{C}$-algèbres différentielles pour la dérivation $\tilde{x} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. La fibre $\Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$ est aussi une $\mathbb{C}$-algèbre différentielle pour la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. On définit l'application de Taylor*

$$J : \Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big) \to \mathbb{C}((X))^*,$$

qui est un homomorphisme d'anneaux différentiels.

Lemme 3.7 *Soit $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$ asymptote sur I à la série formelle*

$$\hat{F} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i.$$

Supposons qu'il existe une fonction holomorphe g sur le disque $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}$ telle que

$$F(\tilde{x}) = g \circ \pi(\tilde{x}).$$

Alors la série $\hat{F}$ est convergente et la fonction g est sa somme.

Preuve. Si $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad |x| < R$; comme $F = g \circ \pi$ on a que F est asymptote à $\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$. D'après l'unicité du développement asymptotique on a le résultat. ∎

Lemme 3.8 *On considère l'intervalle $I = [a, b]$ avec $b = a + 2\pi\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha = b - a$. Soit $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$ telle que la fibre $F|_b$ de F au point b soit égale à $\mathcal{T}_\alpha(F)|_b$, où $\mathcal{T}_\alpha$ est l'opérateur de translation par α (voir la sous section 2.2.2 pour la définition). Alors F est asymptote sur I à une série*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^{i/p},$$

où la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ est convergente.

Preuve. D'après le lemme (3.1), on peut supposer que $p = 1$. D'après le lemme (2.47), on peut supposer que $q = 1$ et qu'il existe une fonction holomorphe g sur le disque épointé de rayon R telle que $F = g \circ \pi$. Le fait que la fonction F est asymptote sur $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{C}[[X]]^*$ entraîne que la fonction g est continue à l'origine, donc holomorphe à l'origine. On peut alors appliquer le lemme précédent. ∎

3.1.1 Énoncé du théorème sur l'existence du corps des séries sommables.

Le principal but de ce chapitre est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.9 *Soient*

$$K = \mathbb{C}\{X\}\,[X^{-1}] \quad et \quad \hat{K}_\infty = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbb{C}[[X^{1/q}]]\,[X^{-1}].$$

L'extension $K \subseteq \hat{K}_\infty$ est une extension de corps différentiels pour la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$. Il existe un sous-corps différentiel $\mathcal{K}$

$$K \subseteq \mathcal{K} \subseteq \hat{K}_\infty,$$

et une famille d'opérateurs $\{\boldsymbol{S}_d^+, \boldsymbol{S}_d^-\}_{d \in \widetilde{S}}$

$$\boldsymbol{S}_d^+ : \mathcal{K} \to \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big), \quad \boldsymbol{S}_d^- : \mathcal{K} \to \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big),$$

qui satisfont les propriétés suivantes :

(S1). *Si* $\hat{F} \in K$ *alors*

$$\boldsymbol{S}_d^+(\hat{F}) = \boldsymbol{S}_d^-(\hat{F}) = F_{|d}, \quad d \in \widetilde{S},$$

où F *est le germe d'une fonction méromorphe à l'origine définie par la série convergente* $\hat{F}$*.*

(S2). *Les applications* $\boldsymbol{S}_d^+$ *et* $\boldsymbol{S}_d^-$ *sont des homomorphismes différentiels injectifs.*

(S3). *Pour toute série* $\hat{F} \in \mathcal{K}$ *et* $d \in \widetilde{S}$ *on a*

$$J \circ \boldsymbol{S}_d^+(\hat{F}) = J \circ \boldsymbol{S}_d^-(\hat{F}) = \hat{F}.$$

(S4). *Pour toute série* $\hat{F} \in \mathcal{K}$ *il existe un ensemble* $\Sigma(\hat{F}) \subseteq \widetilde{S}$ *tel que :*

(i). *L'ensemble* $\{d (\operatorname{mod} 2\pi) \mid d \in \Sigma(\hat{F})\}$ *est fini.*

(ii). *Soient* $\hat{F} \in \mathcal{K}$, $d_1, d_2 \in \widetilde{S}$ *tels que* $d_1 < d_2$ *et* $]d_1, d_2[\cap \Sigma(\hat{F}) = \emptyset$, *alors il existe*

$$F \in \Gamma\big([d_1, d_2], \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$$

telle que

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{S}_{d_1}^+(\hat{F}) & = & F_{|d_1}, \\ \boldsymbol{S}_d^+(\hat{F}) = \boldsymbol{S}_d^-(\hat{F}) & = & F_{|d}, \quad d \in]d_1, d_2[, \\ \boldsymbol{S}_{d_2}^-(\hat{F}) & = & F_{|d_2}. \end{array}$$

(S5). *Si* $\hat{F} \in \hat{K}_\infty$ *est solution formelle d'une équation différentielle linéaire*

$$a_n(X)\frac{\mathrm{d}^n \hat{F}}{\mathrm{d}X^n} + a_{n-1}(X)\frac{\mathrm{d}^{n-1}\hat{F}}{\mathrm{d}X^{n-1}} + \cdots + a_0(X)\hat{F} = 0,$$

avec $a_i(X) \in K$, $0 \leq i \leq n$, *alors*

$$\hat{F} \in \mathcal{K},$$

et les fonctions $\boldsymbol{S}_d^+(\hat{F})$ *et* $\boldsymbol{S}_d^-(\hat{F})$ *sont aussi des solutions de l'équation différentielle.*

3.2 Développements asymptotiques et équations différentielles linéaires.

Pour éviter des ambiguïtés on fixe les conventions suivantes : Un intervalle de $\widetilde{S}$ est un ensemble connexe (que l'on ne supposera pas nécessairement ouvert ou fermé) ; l'expression *plus petit* (resp. *plus grand*) veut dire strictement plus petit (resp. strictement plus grand).

Théorème 3.10 (Borel–Ritt) *Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$. L'application de Taylor*

$$J : \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big) \to \mathbb{C}[[X]]^*$$

est surjective.

Preuve. En vertu du lemme (3.1) il suffit de montrer que l'image de l'application de Taylor contient $\mathbb{C}[[X]]$. D'après le lemme (3.3) on peut supposer que $I =]-\theta, \theta[$. Soit $\hat{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$; on considère la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n(\tilde{x}) \tilde{x}^n, \tag{3.2}$$

où $\alpha_n(\tilde{x}) = 1 - \exp\left(\frac{-b_n}{\tilde{x}^{1/\theta}}\right)$, $b_n = 1/|a_n|$ si $a_n \neq 0$, et $b_n = 0$ si $a_n = 0$. Le fait que $|1 - \exp z| < |z|$ si la partie réelle de z est négative, entrane que la série ci-dessus est majorée par la série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{x}|^{n - \frac{1}{\theta}}$. Donc la série (3.2) représente une fonction $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ qui est asymptote sur I à la série $\hat{F}$. ∎

Définition 3.11 *Soit I un intervalle ouvert de $\widetilde{S}$, on pose*

$$\Gamma\big(I, A^{<0}\big) = \{F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big) \mid J(F) = 0\} = \mathrm{Ker} J.$$

Soit $\widetilde{\mathcal{A}}^{<0}$ le faisceau sur $\widetilde{S}$, tel que pour tout intervalle ouvert I de $\widetilde{S}$ on ait $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big) = \Gamma\big(I, A^{<0}\big)$. Le faisceau $\widetilde{\mathcal{A}}^{<0}$ est appelé le faisceau des fonctions plates.

Remarque 3.12 Une fonction $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)$ si et seulement si pour tout intervalle fermé $I' \subseteq I$ et tout $\varepsilon > 0$ tel que F soit définie sur $I' \times]0, \varepsilon]$, et tout rationnel positif r il existe une constante $C_{(I', \varepsilon; r)}$ telle que

$$|F(\tilde{x})| \leq C_{(I', \varepsilon; r)} |\tilde{x}|^r, \quad \tilde{x} \in I' \times]0, \varepsilon].$$

Exemple 3.13 Si $\alpha > 0$ la fonction $F(\tilde{x}) = \exp(-\tilde{x}^{\alpha}) \in \Gamma\big(]\frac{-\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}[, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)$.

Définition 3.14 *Soit $k > 0$, on désigne par $\Gamma\big(I, A^{\leq -k}\big)$ l'ensemble des fonctions $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$ telles que pour tout intervalle fermé $I' \subseteq I$ il existe $\varepsilon > 0$ et il existe des constantes $C(I'), B(I') > 0$ telles que : F est défini sur $I' \times [0, \varepsilon]$ et*

$$|F(\tilde{x})| \leq C(I') \exp\left(\frac{-B(I')}{|\tilde{x}|^k}\right), \quad \tilde{x} \in I' \times]0, \varepsilon].$$

On désigne par $\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}$ le faisceau sur $\widetilde{S}$ tel que sur les intervalles ouverts I de $\widetilde{S}$ on ait $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big) = \Gamma\big(I, A^{\leq -k}\big)$. Le faisceau $\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}$ est appelé le faisceau des fonctions exponentiellement plates d'ordre plus petit où égal à k.

Remarque 3.15 (i). Les ensembles $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)$ et $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$ sont stables par la dérivation $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$. En effet, pour chaque intervalle fermé $I' \subseteq I$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $\tilde{x} \in I' \times]0, \varepsilon']$ alors le cercle $\{\tilde{w} \in \widetilde{\mathbb{C}} \mid |\pi(\tilde{w}) - \pi(\tilde{x})| = \alpha\,|\tilde{x}|\}$ est contenu dans $I \times]0, \varepsilon]$. On termine en utilisant la formule de Cauchy sur ce cercle.
(ii). Si I est un intervalle de $\widetilde{S}$ on a

$$\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_2}\big) \subseteq \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_1}\big) \subseteq \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big), \quad \text{si } 0 < k_1 < k_2.$$

(iii). Les ensembles $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)$ et $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$ sont des idéaux de l'anneau $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$. Ceci provient du fait que, si $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout intervalle fermé $J \subseteq I$ et $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_{J,\varepsilon} > 0$, telle que $|F(\tilde{x})| \leq M_{J,\varepsilon}\,|\tilde{x}|^{-N}$, $\tilde{x} \in J \times]0, \varepsilon]$.
(iv). Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\tilde{x}^{\lambda}\mathrm{Lg}\tilde{x} \notin \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$.

3.2.1

L'étude des solutions formelles des équations différentielles repose sur les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.16 *On considère le système d'équations différentielles suivant*

$$x^{m+1}\frac{\mathrm{d}\,y_i}{\mathrm{d}\,x} = \Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

où les fonctions Φ_i sont analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, et m est un entier. Soit V un secteur ayant l'origine comme sommet, et d'ouverture plus petite que $\frac{\pi}{m}$. Soit $\hat{F}(X) \in (\mathbb{C}[[X]])^n$ une solution formelle de l'équation différentielle ci-dessus. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions analytiques $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sur $V \cap \{x \mid |x| < \varepsilon\}$ telles que $\bar{y} = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ est une solution de l'équation différentielle et est asymptote à $\hat{F}$ sur V.

Pour une Preuve complète voir [14].

Remarque 3.17 (i). Par ramification le théorème reste vrai si l'ouverture de V est plus petite que $\frac{\pi}{qm}$ et si la solution formelle appartient à $\big(\mathbb{C}[[X^{1/q}]]\big)^n$.

(ii). Si le système d'équations différentielles (3.3) est linéaire, pour toute solution formelle méromorphe $\hat{F} \in \big(\mathbb{C}[[X]]\,[X^{-1}]\big)^n$ et tout secteur V d'ouverture suffisamment petite, il existe une solution analytique $\bar{y}$ sur V et asymptote à $\hat{F}$ sur V (pour un certain entier m, la fonction $x^m\bar{y}$ est asymptote à $X^m\hat{F}$ sur V).

On réécrit ici le théorème 2.30 :

Théorème 3.18 *On considère le système d'équations différentielles linéaires*

$$\text{(S)}\quad \frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A(X)\cdot Y, \quad A(X)\in \mathrm{Mat}_{n\times n}\big(\mathbb{C}\{X\}\,[X^{-1}]\big),\ \textit{et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors il existe une matrice non-singulière

$$P(X)\in \mathrm{GL}_n\Big(\bigcup_{q=1}^{\infty}\mathbb{C}[[X^{1/q}]]\,[X^{-1}]\Big)$$

telle qu'après le changement de variable

$$Y = P(X)\cdot Z \tag{3.4}$$

le système (S) *s'écrive*

$$\text{(SNF)}\qquad \frac{\mathrm{d}\,Z}{\mathrm{d}\,X} = M(X)\cdot Z$$

où la matrice $M(X)$ est diagonale par blocs

$$M(X) = \left(\begin{array}{cc|ccc} M_1(X) & 0 & & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & & 0 & M_l(X) \end{array}\right) = \mathrm{diag}[M_1(X),\dots,M_l(X)]$$

et chaque sous-matrice $M_i(X)$ est de la forme

$$M_i(X) = \lambda_i(X)\cdot I_{n_i} + \frac{C_i}{X}$$

avec

(i). *La matrice I_{n_i} est la matrice identité de rang n_i.*

(ii). $C_i\in \mathrm{Mat}_{n_i\times n_i}(\mathbb{C})$*,* $i = 1,\dots,l$*.*

(iii). *Ou bien $\lambda_i(X) = 0$, ou bien*

$$\lambda_i(X) = \sum_{k=1}^{N_i}\lambda_{i,k}X^{-\nu_k},\ \ 1<\nu_1<\dots<\nu_{N_i},\ \ \nu_i\in\mathbb{Q},\ \lambda_{i,k}\in\mathbb{C},\ \lambda_{i,N_i}\neq 0.$$

Remarque 3.19 Les matrices $A(X)$ et $M(X)$ sont à coefficients dans le corps différentiel $K = \mathbb{C}\{X\}\,[X^{-1}]$. Soit $K\subseteq L$ une extension d'anneaux différentiels, et soit une matrice $P\in \mathrm{Mat}_{n,n}(L)$ de déterminant inversible dans L. Le changement de variable $Y = P \cdot Z$ transforme le système (S) en le système (SNF) si et seulement si la matrice P satisfait le système d'équations différentielles linéaires à n^2 indéterminées

$$\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,X} = A(X) \cdot P - P \cdot M(X). \blacksquare \tag{3.5}$$

Remarque 3.20 Soit $I \subseteq \widetilde{S}$ un intervalle non-vide. On a les inclusions d'anneaux différentiels

$$K = \mathbb{C}\{X\}\,[X^{-1}] \to \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[x^{-1}]\big) \to \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big).$$

Les anneaux différentiels K et $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ ont le même corps des constantes. De plus, étant donné le système d'équations différentielles linéaires (S), il existe dans $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ une matrice fondamentale de solutions de (S). $\blacksquare$

Soit $\hat{F}(X) = \big(\hat{F}_1(X), \dots, \hat{F}_n(X)\big) \in \big(\mathbb{C}[[X^{1/q}]]\big)^n$ une solution formelle de (S). D'après le théorème (3.16), si $I \subseteq \widetilde{S}$ est un intervalle d'ouverture suffisamment petite (il suffit qu'elle soit plus petite que π/qm où $m+1$ est l'ordre du pôle de la matrice $A(X)$), il existe $F = (F_1, \dots, F_n) \in \big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\big)^n$ qui est une solution de (S) asymptote à $\hat{F}(X)$ sur I. Supposons que $G \in \big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\big)^n$ soit une autre solution de (S) asymptote à $\hat{F}$ sur I. Alors $F - G$ est une solution de (S) asymptote à 0 sur I, donc c'est une solution plate de (S). On est donc ramené à l'étude des solutions plates du système (S). Celle-ci se fait à l'aide des solutions du système (SNF).

3.2.2 Les solutions du système (SNF).

Soit $J_m(\lambda) \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{C})$ la matrice

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice

$$\tilde{x}^{J_m(\lambda)} = \begin{bmatrix} \tilde{x}^\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \tilde{x}^\lambda \mathrm{Lg}\tilde{x} & \tilde{x}^\lambda & 0 & 0 & \vdots \\ \frac{1}{2!}\tilde{x}^\lambda (\mathrm{Lg}\tilde{x})^2 & \tilde{x}^\lambda \mathrm{Lg}\tilde{x} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(m-1)!}\tilde{x}^\lambda (\mathrm{Lg}\tilde{x})^{m-1} & \frac{1}{(m-2)!}\tilde{x}^\lambda (\mathrm{Lg}\tilde{x})^{m-2} & \dots & \dots & \tilde{x}^\lambda \end{bmatrix}$$

On a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\tilde{x}^{J_m(\lambda)}) = \frac{1}{\tilde{x}}\,J_m(\lambda)\cdot\tilde{x}^{J_m(\lambda)}$. On dit que J est sous la forme de Jordan, s'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_s \in \mathbb{C}$ et $m_1,\dots,m_s \in \mathbb{N}^*$, tels que J soit la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}[J_{m_1}(\lambda_1),\dots,J_{m_s}(\lambda_s)]$. Dans ce cas on définit $\tilde{x}^J = \mathrm{diag}[\tilde{x}^{J_{m_1}(\lambda_1)},\dots,\tilde{x}^{J_{m_s}(\lambda_s)}]$. On vérifie facilement que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big(\tilde{x}^J\big) = \frac{J}{x}\tilde{x}^J$. Soient $C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $J = P^{-1}CP$ soit sous la forme de Jordan. On définit $\tilde{x}^C = P\tilde{x}^J P^{-1}$. Cette définition est indépendante du choix des matrices P et J car c'est la seule matrice à coefficients dans $\boldsymbol{K}_F$ qui satisfasse les propriétés suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\tilde{x}^C) = P\tfrac{J}{x}P^{-1}P\tilde{x}^J P^{-1} = \tfrac{C}{x}\tilde{x}^C,$$

et la valeur de $\tilde{x}^C$ au point $\tilde{x} = (0,1) \in \widetilde{\mathbb{C}}$ est la matrice identité. Il est facile de vérifier que $m(\tilde{x}^{J_m(\lambda)}) = e^{2\pi i J_m(\lambda)}\tilde{x}^{J_m(\lambda)} = \tilde{x}^{J_m(\lambda)}e^{2\pi i J_m(\lambda)}$; ceci entrane que si J est sous la forme de Jordan alors $m(\tilde{x}^J) = e^{2\pi i J}\tilde{x}^J = \tilde{x}^J e^{2\pi i J}$. Alors si $C = PJP^{-1}$, on a $m(\tilde{x}^C) = Pe^{2\pi i J}P^{-1}P\tilde{x}^J P^{-1} = e^{2\pi i C}\tilde{x}^C$ et aussi $m(\tilde{x}^C) = P\tilde{x}^J P^{-1}Pe^{2\pi i J}P^{-1} = \tilde{x}^C e^{2\pi i C}$.

On considère le système (SNF) du théorème (3.18).

Soient $P_i \in \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{C})$, $i = 1,\dots,l$, des matrices telles que, pour chaque i, la matrice $J_i = P_i^{-1}C_iP_i$ soit sous forme de Jordan. Pour $i = 1,\dots,l$, soit $V_i(\tilde{x}) = \tilde{x}^{J_i}$. Pour chaque indice $i = 1,\dots,l$, on définit $\Lambda_i(\tilde{x}) = 0$ si $\lambda_i(X) = 0$, et

$$\Lambda_i(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{N_i}\frac{\lambda_{i,k}}{1-\nu_k}\tilde{x}^{1-\nu_k}, \qquad \text{si } \lambda_i(X) \neq 0.$$

Soit

$$H(\tilde{x}) = P\cdot U(\tilde{x}), \tag{3.6}$$

où $P = \mathrm{diag}[P_1,\dots,P_l]$ et

$$U(\tilde{x}) = \mathrm{diag}\left[\exp\big(\Lambda_1(\tilde{x})\big)\cdot V_1(\tilde{x}),\dots,\exp\big(\Lambda_l(\tilde{x})\big)\cdot V_l(\tilde{x})\right].$$

Alors la matrice $H(\tilde{x}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\boldsymbol{K})$ est une matrice fondamentale de solutions du système d'équations différentielles linéaires (SNF).

On désigne par $\vec{H}_{(1,1)}(\tilde{x}), \vec{H}_{(1,2)}(\tilde{x}),\dots,\vec{H}_{(1,n_1)}(\tilde{x}), \vec{H}_{(2,1)}(\tilde{x}),\dots,\vec{H}_{(2,n_2)}(\tilde{x})$, $\dots\ \vec{H}_{(l,1)}(\tilde{x}),\dots,\vec{H}_{(l,n_l)}(\tilde{x})$ les colonnes de la matrice $H(\tilde{x})$. On numérote aussi $\{\vec{U}_{i,j}(\tilde{x})\}_{1\le i\le l\,1\le j\le n_i}$ les colonnes de la matrice $U(\tilde{x})$.

Lemme 3.21 *Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et I un intervalle de $\widetilde{S}$. On a*

$$\begin{aligned}
F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)^n &\iff P \cdot F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)^n, \\
F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n &\iff P \cdot F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n, \\
F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n &\iff P \cdot F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n, \\
F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n &\iff P \cdot F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n, \quad k > 0.
\end{aligned}$$

Preuve. Les implications dans le sens "$\Rightarrow$" sont évidentes car on a

$$||P \cdot v|| \leq ||P|| \cdot ||v||, \quad v \in \mathbb{C}^n.$$

Pour le sens contraire, il suffit d'appliquer le sens direct à la matrice P^{-1}. ∎

Lemme 3.22 *Avec les notations précédentes, si I est un intervalle de $\widetilde{S}$ on a, pour tout $1 \leq i \leq l$*

$$\forall\, 1 \leq j \leq n_i \quad \vec{H}_{i,j}(\tilde{x}) \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n \iff \exp\big(\Lambda_i(\tilde{x})\big) \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big).$$

Si $k > 0$, on a

$$\forall\, 1 \leq j \leq n_i \quad \vec{H}_{i,j}(\tilde{x}) \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n \iff \exp\big(\Lambda_i(\tilde{x})\big) \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big).$$

Preuve. En vertu du lemme précédent et de l'équation (3.6), on peut remplacer $\vec{H}_{i,j}(\tilde{x})$ par $\vec{U}_{i,j}(\tilde{x})$ dans l'énoncé du lemme. Ceci entraîne ce lemme, car si I est un intervalle borné de $\widetilde{S}$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|\tilde{x}|^N \leq |\tilde{x}^\mu (\mathrm{Lg}\tilde{x})^m| \leq |\tilde{x}|^{-N}, \quad |\tilde{x}| \leq \varepsilon, \ \arg(\tilde{x}) \in I. \ ∎$$

Remarque 3.23 Soit $\tilde{x} = (\theta, r) \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Soit i un indice tel que $\lambda_i(X) \neq 0$. On a

$$\big|\exp\big(\Lambda_i(\tilde{x})\big)\big| = \exp\left(\sum_{j=1}^{N_i} \frac{|\lambda_{i,j}|}{\nu_j - 1} \cdot r^{-(\nu_j - 1)} \cdot \cos\big(\arg(-\lambda_{i,j}) - \theta(\nu_j - 1)\big)\right).$$

On pose $\tau_i = \nu_{N_i} - 1$ et $\omega_i = \arg(-\lambda_{i,N_i})$. Soient

$$\mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,m} = \frac{\omega_i}{\tau_i} + \frac{\pi}{2\tau_i} + m\frac{\pi}{\tau_i}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

On a $\cos\big(\arg(-\lambda_{i,N_i}) - \theta(\nu_{N_i} - 1)\big) < 0$, si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta \in]\mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,2m}, \mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,2m+1}[$. Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$. Supposons que

$$I \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}]\mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,2m}, \mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,2m+1}[\tag{3.8}$$

alors on a $\exp\big(\Lambda_i(\tilde{x})\big) \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -\tau_i}\big)$ et $\exp\big(\Lambda_i(\tilde{x})\big) \notin \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$ si $k > \tau_i$. Par contre, si la propriété (3.8) n'est pas satisfaite, alors $\exp\big(\Lambda_i(\tilde{x})\big) \notin \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)$ et $\exp\big(\Lambda_i(\tilde{x})\big) \notin \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$.

Lemme 3.24 *On garde les notations précédentes. Pour chaque $i = 1, \ldots, l$ et $j = 1, \ldots, n_i$, on se donne un scalaire $c_{i,j} \in \mathbb{C}$. Soit $\vec{c}$ le vecteur colonne $(c_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,l \\ j=1,\ldots,n_i}} \in \mathbb{C}^n$. On considère*

$$F = \sum_{\substack{i=1,\ldots,l \\ j=1,\ldots,n_i}} c_{i,j} \cdot \vec{H}_{i,j}(\tilde{x}) = H(\tilde{x}) \cdot \vec{c}.$$

Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$.

(i). *On a*

$$F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n$$

si et seulement si, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $c_{i,j} \neq 0$, on a

$$\lambda_i(X) \neq 0, \quad \text{et } I \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}]\mathrm{d}^{St}_{i,2m}, \mathrm{d}^{St}_{i,2m+1}[.$$

(ii). *Soit $k > 0$. On a*

$$F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n$$

si et seulement si, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $c_{i,j} \neq 0$, on a

$$\lambda_i(X) \neq 0, \quad \tau_i \geq k, \quad \text{et } I \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}]\mathrm{d}^{St}_{i,2m}, \mathrm{d}^{St}_{i,2m+1}[.$$

(iii). *$F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n$ si et seulement si, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $c_{i,j} \neq 0$, on a $\vec{H}_{i,j} \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n$. On a le même énoncé si on remplace $\widetilde{\mathcal{A}}$ par $\widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]$.*

(iv). *Si $F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n$, alors il existe $G \in \Big(\Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n$ solution du système* (SNF)*, telle que $F - G_{|I} \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n$. On a le même énoncé si on remplace $\widetilde{\mathcal{A}}$ par $\widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]$.*

Preuve. D'après le lemme (3.21) et l'égalité (3.6), on peut remplacer, dans les parties (i),(ii) et (iii), $\vec{H}_{i,j}(\tilde{x})$ par $\vec{U}_{i,j}(\tilde{x})$ dans la définition de F. Soit $c_{i_0,j_0} \neq 0$, on pose $j' = \min\{j'' \mid c_{i_0,j''} \neq 0\}$. Comme la matrice $U(\tilde{x})$ est triangulaire inférieure, le coefficient (i_0, j') du vecteur

$$F = \sum_{i,j} c_{i,j} \cdot \vec{U}_{i,j}(\tilde{x})$$

est de la forme $c_{i_0,j'} \exp\big(\Lambda_{i_0}(\tilde{x})\big)\tilde{x}^{\mu}$. Donc, si $F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n$, alors $\exp\big(\Lambda_{i_0}(\tilde{x})\big) \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)$, et d'après la remarque 3.23, on a $\lambda_{i_0}(X) \neq 0$ et la propriété (3.8) est bien satisfaite. Si $F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n$, alors $\exp\big(\Lambda_{i_0}(\tilde{x})\big) \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$, donc la propriété (3.8) est satisfaite et on a $\tau_{i_0} > k$. Les réciproques des parties (i) et (ii) sont évidentes, car les coefficients de $\vec{U}_{i,j}$ sont de la forme $\exp(\Lambda_i(\tilde{x}))\, \tilde{x}^{\mu}(\mathrm{Lg}\tilde{x})^m$. Pour la partie (iii), soit $F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n$ (respectivement $F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)^n$), si $c_{i_0,j_0} \neq 0$ et $\lambda_{i_0}(X) \neq 0$, on a, comme précédemment, que la propriété (3.8) est satisfaite, donc $\vec{U}_{i,j} \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n$; dans le cas $\lambda_{i_0}(X) = 0$ on montre par récurrence que si $c_{i_0,j''} \neq 0$ alors le vecteur $\vec{U}_{i_0,j''}(\tilde{x})$ n'a pas des termes en $\mathrm{Lg}(\tilde{x})$ et que tout ses coefficients sont nuls sauf un qui est $\tilde{x}^{\mu}$ avec $\mu \in \mathbb{Q}_+$ (respectivement $\mu \in \mathbb{Q}$). Pour la partie (iv) on considère $G = \sum c_{i,j}\vec{H}_{i,j}(\tilde{x})$, où la somme est prise sur tous les couples (i, j) tels que $\lambda_i(X) = 0$. ∎

Définition 3.25 *On appelle niveaux associés au système* (SNF) *les valeurs*

$$0 < k_1 < \cdots < k_r$$

où

$$\{k_1, \ldots, k_r\} = \{\nu_{N_j} - 1, \mid j = 1, \ldots, l, \quad \lambda_j(X) \neq 0\}.$$

Soit i un indice tel que $\lambda_i(X) \neq 0$, et soit $\sigma(i) \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\nu_{N_i} - 1 = k_{\sigma(i)}$. On appelle lignes de Stokes associées au système (SNF) les éléments de $\widetilde{S}$

$$\mathrm{d}^{St}_{i,m}, \quad i = 1, \ldots, l \quad \lambda_i(X) \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

On dit que $\mathrm{d}^{St}_{i,m}$ est une ligne de Stokes de niveau $k_{\sigma(i)}$.

Notation 3.26 On désigne par V, V', $V[\tilde{x}^{-1}]$ et $V'[\tilde{x}^{-1}]$ les faisceaux sur $\widetilde{S}$, définis par

$$\begin{array}{rcl}\Gamma\big(I,V\big) & = & \{F \in \Big(\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n \mid F \text{ est une solution du système (S)}\},\\ \Gamma\big(I,V[\tilde{x}^{-1}]\big) & = & \{F \in \Big(\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)^n \mid F \text{ est une solution du système (S)}\},\\ \Gamma\big(I,V'\big) & = & \{F \in \Big(\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}\big)\Big)^n \mid F \text{ est une solution du système (SNF)}\},\\ \Gamma\big(I,V'[\tilde{x}^{-1}]\big) & = & \{F \in \Big(\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)^n \mid F \text{ est une solution du système (SNF)}\}.\end{array}$$

où I est un intervalle ouvert de $\widetilde{S}$.

On désigne par $V^{<0}$, $V'^{<0}$, $V^{\leq -k}$, et $V'^{\leq -k}$ les sous-faisceaux de V et V' respectivement tels que sur l'intervalle ouvert I on ait $\Gamma\big(I,V^{<0}\big) = \Gamma\big(I,V\big) \cap \Big(\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n$, $\Gamma\big(I,V^{\leq -k}\big) = \Gamma\big(I,V\big) \cap \Big(\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n$, et de mme pour le faisceau V'. ∎

Proposition 3.27 *Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$. Soit F une solution plate du système* (SNF)*, c'est-à-dire*

$$F \in \Gamma\big(I,V'^{<0}\big).$$

Alors

$$F \in \Gamma\big(I,V'^{\leq -k_1}\big).$$

De plus, si $F \in \Gamma\big(I,V'^{\leq -k}\big)$ et $k_i < k$, alors

$$\begin{array}{rcl} F & \in & \Gamma\big(I,V'^{\leq -k_{i+1}}\big), \quad \textit{si } 1 \leq i \leq r-1,\\ F & = & 0 \quad \textit{si} \quad i = r.\end{array}$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme (3.24). ∎

Proposition 3.28 *Soit $I = [\alpha,\beta[\subseteq \widetilde{S}$ ou bien $I =]\alpha,\beta] \subseteq \widetilde{S}$. Soit $t \in \{1,\ldots,r\}$. On suppose que $\beta-\alpha = \frac{\pi}{k_t}$. Soit $J =]a,b[\subseteq I$ et $F \in \Gamma\big(J,V'^{\leq -k_t}\big)$. Alors il existe*

$$\begin{array}{rcl} G_1 & \in & \Gamma\big(]a,\beta] \cap I, V'^{\leq -k_t}\big),\\ G_2 & \in & \Gamma\big([\alpha,b[\cap I, V'^{\leq -k_t}\big),\\ H & \in & \Gamma\big(]a,b[, V'^{\leq -k_{t+1}}\big), \quad \textit{si } t \leq r-1,\\ H & = & 0, \ \textit{si } t = r,\end{array}$$

tels que

$$F = G_1\big|_J - G_2\big|_J + H.$$

Preuve. Il existe $(c_{i,j}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $F = \sum c_{i,j}\vec{H}_{i,j}(\tilde{x})$. D'après le lemme (3.24), si $c_{i,j} \neq 0$, alors $\vec{H}_{i,j}(\tilde{x}) \in \Gamma\big(J, V'^{\leq -k_t}\big)$. Il suffit donc de montrer la proposition pour les solutions particulières $\vec{H}_{i,j}(\tilde{x}) \in \Gamma\big(J, V'^{\leq -k_t}\big)$. Dans ce cas, si $k_{\sigma(i)} > k_t$, la proposition est triviale car $\vec{H}_{i,j}(\tilde{x}) \in \Gamma\big(J, V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Si $k_{\sigma(i)} = k_t$, alors

$$\mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,m+1} - \mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,m} = \frac{\pi}{k_t}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

donc il existe un et un seul entier m' tel que $\mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,m'} \in I$. On a $\mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,m'} \notin J$ car $\vec{H}_{i,j}(\tilde{x}) \in \Gamma\big(J, V'^{\leq -k_t}\big)$. On pose $G_1 = \vec{H}_{i,j}(\tilde{x})$, $G_2 = 0$ si $\mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,m'} \leq a$; et $G_1 = 0$, $G_2 = \vec{H}_{i,j}(\tilde{x})$, si $b \leq \mathrm{d}^{\mathrm{St}}_{i,m'}$. ∎

Remarque 3.29 Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, et $\mathcal{G}$ un sous-faisceau de $\mathcal{F}$. On désigne par $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$. Un élément $H \in \Gamma\big(U, \mathcal{F}/\mathcal{G}\big)$ est donné par un recouvrement ouvert $\{W_i\}_{i\in I}$ de U et par des fonctions $H_i \in \Gamma\big(W_i, \mathcal{F}\big)$ telles que pour toute paire i, j on ait $H_i|_{W_i\cap W_j} - H_j|_{W_i\cap W_j} \in \Gamma\big(W_i \cap W_j, \mathcal{G}\big)$; dans ce cas, on désigne par $\{(H_i, W_i); i \in I\}$ la fonction H. On a $H = 0$ si et seulement si, pour tout indice i, $H_i \in \Gamma\big(W_i, \mathcal{G}\big)$. Dans le cas $\mathcal{G} = 0$ on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}/\mathcal{G}$.

Corollaire 3.30 *On considère l'intervalle $I \subseteq \widetilde{S}$, $t \in \{1, \ldots, r\}$ et $J =]a, b[\subseteq I$ comme dans la proposition précédente. On pose $V'^{\leq -k_{r+1}} = 0$. Soit $F \in \Gamma\big(J, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Alors il existe*

$$\begin{aligned} G_1 &\in \Gamma\big(]a, \beta] \cap I, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big), \\ G_2 &\in \Gamma\big([\alpha, b[\cap I, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big), \end{aligned}$$

tels que

$$F = G_1|_J - G_2|_J \in \Gamma\big(J, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big).$$

Preuve. C'est une conséquence de la proposition précédente et du lemme suivant. ∎

Lemme 3.31 *Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$. L'homomorphisme*

$$\Gamma\big(I, V'[\tilde{x}^{-1}]\big) \longrightarrow \Gamma\big(I, V'[\tilde{x}^{-1}]/V'^{\leq -k_t}\big)$$

est surjectif.

Preuve. Soit $F \in \Gamma\big(I, V'[\tilde{x}^{-1}]/V'^{\leq -k_t}\big)$. L'élément F est donné par un recouvrement ouvert $\{W_l\}_{l\in L}$ de I et des éléments $F_l \in \Gamma\big(W_l, V'[\tilde{x}^{-1}]\big)$. On a

$$F_l = \sum_{i,j} c_{i,j,W_l} \cdot \vec{H}_{i,j}(\tilde{x}), \quad c_{i,j,W_l} \in \mathbb{C},$$

où $\{\vec{H}_{i,j}(\tilde{x})\}$ est le système fondamental de solutions du système (SNF) choisi précédemment. Supposons que $W_l \cap W_{l'} \neq \emptyset$. Soit i_0 tel que, ou bien $k_{\sigma(i_0)} < k_t$, ou bien $\lambda_{i_0}(X) = 0$. D'après le lemme (3.24), on a $c_{i_0,j,W_l} = c_{i_0,j,W_{l'}}$, car $F_l - F_{l'} \in \Gamma\big(W_l \cap W_{l'}, V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Soit $W_{l_0} \neq \emptyset$, on définit

$$\bar{F} = \sum c_{i,j,W_l} \cdot \vec{H}_{i,j}(\tilde{x}),$$

où la somme est prise sur les paires (i,j) telles que, ou bien $k_{\sigma(i)} < k_t$, ou bien $\lambda_i(X) = 0$. On a

$$F = \bar{F} \in \Gamma\big(I, V'[\tilde{x}^{-1}]/V'^{\leq -k_t}\big). \blacksquare$$

Lemme 3.32 *Soient $J \subseteq I$ deux intervalles de $\widetilde{S}$, non vides. Pour tout indice $t = 1, \ldots, r$ l'homomorphisme de restriction*

$$\Gamma\big(I, V'[\tilde{x}^{-1}]/V'^{\leq -k_t}\big) \longrightarrow \Gamma\big(J, V'[\tilde{x}^{-1}]/V'^{\leq -k_t}\big)$$

est injectif.

Preuve. Soit $F \in \Gamma\big(I, V'[\tilde{x}^{-1}]/V'^{\leq -k_t}\big)$, d'après le lemme précédent, il existe $G \in \Gamma\big(I, V'[\tilde{x}^{-1}]\big)$, tel que $F = G \,(\mathrm{mod}\, V'^{\leq -k_t})$. Il suffit ensuite d'appliquer le lemme (3.24) à G sur les intervalles I et J. $\blacksquare$

On déduit du lemme (3.24) les propositions suivantes :

Proposition 3.33 *Soient $\{k_1, \ldots, k_r\}$ les niveaux associés au système* (SNF), *alors*

$$\{k_1, \ldots, k_r\} = \{k \in \mathbb{R} \mid k > 0,\ \exists \theta \in \widetilde{S},\ \frac{\Gamma\big(\{\theta\}, V'^{\leq -k}\big)}{\Gamma\big(\{\theta\}, V'^{\leq -(k+\varepsilon)}\big)} \neq 0,\ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Proposition 3.34 *Soient $\{k_1, \ldots, k_r\}$ les niveaux associés au système* (SNF). *Soit $d \in \widetilde{S}$. La ligne d est une ligne de Stokes de niveau k_t associée au système* (SNF) *si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(\{d\}, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big) < \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(\{d+\alpha\}, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big),$$

ou bien pour tout $0 < \alpha < \varepsilon$ ou bien pour tout $-\varepsilon < \alpha < 0$.

3.2.3 Les solutions du système (S).

Le but de cette sous-section est de montrer que les propositions (3.27) et (3.28) restent vraies si on remplace V' par V.

On considère le système d'équations différentielles linéaires

$$\text{(S)} \qquad \frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A(X)\cdot Y, \quad A(X) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\big(\mathbb{C}\{X\}\,[X^{-1}]\big),$$

et le changement de variable

$$Y = \hat{P}(X)\cdot Z, \quad \hat{P}(X) \in \mathrm{GL}_n\big(\bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbb{C}[[X^{1/q}]]\,[X^{-1}]\big) \tag{3.9}$$

qui transforme le système (S) en le système

$$\text{(SNF)} \qquad \frac{\mathrm{d}\,Z}{\mathrm{d}\,X} = M(X)\cdot Z,$$

où la matrice $M(X)$ est décrite par le théorème (3.18).

Proposition 3.35 *Soit $\theta \in \widetilde{S}$. Alors il existe I_θ un intervalle ouvert de $\widetilde{S}$ contenant θ, et une matrice*

$$P_\theta \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\Big(\Gamma\big(I_\theta, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big),$$

tels que

(i). *Le changement de variable $Y = P_\theta \cdot Z$ transforme le système* (S) *en le système* (SNF) *; c'est-à-dire qu'un élément $F \in (\Gamma\big(I_\theta, \widetilde{\mathcal{O}}\big))^n$ est une solution de* (SNF) *si et seulement si $P_\theta \cdot F$ est une solution de* (S)*.*

(ii). *La matrice P_θ est asymptote sur I_θ à la matrice $\hat{P}(X)$.*

(iii). $P_\theta^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n,n}\Big(\Gamma\big(I_\theta, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)$.

Preuve. La matrice $\hat{P}(X)$ est une solution formelle du système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,X} = A(X)\cdot Q - Q\cdot M(X). \tag{3.10}$$

D'après le théorème (3.16) il existe

$$P_\theta \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\Big(\Gamma\big(I_\theta, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)$$

qui est asymptote à $\hat{P}(X)$ sur I_θ et qui satisfait l'équation différentielle (3.10) ; donc, par la remarque (3.19) on a les propriétés (i) et (ii). Comme le déterminant de la matrice P_θ est asymptote sur I_θ au déterminant de la matrice $\hat{P}(X)$, et que celui-ci est différent de zéro, alors $1/\det(P_\theta) \in \Gamma\big(I_\theta, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$, donc les coefficients de la matrice P_θ^{-1} appartiennent à $\Gamma\big(I_\theta, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$. ∎

Lemme 3.36 *Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$. Soit*

$$Q \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)$$

asymptote sur I à une matrice

$$\hat{Q}(X) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{C}[[X^{1/q}]]\,[X^{-1}]\right)$$

telle que $\det \hat{Q}(X) \neq 0$. *On a*

$$\begin{aligned} F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)^n &\iff Q \cdot F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)^n, \\ F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n &\iff Q \cdot F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big)\Big)^n, \\ F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n &\iff Q \cdot F \in \Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)\Big)^n, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Preuve. La fonction $\det Q$ est asymptote sur I à la série $\det \hat{Q}(X) \neq 0$, donc $1/\det Q \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)$ est asymptote à $1/\det \hat{Q}(X)$; la matrice Q^{-1} appartient aussi à Mat $\Big(\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big)\Big)$ et elle satisfait les mêmes hypothèses que Q. Ainsi il suffit de montrer pour i) et ii) l'implication dans un seul sens. C'est en fait évident car pour tout intervalle borné $[a, b]$ il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$||Q(\tilde{x})|| \leq |\tilde{x}|^{-N}, \quad \arg(\tilde{x}) \in [a, b],\ 0 < |\tilde{x}| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Lemme 3.37 *Soit $\theta \in \widetilde{S}$, on considère la matrice P_θ donnée dans la proposition (3.35). Pour tout intervalle (fermé ou ouvert) $I \subseteq I_\theta$ l'application $F \mapsto P_\theta \cdot F$ induit les isomorphismes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels suivants*

$$\begin{aligned} \Gamma\big(I, V'[\tilde{x}]\big) &\longrightarrow \Gamma\big(I, V[\tilde{x}]\big), \\ \Gamma\big(I, V'^{<0}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(I, V^{<0}\big), \\ \Gamma\big(I, V'^{\leq -k}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(I, V^{\leq -k}\big), \quad 0 < k, \\ \Gamma\big(I, V'^{\leq -k}/V'^{\leq -k'}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(I, V^{\leq -k}/V^{\leq -k'}\big), \quad 0 < k < k'. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition (3.35) et du lemme précédent. $\blacksquare$

Proposition 3.38 *Soient $\{k_1, \ldots, k_r\}$ les niveaux associés au système* (SNF)*, alors*

$$\{k_1, \ldots, k_r\} = \{k \in \mathbb{R} \mid k > 0,\ \exists \theta \in \widetilde{S},\ \frac{\Gamma\big(\{\theta\}, V^{\leq -k}\big)}{\Gamma\big(\{\theta\}, V^{\leq -(k+\varepsilon)}\big)}\ neq 0,\ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Preuve. L'égalité est vraie si on substitue V' à V dans la définition de l'ensemble de droite (c.f. prop. 3.33) ; cette substitution ne change pas l'ensemble par les isomorphismes du lemme précédent. ∎

Définition 3.39 *Les nombres $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ seront appelés les niveaux du système (S).*

Proposition 3.40 *Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$. On a*

$$\Gamma\big(I, V^{<0}\big) = \Gamma\big(I, V^{\leq -k_1}\big).$$

Preuve. Soit $\theta \in \widetilde{S}$, d'après la proposition (3.27) on a

$$\Gamma\big(\{\theta\}, V'^{<0}\big) = \Gamma\big(\{\theta\}, V'^{\leq -k_1}\big).$$

Donc, par le lemme (3.37) on a

$$\Gamma\big(\{\theta\}, V^{<0}\big) = \Gamma\big(\{\theta\}, V^{\leq -k_1}\big), \quad \theta \in \widetilde{S},$$

et ceci entraîne la proposition. ∎

Définition 3.41 *Soient $\{k_1, \ldots, k_r\}$ les niveaux associés au système* (S). *On dit que $d \in \widetilde{S}$ est une ligne de Stokes de niveau k_t associée au système* (S) *s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(\{d\}, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) < \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(\{d+\alpha\}, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big),$$

ou bien pour tout $0 < \alpha < \varepsilon$ ou bien pour tout $-\varepsilon < \alpha < 0$.

D'après les isomorphismes (3.11), les lignes de Stokes associées au système (S) et au système (SNF) sont les mêmes.

Lemme 3.42 *Soient deux intervalles $\emptyset \neq J \subseteq I \subseteq \widetilde{S}$. L'homomorphisme de restriction*

$$\Gamma\big(I, V[\tilde{x}^{-1}]/V^{\leq -k_t}\big) \longrightarrow \Gamma\big(J, V[\tilde{x}^{-1}]/V^{\leq -k_t}\big)$$

est injectif.

Preuve. Soit $F \in \Gamma\big(I, V[\tilde{x}^{-1}]/V^{\leq -k_t}\big)$ tel que $F_{|J} = 0$. On considère l'ensemble

$$\Sigma = \Big\{\alpha \in I \mid F_{|\alpha} = 0 \in \Gamma\big(\{\alpha\}, V[\tilde{x}^{-1}]/V^{\leq -k_t}\big)\Big\}.$$

Soit $\alpha \in I \setminus \Sigma$. On considère la matrice P_α et l'intervalle I_α donnés par la proposition (3.35). Soit $G = (P_\alpha)^{-1}(F_{|I_\alpha}) \in \Gamma\big(I_\alpha, V'[\tilde{x}^{-1}]/V'^{\leq -k_t}\big)$. On a $G_{|\alpha} \neq 0$, car P_α est un isomorphisme. D'après le lemme (3.32), pour tout $\beta \in I_\alpha$, on a $G_{|\beta} \neq 0$, donc $F_{|\beta} = (P_\alpha)(G_{|\beta}) \neq 0$. L'ensemble Σ est donc fermé. Il est évidement ouvert. Comme Σ est non vide on a $\Sigma = I$ et $F = 0 \in \Gamma\big(I, V[\tilde{x}^{-1}]/V^{\leq -k_t}\big)$. ∎

Lemme 3.43 *Soient $k_1 < \cdots < k_r$ les niveaux associés au système* (S). *Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\widetilde{S}$ ne contenant pas de ligne de Stokes de niveau k_t associée au système* (S). *Alors les faisceaux $V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}$ et $V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}$ restreints à I sont isomorphes. (Dans le cas $t = r$ on pose $V^{\leq -k_{r+1}} = V'^{\leq -k_{r+1}} = 0$, et on obtient que $V^{\leq -k_r}|_I$ et $V'^{\leq -k_r}|_I$ sont isomorphes).*

Preuve. Comme I est un intervalle ouvert qui ne contient pas de ligne de Stokes de niveau k_t associée au système (SNF), il existe $F_1, \ldots, F_m \in \Gamma\big(I, V'^{\leq -k_t}\big)$ tels que, pour tout $\theta \in I$, $\{F_1|_\theta, \ldots, F_m|_\theta\}$ soit une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma\big(\{\theta\}, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$ (en fait, on peut choisir $F_1, \ldots, F_m$ parmi le système fondamental des solutions $\{\vec{H}_{i,j}(\tilde{x})\}$ décrit dans la sous-section précédente). En particulier, pour tout intervalle $I' \subseteq I$, $\{F_1|_{I'}, \ldots, F_m|_{I'}\}$ est une base de $\Gamma\big(I', V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Soit $\theta \in I$, on considère la matrice P_θ et l'intervalle I_θ comme dans la proposition (3.35). Soient $G_i = P_\theta(F_i|_{I_\theta})$, $i = 1, \ldots, m$. Soit $J =]c, d[$ un élément maximal de l'ensemble des intervalles ouverts J', $I_\theta \subseteq J' \subseteq I$, tels qu'il existe $H_1, \ldots, H_m \in \Gamma\big(J', V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$ avec $H_i|_{I_\theta} = G_i \in \Gamma\big(I_\theta, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$. On déduit du lemme (3.42) que pour tout intervalle non vide $I' \subseteq J$ la famille $\{H_1|_{I'}, \ldots, H_m|_{I'}\}$ est une famille libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma\big(I', V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$, donc une base, car

$$\dim \Gamma\big(I', V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) \leq \dim \Gamma\big(\{\theta'\}, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) =$$

$$\dim \Gamma\big(\{\theta'\}, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big) = m, \quad \theta' \in I'.$$

Supposons que $d < b$. On considère la matrice P_d et l'intervalle $I_d =]d - \varepsilon, d + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, comme dans la proposition (3.35). Il existe une matrice de constantes $(\mu_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ non singulière telle que

$$\sum \mu_{i,j} \cdot P_d \cdot F_j|_{]d-\varepsilon,d[} = H_i|_{]d-\varepsilon,d[} \in \Gamma\big(]d - \varepsilon, d[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big).$$

Donc, il existe $T_i \in \Gamma\big(]c, d + \varepsilon[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$, tels que $T_i|_{]c,d[} = H_i$; ce qui est en contradiction avec la maximalité de l'intervalle J et donc $J = I$. Soit $I' \subseteq I$; l'application qui envoie $F_i|_{I'}$ sur $H_i|_{I'}$, $1 \leq i \leq m$, s'étend par linéarité en un isomorphisme entre $\Gamma\big(I', V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$ et $\Gamma\big(I', V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$. ∎

Corollaire 3.44 *Sous les hypothèses du lemme, soient $J \subseteq I$, et F un élément de $\Gamma\big(J, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Alors il existe $H \in \Gamma\big(I, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$, tel que $H|_J = F$.*

Preuve. D'après le lemme, il suffit de montrer le corollaire pour $V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}$, et celui-ci est vrai, car il existe $F_1, \ldots, F_m \in \Gamma\big(I, V'^{\leq -k_t}\big)$ tels que, pour tout intervalle non vide $I' \subseteq I$, la famille $\{F_1|_{I'}, \ldots, F_m|_{I'}\}$ soit une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma\big(I', V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$. ∎

3.2.3.1 Le lemme de Watson.

On déduit du lemme(3.24) que si $I = [\alpha, \beta]$ est un intervalle de $\widetilde{S}$ avec $\beta - \alpha = \frac{\pi}{k_t}$ alors
$$\Gamma\big([\alpha, \beta], V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big) = 0,$$
(dans le cas $t = r$ on pose $V'^{\leq -k_{t+1}} = 0$ et on a que $V'^{\leq -k_r}/V'^{\leq -k_{r+1}} = V'^{\leq -k_r}$).

Ce fait admet une version plus générale :

Lemme 3.45 (Watson) *Soit $k > 0$. Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$ fermé au moins en une de ses extrémités et de longueur plus grande ou égale à $\frac{\pi}{k}$, ou bien un intervalle ouvert de longueur plus grande que $\frac{\pi}{k}$. Alors*
$$\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big) = 0.$$

Lemme 3.46 (Watson relatif) *Soient $0 < k < l$. Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$ fermé au moins en une de ses extrémités et de longueur plus grande ou égale à $\frac{\pi}{k}$, ou bien un intervalle ouvert de longueur plus grande que $\frac{\pi}{k}$. Alors*
$$\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -l}\big) = 0.$$

On donne ici la preuve du premier lemme. Celle du cas relatif sera donnée ultérieurement dans la section (3.2.10).

Preuve du lemme de Watson. Soit $F \in \Gamma\big([a, b], \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$ avec $b - a \geq \frac{\pi}{k}$. Après ramification par ρ_k (voir section (2.2.2)) on a $\rho_k F \in \Gamma\big([ka, kb], \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -1}\big)$. Il suffit donc de montrer le lemme pour le cas $k = 1$. Après une translation T_α il suffit de montrer que si $h(z)$ est une fonction holomorphe sur le secteur
$$V = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \frac{\pi + \delta}{2},\ 0 < |z| < R\}, \quad \delta > 0,\ R > 0,$$
et telle qu'il existe des constantes $C > 0$ et $B > 0$ satisfaisant
$$|h(z)| \leq C \exp\left(\frac{-B}{|z|}\right), \quad z \in V,$$
alors $h = 0$. Soit $g(z) = h(1/z)$, qui est holomorphe sur $W = \{z \mid |\arg z| < \frac{\pi+\delta}{2},\ |z| > 1/R\}$ et satisfait $|G(z)| \leq C \exp(-B\,|z|)$. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$ avec $|z_0| >$

$1/R$. On considère la fonction $t(z) = g(z + z_0)$ qui est holomorphe sur $U = \{z \mid |argz| \leq \frac{\pi+\delta}{2}\}$ et continue sur l'adhérence de U. Si de plus, on pose $C' = C\exp(B\,|z_0|)$, on a alors

$$|t(z)| \leq C' \exp(-B\,|z|), \quad z \in U.$$

Soit $k' \in \mathbb{R}$ telle que $\pi < \frac{\pi}{k'} < \pi + \delta$. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda(z) = t(z)\exp(\lambda z^{k'})$, qui est holomorphe sur U. Comme $k' < 1$ on a

$$|f_\lambda(z)| \to 0 \quad \text{si} \quad |z| \to \infty,\ z \in U.$$

Donc $|f_\lambda(z)|$ atteint son maximum sur $U' = \{z \mid |\arg z| \leq \frac{\pi}{2k'}\}$ en un point z_λ tel que $|\arg(z_\lambda)| = \frac{\pi}{2k'}$. Comme $\left|\exp(\lambda z^{k'})\right| = 1$ si $|\arg z| = \frac{\pi}{2k'}$, on a $|f_\lambda(z)| \leq M$, où $M = \sup\{|t(z)| \mid |\arg z| = \frac{\pi}{2k'}\}$ est indépendant de λ. Ceci implique que $t(z) = 0$, car $\left|\exp(z^{k'})\right| > 1$ si $|\arg z| < \frac{\pi}{2k'}$. ∎

Théorème 3.47 *Soient $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ les niveaux associés au système d'équations différentielles linéaires* (S). *On désigne par I ou bien l'intervalle $[\alpha, \beta[$ ou bien $]\alpha, \beta] \subseteq \widetilde{S}$. Soit $t \in \{1, \ldots, r\}$. On suppose que $\beta - \alpha = \frac{\pi}{k_t}$. Soit $J =]a, b[\subseteq I$ et $F \in \Gamma\big(J, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Alors il existe*

$$G_1 \in \Gamma\big(]a, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big),$$
$$G_2 \in \Gamma\big([\alpha, b[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big),$$

tels que

$$F = G_1|_J - G_2|_J \in \Gamma\big(J, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big).$$

(Si $t = r$ on pose $V^{\leq -k_{r+1}} = 0$, donc $V^{\leq -k_r}/V^{\leq -k_{r+1}} = V^{\leq -k_r}$.)

Preuve. Soient $d_1 < d_2 < \cdots < d_s$ les lignes de Stokes de niveau k_t associées au système (S) qui appartiennent à l'intervalle I. On pose $d_0 = \alpha$ et $d_{s+1} = \beta$. Pour $1 \leq i \leq s$ on désigne par

$$A_i = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big([\alpha, d_i[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big), A_i' = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big([\alpha, d_i[, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big),$$
$$B_i = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(]d_i, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big), B_i' = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(]d_i, \beta], V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big).$$

Pour $0 \leq i \leq s$

$$\mu_i = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(]d_i, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big),$$
$$\mu_i' = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(]d_i, d_{i+1}[, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big).$$

Pour $0 \leq i \leq s + 1$

$$t_i = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(\{d_i\}, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big),\ t_i' = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\big(\{d_i\}, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big).$$

D'après le lemme (3.37) on a

$$t_i = t'_i, \quad 0 \le i \le s+1. \tag{3.12}$$

D'après le lemme (3.43) on a

$$\begin{aligned} \mu_i = \mu'_i, &\quad 0 \le i \le s, \\ A_1 = A'_1, &\ \ B_s = B'_s. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Montrons que les homomorphismes de restriction

$$\Gamma\big(]d_{i-1}, d_{i+1}[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big) \longrightarrow \Gamma\big(\{d_i\}, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big), \quad 1 \le i \le s, \tag{3.14}$$

sont des isomorphismes. Ils sont injectifs d'après le lemme (3.42). Soit $G \in \Gamma\big(]a', b'[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big)$ avec $d_{i-1} < a' < d_i < b' < d_{i+1}$. D'après le corollaire (3.44) il existe

$$G_1 \in \Gamma\big(]d_i, d_{i+1}[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big) \text{ et } G_2 \in \Gamma\big(]d_{i-1}, d_i[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big)$$

tels que $G_1|_{]d_i,b'[} = G|_{]d_i,b'[}$ et $G_2|_{]a',d_i[} = G|_{]a',d_i[}$; donc il existe

$$H \in \Gamma\big(]d_{i-1}, d_{i+1}[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big)$$

tel que $H|_{]a',b'[} = G$.

La composition de l'inverse de l'isomorphisme (3.14) avec l'homomorphisme de restriction sur l'intervalle $]d_{i-1}, d_i[$ donne l'homomorphisme injectif

$$\lambda : \Gamma\big(\{d_i\}, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big) \longrightarrow \Gamma\big(]d_{i-1}, d_i[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big).$$

On a aussi les homomorphismes injectifs

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma\big([\alpha, d_i[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(]d_{i-1}, d_i[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big), \\ \psi : \Gamma\big([\alpha, d_{i+1}[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(]d_{i-1}, d_i[, V^{\le -k_t}/V^{\le -k_{t+1}}\big). \end{aligned}$$

D'après l'isomorphisme (3.14) on a

$$\mathrm{Im}(\psi) = (\mathrm{Im}\phi) \cap (\mathrm{Im}\lambda),$$

et donc

$$\begin{aligned} A_{i+1} = \dim(\mathrm{Im}\psi) &= \dim(\mathrm{Im}\phi) + \dim(\mathrm{Im}\lambda) - \dim(\mathrm{Im}\phi + \mathrm{Im}\lambda) \\ &\ge A_i + t_i - \mu_i, \quad 1 \le i \le s. \end{aligned} \tag{3.15}$$

D'autre part, d'après le corollaire 3.30, si $1 \le i < j \le s$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\Gamma\big(]d_i, d_j[, V'^{\le -k_t}/V'^{\le -k_{t+1}}\big)$$

est la somme de les sous-espaces vectoriels $\Gamma\big([\alpha, d_j[, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$ et $\Gamma\big(]d_i, \beta], V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$. La somme est directe car

$$\Gamma\big([\alpha, \beta], V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big) = 0.$$

On en déduit que

$$\mu'_i = A'_i + B'_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq s+1.$$

Comme $\Gamma\big(\{d_i\}, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big) = \Gamma\big(]d_{i-1}, d_{i+1}, V'^{\leq -k_t}/V'^{\leq -k_{t+1}}\big)$, on a

$$t'_i = A'_{i+1} + B'_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Donc

$$A'_{i+1} = A'_i + t'_i - \mu'_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq s. \tag{3.16}$$

Les équations (3.12), (3.13), (3.15), et (3.16) montrent que

$$A_i \geq A'_i, \quad 1 \leq i \leq s. \tag{3.17}$$

De façon symétrique on montre que

$$B_i \geq B'_i, \quad 1 \leq i \leq s. \tag{3.18}$$

Ainsi

$$\mu_{i-1} = \mu'_{i-1} = A'_i + B'_{i-1} \leq A_i + B_{i-1}. \tag{3.19}$$

On considère les homomorphismes injectifs

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma\big([\alpha, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(]d_i, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big), \\ \xi : \Gamma\big(]d_i, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(]d_i, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big). \end{aligned}$$

On déduit du lemme de Watson (cas $t = r$), ou du lemme de Watson relatif que

$$(\mathrm{Im}\psi) \cap (\mathrm{Im}\xi) = \Gamma\big([\alpha, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) = \{0\}.$$

Ainsi

$$\mu_i \geq \dim((\mathrm{Im}\psi) + (\mathrm{Im}\xi)) = \dim(\mathrm{Im}\psi) + \dim(\mathrm{Im}\xi) = A_{i+1} + B_i \geq \mu_i.$$

D'où on a $\mu_i = A_{i+1} + B_i = \mu'_i = A'_{i+1} + B'_i$, donc

$$A_i = A'_i, \quad B_i = B'_i, \quad 1 \leq i \leq s, \tag{3.20}$$

et la somme est directe :

$$\Gamma\big(]d_i, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) = (\mathrm{Im}\,\psi) \bigoplus (\mathrm{Im}\,\xi), \quad 0 \leq i \leq s. \tag{3.21}$$

Pour tout indice i, $1 \leq i \leq s$, on considère les homomorphismes injectifs suivants :

$$\begin{aligned} \psi' : \Gamma\big([\alpha, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(]d_{i-1}, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big), \\ \xi' : \Gamma\big(]d_{i-1}, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) &\longrightarrow \Gamma\big(]d_{i-1}, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big). \end{aligned}$$

D'après les lemmes de Watson on a

$$(\mathrm{Im}\psi') \cap (\mathrm{Im}\xi') = \{0\},$$

donc

$$\dim((\mathrm{Im}\psi') + (\mathrm{Im}\xi')) = A_{i+1} + B_{i-1} = A'_{i+1} + B'_{i-1} = t'_i = t_i.$$

Alors, on a la somme directe

$$\Gamma\big(]d_{i-1}, d_{i+1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big) = (\mathrm{Im}\,\psi') \bigoplus (\mathrm{Im}\,\xi'), \quad 1 \leq i \leq s. \quad (3.22)$$

On montre le fait suivant : soient deux indices $0 \leq i < j \leq s+1$, alors le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma\big(]d_i, d_j[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $\Gamma\big([\alpha, d_j[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$ et $\Gamma\big(]d_i, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Si $j - i \leq 2$, ce fait provient des sommes directes (3.21) et (3.22). Supposons maintenant que ce fait soit vrai pour $j - i \leq m$. Soit $j - i = m + 1 \geq 3$, et soit $F \in \Gamma\big(]d_i, d_j[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$. On considère les restrictions de F aux intervalles $]d_i, d_{j-1}[$ et $]d_{i+1}, d_j[$. Par hypothèse de récurrence, il existe $G^{(0)} \in \Gamma\big(]d_{i+1}, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$, $H^{(0)} \in \Gamma\big([\alpha, d_j[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$, $G^{(1)} \in \Gamma\big(]d_i, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$, et $H^{(1)} \in \Gamma\big([\alpha, d_{j-1}[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$ tels que

$$\begin{aligned} F|_{]d_{i+1}, d_j[} &= G^{(0)}|_{]d_{i+1}, d_j[} + H^{(0)}|_{]d_{i+1}, d_j[}, \\ F|_{]d_i, d_{j-1}[} &= G^{(1)}|_{]d_i, d_{j-1}[} + H^{(1)}|_{]d_i, d_{j-1}[}. \end{aligned}$$

Les deux égalités sont vraies si on se restreint à l'intervalle $]d_{i+1}, d_{j-1}[$, qui est non vide car $j - i \geq 3$. D'après l'unicité de la décomposition dans cet intervalle on a

$$G^{(0)}|_{]d_{i+1}, d_{j-1}[} = G^{(1)}|_{]d_{i+1}, d_{j-1}[}, \;\; H^{(0)}|_{]d_{i+1}, d_{j-1}[} = H^{(1)}|_{]d_{i+1}, d_{j-1}[}.$$

Moyennant le lemme (3.42), ceci entraîne que

$$G^{(0)}|_{]d_{i+1}, \beta]} = G^{(1)}|_{]d_{i+1}, \beta]}, \;\; H^{(0)}|_{[\alpha, d_{j-1}[} = H^{(1)}|_{[\alpha, d_{j-1}[}.$$

Donc il existe $G \in \Gamma\big(]d_i, \beta], V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$ et $H \in \Gamma\big([\alpha, d_j[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$ tels que

$$F = G|_{]di, d_j[} + H|_{]d_i, d_j[}.$$

L'unicité de cette décomposition provient des lemmes de Watson.

Soit $J =]a, b[\subseteq I$, et soit $F \in \Gamma\big(J, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$. On considère les indices i, j tels que $d_i \leq a < d_{i+1}$ et $d_{j-1} < b \leq d_j$. D'après le corollaire (3.44) (appliqué aux intervalles $]d_i, d_{i+1}[$ et $]d_{j-1}, d_j[$), il existe

$$\bar{F} \in \Gamma\big(]d_i, d_j[, V^{\leq -k_t}/V^{\leq -k_{t+1}}\big)$$

tel que $\bar{F}|_J = F$. ∎

3.2.4 Les solutions formelles du système (S).

Soient

$$k_1 < \cdots < k_r$$

les niveaux associés au système d'équations différentielles linéaires (S). Soient

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_r$$

des intervalles de $\widetilde{S}$ de longueur respective $\frac{\pi}{k_1}, \frac{\pi}{k_2}, \ldots, \frac{\pi}{k_r}$; chacun étant fermé en l'une de ses extrémitées et ouvert en l'autre.

On désigne par $\hat{V}$ les solutions formelles de (S),

$$\hat{V} = \{\hat{F} \in \left(\bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbb{C}[[X^{1/q}]]\right)^n \mid \hat{F} \text{ est solution de (S)}\}.$$

D'après le théorème (3.16), l'application de Taylor

$$J : \Gamma\big(I, V/V^{<0}\big) \longrightarrow \hat{V}, \tag{3.23}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (I étant un intervalle non-vide de $\widetilde{S}$ ou bien $I = \widetilde{S}$. D'après la proposition (3.40), on a

$$\Gamma\big(I, V/V^{\leq -k_1}\big) = \Gamma\big(I, V/V^{<0}\big).$$

Proposition 3.48 *On conserve les notations précédentes. Alors*

$$\begin{aligned} \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_l}\big) &= \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big), \quad \textit{si} \quad 1 \leq l \leq r-1 \\ \Gamma\big(I_r, V/V^{\leq -k_r}\big) &= \Gamma\big(I_r, V\big). \end{aligned}$$

Preuve. Le noyau de l'homomorphisme naturel

$$\Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big) \longrightarrow \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_l}\big)$$

est $\Gamma\big(I_l, V^{\leq -k_l}/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$. On déduit du lemme de Watson (cas $l = r$), ou du lemme de Watson relatif, que l'homomorphisme ci-dessus est injectif. Soit $F \in \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_l}\big)$ (si $l = r$ on pose $V^{\leq -k_{r+1}} = 0$) ; F est donné par des fonctions $F_j \in \Gamma\big(W_j, V\big)$, où $\{W_j\}_{j=1,\dots,d}$ est un 2-recouvrement ordonné (voir page 156 pour la définition) de $I_l = [\alpha, \beta]$ par des intervalles ouverts, et tel que pour toute paire d'indices i, j, avec $W_{i,j} = W_i \cap W_j \neq \emptyset$, on ait

$$F_{i,j} = F_i|_{W_{i,j}} - F_j|_{W_{i,j}} \in \Gamma\big(W_{i,j}, V^{\leq -k_{l+1}}\big).$$

On peut supposer que W_1 et W_d ne contiennent pas de lignes de Stokes de niveau k_l. On applique le théorème (3.47) à $F_{1,2}$. Alors il existe G_1 et G_2 comme dans l'énoncé du théorème, tels que $F_{1,2} = G_1|_{W_{1,2}} - G_2|_{W_{1,2}} \in \Gamma\big(W_{1,2}, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$. On définit $K_j = F_j - G_2|_{W_j} \in \Gamma\big(W_j, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$ si $j = 2, \dots, d$, et $K_1 = F_1 - G_1 \in \Gamma\big(W_1, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$. Alors $K_1|_{W_{1,2}} = K_2|_{W_{1,2}} \in \Gamma\big(W_{1,2}, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$, et la famille $\{(K_j, W_j)\}_{j=1,\dots,d}$ définit aussi la fonction $F \in \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_l}\big)$, car $F_j - K_j \in \Gamma\big(W_j, V^{\leq -k_l}/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$. On itère ce procédé d fois et on obtient que $F \in \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$. ∎

Les homomorphismes

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 : \hat{V} &\overset{J^{-1}}{\to} \Gamma\big(I_1, V/V^{\leq -k_1}\big) = \Gamma\big(I_1, V/V^{\leq -k_2}\big), \qquad (3.24)\\
\Sigma_{i+1} : \hat{V} &\overset{\Sigma_i}{\to} \Gamma\big(I_i, V/V^{\leq -k_{i+1}}\big) \to \Gamma\big(I_{i+1}, V/V^{\leq -k_{i+1}}\big) = \\
&\quad \Gamma\big(I_{i+1}, V/V^{\leq -k_{i+2}}\big), \ \ 1 \leq i \leq r-2,\\
\Sigma_r : \hat{V} &\overset{\Sigma_{r-1}}{\to} \Gamma\big(I_{r-1}, V/V^{\leq -k_r}\big) \to \Gamma\big(I_r, V/V^{\leq -k_r}\big) = \Gamma\big(I_r, V\big),
\end{aligned}$$

sont injectifs car les homomorphismes de restriction sont des homomorphismes injectifs (voir lemme (3.42)).

3.2.4.1 Cas d'un seul niveau.

On suppose que le système (S) n'a qu'un seul niveau k_1. Alors on a l'isomorphisme

$$\Sigma_1 : \hat{V} \overset{J^{-1}}{:\to} \Gamma\big(I_1, V\big). \qquad (3.25)$$

Donc, si $\hat{F}$ est une solution formelle du système (S), et si I_1 est un intervalle de longueur $\frac{\pi}{k_1}$ fermé en une de ses extrémités et ouvert en l'autre, alors $F = \Sigma_1(\hat{F})$ est une solution de (S) sur I_1 telle que $J(F) = \hat{F}$. De plus, F est la seule solution de F qui satisfait cette propriété, car si $G \in \Gamma\big(I_1, V\big)$ et $J(G) = \hat{F}$, alors $F - G \in \Gamma\big(I_1, V^{<0}\big)$. D'après la proposition (3.40) on a $F - G \in \Gamma\big(I_1, V^{\leq -k_1}\big)$, donc $F - G = 0$ par le lemme de Watson.

3.2.4.2 Cas de plusieurs niveaux.

Avec les notations et les hypothèses précédentes, si $\hat{F}$ est une solution formelle du système (S), il existe une unique r-uple $(F_1, \ldots, F_r)$ tel que :

(i). Pour $i = 1, \ldots, r-1$ on a $F_i \in \Gamma\big(I_i, V/V^{\leq -k_{i+1}}\big)$, $F_r \in \Gamma\big(I_r, V\big)$.

(ii). $F_{i+1} = F_i|_{I_{i+1}} \in \Gamma\big(I_{i+1}, V/V^{\leq -k_{i+1}}\big)$, $i = 1, \ldots, r-1$.

(iii). $J(F_r) = \hat{F}$.

En effet, si on pose $F_i = \Sigma_i(\hat{F})$, les propriétés (i),(ii), et (iii) sont satisfaites de façon évidente. Si $(G_1, \ldots, G_r)$ satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii), on a $J(G_i) = \hat{F}$ pour $i = 1, \ldots, r$; en particulier $J(G_1) = \hat{F}$, donc $G_1 = \Sigma_1(\hat{F})$. Moyennant la propriété (ii), on a $G_2 = \Sigma_2(\hat{F}), \ldots, G_r = \Sigma_r(\hat{F})$.

3.2.5 Le Halo Analytique.

On considère l'espace topologique :

$$\widetilde{\mathbb{H}A} =]0, \infty] \times \widetilde{S}.$$

Soient $k_1 < k_2 < \cdots < k_r < \infty$. On considère le faisceau $\mathcal{H}_{(k_1,\ldots,k_r)}$ sur $\widetilde{\mathbb{H}A}$ dont la fibre au point $(k, \theta) \in \widetilde{\mathbb{H}A}$ est l'espace vectoriel suivant

$$\begin{array}{rll} \mathbb{C}[[X]]^* = \Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{<0}\big) & \text{si} & 0 < k < k_1, \\ \Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_i}\big) & \text{si} & k_i \leq k < k_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1, \\ \Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_r}\big) & \text{si} & k_r \leq k < \infty, \\ \Gamma\big(\{\theta\}, \widetilde{\mathcal{A}}\big) & \text{si} & k = \infty. \end{array}$$

Soit $\mathcal{H}V$ le faisceau sur $\widetilde{\mathbb{H}A}$ construit à l'aide du faisceau $\mathcal{H}_{(k_1,\ldots,k_r)}$ où $0 < k_1 < \cdots < k_r$ sont les niveaux du système (S) en substituant V à $\widetilde{\mathcal{A}}$ dans les définitions des fibres (en particulier $\hat{V}$ à $\mathbb{C}[[X]]^*$). Soient $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_r$ des intervalles fermés embotés de $\widetilde{S}$, on considère l'ensemble

$$H(I_1, \ldots, I_r) = \{(r, \theta) \in \widetilde{\mathbb{H}A} \mid 0 < r < k_1\} \cup \tilde{I}_1 \cup \cdots \cap \tilde{I}_r,$$

où

$$\tilde{I}_i = \{(r, \theta) \in \widetilde{\mathbb{H}A} \mid 0 < r \leq k_{i+1},\ \theta \in I_i\}, \quad \text{(on pose } k_{r+1} = \infty).$$

Soit $\hat{F}$ une solution formelle de (S), si on pose $F_i = \Sigma_i(\hat{F})$, $1 \leq i \leq r$, et $F_0 = J^{-1}(\hat{F})$ où

$$J : \Gamma\big(\widetilde{S}, V/V^{<0}\big) \xrightarrow{\sim} \hat{V},$$

alors $(F_0, F_1, \ldots, F_r)$ est une section du faisceau $\mathcal{H}V$ au dessus de $H(I_1, \ldots, I_r)$. Si les intervalles I_i satisfont les hypothèses énoncées au début de la sous-section on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\hat{V} \xrightarrow{\sim} \Gamma\big(H(I_1, \ldots, I_r), \mathcal{H}V\big).$$

3.2.6 Asymptoticité Gevrey.

Le fait que toute solution plate d'une équation différentielle linéaire soit exponentiellement plate, nous a permis d'associer (dans le cas d'un seul niveau, pour être plus précis) à chaque solution formelle $\hat{F}$ et à chaque intervalle I satisfaisant certaines conditions, une unique solution F qui est asymptote sur I à $\hat{F}$. Pour éliminer la référence à l'équation différentielle, on va définir des espaces de fonctions dans lesquels, si une fonction est plate, alors elle doit être exponentiellement plate.

Lemme 3.49 *Soit $k > 0$, I un intervalle fermé de $\widetilde{S}$, et $F \in \Gamma\big(I \times [0, \varepsilon], \widetilde{\mathcal{O}}\big)$. Alors il existe des constantes $C, B > 0$ telles que*

$$|F(\tilde{x})| \leq C \cdot \exp\left(\frac{-B}{|\tilde{x}|^k}\right), \quad \tilde{x} \in I \times [0, \varepsilon], \tag{3.26}$$

si et seulement s'il existe des constantes $C', B' > 0$ telles que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, on a

$$|F(\tilde{x})| \leq C' \cdot (B')^r \cdot \Gamma(1 + \tfrac{r}{k}) \cdot |\tilde{x}|^r, \quad \tilde{x} \in I \times [0, \varepsilon], \ r \in \mathbb{Q}_+^*. \tag{3.27}$$

Preuve. Moyennant la formule de Stirling, l'inégalité (3.27) est équivalente à l'existence de constantes $C'', B'' > 0$, telles que, pour tout rationnel positif r, on a

$$|F(\tilde{x})| \leq C'' \cdot (B'')^r \cdot |\tilde{x}|^r \cdot \left(\frac{r}{e \cdot k}\right)^{r/k}, \quad \tilde{x} \in I \times [0, \varepsilon], \ r \in \mathbb{Q}_+^*. \tag{3.28}$$

D'autre part, la fonction $\psi(t) = A^t \left(\frac{t}{e \cdot k}\right)^{t/k}$, $t > 0$, $A > 0$, atteint son minimum au point $t_0 = k/A^k$, et $\psi(t_0) = \exp\left(\frac{-1}{A^k}\right)$. Donc l'inégalité (3.28) entraîne (3.26). Réciproquement, si on a l'inégalité (3.26), alors on a

$$\frac{1}{|\tilde{x}|^r} |F(\tilde{x})| \leq C \cdot \frac{1}{|\tilde{x}|^r} \exp\left(\frac{-B}{|\tilde{x}|^k}\right).$$

Le maximum de la fonction $t \mapsto t^{-r} \exp\left(\frac{-B}{t^k}\right)$, $t > 0$, est $\left(\frac{1}{B}\right)^{r/k} \cdot \left(\frac{r}{k}\right)^{r/k} \cdot \exp\left(\frac{-r}{k}\right)$, donc

$$|F(\tilde{x})| \leq |\tilde{x}|^r \cdot C \cdot \left(\frac{1}{B}\right)^{r/k} \cdot e^{r/k} \cdot \left(\frac{r}{e \cdot k}\right)^{r/k}, \quad \tilde{x} \in I \times [0, \varepsilon], \ r \in \mathbb{Q}_+^*. \ \blacksquare$$

Définition 3.50 *Soit* $\mathbb{C}[[X]]^*$ *l'anneau de séries de Puiseux* $\bigcup_{q=1}^{\infty}\mathbb{C}[[X^{1/q}]]$. *Soient* I *un intervalle ouvert de* $\widetilde{S}$, $F\in\Gamma\big(I,\mathcal{O}\big)$, *et* $\hat{F}=\sum_{i=0}^{\infty}a_{i/q}X^{i/q}\in\mathbb{C}[[X]]^*$. *On dit que* F *est* asymptote Gevrey-$\frac{1}{k}$ *(*$0<k\leq\infty$*) sur* I *dans* $\mathbb{C}[[X]]^*$ *à la série* $\hat{F}$, *si pour tout intervalle fermé* $J\subseteq I$ *et pour tout* $\varepsilon>0$ *tels que* F *est défini sur* $J_\varepsilon=J\times]0,\varepsilon]$, *il existe des constantes positives* $C(J_\varepsilon)$ *et* $B(J_\varepsilon)$ *telles que pour tout rationnel positif* $r\in\mathbb{Q}_+^*$

$$\left|F(\tilde{x})-\sum_{\frac{i}{q}<r}a_{i/q}\cdot\tilde{x}^{i/q}\right|\leq|\tilde{x}|^r\cdot C(J_\varepsilon)\cdot(B(J_\varepsilon))^r\cdot\Gamma(1+\frac{r}{k}),\quad \tilde{x}\in J_\varepsilon,\ r\in\mathbb{Q}_+^*, \tag{3.29}$$

où Γ *désigne la fonction Gamma, et où l'on convient que* $r/\infty=0$ *si* $r\in\mathbb{Q}_+^*$.

On désigne par $\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}$ le faisceau sur $\widetilde{S}$ tel que pour tout intervalle ouvert I, $\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ est le sous-ensemble de $\Gamma\big(I,\mathcal{O}\big)$ des fonctions admettant un développement asymptotique Gevrey-$\frac{1}{k}$ sur I dans $\mathbb{C}[[X]]^*$.

Remarque 3.51 (i). On a $\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)\subseteq\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}\big)$.
(ii). Soit ρ_α l'application de ramification définie à la section (2.2.2). Si F est asymptote Gevrey-$\frac{1}{k}$ sur I à $\hat{F}(X)=\sum a_rX^r$ alors $\rho_\alpha(F)$ est asymptote Gevrey-$\frac{\alpha}{k}$ sur l'intervalle $\alpha\cdot I$ à la série $\hat{\rho}_\alpha(\hat{F})=\sum a_rX^{r/\alpha}$.
(iii). Si $F,G\in\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$, alors $F-G\in\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$, donc $\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ a une structure de groupe additif.

On considère l'application de Taylor

$$J:\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)\longrightarrow\mathbb{C}[[X]]^*. \tag{3.30}$$

D'après le lemme (3.49) on a

$$\operatorname{Ker}(J)=\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big).$$

D'autre part, si $F\in\Gamma\big(I,\widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ est asymptote Gevrey-$\frac{1}{k}$ à la série

$$\hat{F}=\sum_{i=0}^{\infty}a_{i/q}X^{i/q},$$

il existe des constantes positives C,B telles que

$$\left|a_{i/q}\right|\leq C\cdot B^{i/q}\cdot\Gamma(1+\tfrac{i}{k\cdot q}),\quad i\in\mathbb{N}.$$

En effet, en divisant l'inégalité (3.29) dans le cas $r = i_0/q$ par $|\tilde{x}|^{\frac{i_0-1}{q}}$ on a

$$\left|a_{i_0/q}\right| = \lim_{|\tilde{x}|\to 0} \frac{1}{|\tilde{x}|^{\frac{i_0-1}{q}}} \left| F(\tilde{x}) - \sum_{\frac{i}{q}<\frac{i_0-1}{q}} a_{i/q}\tilde{x}^{i/q} \right| \leq C \cdot B^{\frac{i_0-1}{q}} \Gamma(1 + \tfrac{i_0-1}{q\cdot k}). \blacksquare$$

Définition 3.52 *Soit $\hat{F} = \sum a_r X^r \in \mathbb{C}[[X]]^*$, on dit que $\hat{F}$ est Gevrey d'ordre $\frac{1}{k}$, $(0 < k \leq \infty)$, s'il existe des constantes $C, B > 0$ telles que*

$$|a_r| \leq C \cdot B^r \cdot \Gamma(1 + \frac{r}{k}), \quad \forall r \in \mathbb{Q},\, r > 0.$$

On désigne par $\mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ l'ensemble des séries $\hat{F}$ qui sont Gevrey d'ordre $\frac{1}{k}$.

Remarque 3.53 (i). La série $\hat{F} = \sum a_r X^r$ appartient à $\mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ si et seulement si la série

$$\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{F}) = \sum \frac{a_r}{\Gamma(1 + r/k)} X^r$$

est convergente. En particulier, $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/\infty)}$ si et seulement si $\hat{F}$ est convergente.
(ii). Si $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$, alors la série $J(F)$ est Gevrey d'ordre $1/k$.
(iii). On a $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/\infty)}\big)$ si et seulement si la série formelle $J(F)$ converge et F est sa somme.

On considère l'application :

$$J : \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big) \longrightarrow \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}. \tag{3.31}$$

Théorème 3.54 *Si I est un intervalle fermé de $\widetilde{S}$ de longueur plus grande ou égale à $\frac{\pi}{k}$, alors l'application de Taylor (3.31) est injective.*

Preuve. Par la proposition (3.5) l'application de Taylor est un homomorphisme de groupes, donc il suffit de montrer que $\mathrm{Ker} J = \{0\}$. D'après le lemme de Watson (voir page 137), on a $\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big) = 0$, si $0 < k < \infty$. Dans le cas $k = \infty$, l'intervalle I est réduit à un point, et J est injective car $J(F) = \hat{F}$ si et seulement si F est la somme de la série convergente $\hat{F}$. $\blacksquare$

Théorème 3.55 *Soit I un intervalle fermé de $\widetilde{S}$ de longueur plus petite que $\frac{\pi}{k}$. Alors l'application de Taylor (3.31) est surjective.*

Preuve. Si $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha > 0$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big) & \xrightarrow{J} & \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)} \\ \rho_\alpha \downarrow & & \downarrow \hat{\rho}_\alpha \\ \Gamma\big(\alpha \cdot I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(\alpha/k)}\big) & \xrightarrow{J} & \mathbb{C}[[X]]^*_{(\alpha/k)} \end{array} \tag{3.32}$$

Donc, on peut supposer que $|I| < \frac{\pi}{k} < 2\pi$, où $|I|$ désigne la longueur de I. Après une rotation on peut supposer que $I = [\frac{-\pi}{2k} + \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2k} - \frac{\delta}{2}]$, $\delta > 0$. Soit $\hat{F} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p/q} X^{p/q}$. Comme $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$, la série de fonctions

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p/q}}{\Gamma(1 + \frac{p}{q \cdot k})} u^{p/q},$$

est convergente et définit une fonction $\psi(u)$ sur $\widetilde{S} \times]0, R'] \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$. D'autre part

$$\Gamma(1 + \tfrac{\lambda}{k}) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\lambda/k}\, dt, \quad \lambda > 0.$$

Soit $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}$, si on fait le changement de variable $t = \bar{\rho}_k(u/\tilde{x})$, c'est-à-dire,

$$t = (\arg(t), |t|) = \Big(k(\arg(u) - \arg(\tilde{x}), |u|^k \,/\, |\tilde{x}|^k\Big)$$

on obtient

$$\Gamma(1 + \tfrac{\lambda}{k}) = \frac{\tilde{x}^{-k}}{\tilde{x}^{\lambda}} \cdot \int_0^{\infty(\arg \tilde{x})} u^{\lambda} \exp\left(-(u/\tilde{x})^k\right)\, d(u^k), \quad \tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}, \tag{3.33}$$

où $(u/\tilde{x})^k = |u|^k \,/\, |\tilde{x}|^k \cdot e^{ik(\arg u - \arg \tilde{x})} \in \mathbb{C}$ (voir le début de la sous- section (3.2.9) pour ce qui concerne les notations). Si $|\arg \tilde{x}| < \frac{\pi}{2k}$, on peut déformer le chemin d'intégration $\{\arg u = \arg \tilde{x}\}$ de l'intégrale ci-dessus en le chemin $\{\arg u = 0\}$ sans changer la valeur de l'intégrale. On a donc

$$\tilde{x}^{\lambda} = \frac{\tilde{x}^{-k}}{\Gamma(1 + \frac{\lambda}{k})} \cdot \int_0^{\infty(0)} u^{\lambda} \exp\Big(-(u/\tilde{x})^k\Big)\, d(u^k), \quad \lambda > 0,\ |\arg \tilde{x}| < \frac{\pi}{2k}.$$

Si $|u| \leq R',\ \tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}$ on a

$$\psi(u) \cdot \exp\Big(-(u/\tilde{x})^k\Big) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{p/q}}{\Gamma(1 + \frac{p}{q})} \cdot u^{p/q} \cdot \exp\Big(-(u/\tilde{x})^k\Big).$$

Soit $0 < R < R'$, on définit une fonction holomorphe sur $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}$

$$g(\tilde{x}) = \tilde{x}^{-k} \cdot \int_0^{R} \psi(u) \cdot \exp\Big(-(u/\tilde{x})^k\Big)\, d(u^k), \quad \tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{S}.$$

On va vérifier que la fonction $g(\tilde{x})$ est asymptote à la série $\sum_{p=0}^{\infty} a_{p/q} X^{p/q}$ au sens Gevrey-$\frac{1}{k}$ sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}[$. En effet, soit $\delta > 0$, on considère l'intervalle $I_\delta = [-\frac{\pi}{2k} + \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2k} - \frac{\delta}{2}]$. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$g(\tilde{x}) = \sum_{p=0}^{N} \frac{a_{p/q}}{\Gamma(1+\frac{p}{qk})} \tilde{x}^{-k} \left\{ \int_0^\infty v^{p/q} \exp\left(-(v/\tilde{x})^k\right) d(v^k) - \int_R^\infty v^{p/q} \exp\left(-(v/\tilde{x})^k\right) d(v^k) \right\} + \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{a_{p/q}}{\Gamma(1+\frac{p}{qk})} \tilde{x}^{-k} \int_0^R v^{p/q} \exp\left(-(v/\tilde{x})^k\right) d(v^k).$$

Si $\arg \tilde{x} \in I_\delta$, $\left| g(\tilde{x}) - \sum_{p=0}^{N} a_{p/q} \tilde{x}^{p/q} \right|$ est majoré par

$$\left| \sum_{p=0}^{N} \frac{a_{p/q}}{\Gamma(1+\frac{p}{qk})} \tilde{x}^{-k} \int_R^\infty v^{p/q} \exp\left(-(v/\tilde{x})^k\right) d(v^k) + \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{a_{p/q}}{\Gamma(1+\frac{p}{qk})} \tilde{x}^{-k} \int_0^R v^{p/q} \exp\left(-(v/\tilde{x})^k\right) d(v^k) \right|;$$

en faisant le changement de variable $v = R \cdot t$, ceci est majoré par

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{|a_{p/q}|}{\Gamma(1+\frac{p}{qk})} |\tilde{x}|^{-k} \int_1^\infty R^{\frac{p}{q}+k} t^{p/q} \exp\left(-\left(\tfrac{\varepsilon \cdot R}{|\tilde{x}|} t\right)^k\right) d(t^k) + \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{|a_{p/q}|}{\Gamma(1+\frac{p}{qk})} |\tilde{x}|^{-k} \int_0^1 R^{\frac{p}{q}+k} t^{p/q} \exp\left(-\left(\tfrac{\varepsilon \cdot R}{|\tilde{x}|} t\right)^k\right) d(t^k),$$

où $\varepsilon^k = \sin \delta$. Dans les deux intégrales $t^{p/q}$ est majoré par $t^{\frac{N+1}{q}}$, si $\arg \tilde{x} \in I_\delta$ et donc

$$\left| g(\tilde{x}) - \sum_{p=0}^{N} a_{p/q} \tilde{x}^{p/q} \right| \leq \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{|a_{p/q}|}{\Gamma(1+\frac{p}{qk})} R^{p/q} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon R} \right)^{\frac{N+1}{q}} \frac{1}{\varepsilon^k} |\tilde{x}|^{\frac{N+1}{q}} \Gamma(1+\tfrac{N+1}{qk}). \blacksquare$$

3.2.7 Les séries k-sommables.

Définition 3.56 *Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$. On dit que $\hat{F}$ est* k-sommable ($k > 0$) sur l'intervalle $I \subseteq \widetilde{S}$ *si :*

(i). *L'intervalle I est ouvert de longueur $> \frac{\pi}{k}$, ou bien I est fermé au moins en l'une de ses extrémités et de longueur $\geq \frac{\pi}{k}$.*

(ii). *La série* $\hat{F}$ *appartient à l'image de l'application injective*

$$J : \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big) \longrightarrow \mathbb{C}[[X]]^*.$$

Dans ce cas, si $J(F) = \hat{F}$ *on dit que* F *est la* k*-somme de* $\hat{F}$ *sur* I.
On dit que $\hat{F}$ *est* k-sommable dans la direction $d \in \widetilde{S}$, *si* $\hat{F}$ *est* k*-sommable sur l'intervalle*

$$I(d,k) = \{\theta \in \widetilde{S} \mid |\theta - d| \leq \tfrac{\pi}{k}\}.$$

Remarque 3.57 Si $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$ est k-sommable dans la direction d, alors $\hat{F}$ est k-sommable dans toute direction $d + 2\pi q m$, avec $m \in \mathbb{Z}$.
(ii). Si $\hat{F}$ est k-sommable dans la direction d, alors la série $\hat{F}$ est Gevrey d'ordre $1/k$.

Définition 3.58 *Soit* $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$. *On dit que* $d \in \widetilde{S}$ *est une* direction k-singulière *de* $\hat{F}$ *si* $\hat{F}$ *n'est pas* k*-sommable dans la direction* d. *On désigne par* $\Sigma_k(\hat{F})$ *l'ensemble des directions* k*-singulières de* $\hat{F}$. *On dit que* $\hat{F}$ *est* k-sommable *si l'ensemble*

$$\{d(\operatorname{mod} 2\pi) \mid d \in \Sigma_k(\hat{F})\}$$

est fini. On désigne par $\mathbb{C}\{X\}^*_{(1/k)}$ *l'ensemble des séries formelles* k*-sommables.*

Lemme 3.59 *Soit* $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$. *Soient* $d_1 < d_2 \in \widetilde{S}$ *tels que*

$$]d_1, d_2[\cap \Sigma_k(\hat{F}) = \emptyset.$$

Alors $\hat{F}$ *est* k*-sommable sur l'intervalle* $]d_1 - \frac{\pi}{2k}, d_2 + \frac{\pi}{2k}[$.

Preuve. Soit $\theta \in]d_1, d_2[$. Comme $\theta \notin \Sigma_k(\hat{F})$, il existe $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ tel que $J(F) = \hat{F}$ et $I = [\theta - \frac{\pi}{2k}, \theta + \frac{\pi}{2k}]$. On considère

$$\delta_0 = \sup\{\delta \mid \exists G \in \Gamma\big([\theta - \tfrac{\pi}{2k}, \theta + \tfrac{\pi}{2k} + \delta], \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big),\ G|_I = F\}.$$

Alors il existe $G \in \Gamma\big([\theta - \frac{\pi}{2k}, \theta + \frac{\pi}{2k} + \delta_0[, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ tel que $G|_I = F$. En particulier on a $J(G) = \hat{F}$. Supposons que $\theta + \delta_0 \notin \Sigma_k(\hat{F})$; alors il existe $\varepsilon > 0$ et $H \in \Gamma\big([\theta + \delta_0 - \frac{\pi}{2k} - \varepsilon, \theta + \delta_0 + \frac{\pi}{2k} + \varepsilon], \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ avec $J(H) = \hat{F}$. On a

$$G - H \in \Gamma\big([\theta + \delta_0 - \tfrac{\pi}{2k} - \varepsilon, \theta + \delta_0 + \tfrac{\pi}{2k}[, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$$

et $J(G - H) = 0$. D'après le théorème (3.54), $G = H$ sur l'intervalle $[\theta + \delta_0 - \frac{\pi}{2k} - \varepsilon, \theta + \delta_0 + \frac{\pi}{2k}[$, et on peut prolonger G sur l'intervalle $[\theta - \frac{\pi}{2k}, \theta + \delta_0 + \frac{\pi}{2k} + \varepsilon]$ ce qui contredit la définition de δ_0. Alors $\theta + \delta_0 \in \Sigma_k(\hat{F})$, donc $\theta + \delta_0 \geq d_2$. On procède de la même façon à gauche et on obtient le lemme. ∎

Corollaire 3.60 *Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_{(1/k)}$ tel que $\Sigma_k(\hat{F}) = \emptyset$, alors $\hat{F}$ est une série convergente.*

Preuve. Soit $\hat{F} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p/q} X^{p/q}$. Comme $\Sigma_k(\hat{F}) = \emptyset$, par le lemme précédent, il existe $F \in \Gamma\big([0, 2\pi q + \frac{\pi}{k}], \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ tel que $J(F) = \hat{F}$. On considère la fonction

$$H(\theta, r) = F(\theta, r) - F(\theta + 2\pi q, r), \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{k}].$$

Alors $H \in \Gamma\big([0, \frac{\pi}{k}], \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ et $J(H) = 0$, donc d'après le théorème (3.54), on a $H = 0$, et moyennant le lemme (3.8) on obtient la convergence de $\hat{F}$. ∎

Définition 3.61 *Soient $d \in \widetilde{S}$ et $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$, tels qu'il existe $\delta > 0$ avec $]d - \delta, d[\cap \Sigma_k(\hat{F}) = \emptyset$ et $]d, d + \delta[\cap \Sigma_k(\hat{F}) = \emptyset$. D'après le lemme précédent il existe des fonctions uniques*

$$F^- \in \Gamma\big([d - \tfrac{\pi}{2k}, d + \tfrac{\pi}{2k}[, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big),$$
$$F^+ \in \Gamma\big(]d - \tfrac{\pi}{2k}, d + \tfrac{\pi}{2k}], \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big),$$

telles que $J(F^+) = J(F^-) = \hat{F}$. On définit les opérateurs

$$\begin{aligned} S^-_{k,d}(\hat{F}) &= F^-|_d \in \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big), \\ S^+_{k,d}(\hat{F}) &= F^+|_d \in \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big). \end{aligned}$$

Remarque 3.62 (i). Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_(1/k)$. Pour toute direction $d \in \widetilde{S}$, il existe $\delta > 0$ tel que $]d - \delta, d[\cap \Sigma_k(\hat{F}) = \emptyset$ et $]d, d + \delta[\cap \Sigma_k(\hat{F}) = \emptyset$. Les applications $S^+_d(\hat{F})$ et $S^-_d(\hat{F})$ sont alors définies sur $\mathbb{C}\{X\}^*_{(1/k)}$.
(ii). Soit $d \in \widetilde{S}$ et $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_{(1/k)}$. On a $d \in \Sigma_k(\hat{F})$ si et seulement si $S^-_{k,d}(\hat{F}) \neq S^+_{k,d}(\hat{F})$. En effet, si $d \notin \Sigma_k(\hat{F})$, il existe $F \in \Gamma\big([d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}], \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ tel que $J(F) = \hat{F}$. On pose $F^- = F|_{[d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}[}$ et $F^+ = F|_{]d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}]}$. Réciproquement, si $S^-_{k,d}(\hat{F}) = S^+_{k,d}(\hat{F})$, alors $F^-|_{]d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}[} = F^+|_{]d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}[}$, ainsi il existe $F \in \Gamma\big([d - \frac{\pi}{2k}, d + \frac{\pi}{2k}], \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ tel que $J(F) = \hat{F}$, et donc $d \notin \Sigma_k(\hat{F})$.

3.2.8 Caractérisation géométrique de la sommabilité.

Soit $q \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on désigne par S_q l'espace topologique obtenu à partir de $\widetilde{S}$ en identifiant les points $(\theta, 0)$ et $(\theta', 0)$ si $\theta - \theta' = 2\pi q m$, avec $m \in \mathbb{Z}$. On pose $\tilde{\mathbb{C}}_q = S_q \times [0, \infty[$ et $\pi : \tilde{\mathbb{C}}_q \to \mathbb{C}$, $\pi(\theta (\mathrm{mod}\, 2\pi q), r) = re^{i\theta}$.

On construit le faisceau $\widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}$ sur $\tilde{\mathbb{C}}_q$ de façon analogue au faisceau $\widetilde{\mathcal{O}}$ sur $\widetilde{\mathbb{C}}$: Étant donné $W \subseteq \tilde{\mathbb{C}}_q$, on désigne par $\Gamma\big(W, \widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}\big)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions

$$F : \big(\tilde{\mathbb{C}}_q \setminus (S_q \times \{0\})\big) \bigcap W \longrightarrow \mathbb{C},$$

qui satisfont la propriété suivante : pour tout point $(\bar{\theta}, r) \in W$ avec $r > 0$ (on désigne par $\bar{\theta}$ l'élément $\theta(\operatorname{mod} 2\pi q)$), il existe un ouvert U

$$(\bar{\theta}, r) \in U \subseteq W \cap \{(\bar{\alpha}, l) \in \tilde{\mathbb{C}}_q \mid l > 0,\ \theta - \pi < \alpha < \theta + \pi\},$$

et une fonction holomorphe $f \in \Gamma\big(\pi(U), \mathcal{O}\big)$ tels que

$$F(\tilde{x}) = f \circ \pi(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in U.$$

Si I est un intervalle de $\widetilde{S}$, on désigne par $\bar{I}$ l'intervalle $\{\bar{\theta} \mid \theta \in I\}$.

Le faisceau $\widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}$ induit (voir la sous-section (2.2.2.1)) un faisceau sur S_q :

$$I \subseteq S_q \mapsto \Gamma\big(I, \widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}\big).$$

Remarque 3.63 Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$. Si la longueur de I est plus petite que $2\pi q$, on a

$$\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big) = \Gamma\big(\bar{I}, \widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}\big).$$

Si la longueur de I est plus grande que $2\pi q$ on a $\bar{I} = S_q$. Alors $\Gamma\big(S_q, \widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}\big)$ est formé par les fonctions $F \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ tels que $\mathcal{T}_{2\pi q}F = F$. Donc, si $F \in \Gamma\big(S_q, \widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}\big)$, il existe une fonction g holomorphe sur le disque épointé $\{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < R\}$ telle que

$$F(\bar{\theta}, r) = g(r^{1/q} e^{i\frac{\theta}{q}}).$$

Définition 3.64 *La fonction $\tilde{x}^{p/q}$ appartient à $\Gamma\big(S_q, \widetilde{\mathbb{C}_q\mathcal{O}}\big)$ si $p, q \in \mathbb{N}^*$. Ceci permet de définir la notion de développement asymptotique sur un intervalle $\bar{I} \subseteq S_q$ dans $\mathbb{C}[[X^{1/q}]]$. Ainsi, on construit le faisceau $S_q\mathcal{A}$ tel que $\Gamma\big(\bar{I}, S_q\mathcal{A}\big)$ soit formé par les fonctions qui ont un développement asymptotique sur $\bar{I}$ dans $\mathbb{C}[[X^{1/q}]]$. On construit aussi les faisceaux $S_q\mathcal{A}^{<0}$, $S_q\mathcal{A}^{\leq -k}$ et $S_q\mathcal{A}_{(1/k)}$.*

Alors, pour tout intervalle $I \subseteq \widetilde{S}$ on a les inclusions :

$$\Gamma\big(\bar{I}, S_q\mathcal{A}\big) \subseteq \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big),\ \Gamma\big(\bar{I}, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big) \subseteq \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big), \ldots \text{et c.}$$

Remarque 3.65 Si $F \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}\big)$ il existe une fonction g holomorphe sur $\{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < R\}$ telle que $F(\bar{\theta}, r) = g(re^{i\frac{\theta}{q}})$. Comme F admet un développement asymptotique, elle est continue à l'origine de $\mathbb{C}$, donc g est holomorphe dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$. Alors il existe une série convergente $\sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ telle que $F(\bar{\theta}, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta/q}$. ∎

Remarque 3.66 Soit $q \in \mathbb{N}$, $q > 0$. L'application de ramification (voir section (2.2.2)) $\bar{\rho}_{1/q} : \widetilde{S} \to \widetilde{S}$ induit un homéomorphisme $\bar{\rho}_{1/q} : S_q \to S_1$, et un isomorphisme de faisceaux entre $S_q\mathcal{A}$ et $S_1\mathcal{A}$, entre $S_q\mathcal{A}^{<0}$ et $S_1\mathcal{A}^{<0}$, entre $S_q\mathcal{A}^{\leq -k}$ et $S_1\mathcal{A}^{\leq -qk}$, et entre $S_q\mathcal{A}_{(1/k)}$ et $S_1\mathcal{A}_{(1/qk)}$. ∎

Théorème 3.67 *Soit $k > 0$. L'application*

$$J : \Gamma\big(S_q, \frac{S_q\mathcal{A}_{(1/k)}}{S_q\mathcal{A}^{\leq -k}}\big) \longrightarrow \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)} \cap \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$$

est un isomorphisme.

Preuve. D'après le lemme (3.49) l'application ci-dessus est injective. On considère un recouvrement $\{\bar{I}_j\}_{j=1,\ldots,l}$ de S_q par des intervalles de longueur plus petite que le minimum de $\frac{\pi}{k}$ et $2\pi q$. Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)} \cap \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$. D'après le théorème (3.55), il existe $F_j \in \Gamma\big(\bar{I}_j, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big)$, $j = 1, \ldots, l$, tels que $J(F_j) = \hat{F}$; comme $J(F_j - F_{j'}) = 0$ on a $F_j - F_{j'} \in \Gamma\big(\bar{I}_{j,j'}, S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big)$. Soit F l'élément de $\Gamma\big(S_q, \frac{S_q\mathcal{A}_{(1/k}}{S_q\mathcal{A}^{\leq -k}}\big)$ défini par la famille $\{(\bar{I}_j, F_j)\}$, alors $J(F) = \hat{F}$, et l'homomorphisme est surjectif. ∎

On va montrer que dans l'isomorphisme du théorème précédent on peut remplacer l'espace des fonctions qui ont un développement asymptotique de type Gevrey-$1/k$ par l'espace des fonctions qui ont simplement un développement asymptotique.

Lemme 3.68 *Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $k > 0$. Soit*

$$I =]\theta_1, \theta_2[\subseteq \widetilde{S}, \quad \textit{avec } \theta_2 - \theta_1 < 2\pi q.$$

Soit $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$. Alors il existe

$$H \in \Gamma\big(]\theta_1, \theta_2 + 2\pi q[, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big),$$

tel que

$$F(\theta, r) = H(\theta, r) - H(\theta + 2\pi q, r), \quad \theta \in I,$$
$$J(H) \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]].$$

Preuve. Après ramification par l'opérateur $\rho_{1/q}$, on peut supposer que $q = 1$. Il existe une fonction continue $R :]\theta_1, \theta_2[\to \mathbb{R}$, $R(\theta) > 0$, telle que F soit définie sur $\{(\theta, l) \in \widetilde{\mathbb{C}} \mid \theta \in I,\ 0 < l < R(\theta)\}$. Soit $\gamma \in I$, on considère la fonction

$$\Psi_\gamma(\theta, l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\gamma} \frac{f(y)}{le^{i\theta} - y}\, dy,$$

où C_γ est le chemin sur $\mathbb{C}$, $t \mapsto te^{i\gamma} \in \mathbb{C}$, $0 < t < R(\gamma)/2$, et f est la fonction holomorphe sur

$$V = \{x \in \mathbb{C} \mid \theta_1 < \arg x < \theta_2,\ 0 < |x| < R(\arg x)\}$$

telle que $F = f \circ \pi$. La fonction Ψ_γ est holomorphe sur $W \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ où $(\theta, l) \in W$ si $\theta \neq \gamma (\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Soit γ', $\theta_1 < \gamma' < \theta_2$, et $\gamma' \neq \gamma$, on désigne par $C_{\gamma,\gamma'}$ le chemin $\alpha \mapsto \frac{R(\alpha)}{2} e^{i\alpha} \in V$ qui part du point $\frac{R(\gamma)}{2} e^{i\gamma}$ et qui aboutit au point $\frac{R(\gamma')}{2} e^{i\gamma'}$. Si $\theta \in]\theta_2, \theta_1 + 2\pi[$, et $r > 0$, l'application $y \mapsto \frac{f(y)}{re^{i\theta} - y}$ est holomorphe sur

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \theta_1 + \varepsilon < \arg x < \theta_2 - \varepsilon,\ 0 < |x| < \tfrac{R(\arg x)}{2}\},$$

et continue sur l'adhérence de cet ensemble, donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\gamma + C_{\gamma,\gamma'} - C_{\gamma'}} \frac{f(y)}{re^{i\theta} - y}\, dy = 0, \quad \theta \in]\theta_2, \theta_1 + 2\pi[. \tag{3.34}$$

L'application

$$g_{\gamma,\gamma'}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\gamma,\gamma'}} \frac{f(y)}{x - y}\, dy, \quad x \in \mathbb{C} \setminus C_{\gamma,\gamma'},$$

est holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$. On pose $\Phi_{\gamma,\gamma'}(\theta, r) = g_{\gamma,\gamma'}(re^{i\theta})$.

On fixe $\gamma \in]\theta_1, \theta_2[$. Soit T le domaine sur $\widetilde{\mathbb{C}}$ défini comme suit : $(\theta, r) \in T$ si $\theta_1 < \theta < \theta_2 + 2\pi$ et on a

$$\begin{aligned} 0 < r < R(\theta)/2, &\quad \text{si} \quad \theta_1 < \theta \leq \gamma, \\ 0 < r < R(\gamma)/2, &\quad \text{si} \quad \gamma \leq \theta \leq \gamma + 2\pi, \\ 0 < r < R(\theta - 2\pi)/2, &\quad \text{si} \quad \gamma + 2\pi \leq \theta < \theta_2 + 2\pi. \end{aligned}$$

Pour chaque $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$ on choisit γ'_θ tel que $\theta_1 < \gamma'_\theta < \theta$; si $\theta \in]\theta_1 + 2\pi, \theta_2 + 2\pi[$ soit γ'_θ tel que $\theta < \gamma'_\theta + 2\pi < \theta_2 + 2\pi$. On définit la fonction H sur le domaine T :

$$H(\theta, r) = \begin{cases} \Psi_{\gamma'_\theta}(\theta, r) - \Phi_{\gamma,\gamma'_\theta}(\theta, r) & \text{si} \quad \theta_1 < \theta \leq \gamma, \\ \Psi_\gamma(\theta, r) & \text{si} \quad \gamma < \theta < \gamma + 2\pi, \\ \Psi_{\gamma'_\theta}(\theta, r) - \Phi_{\gamma,\gamma'_\theta}(\theta, r) & \text{si} \quad \gamma + 2\pi \leq \theta < \theta_2 + 2\pi. \end{cases}$$

Par l'égalité (3.34), H est holomorphe sur T. D'autre part, si $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$ et $0 < r < R(\theta)/2$, on a

$$H(\theta, r) - H(\theta + 2\pi, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\gamma'_\theta} + C_{\gamma'_\theta, \gamma'_{\theta+2\pi}} - C_{\gamma'_{\theta+2\pi}}} \frac{f(y)}{re^{i\theta} - y}\, dy = f(re^{i\theta}).$$

On montre à présent que H a un développement asymptotique Gevrey-$1/k$ sur l'intervalle $]\theta_1, \theta_2 + 2\pi[$. Soit $\delta > 0$, on pose $I_\delta =]\theta_1 + \delta, \theta_2 + 2\pi - \delta[$, $\gamma'_1 = \gamma'_{\theta_1+\delta}$ et $\gamma'_2 = \gamma'_{\theta_2+2\pi-\delta}$. Soient $I_1 =]\theta_1+\delta, \theta_1+2\pi[$ et $I_2 =]\theta_2, \theta_2+2\pi-\delta[$. On a

$$\begin{aligned} H(\theta, r) &= \Psi_{\gamma'_1}(\theta, r) - \Phi_{\gamma, \gamma'_1}(\theta, r) \quad \text{si} \quad \theta \in I_1, \\ H(\theta, r) &= \Psi_{\gamma'_2}(\theta, r) - \Phi_{\gamma, \gamma'_2}(\theta, r) \quad \text{si} \quad \theta \in I_2. \end{aligned}$$

Comme Φ_{γ,γ'_1} et Φ_{γ,γ'_2} sont définis par les fonctions g_{γ,γ'_1} et g_{γ,γ'_1} qui sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$, il suffit de montrer que $\Psi_{\gamma'_1}$ et $\Psi_{\gamma'_2}$ ont un développement asymptotique Gevrey-$1/k$. On a

$$\frac{1}{x-y} = \frac{-1}{y}\left(\sum_{p=0}^{N-1}\left(\frac{x}{y}\right)^p + \left(\frac{x}{y}\right)^N \frac{1}{1-x/y}\right), \quad x \neq y,\ x, y \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{N}.$$

Alors si $\theta \in I_1$ on a

$$\Psi_{\gamma'_1}(\theta, r) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\sum_{p=0}^{N-1} \int_{C_{\gamma'_1}} \frac{f(y)x^p}{y^{p+1}}\, dy + \int_{C_{\gamma'_1}} \frac{f(y)x^N}{y^{N+1} - xy^N}\, dy\right), \quad x = re^{i\theta}.$$

Par hypothèse on a $|f(y)| \leq C \exp\left(\frac{-B}{|y|^k}\right)$, $B > 0$, si $y \in C_{\gamma'_1}$. Alors, si l'on considère

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{C_{\gamma'_1}} \frac{f(y)}{y^{p+1}}\, dy = a_p \in \mathbb{C},$$

on a

$$\left|\Psi_{\gamma'_1}(\theta, r) - \sum_{p=0}^{N-1} a_p r^p e^{ip\theta}\right| = \frac{r^N}{2\pi} \cdot \left|\int_{C_{\gamma'_1}} \frac{f(y)}{y^{N+1} - re^{i\theta} y^N} dy\right|, \quad \theta \in I_1.$$

Si $y \in C_{\gamma'_1}$ et $\theta \in I_1$ on a $\left|y - re^{i\theta}\right| \geq |y| \sin(\theta_1 + \delta - \gamma'_1)$. On pose $\varepsilon = \sin(\theta_1 + \delta - \gamma'_1) > 0$. Alors

$$\left|\Psi_{\gamma'_1}(\theta, r) - \sum_{p=0}^{N-1} a_p r^p e^{ip\theta}\right| \leq \frac{r^N C}{2\pi\varepsilon} \int_0^\infty t^{-(N+1)} \exp(-B/t^k)\, dt =$$

$$\frac{Cr^N}{2\pi\varepsilon k}\left(\frac{1}{B}\right)^{N/k} \Gamma(\frac{N}{k}), \quad \theta \in I_1.$$

Ceci implique $\Psi_{\gamma_1'} \in \Gamma\big(I_1, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$; on montre de façon analogue que $\Psi_{\gamma_2'} \in \Gamma\big(I_2, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$, donc finalement $H \in \Gamma\big(]\theta_1, \theta_2 + 2\pi[, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$. ∎

Définition 3.69 *Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,t}$ un recouvrement de S_q (ou bien d'un intervalle de S_q, ou de $\widetilde{S}$), on dit que $\mathcal{U}$ est un 2-recouvrement par des intervalles ouverts si chaque U_i est un intervalle ouvert et les intersections trois à trois sont vides. Après si nécessaire, une renumérotation des indices, on peut supposer que $U_i =]\alpha_i, \beta_i[(\mathrm{mod}\, 2\pi q)$, avec $\beta_i - \alpha_i < 2\pi q$, et que*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \alpha_3 < \beta_2 < \cdots < \beta_{t-2} < \alpha_t < \beta_{t-1} < \beta_t.$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{U}$ est un 2-recouvrement avec indices ordonnés. On notera par $U_{i,j} = U_i \cap U_j$.

Lemme 3.70 *Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $k > 0$. Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,t}$ un 2-recouvrement de S_q par des intervalles ouverts. Soient*

$$F_{i,j} \in \Gamma\big(U_{i,j}, S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big), \quad i \neq j, \quad i,j \in \{1,\dots,t\},$$

tels que $F_{i,j} = -F_{j,i}$ pour tout $i \neq j$. Alors il existe

$$F_i \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big), \quad 1 \leq i \leq t,$$

tels que

$$F_{i,j} = F_i|_{U_{i,j}} - F_j|_{U_{i,j}}, \quad i \neq j,\ i,j \in \{1,\dots,t\}$$

Preuve. On considère des intervalles ouverts $V_1, \dots, V_t$ de $\widetilde{S}$ tels que $U_i = V_i (\mathrm{mod}\, 2\pi q)$ et tels que $U_{i,j} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, si et seulement si $V_{i,j} = V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Soient $l, m \in \{1,\dots,t\}$, $l \neq m$, tels que $\emptyset \neq V_{j,m} =]\theta_1, \theta_2[$. D'après le lemme précédent il existe des fonctions

$$H^{(l,m)} \in \Gamma\big(]\theta_1, \theta_2 + 2\pi q[, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big),$$

telles que $H^{(l,m)}(\theta, r) - H^{(l,m)}(\theta + 2\pi q, r) = F_{l,m}(\theta, r)$. Soit

$$H_i^{(l,m)} = H^{(l,m)}|_{V_i} \in \Gamma\big(V_i, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big), \quad i = 1,\dots,t.$$

Comme la longueur de V_i est plus petite que $2\pi q$ et $J(H_i^{(l,m)}) \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$ on a $H_i^{(l,m)} \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big)$. Alors

$$\begin{aligned} H_i^{(l,m)}|_{U_{i,j}} - H_j^{(l,m)}|_{U_{i,j}} &= 0, \quad \text{si } \{i,j\} \neq \{l,m\}, \\ H_l^{(l,m)}|_{U_{l,m}} - H_m^{(l,m)}|_{U_{l,m}} &= F_{l,m}. \end{aligned}$$

On pose

$$F_i = \sum_{l<m} H_i^{(l,m)} \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big), \quad 1 \le i \le t.$$

Alors, si $i < j$ et $U_{i,j} \neq \emptyset$ on a

$$F_i|_{U_{i,j}} - F_j|_{U_{i,j}} = H_i|_{U_{i,j}} - H_j|_{U_{i,j}} = F_{i,j}. \blacksquare$$

Théorème 3.71 (Ramis-Sibuya) *On a*

$$\Gamma\big(S_q, \frac{S_q\mathcal{A}}{S_q\mathcal{A}^{\le -k}}\big) = \Gamma\big(S_q, \frac{S_q\mathcal{A}_{(1/k)}}{S_q\mathcal{A}^{\le -k}}\big).$$

Preuve. Un élément $F \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\le -k}\big)$ est donné par un 2-recouvrement $\{U_i\}_{1\le i\le t}$ par des intervalles ouverts et par des $F_i \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}\big)$ tels que $F_{i,j} = F_i|_{U_{i,j}} - F_j|_{U_{i,j}} \in \Gamma\big(U_{i,j}, S_q\mathcal{A}^{\le -k}\big)$. D'après le lemme précédent, il existe des $G_i \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big)$ tels que $F_{i,j} = G_i|_{U_{i,j}} - G_j|_{U_{i,j}}$. Si on pose $H_i = F_i + G_i$, on a pour tout i, j, $H_i|_{U_{i,j}} - H_j|_{U_{i,j}} = 0$, donc il existe $H \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}\big)$ tel que $H|_{U_i} = H_i$. Par la remarque (3.65), H est convergente, donc $H \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big)$, et $F_i \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big)$. $\blacksquare$

Les théorèmes précédents donnent, pour chaque couple (q,k) avec q un entier positif et r un réel positif, l'isomorphisme suivant

$$J_{(q,k)} : \Gamma\big(S_q, \frac{S_q\mathcal{A}}{S_q\mathcal{A}^{\le -k}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)} \bigcap \mathbb{C}[[X^{1/q}]], \quad q \in \mathbb{N}^*,\ k > 0. \quad (3.35)$$

Définition 3.72 *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ on a l'homomorphisme injectif*

$$\Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\le -k}\big) \longrightarrow \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\le -k}\big).$$

Si $q' = q \cdot h$, on a $\Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\le -k}\big) \subseteq \Gamma\big(S_{q'}, S_{q'}\mathcal{A}/S_{q'}\mathcal{A}^{\le -k}\big)$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)} \cap \mathbb{C}[[X^{1/q}]] & \xrightarrow{J^{-1}_{(q,k)}} & \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\le -k}\big) & \subseteq & \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\le -k}\big) \\
\downarrow & & \downarrow & & || \\
\mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)} \cap \mathbb{C}[[X^{1/q'}]] & \xrightarrow{J^{-1}_{(q',k)}} & \Gamma\big(S_{q'}, S_{q'}\widetilde{\mathcal{A}}/S_{q'}\widetilde{\mathcal{A}}^{\le -k}\big) & \subseteq & \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\le -k}\big).
\end{array} \quad (3.36)$$

On considère

$$\lim_{\rightarrow} \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\le -k}\big) = \bigcup_q \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\le -k}\big) \subseteq \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\le -k}\big).$$

Par le théorème de Ramis–Sibuya on a

$$\varinjlim \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big) \subseteq \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big).$$

Pour $0 < k < \infty$, *on désigne par* J_k *l'isomorphisme*

$$J_k\colon \varinjlim \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X]]^{*}_{(1/k)}. \tag{3.37}$$

On a la caractérisation suivante :

Théorème 3.73 *Soit* $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^{*}_{(1/k)}$, $0 < k < \infty$, *et soit* I *un intervalle de* $\widetilde{S}$ *de longueur* $> \pi/k$, *ou bien de longueur* $\geq \pi/k$ *et fermé au moins en l'une de ses extrémités. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i). *La série* $\hat{F}$ *est* k*-sommable sur l'intervalle* I *de somme* G.

(ii). *Soit* $F_0 = J_k^{-1}(\hat{F}) \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$. *Il existe une fonction*

$$G \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$$

tel que

$$F_0|_I = G \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big).$$

Preuve. On a $F_0 \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$. Si $G \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$, comme $J(F_0) = J(G)$ on a $F_0|_I = G \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$. Réciproquement, si $F_0|_I = G$ alors $G \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$ et $J(G) = \hat{F}$. ∎

Définition 3.74 *Soit* $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$, *où* I *est un sous-ensemble de* $\widetilde{S}$ *(resp.* $F \in \Gamma\big(I, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big)$, $I \subseteq S_q$*). Soit* $F = \{(F_i, U_i); i \in A\}$, *par la proposition (3.5) et la remarque (3.15) on a* $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}\, F_i}{\mathrm{d}\, x} \in \Gamma\big(U_i, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$ *et* $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}\, F_{i,j}}{\mathrm{d}\, x} \in \Gamma\big(U_i, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$. *On définit*

$$\tilde{x}\frac{\mathrm{d}\, F}{\mathrm{d}\, x} = \{(\tilde{x}\frac{\mathrm{d}\, F_i}{\mathrm{d}\, x}, U_i); i \in A\} \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big),\ (\textit{resp.} \in \Gamma\big(I, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big)).$$

Lemme 3.75 *Soient* $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^{*}_{(1/k)}$, *et* $F_0 = J_k^{-1}(\hat{F})$. *Alors* $X\frac{\mathrm{d}\,\hat{F}}{\mathrm{d}\, X} \in \mathbb{C}[[X]]^{*}_{(1/k)}$ *et* $J_k^{-1}(X\frac{\mathrm{d}\,\hat{F}}{\mathrm{d}\, X}) = \tilde{x}\frac{\mathrm{d}\, F_0}{\mathrm{d}\, x}$.

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$. La fonction $F_0 \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/SqA^{\leq -k}\big)$, donc $\frac{\mathrm{d}\, F_0}{\mathrm{d}\, x} \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/SqA^{\leq -k}\big)$. D'après le théorème (3.71), on a

$$\frac{\mathrm{d}\, F_0}{\mathrm{d}\, x} \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}/SqA^{\leq -k}\big),$$

donc $J_k(\frac{\mathrm{d}\, F_0}{\mathrm{d}\, x}) = \frac{\mathrm{d}\,\hat{F}}{\mathrm{d}\, X} \in \mathbb{C}[[X]]^{*}_{(1/k)}$. ∎

Proposition 3.76 *Soit $\hat{F}$ une série formelle k-sommable sur l'intervalle I de somme F. Alors la série $X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}$ est k-sommable sur I de somme $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.*

Preuve. Soit $F_0 = J_k^{-1}(\hat{F})$. D'après le théorème précédent, on a $F_0|_I = F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$. Alors, moyennant la remarque (3.15), on a

$$\tilde{x}\frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}x}\bigg|_I = \tilde{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big).$$

Comme $J_k^{-1}(X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}) = \tilde{x}\frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}x}$, d'après le théorème précédent la fonction $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ est la k-somme de $X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}$ sur l'intervalle I. ∎

Corollaire 3.77 *Soit $\hat{F}$ une série formelle k-sommable. Alors la série $X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}$ est k-sommable et pour toute direction $d \in \widetilde{S}$ on a*

$$S^{+}_{k;d}\left(X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}\right) = \tilde{x}\frac{\mathrm{d}S^{+}_{k;d}(\hat{F})}{\mathrm{d}x}, \quad S^{-}_{k;d}\left(X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}\right) = \tilde{x}\frac{\mathrm{d}S^{-}_{k;d}(\hat{F})}{\mathrm{d}x}.$$

Remarque 3.78 Soient $F_1, \ldots, F_m \in \Gamma\big(I, \mathcal{F}/\mathcal{F}^{\leq -k}\big)$, où on désigne par $\mathcal{F}$ ou bien le faisceau $\widetilde{\mathcal{A}}$ ou bien $S_q\mathcal{A}$, et $I \subseteq \widetilde{S}$ ou $I \subseteq S_q$. Supposons que les séries formelles $J(F_1), \ldots, J(F_m)$ n'aient pas de terme constant. Soit $g(x, y_1, \ldots, y_m)$ une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{m+1}$. On définit $g(\tilde{x}, F_1, \ldots, F_m)$ de la façon suivante : Il existe un recouvrement $\{U_i\}_{i\in A}$ par des intervalles ouverts tel que $F_l = \{(F_{l,i}, U_i)\}_{i\in A}$. D'après les propriétés élémentaires des développements asymptotiques, pour chaque ouvert U_i

$$g(\tilde{x}, F_{1,i}, \ldots, F_{m,i}) \in \Gamma\big(U_i, \mathcal{F}\big),$$

et $J(g(\tilde{x}, F_{1,i}, \ldots, F_{m,i})) = g(X, F_1, \ldots, F_m)$. On a

$$g(x, z_1, \ldots, z_m) = g(x, y_1 + (z_1 - y_1), \ldots, y_m + (z_m - y_m)) =$$

$$g(x, y_1, \ldots, y_m) + \sum_{l=1}^{m}(z_l - y_l)\cdot \nu_l(x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m),$$

où les fonctions ν_l sont holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{2m+1}$. Donc, moyennant la remarque (3.51)

$$g(\tilde{x}, F_{1,i}, \ldots, F_{m,i})|_{U_i\cap U_j} - g(\tilde{x}, F_{1,j}, \ldots, F_{m,j})|_{U_i\cap U_j} \in \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{F}^{\leq -k}\big).$$

Alors

$$g(\tilde{x}, F_1, \ldots, F_m) = \{(g(\tilde{x}, F_{1,i}, \ldots, F_{m,i}), U_i)\}_{i\in A} \in \Gamma\big(I, \mathcal{F}/\mathcal{F}^{\leq -k}\big).$$

(ii). Soient $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ des séries sans terme constant, et

$$g(x, y_1, \ldots, y_m)$$

une fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{m+1}$. D'après la remarque précédente on a

$$J_k^{-1}\big(g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)\big) = g\big(\tilde{x}, J_k^{-1}(\hat{F}_1), \ldots, J_k^{-1}(\hat{F}_m)\big).$$

(iii). Soient $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ avec $\hat{F}(0) = a_i$. Soit $g(x, y_1, \ldots, y_m)$ une fonction holomorphe au point $(0, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$. Alors la fonction $h(x, z_1, \ldots, z_m) = g(x, a_1 + z_1, \ldots, a_m + z_m)$ est holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{m+1}$. On a $g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m) = h(X, \hat{F}_1 - a_1, \ldots, \hat{F}_m - a_m)$, et donc

$$J_k^{-1}\big(g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)\big) = g\big(\tilde{x}, J_k^{-1}(\hat{F}_1), \ldots, J_k^{-1}(\hat{F}_m)\big).$$

Proposition 3.79 *Soient $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ des séries k-sommables sur l'intervalle I de sommes respectives $F_1, \ldots, F_m$. Soit $a_l = \hat{F}(0)$, $1 \leq l \leq m$. Soit $g(x, y_1, \ldots, y_m)$ une fonction holomorphe au point $(0, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$. Alors la série $g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)$ est k-sommable sur I de somme la fonction $g(\tilde{x}, F_1, \ldots, F_m)$. En particulier $g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m) \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$.*

Preuve. Soit $F_{l,0} = J_k^{-1}(\hat{F}_l)$, $1 \leq l \leq m$. On a

$$g(\tilde{x}, F_1, \ldots, F_m) = g(\tilde{x}, F_{1,0}, \ldots, F_{m,0})|_I \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$$

car $F_l = F_{l,0}|_I \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}\big)$. Le résultat se déduit de la remarque précédente et du théorème (3.73). ∎

Corollaire 3.80 *Soient $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m$ des séries formelles k-sommables. Soit $g(x, y_1, \ldots, y_m)$ une fonction holomorphe au point $(0, \hat{F}_1(0), \ldots, \hat{F}_m(0))$. Alors la série $g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)$ est k-sommable. De plus, pour toute direction $d \in \widetilde{S}$ on a*

$$S^+_{k;d}\big(g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)\big) = g\big(\tilde{x}, S^+_{k;d}(\hat{F}_1), \ldots, S^+_{k;d}(\hat{F}_m)\big),$$
$$S^-_{k;d}\big(g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)\big) = g\big(\tilde{x}, S^-_{k;d}(\hat{F}_1), \ldots, S^-_{k;d}(\hat{F}_m)\big).$$

On déduit de (3.77) et (3.80) le théorème suivante :

Théorème 3.81 *L'ensemble $\mathbb{C}\{X\}^*_{(1/k)}$ des séries k-sommables est une $\mathbb{C}$-algèbre différentielle, pour la dérivation $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$. L'ensemble $\mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ est un anneau différentiel pour la dérivation $X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}$. Pour toute direction $d \in \widetilde{S}$, les applications $S^+_{k;d}$ et $S^-_{k;d}$ sont des homomorphismes d'anneaux différentiels.*

Lemme 3.82 *Soit* $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ *tel que* $\hat{F}(0) \neq 0$. *Soit* $F_0 = J_k^{-1}(\hat{F})$. *Alors* $1/\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$, *et* $J_k^{-1}(1/\hat{F}) = 1/F_0$.

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$. Soit

$$F_0 = J_k^{-1}(\hat{F}) \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big).$$

Soit $\{U_i\}_{i\in A}$ un recouvrement de S_q tel que $F_0 = \{(F_{0,i}, U_i)\}_{i\in A}$. Moyennant les propriétés élémentaires des développements asymptotiques, on a $1/F_{0,i} \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}\big)$ et $J(1/F_{0,i}) = 1/\hat{F}$. Si $i, j \in A$ tels que $U_{i,j} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors

$$\frac{1}{F_{0,i}}\bigg|_{U_{i,j}} - \frac{1}{F_{0,j}}\bigg|_{U_{i,j}} = \Big(F_{0,j}|_{U_{i,j}} - F_{0,i}|_{U_{i,j}}\Big) \cdot \frac{1}{F_{0,i}|_{U_{i,j}} \cdot F_{0,j}|_{U_{i,j}}}.$$

D'après la remarque (3.15), on a

$$H_0 = \{(1/F_{0,i}, U_i)\}_{i\in A} \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big).$$

D'après le théorème (3.71), on a $H_0 \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k}\big)$, et $J(H_0) = 1/\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$; donc finalement $H_0 = J_k^{-1}(1/\hat{F})$. ∎

Proposition 3.83 *Soit* $\hat{F}$ *une série* k*-sommable sur l'intervalle* I*, de somme* F. *Supposons que* $\hat{F}(0) \neq 0$. *Alors la série* $1/\hat{F}$ *est* k*-sommable sur* I *de somme* $1/F$.

Preuve. Soit $F_0 = J_k^{-1}(\hat{F})$. Moyennant les propriétés élémentaires des développements asymptotiques, on a $1/F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$ et $J(1/F) = 1/\hat{F}$. Comme $F_0|_I = F \pmod{\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}}$, on a $1/F_0|_I = 1/F \pmod{\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}}$. D'après le théorème (3.73) la série $1/\hat{F}$ est k-sommable sur I, de somme $1/F$. ∎

3.2.9 Les transformations de Borel–Laplace.

Dans cette sous-section on rappelle quelques résultats d'analyse utiles dans la suite. On ne donnera pas de démostrations. On suivra pour l'essentiel le livre de Balser [Bal.94] et le cours de Malgrange [10] où le elcteur pourra trouver les preuves complètes.

3.2.9.1 Définitions et notations.

Soit I un intervalle de $\widetilde{S}$; on considère l'ensemble $W = I\times]R,\infty[\subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$, où $\widetilde{\mathbb{C}}$ est la surface de Riemann du logarithme décrite dans la sous-section (2.2.2). Soit $F \in \Gamma\big(W, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$. On dit que F est d'ordre exponentiel à l'infini plus petit ou égal à k $(0 < k < \infty)$, si pour tout intervalle fermé $I' \subseteq I$ et $R' > R$ il existe des constantes $A_{(I',R')}, B_{(I',R')} > 0$ tels que

$$|F(\tilde{u})| \leq A_{(I',R')} \exp\left(B_{(I',R')} \cdot |\tilde{u}|^k\right), \quad \tilde{u} \in I' \times [R', \infty[.$$

Si $F \in \Gamma\big(I\times]0,R[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$, on dit que F est continue à l'origine s'il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que pour tout sous-intervalle fermé $I' \subseteq I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que $|F(\tilde{x}) - A| < \varepsilon$ si $\tilde{x} \in I'\times]0,\delta[$. On dit que F est bornée à l'origine si pour toute sous-intervalle fermé $I' \subseteq I$ il existe $M, \varepsilon > 0$, tels que $|F(\tilde{x})| \leq M$ si $\tilde{x} \in I'\times]0,\varepsilon]$.

Si $\tilde{x} = (\theta, r), \tilde{y} = (\theta', r') \in \widetilde{\mathbb{C}}$ avec $r \neq 0 \neq r'$, on utilise les notations suivantes :

$$\begin{array}{l} \tilde{x}\tilde{y} = (\theta + \theta', rr') \in \widetilde{\mathbb{C}}, \quad \tilde{x}/\tilde{y} = (\theta - \theta', r/r'), \\ \bar{\rho}_\alpha(\tilde{x}) = (\alpha\theta, r^\alpha) \in \widetilde{\mathbb{C}}, \quad \alpha > 0, \\ \mathrm{Lg}(\tilde{x}) = \ln(r) + i \cdot \theta \in \mathbb{C}, \quad \tilde{x}^\lambda = \exp\left(\lambda \cdot \mathrm{Lg}(\tilde{x})\right) \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{array}$$

3.2.9.2 La transformation de Laplace.

Soit $I =]a,b[\subseteq \widetilde{S}$, et $F \in \Gamma\big(I\times]0,\infty[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ une fonction d'ordre exponentiel à l'infini plus petit où égal à k, $(0 < k < \infty)$, et continue à l'origine. Soit $I' \subseteq I$ un intervalle fermé, et $\tau \in I'$, alors l'intégrale

$$(\mathcal{L}_{k,\tau}F)(\tilde{z}) = \tilde{z}^{-k} \cdot \int_0^{\infty(\tau)} F(\tilde{u}) \exp\left(-(\tilde{u}/\tilde{z})^k\right) \, d(\tilde{u}^k)$$

est absolument et uniformément convergente sur les compacts de l'ouvert : $-\pi/2k < \tau - \arg(\tilde{z}) < \pi/2k$, $B_{(I',1)}\,|\tilde{z}|^k < \cos\big(k(\tau - \arg(\tilde{z}))\big)$. Soit $\tau' \in I'$, par un argument de déformation du chemin d'intégration, $\mathcal{L}_{k,\tau'}F$ est un prolongement analytique de $\mathcal{L}_{k,\tau}F$. Donc il existe une fonction

$$\mathcal{L}_kF \in \Gamma\big(]a - \tfrac{\pi}{2k}, b + \tfrac{\pi}{2k}, \widetilde{\mathcal{O}}\big).$$

telle que $(\mathcal{L}_kF)|_{]\tau - \frac{\pi}{2k}, \tau + \frac{\pi}{2k}[} = \mathcal{L}_{k,\tau}F$, $\tau \in I$. On dit que $\mathcal{L}_kF$ est la transformée de Laplace d'indice k de F.

Remarque 3.84 (i). Soit ρ_k l'opérateur de ramification. On a

$$\rho_k(\mathcal{L}_kF) = \mathcal{L}_1(\rho_kF).$$

(ii). Si $F(\tilde{u}) = \tilde{u}^\lambda$, avec $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, on a

$$(\mathcal{L}_k F)(\tilde{z}) = \Gamma(1 + \tfrac{\lambda}{k}) \cdot \tilde{z}^\lambda.$$

Définition 3.85 *Soit $\hat{F} = \sum a_r X^r \in \mathbb{C}[[X]]^*$, et $k > 0$. La série*

$$\hat{\mathcal{L}}_k \hat{F} = \sum a_r \cdot \Gamma(1 + \tfrac{r}{k}) \cdot X^r$$

est appelée la transformée de Laplace formelle d'indice k de $\hat{F}$.

Théorème 3.86 *Soit $I =]a, b[$ et $F \in \Gamma\big(I \times]0, \infty[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$. Supposons que*

(i). *F est d'ordre exponentiel à l'infini plus petit ou égal à k.*

(ii). *On a $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k_1)}\big)$, $0 < k_1 \leq \infty$, $J(F) = \hat{F}$.*

Soit k_2, tel que

$$\begin{aligned} 1/k_2 &= 1/k + 1/k_1, \quad si \quad 0 < k_1 < \infty, \\ k_2 &= k \quad si \quad k_1 = \infty. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_k F \in \Gamma\big(]a - \tfrac{\pi}{2k}, b + \tfrac{\pi}{2k}[, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k_2)}\big), \\ J(\mathcal{L}_k F) = \hat{\mathcal{L}}_k(J(F)). \end{gathered}$$

3.2.9.3 La transformation de Borel.

Soient I un intervalle de $\widetilde{S}$ et $F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ une fonction bornée à l'origine. Soient $\tau \in \widetilde{S}$, $k > 0$ et $0 < \varepsilon < \pi/2k$; on désigne par $\gamma_k(\tau)$ le chemin sur $\widetilde{\mathbb{C}}$ composé des chemins suivants : $\rho \mapsto (\tau + \varepsilon + \pi/2k, \rho) \in \widetilde{\mathbb{C}}$, $0 < \rho \leq \varepsilon$; $\theta \mapsto (\theta, \varepsilon)$, $\tau - \varepsilon - \pi/2k \leq \theta \leq \tau + \varepsilon + \pi/2k$, parcouru dans le sens inverse ; et $\rho \mapsto (\tau - \varepsilon - \pi/2k, \varepsilon - \rho)$, $0 \leq \rho < \varepsilon$.

Si $\tau \in I$ et $[\tau - \varepsilon - \pi/2k, \tau + \varepsilon + \pi/2k] \subseteq I$, on considère l'intégrale

$$(\mathcal{B}_{k,\tau} F)(\tilde{u}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\tau)} \tilde{z}^k F(\tilde{z}) \exp\big((\tilde{u}/\tilde{z})^k\big)\ d(\tilde{z}^{-k}),$$

où $\tilde{u} \in]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[\times]0, \infty[\subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$. La fonction $\mathcal{B}_{k,\tau} F$ est une fonction analytique, et si $\tau' \in I$, $\mathcal{B}_{k,\tau'} F$ est un prolongement analytique de $\mathcal{B}_{k,\tau} F$. Donc, si $I =]a, b[$ avec $b - a > \pi/k$, le recollement des $\mathcal{B}_{k,\tau} F$ définit une fonction

$$\mathcal{B}_k F \in \Gamma\big(]a + \pi/2k, b - \pi/2k[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$$

appelée la transformée de Borel d'indice k de F.

Remarque 3.87 (i). Soit $k > 0$, et ρ_k l'application de ramification. On a

$$\rho_k(\mathcal{B}_k F) = \mathcal{B}_1(\rho_k F).$$

(ii). Si $F(\tilde{z}) = \tilde{z}^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, par la formule intégrale de Hankel on a

$$(\mathcal{B}_k F)(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u}^\lambda}{\Gamma(1 + \frac{\lambda}{k})}.$$

Définition 3.88 *Soit $\hat{F} = \sum a_r X^r \in \mathbb{C}[[X]]^*$. Soit $k > 0$. La série*

$$\hat{\mathcal{B}}_k \hat{F} = \sum \frac{a_r}{\Gamma(1 + \frac{r}{k})} X^r,$$

est appelée la transformée de Borel formelle d'indice k de la série $\hat{F}$.

Théorème 3.89 *Soient $I =]a, b[$ un intervalle de $\widetilde{S}$, $k_1 > 0$,*

$$F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k_1)}\big), \quad \hat{F} = J(F),$$

et $k > 0$ tel que $b - a > \pi/k$. On considère l'intervalle

$$\tilde{I} =]a + \pi/2k, b - \pi/2k[.$$

Alors :

(i). *La fonction $\mathcal{B}_k F \in \Gamma\big(\tilde{I} \times]0, \infty[, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ est d'ordre exponentiel à l'infini plus petit ou égal à k, et continue à l'origine.*

(ii). *Si $k_1 < k$, soit k_2 tel que $1/k_2 = 1/k_1 - 1/k$. On a*

$$\mathcal{B}_k F \in \Gamma\big(\tilde{I}, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k_2)}\big),$$
$$J(\mathcal{B}_k F) = \hat{\mathcal{B}}_k \hat{F}.$$

(iii). *Si $k_1 \geq k$, la série $\hat{\mathcal{B}}_k \hat{F}$ est convergente et $\mathcal{B}_k F$ est un prolongement analytique de sa somme.*

(iv). *Si $k_1 > k$, $\mathcal{B}_k F$ est d'ordre exponentiel à l'infini plus petit ou égal à $(1/k - 1/k_1)^{-1}$.*

3.2.9.4 Théorèmes d'inversion.

Théorème 3.90 *Soient I, k_1, F, k, et $\tilde{I}$ comme dans le théorème (3.89). Alors la fonction $\mathcal{B}_k F$ satisfait les hypothèses du théorème (3.86), et on a*

$$F = \mathcal{L}_k \mathcal{B}_k F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{O}}\big).$$

Théorème 3.91 *Soient I et F comme dans le théorème (3.86). La fonction $\mathcal{L}_k F$ satisfait les hypothèse du théorème (3.89), et*

$$F = \mathcal{B}_k \mathcal{L}_k F.$$

3.2.9.5 Caractérisation des séries k-sommables.

Soit $k > 0$ et $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$. Alors la série $\hat{\mathcal{B}}_k\hat{F}$ est convergente ; soit $G \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ sa somme. Soit $d \in \widetilde{S}$. Comme conséquence directe des théorèmes précédents, la série $\hat{F}$ est k-sommable dans la direction d si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction G se prolonge sur $]d-\varepsilon, d+\varepsilon[\subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ et soit d'ordre exponentiel à l'infini plus petit ou égal à k. Dans ce cas, la somme de $\hat{F}$ sur l'intervalle $[d - \pi/2k, d + \pi/2k]$ est $\mathcal{L}_k G$.

3.2.10 Les séries multisommables.

Théorème 3.92 (Martinet–Ramis) *Soit $k_1 > 0$ et $I_1 = [a, b] \subseteq \widetilde{S}$ avec $b - a \geq \pi/k_1$. Soit*

$$F \in \Gamma\big(I_1, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k_1)}\big).$$

Supposons que $\hat{F} = J(F) \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$ avec $k > k_1$. Alors

$$F \in \Gamma\big(I_1, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big).$$

Preuve. Par le théorème (3.89) la fonction $\mathcal{B}_k F$ est asymptote Gevrey-$1/k_2$ à la série $\hat{\mathcal{B}}\hat{F}$ sur l'intervalle $\tilde{I}_1 = [a + \pi/2k, b - \pi/2k]$ où $1/k_2 = 1/k_1 - 1/k$. Comme $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k)}$, la série $\mathcal{B}_k\hat{F}$ est convergente ; soit $H \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{O}}\big)$ sa somme. On a $H \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k_2)}\big)$ comme somme d'une série convergente. Donc $H|_{\tilde{I}_1} - \mathcal{B}_k F \in \Gamma\big(\tilde{I}_1, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_2}\big)$. Comme la longueur de $\tilde{I}_1$ est plus grande ou égale à π/k_2, par le lemme de Watson on a $H|_{\tilde{I}_1} = \mathcal{B}_k F$. Par le théorème (3.86) on a $\mathcal{L}_k H \in \Gamma\big(I_1, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k)}\big)$, et par le théorème (3.90) on a $F = \mathcal{L}_k H$. ∎

Lemme 3.93 (Watson relatif) *Soient $0 < k < l$. Soit I un intervalle fermé au moins en l'une de ses extrémités et de longueur plus grande ou égale à π/k, ou bien ouvert de longueur plus grande que π/k. Alors*

$$\Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -l}\big) = 0.$$

Preuve. Soit

$$F \in \Gamma\big(I, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -l}\big).$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que la longueur de I soit plus petite que $2\pi q$. Comme $J(F) = 0 \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$ on a

$$F \in \Gamma\big(\bar{I}, S_q\mathcal{A}^{\leq -k}/S_q\mathcal{A}^{\leq -l}\big),$$

où $\bar{I} = \{\theta (\operatorname{mod} 2\pi q) \mid \theta \in I\} \subseteq S_q$. Il existe un recouvrement $\{U_i\}_{1\leq i\leq t}$ de S_q par des intervalles ouverts tel que : i) $F = \{(F_i, U_i)\}_{1\leq i\leq t}$, ii) $\{U_i\}_{1\leq i\leq t'}$ est un recouvrement de $\bar{I}$, et $U_i \cap \bar{I} = \emptyset$ si $t' < i \leq t$. Si $\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,t'\}$ on définit $F_{i,j} = F_i|_{U_i \cap U_j} - F_j|_{U_i \cap U_j}$; si $\{i,j\} \not\subseteq \{1,\dots,t'\}$, on définit $F_{i,j} = 0$. Par le lemme (3.70) il existe des fonctions $H_i \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}_{(1/l)}\big)$, $1 \leq i \leq t$, telles que, pour tout $\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,t\}$, on ait $F_{i,j} = H_i|_{U_i \cap U_j} - H_j|_{U_i \cap U_j}$. Alors $H = \{(H_i + F_i, U_i)\}_{1 \leq i \leq t'} \in \Gamma\big(\bar{I}, S_q\mathcal{A}_{(1/k)}\big)$, et $J(H) = J(H_i) \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/l)}$. Par le théorème précédent on a $H \in \Gamma\big(\bar{I}, S_q\mathcal{A}_{(1/l)}\big)$, et ceci entraîne que $F_i \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}_{(1/l)}\big)$. Comme $J(F_i) = 0$, alors $F_i \in \Gamma\big(U_i, S_q\mathcal{A}^{\leq -l}\big)$, et $F = 0$. ∎

Définition 3.94 (Multisommabilité.) *Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$. On dit que $\hat{F}$ est $(k_1,\dots,k_r)$-sommable sur $(I_1,\dots,I_r)$ si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i). $0 < k_1 < \cdots < k_r$.

(ii). *Pour chaque $i = 1,\dots,r$ I_i est un intervalle de $\widetilde{S}$ ouvert de longueur $>$ π/k_i, ou bien fermé au moins en l'une de ses extrémités et de longueur $\geq \pi/k_i$. De plus on a*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_r.$$

(iii). *La série $\hat{F}$ appartient à $\mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k_1)}$.*

(iv). *On considère $F_0 = J_{k_1}^{-1}(\hat{F})$, où J_{k_1} est l'isomorphisme décrit dans la définition (3.72). Il existe des fonctions $F_1,\dots,F_r$ tels que*
- *Pour $i = 1,\dots,r-1$ on ait $F_i \in \Gamma\big(I_i, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big)$; $F_r \in \Gamma\big(I_r, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$.*
- *Pour $i = 0,\dots,r-1$ on ait $F_{i+1} = F_i|_{I_{i+1}} \in \Gamma\big(I_{i+1}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big)$.*

Dans ce cas, on dit que $(F_1,\dots,F_r)$ est la $(k_1,\dots,k_r)$-somme de la série formelle $\hat{F}$ sur $(I_1,\dots,I_r)$.

Remarque 3.95 Si $(F_1,\dots,F_r)$ est une $(k_1,\dots,k_r)$-somme de la série $\hat{F}$ sur $(I_1,\dots,I_r)$, par les propriétés (iii) et (iv) on $J(F_i) = \hat{F}$ pour $i = 1,\dots,r$.

Proposition 3.96 *Soit $\hat{F}$ une série $(k_1,\dots,k_r)$-sommable sur $(I_1,\dots,I_r)$. Soient $(F_1,\dots,F_r)$ et $(G_1,\dots,G_r)$ deux $(k_1,\dots,k_r)$-sommes de la série $\hat{F}$ sur $(I_1,\dots,I_r)$. Alors $F_i = G_i$, pour tout indice $i = 1,\dots,r$.*

Preuve. Soit $F_0 = J_{k_1}^{-1}(\hat{F}) \in \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1/k_1)}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_1}\big)$. D'après la propriété (iv) de la définition de multisommabilité on a

$$G_1 = F_0|_{I_1} = F_1 \in \Gamma\big(I_1, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_1}\big).$$

Alors $G_1 - F_1 \in \Gamma\big(I_1, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_1}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_2}\big)$; d'après le lemme de Watson relatif, on a $G_1 = F_1$. Supposons que $G_i = F_i \in \Gamma\big(I_i, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big)$, pour

$i = 1, \ldots, t$ avec $t < r$. Par la propriété (iv) de la définition de multi-sommabilité on a $G_{t+1} = F_{t+1} \in \Gamma\big(I_{t+1}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{t+1}}\big)$. Donc $G_{t+1} - F_{t+1} \in \Gamma\big(I_{t+1}, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{t+1}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{t+2}}\big)$ si $t+2 \leq r$ et $G_{t+1} - F_{t+1} \in \Gamma\big(I_{t+1}, \widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_r}\big)$ si $t+1 = r$. Soit par le lemme de Watson relatif (cas $t+2 \leq r$), soit par le lemme de Watson, on en déduit que $G_{t+1} = F_{t+1}$.

Proposition 3.97 *Soit $\hat{F}$ une série $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(F_1, \ldots, F_r)$. Alors la série $X \frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(\tilde{x}\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}x}, \ldots, \tilde{x}\frac{\mathrm{d}F_r}{\mathrm{d}x})$.*

Preuve. C'est une conséquence de la définition de multisommabilité, de la définition (3.74) et du lemme (3.75).

Proposition 3.98 *Soient $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m$ des séries $(k_1, \ldots, k_r)$-sommables sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de sommes respectives $(F_{1,1}, \ldots, F_{1,r})$, $\ldots$, $(F_{m,1}, \ldots, F_{m,r})$. Soit $g(x, y_1 \ldots, y_m)$ une fonction holomorphe au point $(0, \hat{F}_1(0), \ldots, \hat{F}_m(0))$. Alors la série $g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $\big((g(\tilde{x}, F_{1,1}, \ldots, F_{m,1}), \ldots, g(\tilde{x}, F_{1,r}, \ldots, F_{m,r})\big)$.*

Preuve. Soient $F_{l,0} = J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_l)$, $1 \leq l \leq m$. Par la remarque (3.78) on a $J_{k_1}^{-1}\big(g(X, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_m)\big) = g(\tilde{x}, F_{1,0}, \ldots, F_{m,0})$. Pour chaque $i = 0, \ldots, r-1$ on a $F_{l,i}|_{I_{i+1}} = F_{l,i+1} \in \Gamma\big(I_{i+1}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big)$, $1 \leq l \leq m$. Par la remarque (3.78), si $i = 0, \ldots, r-1$, on a

$$g(\tilde{x}, F_{1,i}, \ldots, F_{m,i})|_{I_{i+1}} = g(\tilde{x}, F_{1,i+1}, \ldots, F_{m,i+1}) \in \Gamma\big(I_{i+1}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big). \blacksquare$$

Proposition 3.99 *Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$ une série $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(F_1, \ldots, F_r)$. Supposons que $\hat{F}(0) \neq 0$. Alors, la série $1/\hat{F}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(1/F_1, \ldots, 1/F_r)$.*

Preuve. Soit $F_0 = J_{k_1}^{-1}(\hat{F})$. Par le lemme (3.82) on a $1/\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]_{(1/k_1)}$ et $J_{k_1}^{-1}(1/\hat{F}) = 1/F_0$. Alors $(1/F_1, \ldots, 1/F_r)$ satisfait la propriété (iv) de la définition de la multisommabilité, car $(F_1, \ldots, F_r)$ la satisfait. $\blacksquare$

Remarque 3.100 Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$. Soient $0 < k_1 \cdots < k_r$ des nombres réels et $I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_r$ des intervalles de $\widetilde{S}$ satisfaisant les propriétés (i) et (ii) de la définition de la multisommabilité. On considère le sous-ensemble $H(I_1, \ldots, I_r)$ (voir la sous-section 3.2.5, page 144). Alors $\hat{F}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$, de somme $(F_1, \ldots, F_r)$, si et seulement si $(J_{k_1}^{-1}(\hat{F}), F_1, \ldots, F_r)$ est une section du faisceau $\mathcal{H}_{(k_1, \ldots, k_r)}$ au dessus de $H(I_1, \ldots, I_r)$.

Théorème 3.101 (Balser) *Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$ une série formelle $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(F_1, \ldots, F_r)$. Alors, il existe des séries $\hat{G}_1, \ldots, \hat{G}_r \in \mathbb{C}[[X]]^*$ tels que*

(i). $\hat{F} = \hat{G}_1 + \cdots + \hat{G}_r$.

(ii). *Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, la série $\hat{G}_i$ est k_i-sommable sur l'intervalle I_i de somme G_i.*

(iii). $F_r = G_1|_{I_r} + \cdots + G_{r-1}|_{I_r} + G_r$.

Réciproquement, soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$ tel que $\hat{F} = \hat{F}_1 + \cdots + \hat{F}_r$, où chaque $\hat{F}_i$ est k_i-sommable sur I_i de somme F_i ; on suppose que $0 < k_1 \cdots < k_r$ et $I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_r$. Alors $\hat{F}$ est k-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(G_1, \ldots, G_r)$, où

$$G_i = F_1|_{I_i} + \cdots + F_i + J_{k_{i+1}}^{-1}(\hat{F}_{i+1})|_{I_i} + \cdots + J_{k_r}^{-1}(\hat{F}_r)|_{I_i}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

En particulier, $G_r = F_1|_{I_r} + \cdots + F_r$.

Preuve. On va montrer l'implication directe par récurrence sur r. Pour $r = 1$, c'est trivial. Supposons que le résultat soit vrai pour $r - 1$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$ et $|I_1| < 2\pi q$. Alors $J_{k_1}^{-1}(\hat{F}) \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}_{(1/k_1)}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_1}\big)$. On pose $\bar{I}_i = \{\theta (\mathrm{mod}\ 2\pi q) \mid \theta \in I_i\}$. Comme $|I_i| < 2\pi q$ et $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$ on a

$$\begin{array}{rcl} F_i & \in & \Gamma\big(\bar{I}_i, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_{i+1}}\big) \subseteq \Gamma\big(I_i, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big) \\ F_r & \in & \Gamma\big(\bar{I}_r, S_q\mathcal{A}\big) \subseteq \Gamma\big(I_r, \widetilde{\mathcal{A}}\big). \end{array}$$

Soit $\{U_l\}_{1 \leq l \leq t}$ un recouvrement de S_q tel que : la famille $\{U_l\}_{1 \leq l \leq t'}$ soit un recouvrement de l'intervalle $\bar{I}_1$, $U_l \cap \bar{I}_1 = \emptyset$ si $t' < l \leq t$, et $F_1 = \{(F_{1,l}, U_l)\}_{1 \leq l \leq t'}$. Comme $F_0|_{\bar{I}_1} = F_1 \in \Gamma\big(\bar{I}_1, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_1}\big)$, on a $F_{1,l} \in \Gamma\big(U_l, S_q\mathcal{A}_{(1/k_1)}\big)$, $1 \leq l \leq t'$. Soient $1 \leq l, l' \leq t$; si $1 \leq l, l' \leq t'$, on pose

$$F_{1,(l,l')} = F_{1,l}|_{U_l \cap U_{l'}} - F_{1,l'}|_{U_l \cap U_{l'}} \in \Gamma\big(U_l \cap U_{l'}, S_q\mathcal{A}^{\leq -k_2}\big);$$

si $\{l, l'\} \not\subseteq \{1, \ldots, t'\}$, on pose $F_{1,(l,l')} = 0$. D'après le théorème de Ramis–Sibuya, il existe des fonctions $H_l \in \Gamma\big(U_l, S_q\mathcal{A}_{(1/k_2)}\big)$ telles que

$$H_l|_{U_l \cap U_{l'}} - H_{l'}|_{U_l \cap U_{l'}} = F_{1,(l,l')}, \quad 1 \leq l, l' \leq t.$$

Soient

$$\begin{array}{rcl} G_1 & = & \{(F_{1,l} + H_l, U_l);\ 1 \leq l \leq t'\} \in \Gamma\big(\bar{I}_1, S_q\mathcal{A}_{(1/k_1)}\big), \\ H & = & \{(H_l, U_l);\ 1 \leq l \leq t\} \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}_{(1/k_2)}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_2}\big). \end{array}$$

On considère $\hat{G}_1 = J(G_1)$ et $\hat{H} = J(H)$. On en déduit que $\hat{G}_1$ est k_1-sommable sur l'intervalle I_1, et que

$$\hat{F} = \hat{G}_1 - \hat{H}.$$

La série $\hat{H}$ est $(k_2, \dots, k_r)$-sommable sur $(I_2, \dots, I_r)$ de somme $(G_1|_{I_2} - F_2, \dots, G_1|_{I_r} - F_r)$. En effet, $J_{k_2}^{-1}(\hat{H}) = H$, et $H|_{I_2} = G_1|_{I_2} - F_1|_{I_2} \in \Gamma\big(\bar{I}_2, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_2}\big)$; comme $F_1|_{I_2} = F_2 \in \Gamma\big(\bar{I}_2, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_2}\big)$, alors $H|_{I_2} = G_1|_{I_2} - F_2 \in \Gamma\big(\bar{I}_2, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_2}\big)$; d'autre part, pour $j = 2, \dots, r-1$, on a

$$(G_1|_{I_j} - F_j)|_{I_{j+1}} = G_1|_{I_{j+1}} - F_{j+1} \in \Gamma\big(\bar{I}_{j+1}, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_{j+1}}\big),$$

car $F_j|_{I_{j+1}} = F_{j+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des séries $\hat{G}_i$, $2 \leq i \leq r$, telles que

$$-\hat{H} = \hat{G}_2 + \cdots + \hat{G}_r,$$

où $\hat{G}_j$ est k_j-sommable sur I_j de somme G_j et

$$F_r - G_1|_{I_r} = G_2|_{I_r} + \cdots + G_r,$$

ce qui achève la démonstration. On remarque que $\hat{G}_i \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$, $1 \leq i \leq r$.

Réciproquement, supposons que $\hat{F} = \hat{F}_1 + \cdots + \hat{F}_r$, où $\hat{F}_i$ est une série formelle k_i-sommable sur I_i, $1 \leq i \leq r$. Alors

$$F_0 = J_{k_1}^{-1}(\hat{F}) = J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_1) + J_{k_2}^{-1}(\hat{F}_2) + \cdots + J_{k_r}^{-1}(\hat{F}_r).$$

Soient $G_i = F_1|_{I_i} + \cdots + F_i + J_{k_{i+1}}^{-1}(\hat{F}_{i+1})|_{I_i} + \cdots + J_{k_r}^{-1}(\hat{F}_r)|_{I_i}, \quad i = 1, \dots, r$. Le fait que $J_{k_i}^{-1}(\hat{F}_i)|_{I_i} = F_i \in \Gamma\big(I_i, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_i}\big)$ pour $1 \leq i \leq r$ entraîne que $F_0|_{I_1} = G_1 \in \Gamma\big(I_1, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_1}\big)$ et $G_i|_{I_{i+1}} = G_{i+1} \in \Gamma\big(I_{i+1}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big)$ pour $1 \leq i \leq r-1$. Alors $(G_1, \dots, G_r)$ est la $(k_1, \dots, k_r)$-somme de la série $\hat{F}$ sur $(I_1, \dots, I_r)$. ∎

Définition 3.102 *(i) Soient $0 < k_1 < \cdots < k_r$. Soit $d \in \widetilde{S}$ une direction. Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$. On dit que $\hat{F}$ est $(k_1, \dots, k_r)$-sommable dans la direction d si $\hat{F}$ est $(k_1, \dots, k_r)$-sommable sur $(I(d, k_1), \dots, I(d, k_r))$, où*

$$I(d, k) = \{\theta \in \widetilde{S} \mid |\theta - d| \leq \pi/2k\}.$$

(ii). On dit que $d \in \widetilde{S}$ est une direction $(k_1, \dots, k_r)$-singulière de $\hat{F}$ si $\hat{F}$ n'est pas $(k_1, \dots, k_r)$-sommable dans la direction d. On désigne par $\Sigma_{(k_1, \dots, k_r)}(\hat{F})$ l'ensemble des directions $(k_1, \dots, k_r)$-singulières de $\hat{F}$.

(iii). On dit que $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable si l'ensemble

$$\{d(\text{mod } 2\pi) \mid d \in \Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}(\hat{F})\}$$

est fini.
(iii). On désigne par $\mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})}$ l'ensemble des séries $(k_1, \ldots, k_r)$-sommables.

Remarque 3.103 Si $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable dans la direction $d \in \widetilde{S}$, alors elle est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable dans la direction $d + 2\pi qm$, avec $m \in \mathbb{Z}$. En effet, on a $F_0 = J_{k_1}^{-1}(\hat{F}) \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_1}\big)$, et $\mathcal{T}_{2\pi qm}F = F$. Alors si $(F_1, \ldots, F_r)$ est la $(k_1, \ldots, k_r)$-somme de $\hat{F}$ dans la direction d, on a $(\mathcal{T}_{2\pi qm}F_1, \ldots, \mathcal{T}_{2\pi qm}F_r)$ est la $(k_1, \ldots, k_r)$-somme de $\hat{F}$ dans la direction $d + 2\pi qm$.

Remarque 3.104 Soit $\hat{F}$ une série $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(F_1, \ldots, F_r)$. Supposons que $I_i = [a_i, b_i[$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que la série $\hat{F}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur

$$([a_1 - \varepsilon, b_1[, \ldots, [a_r - \varepsilon, b_r[)$$

de somme $(F_1, \ldots, F_r)$. On a un résultat analogue pour les intervalles de la forme $]a_i, b_i]$. En particulier, l'ensemble $\Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}(\hat{F})$ est un ensemble fermé.

Théorème 3.105 *L'ensemble $\mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})}$ des séries formelles $(k_1, \ldots, k_r)$-sommables est un anneau différentiel pour la dérivation $X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}$.*

Preuve. C'est une conséquence directe des propositions (3.97) et (3.98).

Lemme 3.106 *Soit $\hat{F}$ une série $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable dans toute direction $d \in]d_1, d_2[\subseteq \widetilde{S}$. Alors $\hat{F}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$, où*

$$I_i =]d_1 - \frac{\pi}{2k_i}, d_2 + \frac{\pi}{2k_i}[.$$

Preuve. Soit $d \in]d_1, d_2[$. Soit M l'ensemble des nombres réels $\delta \geq 0$ tels que la série $\hat{F}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur

$$\big([d - \tfrac{\pi}{2k_1}, d + \delta + \tfrac{\pi}{2k_1}], \ldots, [d - \tfrac{\pi}{2k_r}, d + \delta + \tfrac{\pi}{2k_r}]\big).$$

D'après la remarque (3.104), M est un sous-ensemble ouvert de $[0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$. Par l'unicité de la $(k_1, \ldots, k_r)$-somme, si $\delta \in M$, alors l'intervalle $[0, \delta] \subseteq M$. Donc M doit être de la forme $[0, \delta_0[$. Si $\delta_0 = \infty$ le lemme est démontré.

Supposons que $\delta_0 < \infty$. Par l'unicité de la $(k_1,\ldots,k_r)$-somme la série $\hat{F}$ est $(k_1,\ldots,k_r)$-sommable sur

$$\big([d-\tfrac{\pi}{2k_1}, d+\delta_0+\tfrac{\pi}{2k_1}[,\ldots,[d-\tfrac{\pi}{2k_r}, d+\delta_0+\tfrac{\pi}{2k_r}[\big).$$

de somme $(H_1,\ldots,H_r)$. Supposons que $\hat{F}$ soit $(k_1,\ldots,k_r)$-sommable dans la direction $d+\delta_0$ de somme $(G_1,\ldots,G_r)$. Par l'unicité de la somme sur

$$\big([d+\delta_0-\tfrac{\pi}{2k_1}, d+\delta_0+\tfrac{\pi}{2k_1}[,\ldots,[d+\delta_0-\tfrac{\pi}{2k_r}, d+\delta_0+\tfrac{\pi}{2k_r}[\big)$$

on a $H_i|_{[d+\delta_0-\frac{\pi}{2k_i},d+\delta_0+\frac{\pi}{2k_i}[} = G_i|_{[d+\delta_0-\frac{\pi}{2k_i},d+\delta_0+\frac{\pi}{2k_i}[}$. Ceci entraîne que $d+\delta_0 \in M$, ce qui contredit l'égalité $M = [0,\delta_0[$. Ainsi $d+\delta_0$ est une direction $(k_1,\ldots,k_r)$-singulière de la série $\hat{F}$, et donc $d+\delta_0 \geq d_2$. On procède de la même façon à gauche et on achève ainsi la démonstration. ∎

Corollaire 3.107 *Soit $\hat{F}$ tel que $\Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)} = \emptyset$, alors la série formelle $\hat{F}$ est convergente.*

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]$. Par le lemme précédent $\hat{F}$ est $(k_1,\ldots,k_r)$-sommable sur $(I_1,\ldots,I_r)$ où $I_i = [0, 2\pi q + \frac{\pi}{k_1}]$; soit $(F_1,\ldots,F_r)$ sa somme. On considère les fonctions H_i, où

$$H_i(\theta,r) = F_i(\theta+2\pi q, r) = (\mathcal{T}_{-2\pi q}F_i)(\theta,e), \theta \in [0,\tfrac{\pi}{k_1}], \quad 1 \leq i \leq r.$$

Soit $F_0 = J_{k_1}^{-1}(\hat{F}) \in \Gamma\big(S_q, S_q\mathcal{A}/S_q\mathcal{A}^{\leq -k_1}\big) \subseteq \Gamma\big(\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_1}\big)$, $\mathcal{T}_{-2\pi q}(F_0) = F_0$. Alors $(H_1,\ldots,H_r)$ et $(F_1|_{[0,\frac{\pi}{k_1}]},\ldots,F_r|_{[0,\frac{\pi}{k_1}]})$ sont la $(k_1,\ldots,k_r)$-somme de $\hat{F}$ sur $([0,\frac{\pi}{k_1}],\ldots,[0,\frac{\pi}{k_1}])$. Par l'unicité de la $(k_1,\ldots,k_r)$-somme on a $H_r = F_r|_{[0,\frac{\pi}{k_1}]}$, donc $F_r \in \Gamma\big(S_q,\widetilde{\mathcal{A}}\big)$, et alors $J(F_r) = \hat{F}$ est convergente. ∎

Définition 3.108 *Soit $d \in \widetilde{S}$. Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$]d-\delta, d[\cap\Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}(\hat{F}) = \emptyset, \quad]d, d+\delta[\cap\Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}(\hat{F}) = \emptyset. \tag{3.38}$$

D'après le lemme précédent, la série $\hat{F}$ est $(k_1,\ldots,k_r)$-sommable sur $(I_1^+,\ldots,I_r^+)$ et sur $(I_1^-,\ldots,I_r^-)$ de sommes respectives $(F_1^+,\ldots,F_r^+)$ et $(F_1^-,\ldots,F_r^-)$, où

$$I_i^- = [d-\frac{\pi}{2k_i}, d+\frac{\pi}{2k_i}[, \quad I_i^+ =]d-\frac{\pi}{2k_i}, d+\frac{\pi}{2k_i}].$$

On définit les opérateurs

$$\begin{aligned} S^-_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F}) &= F_r^-|_d \in \Gamma\big(\{d\},\widetilde{\mathcal{A}}\big),\\ S^+_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F}) &= F_r^+|_d \in \Gamma\big(\{d\},\widetilde{\mathcal{A}}\big).\end{aligned}$$

Remarque 3.109 Si $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})}$, pour toute direction $d \in \widetilde{S}$ il existe $\delta > 0$ satisfaisant les conditions (3.38). On a donc les applications

$$S^-_{k_1,\ldots,k_r;d} : \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})} \longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}\big), \tag{3.39}$$
$$S^-_{k_1,\ldots,k_r;d} : \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})} \longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}\big).$$

Proposition 3.110 *Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})}$ et $d \in \widetilde{S}$.*

$$d \in \Sigma_{k_1,\ldots,k_r}(\hat{F})$$

si et seulement si

$$S^-_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F}) \neq S^+_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F}).$$

Preuve. Si $\hat{F}$ est $(k_1,\ldots,k_r)$-sommable dans la direction d, $\hat{F}$ est $(k_1,\ldots,k_r)$-sommable sur $(I_1,\ldots,I_r)$ de somme $(F_1,\ldots,F_r)$, où $I_i = [d - \frac{\pi}{2k_i}, d + \frac{\pi}{2k_i}]$. Alors $(F_1|_{I_1^+},\ldots,F_r|_{I_r^+})$ et $(F_1|_{I_1^-},\ldots,F_r|_{I_r^-})$ sont les $(k_1,\ldots,k_r)$-sommes respectives de $\hat{F}$ dans $(I_1^+,\ldots,I_r^+)$ et dans $(I_1^-,\ldots,I_r^-)$, où les intervalles I_i^+ et I_i^- sont comme dans la définition (3.108). Réciproquement, soient $(F_1^+,\ldots,F_r^+)$ et $(F_1^-,\ldots,F_r^-)$ les $(k_1,\ldots,k_r)$-sommes de $\hat{F}$ sur $(I_1^+,\ldots,I_r^+)$ et $(I_1^-,\ldots,I_r^-)$ respectivement. Soit $J = I_r^+ \cap I_r^-$; par hypothèse on a $F_r^+|_J = F_r^-|_J$. Par la propriété (iv) de la définition de la multisommabilité, on montre que

$$F_i^+|_J = F_i^-|_J \in \Gamma\big(J, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big).$$

Alors par la propriété de recollement de faisceaux, il existe des fonctions $F_i \in \Gamma\big(I_i^+ \cup I_i^-, \widetilde{\mathcal{A}}/\widetilde{\mathcal{A}}^{\leq -k_{i+1}}\big)$, $1 \leq i \leq r-1$, et $F_r \in \Gamma\big(I_i^+ \cup I_i^-, \widetilde{\mathcal{A}}\big)$, tels que

$$F_i|_{[d-\frac{\pi}{2k_i}, d-\frac{\pi}{2k_r}[} = F_i^-, \quad F_i|_{]d-\frac{\pi}{2k_r}, d-\frac{\pi}{2k_i}[} = F_i^+,$$

et $(F_1,\ldots,F_r)$ est la $(k_1,\ldots,k_r)$-somme de $\hat{F}$ dans la direction d. ∎

Proposition 3.111 *Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$ tel que*

$$]d_1, d_2[\cap \Sigma_{(k_1,\ldots,k_r)}(\hat{F}) = \emptyset.$$

Alors il existe $F \in \Gamma\big([d_1, d_2], \widetilde{\mathcal{A}}\big)$ tel que

$$\begin{aligned} S^+_{k_1,\ldots,k_r;d_1}(\hat{F}) &= F|_{d_1}, \\ S^+_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F}) = S^-_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F}) &= F|_d, \quad d \in]d_1, d_2[, \\ S^-_{k_1,\ldots,k_r;d_2}(\hat{F}) &= F|_{d_2}. \end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme (3.106) et de la définition de la multisommabilité.

Proposition 3.112 *Les applications*

$$S^-_{k_1,\dots,k_r;d} : \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\dots,\frac{1}{k_r})} \longrightarrow \Gamma\big(\{d\},\widetilde{\mathcal{A}}\big),$$
$$S^-_{k_1,\dots,k_r;d} : \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\dots,\frac{1}{k_r})} \longrightarrow \Gamma\big(\{d\},\widetilde{\mathcal{A}}\big),$$

sont des homomorphismes injectifs de $\mathbb{C}$-algèbres différentielles pour les dérivations $X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ et $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Preuve. L'injectivité est due à la remarque (3.95) ; le reste est une conséquence des propositions (3.97) et (3.98). ∎

Lemme 3.113 *Soient $0 < k_1 < \dots, k_r$ et $0 < l_1 < \dots < l_s$ tels que*

$$\{k_1,\dots,k_r\} \subseteq \{l_1,\dots,l_s\}.$$

Soit $\hat{F} \in \mathbb{C}[[X]]^*$. Alors

(i). *On a l'inclusion $\Sigma_{(k_1,\dots,k_r)}(\hat{F}) \supseteq \Sigma_{(l_1,\dots,l_s)}(\hat{F})$.*

(ii). *Soit $d \in \widetilde{S}$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$]d-\delta,d[\cap\Sigma_{(k_1,\dots,k_r)}(\hat{F}) = \emptyset \qquad]d,d+\delta[\cap\Sigma_{(k_1,\dots,k_r)}(\hat{F}) = \emptyset.$$

Alors

$$\begin{aligned} S^+_{k_1,\dots,k_r;d}(\hat{F}) &= S^+_{l_1,\dots,l_s;d}(\hat{F}),\\ S^-_{k_1,\dots,k_r;d}(\hat{F}) &= S^-_{l_1,\dots,l_s;d}(\hat{F}). \end{aligned}$$

Preuve. (i). Soit $\hat{F}$ une série $(k_1,\dots,k_r)$-sommable dans la direction d. Par le théorème (3.101) on a $\hat{F} = \hat{F}_1 + \dots \hat{F}_r$ avec $\hat{F}_i$ k_i-sommable sur $I_i = [d-\frac{\pi}{2k_i}, d+\frac{\pi}{2k_i}]$. D'après le même théorème la série $\hat{F}$ est $(l_1,\dots,l_s)$-sommable dans la direction d ; ceci montre la partie (i). Pour la partie (ii) on traite le cas "+" : Soit $\hat{F}$ une série $(k_1,\dots,k_r)$-sommable sur $(I^+_{k_1},\dots,I^+_{k_r})$ de somme $(F^+_1,\dots,F^+_r)$, où $I^+_{k_i} =]d-\frac{\pi}{2k_i}, d+\frac{\pi}{2k_i}]$. D'après le théorème (3.101), on a $\hat{F} = \hat{G}_1 + \dots + \hat{G}_r$, où la série $\hat{G}_i$ est k_i-sommable sur $I^+_{k_i}$, de somme G^+_i et

$$F^+_r = G^+_1|_{I^+_{k_1}} + \dots + G_r.$$

Donc $S^+_{k_1,\dots,k_r;d}(\hat{F}) = G^+_1|_d + \dots + G^+_r|_d$. On déduit du mme théorème que $\hat{F}$ est $(l_1,\dots,l_s)$-sommable sur $(I^+_{l_1},\dots,I^+_{l_s})$ de somme $(H_1,\dots,H_s)$, où $H_s|_d = G^+_1|_d + \dots + G^+_r|_d$. Donc on bien

$$S^+_{k_1,\dots,k_r;d}(\hat{F}) = S^+_{l_1,\dots,l_s;d}(\hat{F}). \ ∎$$

3.2.11 Le corps des séries multisommables.

Soient $0 < k_1 < \cdots < k_r$ et $0 < l_1 < \cdots < l_s$ tels que $\{k_1, \ldots, k_r\} \subseteq \{l_1, \ldots, l_s\}$. D'après le lemme (3.113) on a

$$\mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})} \subseteq \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{l_1},\ldots,\frac{1}{l_s})},$$

et

$$S^+_{l_1\ldots,l_s;d}\big|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{(k_1,\ldots,k_r)}} = S^+_{k_1,\ldots,k_r;d}, \quad S^-_{l_1\ldots,l_s;d}\big|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{(k_1,\ldots,k_r)}} = S^-_{k_1,\ldots,k_r;d}.$$

On définit l'anneau différentiel (pour la dérivation $X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}$) des séries multisommables :

$$\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}} = \varinjlim \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})} = \bigcup_{(k_1,\ldots,k_r)} \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})} \subseteq \mathbb{C}[[X]]^*,$$

où l'union est prise sur tous les indices $(k_1, \ldots, k_r) \in \cup_{r=1}^{\infty}\mathbb{R}^r$ avec $0 < k_1 < \cdots < k_r$. Pour chaque direction $d \in \widetilde{S}$, on définit les homomorphismes différentiels

$$\begin{aligned} S^+_d &: \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}} \longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}\big), \\ S^-_d &: \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}} \longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}\big), \end{aligned}$$

tels que $S^+_d(\hat{F}) = S^+_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F})$ et $S^-_d(\hat{F}) = S^-_{k_1,\ldots,k_r;d}(\hat{F})$, si $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_{(\frac{1}{k_1},\ldots,\frac{1}{k_r})}$. On définit le corps des séries multisommables

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}[X^{-1}] \subseteq \mathbb{C}[[X]]^*[X^{-1}].$$

Par les propositions (3.97), (3.98) et (3.99) $\mathcal{K}$ est un corps différentiel pour la dérivation $X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}$, donc il l'est aussi pour la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}$.

Proposition 3.114 *Pour chaque direction $d \in \widetilde{S}$ il existe des homomorphismes différentiels injectifs :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^+_d : \mathcal{K} &\rightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big), \\ \boldsymbol{S}^-_d : \mathcal{K} &\rightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big). \end{aligned} \tag{3.40}$$

tels que

(i). $\boldsymbol{S}^+_d\big|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}} = S^+_d$, $\boldsymbol{S}^-_d\big|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}} = S^-_d$.

(ii). $\boldsymbol{S}^+_d(X^{-1}) = \boldsymbol{S}^-_d(X^{-1}) = \tilde{x}^{-1}$.

Preuve. Soit Y une variable différentielle sur l'anneau $\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}$, et soit $\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\}$ l'anneau des polynômes différentiels sur $\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}$ en la variable différentielle Y, c'est-à-dire,

$$\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\} = \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}[Y_n;\ n \in \mathbb{N}],$$

avec la dérivation δ, où $\delta(\hat{F}) = X\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}X}$ si $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}$, et $\delta(Y_n) = Y_{n+1}$, $n \geq 0$. Soit $P = <XY_0 - 1, Y_0 + Y_1>$ l'idéal différentiel engendré par $XY_0 - 1$ et $Y_0 + Y_1$, c'est-à-dire,

$$P = \big(\delta^{(n)}(XY_0 - 1), \delta^{(n)}(Y_0 + Y_1);\ n \geq 0\big) \cdot \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}.$$

On montre d'abord que l'on a un isomorphisme différentiel

$$\Phi : \frac{\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\}}{<XY_0 - 1, Y_0 + Y_1>} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}[X^{-1}], \tag{3.41}$$

tel que $\Phi(\hat{F}(\mathrm{mod}\, P)) = \hat{F}$ si $\hat{F} \in \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}$, et $\Phi(Y_0) = X^{-1}$. En effet, d'après les propriétés des anneaux de polynômes différentiels, il existe un homomorphisme différentiel

$$\Psi : \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\} \longrightarrow \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}[X^{-1}]$$

tel que $\Psi|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}} = \mathrm{Id}|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}}$, et $\Psi(Y_0) = X^{-1}$. Comme $\Psi(XY_0 - 1) = \Psi(Y_0 + Y_1) = 0$, on a $P \subseteq \mathrm{Ker}\Psi$. Soit $Q \in \mathrm{Ker}\Psi$. Comme $\delta^{(n)}(Y_0 + Y_1) = Y_n + Y_{n+1} \in P$, il existe un élément $q \in P$ tel que

$$Q = q + \sum_{l=0}^{l=N} a_l(X)Y_0^l, \quad a_l(X) \in \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}},$$

donc $\sum_{l=0}^{l=N} a_l(X)Y_0^l \in \mathrm{Ker}\Psi$. On montre par récurrence sur N que si $B = \sum_{l=0}^{l=N} b_l(X)Y_0^l \in \mathrm{Ker}\Psi$, alors $B \in (XY_0 - 1)\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}[Y_0] \subseteq P$. En effet, on a

$$b_N(X) = b_{N,0} + b_{N,1/q}X^{1/q} + \cdots + b_{N,\frac{q-1}{q}}X^{\frac{q-1}{q}} + X \cdot c_N(X),$$

où $c_N(X) \in \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}$, $b_{N,s/q} \in \mathbb{C}$. Alors

$$B = \sum_{l=0}^{N-1} b_l(X)Y_0^l + c_N(X)\{Y_0^{N-1} + (XY_0 - 1)Y_0^{N-1}\} + \sum_{s=0}^{q-1} b_{N,s/q}X^{s/q}Y_0^N;$$

Comme $\Psi(B) = 0$, on a

$$\sum_{s=0}^{q-1} b_{N,s/q}X^{s/q}X^{-N} = -\sum_{l=0}^{N-1} b_l(X)X^{-l} + c_N(X)X^{-N+1},$$

donc $b_{N,s/q=0}$ pour $s = 0, \ldots, q-1$ car l'ordre en X de $b_l(X)$ et $c_N(X)$ est plus grand ou égal à zéro. On applique l'hypothèse de récurrence à $\sum_{l=0}^{N-1} b_l(X)Y_0^l + c_N(X)Y_0^{N-1}$, et on obtient que $B \in P$. Donc $\mathrm{Ker}\Psi = P$ et on a l'isomorphisme (3.41).

D'après les propriétés élémentaires des anneaux de polynômes différentiels, on a l'existence d'homomorphismes différentiels

$$\begin{aligned}\bar{S}_d^+ : \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\} &\longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big),\\ \bar{S}_d^- : \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\} &\longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big),\end{aligned}$$

tels que $\bar{S}_d^+|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}} = S_d^+$, et $\bar{S}_d^+(Y_0) = \tilde{x}^{-1}$, $\bar{S}_d^-|_{\mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}} = S_d^-$, et $\bar{S}_d^-(Y_0) = \tilde{x}^{-1}$. Comme $\tilde{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\tilde{x}^{-1}) = -\tilde{x}^{-1}$, l'idéal $P = <XY_0 - 1, Y_0 + Y_1>$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\bar{S}_d^+$ et dans $\mathrm{Ker}\bar{S}_d^-$. Il existe donc des homomorphismes différentiels

$$\begin{aligned}\tilde{S}_d^+ : \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\}/P &\longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big),\\ \tilde{S}_d^- : \mathbb{C}\{X\}^*_{\mathrm{MS}}\{Y\}/P &\longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big),\end{aligned}$$

tels que $\tilde{S}_d^+(H \bmod P) = \bar{S}_d^+(H)$ et $\tilde{S}_d^-(H \bmod P) = \bar{S}_d^-(H)$. On définit des homomorphismes différentiels

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_d^+ : \mathcal{K} &\longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big),\\ \boldsymbol{S}_d^- : \mathcal{K} &\longrightarrow \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{A}}[\tilde{x}^{-1}]\big),\end{aligned}$$

par $\boldsymbol{S}_d^+ = \tilde{S}_d^+ \circ \Phi^{-1}$ et $\boldsymbol{S}_d^- = \tilde{S}_d^- \circ \Phi^{-1}$.

3.2.12 Multisommabilité des solutions formelles d'équations différentielles linéaires.

On considère le système d'équations différentielles linéaires

$$\text{(S)} \qquad \frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A(X) \cdot Y, \quad A(X) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\big(\mathbb{C}\{X\}\,[X^{-1}]\big).$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_qV, $S_qV^{<0}$, $S_qV^{\leq -k}$, $S_qV_{(1/k)}$ les sous-faisceaux de $S_q\mathcal{A}$ tels que, pour tout point $\theta(\bmod 2\pi q) \in S_q$, on ait

$$\begin{aligned}\Gamma\big(\{\theta(\bmod 2\pi q)\}, S_qV\big) &= \{F \in \Gamma\big(\{\theta\}, V\big) \mid J(F) \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]\,\}\\ \Gamma\big(\{\theta(\bmod 2\pi q)\}, S_qV^{<0}\big) &= \{F \in \Gamma\big(\{\theta\}, V^{<0}\big) \mid J(F) \in \mathbb{C}[[X^{1/q}]]\,\}, \text{ etc,}\end{aligned}$$

où V est le faisceau des solutions asymptotiques de (S) défini à la page 129.

Proposition 3.115 *Soient $k_1 < \cdots < k_r$ les niveaux associés au système (S). Soit*
$$\underline{\hat{F}} = (\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_n) \in (\mathbb{C}[[X]]^*)^n$$
une solution du système (S). Alors, on a

$$\hat{F}_i \in \mathbb{C}[[X]]^*_{(1/k_1)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

et
$$\big(J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_1), \ldots, J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_n)\big) \in \Gamma\big(\widetilde{S}, V_{(1/k_1)}/V^{\leq -k_1}\big).$$

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\underline{\hat{F}} \in \big(\mathbb{C}[[X^{1/q}]]\big)^n$. Par le théorème (3.16), il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $I \subseteq \widetilde{S}$ est un intervalle de longueur plus petite que ε, il existe $G \in \Gamma\big(I, V\big)$ tel que $J(G) = \underline{\hat{F}}$. Soit $\{U_j\}_{1 \leq j \leq t}$ un recouvrement de S_q par des intervalles ouvertes de longueur plus petite que ε. Alors il existe des fonctions $\underline{F}_j \in \Gamma\big(U_j, S_qV\big)$, $1 \leq j \leq t$, avec $J(\underline{F}_j) = \underline{\hat{F}}$. Par la proposition (3.40) on a
$$\underline{F} = \{(\underline{F}_j, U_j)\}_{1 \leq j \leq t} \in \Gamma\big(S_q, S_qV/S_qV^{\leq -k_1}\big).$$
D'après le théorème (3.71) on a

$$\underline{F} \in \Gamma\big(S_q, S_qV_{(1/k_1)}/S_qV^{\leq -k_1}\big).$$

Alors $J(\underline{F}) = \underline{\hat{F}} \in \big(\mathbb{C}[[X]]_{(1/k_1)}\big)^n$, et $\underline{F} = \big(J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_1), \ldots, J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_n)\big)$. ∎

Théorème 3.116 *Soient $0 < k_1 < \cdots < k_r$ les niveaux associés au système (S). Soient $I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_r$ des intervalles fermés de $\widetilde{S}$ de longueurs respectives $\frac{\pi}{k_1}, \ldots, \frac{\pi}{k_r}$, et tels que les extrémités de I_l, $1 \leq l \leq r$ ne soient pas des lignes de Stokes de niveau k_l. Soit*

$$\underline{\hat{F}} = (\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_n) \in \big(\mathbb{C}[[X]]^*\big)^n$$

une solution du système (S). Alors, pour $i = 1, \ldots, n$, la série $\hat{F}_i$ est $(k_1, \ldots, k_r)$ sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$ de somme $(F_{i,1}, \ldots, F_{i,r})$, où $F_{i,r} \in \Gamma\big(I_r, V\big)$ et $F_{i,l} \in \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$, $1 \leq l \leq r-1$.

Preuve. D'après la sous-section (3.2.4), il existe des fonctions $\underline{F}_1, \ldots, \underline{F}_r$ telles que

(i). Pour $l = 1, \ldots, r-1$ on a $\underline{F}_l \in \Gamma\big(I_l, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$, et $\underline{F}_r \in \Gamma\big(I_r, V\big)$.

(ii). Pour $l = 1, \ldots, r-1$ on a $\underline{F}_l|_{I_{l+1}} = \underline{F}_{l+1} \in \Gamma\big(I_{l+1}, V/V^{\leq -k_{l+1}}\big)$.

(iii). $J(\underline{F}_r) = \underline{\hat{F}}$.

D'après la proposition précédente, on a

$$\underline{F}_0 = \big(J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_1), \ldots, J_{k_1}^{-1}(\hat{F}_n)\big) \in \Gamma\big(S_q, S_qV_{(1/k_1)}/S_qV^{\leq -k_1}\big).$$

Alors $\underline{F}_0|_{I_1} - \underline{F}_1 \in \Gamma\big(I_1, S_qV/S_qV^{\leq -k_1}\big)$. Comme $J(\underline{F}_0) = \underline{\hat{F}} = J(\underline{F}_1)$, par la proposition (3.40) on a

$$\underline{F}_0|_{I_1} = \underline{F}_1 \in \Gamma\big(I_1, S_qV/S_qV^{\leq -k_1}\big).$$

Donc $\hat{F}_i$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable sur $(I_1, \ldots, I_r)$.

Corollaire 3.117 *Si $\underline{\hat{F}} = (\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_n) \in \big(\mathbb{C}[[X]]^*\big)^n$ est une solution du système (S), alors les séries $\hat{F}_i$, $1 \leq i \leq n$, sont $(k_1, \ldots, k_r)$-sommables, et pour toute direction $d \in \widetilde{S}$,*

$$\big(\boldsymbol{S}_d^+(\hat{F}_1), \ldots, \boldsymbol{S}_d^+(\hat{F}_1)\big) \textit{ et } \big(\boldsymbol{S}_d^-(\hat{F}_1), \ldots, \boldsymbol{S}_d^-(\hat{F}_1)\big)$$

sont des solutions du système (S).

Corollaire 3.118 *Soit $\underline{\hat{F}} = (\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_n) \in \big(\mathbb{C}[[X]]^*[X^{-1}]\big)^n$ une solution du système (S). Alors*

$$\underline{\hat{F}} \in \mathcal{K}^n,$$

et pour toute direction $d \in \widetilde{S}$,

$$\big(\boldsymbol{S}_d^+(\hat{F}_1), \ldots, \boldsymbol{S}_d^+(\hat{F}_1)\big) \quad \textit{et} \quad \big(\boldsymbol{S}_d^-(\hat{F}_1), \ldots, \boldsymbol{S}_d^-(\hat{F}_1)\big)$$

sont des solutions du système (S).

Preuve. Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $\underline{\hat{F}} = X^{-l}\underline{\hat{G}}$ avec $\underline{\hat{G}} \in (\mathbb{C}[[X]]^*)^n$. $\underline{\hat{G}}$ est une solution du système

$$\text{(S1)} \qquad \frac{\mathrm{d}\,Z}{\mathrm{d}\,X} = (lX^{-1} \cdot \mathrm{Id} + A(X)) \cdot Z,$$

donc $\underline{\hat{G}} \in \mathcal{K}^n$, et $\underline{\hat{F}} \in \mathcal{K}^n$. Comme $\boldsymbol{S}_d^+(\underline{\hat{G}})$ et $\boldsymbol{S}_d^-(\underline{\hat{G}})$ satisfont le système (S1), alors $\tilde{x}^{-l} \cdot \boldsymbol{S}_d^+(\underline{\hat{G}}) = \boldsymbol{S}_d^+(X^{-l}\underline{\hat{G}}) = \boldsymbol{S}_d^+(\underline{\hat{F}})$ et $\boldsymbol{S}_d^-(\underline{\hat{F}})$ satisfont le système (S) ∎

Ainsi le corps $\mathcal{K}$ et la famille d'homomorphismes différentiels $\boldsymbol{S}_d^+$ et $\boldsymbol{S}_d^-$, $d \in \widetilde{S}$, satisfont le théorème (3.9) ce qui prouve l'existence d'un corps satisfaisant les axiomes de sommabilité (voir l'énoncé dans la page 120).

Chapitre 4

Générateurs topologiques du groupe de Galois différentiel.

4.1 Les multiplicateurs de Stokes.

4.1.1 Le corps K^{diff}.

Soit $S(\mathcal{D}_K, \hat{K})$ le sous ensemble de $\hat{K}$ formé par les séries de Laurent formelles $\hat{F}$ qui sont solution d'un opérateur non nul $P \in \mathcal{D}_K$. On désigne par K^{diff} le plus petit sous-corps différentiel de $\hat{K}$ qui contient K et $S(\mathcal{D}_K, \hat{K})$.

Remarque 4.1 (i). Soit $Y \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\hat{K})$ tel que $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A \cdot Y$ avec $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Par le lemme du vecteur cyclique il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et un opérateur différentiel linéaire D sur K tel que

$$Y = P \cdot (\hat{f}, \hat{f}', \dots, \hat{f}^{(n-1)})^t,$$

où $D(\hat{f}) = 0$. Donc $Y \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K^{\text{diff}})$.

(ii). Le corps K^{diff} est contenue dans le corps $\mathcal{K}$ des séries multisommables en vertu du corollaire 3.117.

Lemme 4.2 *Soit $F = \hat{H}(X) \cdot \tilde{x}^L \cdot e^{Q(\tilde{x})}$ une matrice fondamentale sous la forme d'Hukuhara–Turrittin précisée (voir définition 2.101) pour le système d'équations différentielles $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A \cdot Y$ avec $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Alors*

$$\hat{H}(X) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K^{\text{diff}}), \quad \textit{et} \quad F \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\boldsymbol{K}^{\textbf{diff}}).$$

(Selon la notation du chapitre II, on a que $\boldsymbol{K}^{\textbf{diff}} = \varinjlim_{\alpha,q} K^{\text{diff}}{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X, e^{\mathfrak{q}}{>}$, où $K^{\text{diff}}{<}X^\alpha, \mathrm{Lg}X, e^{\mathfrak{q}}{>}$ est le corps de fractions $K^{\text{diff}} \otimes_K K{<}\tilde{x}^\alpha, \mathrm{Lg}\tilde{x}, e^{\mathfrak{q}}{>}$).

Preuve. D'après la preuve du lemme 2.107 on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,X}(\tilde{x}^L \cdot e^{Q(\tilde{x})}) = A_0 \cdot \tilde{x}^L \cdot e^{Q(\tilde{x})}, \quad \text{avec } A_0 \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K).$$

Alors la matrice $\hat{H}$ satisfait le système d'équations différentielles linéaires à n^2 indéterminées $\frac{\mathrm{d}\,\hat{H}}{\mathrm{d}\,X} = A\hat{H} - \hat{H}A_0$. D'après la remarque précédente on a $\hat{H} \in \mathrm{GL}_n(K^{\mathrm{diff}})$. Donc $F \in \mathrm{GL}_n(\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}})$. ∎

Corollaire 4.3 *Soit* (Δ) *un système d'équations différentielles linéaires sur* K*. Soit* $K(\Delta)$ *la seule extension de Picard–Vessiot associée à* (Δ) *contenue dans* $\hat{\boldsymbol{K}}$*. Alors* $K(\Delta) \subseteq \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$*.*

Preuve. D'après le théorème 2.97, il existe une extension de Picard–Vessiot $K(\Delta)$ associée à (Δ) et contenue dans $\hat{\boldsymbol{K}}$. D'après le théorème 2.88, le corps de constantes de $\hat{\boldsymbol{K}}$ est $\mathbb{C} = \mathrm{Const}(K)$, donc $K(\Delta)$ est l'unique extension de Picard–Vessiot associée à (Δ) contenue dans $\hat{\boldsymbol{K}}$. D'après le lemme 2.102, il existe une matrice fondamentale $F = \hat{H}\tilde{x}^L e^{Q(\tilde{x})}$ de (Δ) sous la forme d'Hukuhara–Turrittin précisée. D'après le lemme précédent $F \in \mathrm{GL}_n(\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}})$, donc $K(\Delta) = K(F) \subseteq \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$. ∎

Lemme 4.4 *Soit* $\xi \in \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$*. Alors il existe* $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l \in S(\mathcal{D}_K, \hat{K})$*,* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$*, et* $\mathfrak{q} = \{q_1, \ldots, q_{m'}\} \subseteq \boldsymbol{E}$ *tels que*

$$\xi \in K{<}\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l, \tilde{x}^{\alpha_1}, \ldots, \tilde{x}^{\alpha_m}, e^{q_1}, \ldots, e^{q_{m'}}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>} \subseteq \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}.$$

En outre il existe un système (Δ) *d'équations différentielles linéaires sur* K *tel que* $\xi \in K(\Delta)$*, où* $K(\Delta)$ *est la seule extension de Picard–Vessiot associée à* (Δ) *contenue dans* $\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$*.*

Preuve. Le corps $\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$ est la réunion des corps $K^{\mathrm{diff}}{<}\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}, e^{\mathfrak{q}}{>}$, donc il existe $\alpha \subseteq \mathbb{C}$ et $\mathfrak{q} \subseteq \boldsymbol{E}$ tels que $\xi \in K^{\mathrm{diff}}{<}\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}, e^{\mathfrak{q}}{>}$. Il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{q} \subseteq \boldsymbol{E}_\nu$. On peut supposer que $\alpha_1 = 1/\nu$, alors $K^{\mathrm{diff}}{<}\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}, e^{\mathfrak{q}}{>} = K^{\mathrm{diff}}(\tilde{x}^{\alpha}, \mathrm{Lg}\tilde{x}, e^{\mathfrak{q}})$. Il suffit de montrer que si $\eta \in K^{\mathrm{diff}}$ alors il existe $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l \in S(\mathcal{D}_K, \hat{K})$ tels que $\eta \in K{<}\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l{>}$; ceci est évident car K^{diff} est la réunion des corps $K{<}\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l{>}$. On a ainsi montré la première partie du lemme. Pour montrer la seconde, on peut supposer que $\mathfrak{q}$ est stable par la monodromie. On pose $Q = \mathrm{diag}[q_1, \ldots, q_{m'}]$. Il existe une matrice de permutations $\hat{M} \in \mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{C})$ tel que $m(Q) = \hat{M}^{-1}Q\hat{M}$. Soit $L \in \mathrm{Mat}_{m',m'}(\mathbb{C})$ tel que $e^{2\pi i L} = \hat{M}$. Alors $(\hat{M}, Q)$ est un couple formel. D'après le lemme 2.107, il existe un système d'équations différentielles linéaires $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = BY$, avec $B \in \mathrm{Mat}_{m'}(K)$, dont $\tilde{x}^L e^{Q(\tilde{x})}$ est une matrice fondamentale. Pour tout $1 \leq j \leq l$, on considère une matrice $A_j \in \mathrm{Mat}_{m_j,m_j}(K)$ tel que le vecteur

$\left(\hat{F}_j, \hat{F}'_j, \ldots, \hat{F}_j^{(m_j-1)}\right)^t$ soit une solution du système $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = A_j Y$. Soit A la matrice diagonale par blocs :

$$A = \operatorname{diag}\left[B, \frac{L}{\tilde{x}}, A_1, \ldots, A_l, \alpha_1/\tilde{x}, \ldots, \alpha_m/\tilde{x}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tilde{x} \end{pmatrix}\right].$$

Soit Δ le système $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X} = AY$, alors

$$\xi \in K{<}\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l, \tilde{x}^\alpha, e^{\mathfrak{q}}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>} \subseteq K(\Delta) \subseteq \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}. \blacksquare$$

4.1.1.1 Les multiplicateurs de Stokes.

Soit $d \in \widetilde{S}$, on considère les homomorphismes différentiels injectifs

$$\boldsymbol{S}_d^+\big|_{K^{\mathrm{diff}}} : K^{\mathrm{diff}} \to \widetilde{\mathcal{M}}_d = \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{M}}\big), \quad \boldsymbol{S}_d^-\big|_{K^{\mathrm{diff}}} : K^{\mathrm{diff}} \to \widetilde{\mathcal{M}}_d = \Gamma\big(\{d\}, \widetilde{\mathcal{M}}\big).$$

Lemme 4.5 *On a que $\boldsymbol{S}_d\big|_{K^{\mathrm{diff}}} = m \circ \boldsymbol{S}_{d+2\pi}\big|_{K^{\mathrm{diff}}}$, où on désigne par ou bien $+$ ou bien $-$, et où m et l'automorphisme de monodromie.*

Preuve. Soit $\xi \in K^{\mathrm{diff}}$. Il existe $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l$ appartenant à $S(\mathcal{D}_K, \hat{K})$ tels que $\xi \in K{<}\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_l{>} \subseteq \hat{K}$. Car $\boldsymbol{S}_d$ et m sont des homomorphisme de corps différentiels, il suffit de montrer que $\boldsymbol{S}_d(\hat{F}) = m \circ \boldsymbol{S}_{d+2\pi}(\hat{F})$ si $\hat{F} \in S(\mathcal{D}_K, \hat{K})$. Ceci est une conséquence de la remarque 3.103.

Proposition 4.6 *On considère le corps $\boldsymbol{K} = \varinjlim_{\alpha,\mathfrak{q}} K{<}\tilde{x}^\alpha, e^{\mathfrak{q}(\tilde{x})}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_\infty$. Soit $d \in \widetilde{S}$. On désigne par I_d l'inclusion $\widetilde{\mathcal{M}}_\infty \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_d$. L'anneau $K^{\mathrm{diff}} \otimes_K \boldsymbol{K}$ est un anneau intègre et différentiel. On considère les homomorphismes d'anneaux différentiels*

$$\bar{\mathcal{S}}_d^+ : K^{\mathrm{diff}} \otimes_K \boldsymbol{K} \to \widetilde{\mathcal{M}}_d, \quad \bar{\mathcal{S}}_d^- : K^{\mathrm{diff}} \otimes_K \boldsymbol{K} \to \widetilde{\mathcal{M}}_d$$

définis par $\bar{\mathcal{S}}_d^+ = \boldsymbol{S}_d^+\big|_{K^{\mathrm{diff}}} \otimes I_d\big|_{\boldsymbol{K}}$ et $\bar{\mathcal{S}}_d^- = \boldsymbol{S}_d^-\big|_{K^{\mathrm{diff}}} \otimes I_d\big|_{\boldsymbol{K}}$. Alors les homomorphismes $\bar{\mathcal{S}}_d^+$ et $\bar{\mathcal{S}}_d^-$ sont injectifs.

Preuve. On ne détaille que le cas "+", le cas "$-$" étant analogue. D'après le corollaire 2.57, l'anneau $K_\infty^{\mathrm{diff}} = K^{\mathrm{diff}} \otimes_K K_\infty$ est un corps. On considère l'homomorphisme différentiel $\bar{\psi}_d^+ : K_\infty^{\mathrm{diff}} \to \widetilde{\mathcal{M}}_d$, où $\bar{\psi}_d^+ = \boldsymbol{S}_d^+\big|_{K^{\mathrm{diff}}} \otimes I_d\big|_{K_\infty}$. L'opérateur $\bar{\psi}_d^+$ est injectif, car K_∞^{diff} est un corps. En particulier, $\bar{\psi}_d^+(K_\infty^{\mathrm{diff}})$ est un sous corps différentiel de $\widetilde{\mathcal{M}}_d$ qui contient K.

Soit $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{C}$. On considère les extensions différentielles

$$\begin{aligned} K_\infty^{\mathrm{diff}} &\subseteq K_\infty^{\mathrm{diff}}{<}X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X{>} \subseteq \hat{\boldsymbol{K}}, \\ K_\infty^{\mathrm{diff}} &\overset{\bar{\psi}_d^+}{\to} \bar{\psi}_d^+(K_\infty^{\mathrm{diff}}){<}\tilde{x}^{\alpha_1}, \ldots, \tilde{x}^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}\tilde{x}{>} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_d. \end{aligned}$$

Ces extensions sont de Picard–Vessiot associées au mme système d'équations différentielles sur $K_\infty : y_i' = \frac{\alpha_i}{\tilde{x}} y_i$, $1 \le i \le m$, et $z'' + \frac{1}{\tilde{x}} z' = 0$. D'après le théorème d'unicité des extensions de Picard–Vessiot (théorème 1.25), il existe un isomorphisme différentiel

$$\phi : K_\infty^{\mathrm{diff}}<X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X> \to \bar{\psi}_d^+(K_\infty^{\mathrm{diff}})<\tilde{x}^{\alpha_1}, \dots, \tilde{x}^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}\tilde{x}>,$$

tel que $\phi|_{K_\infty^{\mathrm{diff}}} = \bar{\psi}_d^+$. On considère le $\mathbb{Z}$-module $F_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \mathbb{Z}\bar{\alpha}_1 + \dots + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_m \subseteq \mathbb{C}/\mathbb{Q}$. Soient $\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_r$ une $\mathbb{Z}$-base de $F_{\mathbb{Q}}(\alpha)$. On a

$$\begin{aligned} K_\infty^{\mathrm{diff}}<X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X> &= K_\infty^{\mathrm{diff}}<X^{\beta_1}, \dots, X^{\beta_r}, \mathrm{Lg}X>, \\ \bar{\psi}_d^+(K_\infty^{\mathrm{diff}})<\tilde{x}^{\alpha_1}, \dots, \tilde{x}^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}\tilde{x}> &= \bar{\psi}_d^+(K_\infty^{\mathrm{diff}})<\tilde{x}^{\beta_1}, \dots, \tilde{x}^{\beta_r},\ Log\tilde{x}>. \end{aligned}$$

La fonction $\phi(X^{\beta_j})$ satisfait l'équation $y_j' = \frac{\beta_j}{\tilde{x}} y_j$, et la fonction $\phi(\mathrm{Lg}X)$ satisfait l'équation $z'' + \frac{1}{\tilde{x}} z' = 0$. Puisque $\mathbb{C} = \mathrm{Const}(\hat{\boldsymbol{K}}) = \mathrm{Const}(\widetilde{\mathcal{M}}_d)$, il existe $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}^*$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $\phi(X^{\beta_j}) = c_j \tilde{x}^{\beta_j}$, et $\phi(\mathrm{Lg}X) = \mathrm{Lg}\tilde{x} + c$. D'après le théorème 2.68 il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_{K_\infty^{\mathrm{diff}}}\big(K_\infty^{\mathrm{diff}}<X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X>\big)$ tel que $\sigma(X^{\beta_j}) = \frac{1}{c_j} X^{\beta_j}$, $1 \le j \le m$, et $\sigma(\mathrm{Lg}X) = \mathrm{Lg}X - c$. L'isomorphisme différentiel

$$\phi \circ \sigma : K_\infty^{\mathrm{diff}}<X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}X> \to \bar{\psi}_d^+(K_\infty^{\mathrm{diff}})<\tilde{x}^{\alpha_1}, \dots, \tilde{x}^{\alpha_m}, \mathrm{Lg}\tilde{x}>,$$

est tel que $\phi \circ \sigma|_{K_\infty^{\mathrm{diff}}} = \bar{\psi}_d^+$, $\phi \circ \sigma(X^{\beta_j}) = \tilde{x}^{\beta_j}$, $1 \le j \le m$ et $\phi \circ \sigma(\mathrm{Lg}X) = \mathrm{Lg}\tilde{x}$. Donc l'homomorphisme $\boldsymbol{S}_d^+ \otimes I_d$ restreint à $K^{\mathrm{diff}} \otimes_K K_\infty<\tilde{x}^\alpha, \mathrm{Lg}\tilde{x}>$ coíncide avec l'isomorphisme $\phi \circ \sigma$. Alors $(\boldsymbol{S}_d^+ \otimes I_d)|_{K^{\mathrm{diff}} \otimes_K \boldsymbol{K}_F}$ est injectif, donc il s'étend au corps de fractions $\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}} = \mathbb{Q}(K^{\mathrm{diff}} \otimes_K \boldsymbol{K}_F)$; soit $\psi_d^+ : \boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}} \to \widetilde{\mathcal{M}}_d$ cette extension.

Soit $\mathfrak{q} = \{q_1, \dots, q_m\} \subseteq \boldsymbol{E}$. On considère les extensions de Picard–Vessiot

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}} &\subseteq \boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}<1 \otimes e^{q_1}, \dots, 1 \otimes e^{q_m}> \subseteq \hat{\boldsymbol{K}}, \\ \boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}} &\overset{\psi_d^+}{\to} \psi_d^+(\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}})<e^{q_1}, \dots, e^{q_m}> \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_d, \end{aligned}$$

associées au système d'équations différentiels linéaires $y_j' = \frac{\mathrm{d}\, q_j}{\mathrm{d}\, x} \cdot y_j$, $1 \le j \le m$. Par le théorème d'unicité il existe un isomorphisme différentiel

$$\bar{\phi} : \boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}<1 \otimes e^{q_1}, \dots, 1 \otimes e^{q_m}> \to \psi_d^+(\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}})<e^{q_1}, \dots, e^{q_m}>,$$

tel que $\bar{\phi}|_{\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}} = \psi_d^+$. Soit $\{p_1, \dots, p_r\}$ une $\mathbb{Z}$-base de $\boldsymbol{E}(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}q_1 + \dots + \mathbb{Z}q_m$. Alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}<1 \otimes e^{q_1}, \dots, 1 \otimes e^{q_m}> &= \boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}<1 \otimes e^{p_1}, \dots, 1 \otimes e^{p_r}>, \\ \psi_d^+(\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}})<e^{q_1}, \dots, e^{q_m}> &= \psi_d^+(\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}})<e^{p_1}, \dots, e^{p_r}>. \end{aligned}$$

On a $\bar{\phi}(\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}x}) = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}x}$ car $\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}x} \in K_\infty$ et $\psi_d^+|_{K_\infty} = I_d$. Alors $\bar{\phi}(1 \otimes e^{q_j})$ satisfait l'équation différentielle $y_j' = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}x} y_j$. Il existe donc $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}^*$ tels que $\bar{\phi}(1 \otimes e^{q_j}) = c_j e^{q_j}$, $1 \leq j \leq r$. D'après le théorème 2.89, il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_{\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}}\big(\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}{<}e^{\mathfrak{q}}{>}\big)$, tel que $\sigma(1 \otimes e^{p_j}) = \frac{1}{c_j} 1 \otimes e^{p_j}$, $1 \leq j \leq r$. Alors l'homomorphisme $\boldsymbol{S}_d^+ \otimes I_d$ restreint à $\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}{<}e^q{>}$ coïncide avec l'isomorphisme $\sigma \circ \bar{\phi}$. Donc $(\boldsymbol{S}_d^+ \otimes I_d)|_{\boldsymbol{K}_F^{\mathbf{diff}}<e^q>}$ est injectif. Alors $\boldsymbol{S}_d^+|_{K^{\mathrm{diff}}} \otimes I_d|_{\boldsymbol{K}}$ est un homomorphisme différentiel injectif. ∎

Définition 4.7 *Soit $\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$ le corps de fractions de l'anneau $K^{\mathrm{diff}} \otimes_K \boldsymbol{K}$. Soient*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_d^+ : \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}} &\to \widetilde{\mathcal{M}}_d, \\ \mathcal{S}_d^- : \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}} &\to \widetilde{\mathcal{M}}_d, \end{aligned}$$

les extensions des homomorphismes injectifs $\boldsymbol{S}_d^+|_{K^{\mathrm{diff}}} \otimes I_d|_{\boldsymbol{K}}$ et $\boldsymbol{S}_d^-|_{K^{\mathrm{diff}}} \otimes I_d|_{\boldsymbol{K}}$.

Proposition 4.8 *Soit (Δ) un système d'équations différentielles linéaires sur K. soit $d \in \widetilde{S}$. Soit $K(\Delta)$ l'extension de Picard–Vessiot associée à (Δ) et contenue dans $\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$. Alors*

$$\mathcal{S}_d^+\big(K(\Delta)\big) = \mathcal{S}_d^-\big(K(\Delta)\big).$$

On a

$$\mathcal{S}_d^+(\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}) = \mathcal{S}_d^-(\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}).$$

Preuve. Les homomorphismes différentiels $\mathcal{S}_d^+$ et $\mathcal{S}_d^-$ laissent fixes les éléments de K, alors $\mathcal{S}_d^+\big(K(\Delta)\big)$ et $\mathcal{S}_d^-\big(K(\Delta)\big)$ sont deux extensions de Picard–Vessiot associées à (Δ) et contenues dans le corps $\widetilde{\mathcal{M}}_d$. Le corps de constantes de $\widetilde{\mathcal{M}}_d$ est $\mathbb{C}$, alors il y a une seule extension de Picard–Vessiot associée à (Δ) est contenue dans $\widetilde{\mathcal{M}}_d$. La seconde partie est une conséquence de la première partie et du lemme 4.4. ∎

Définition 4.9 (Les opérateurs de Stokes) *Soit $d \in \widetilde{S}$ une direction sur la surface de Riemann du logarithme. On définit l'opérateur de Stokes associé à la direction $d \in \widetilde{S}$ (et on le désigne par $\boldsymbol{St}_d$) comme la composition des isomorphismes différentiels :*

$$\boldsymbol{St}_d : \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}} \xrightarrow{\mathcal{S}_d^+} \mathcal{S}_d^-(\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}) = \mathcal{S}_d^-(\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}) \xrightarrow{(\mathcal{S}_d^+)^{-1}} \boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}.$$

L'opérateur $\boldsymbol{St}_d$ est un automorphisme différentiel qui laisse fixes les éléments de K, donc $\boldsymbol{St}_d \in \mathrm{Gal}_K(\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}})$. Soit (Δ) un système d'équations différentielles linéaires sur K, et $K(\Delta)$ l'extension de Picard–Vessiot associée à (Δ)

contenue dans $\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$. *Alors* $\boldsymbol{St}_d\big(K(\Delta)\big) = K(\Delta)$ *car le corps de constantes de* $\boldsymbol{K}^{\mathbf{diff}}$ *est* $\mathbb{C}$. *On désigne par* $\boldsymbol{St}_d(\Delta)$ *l'automorphisme*

$$\boldsymbol{St}_{d|K(\Delta)} \in \mathrm{Gal}_K\big(K(\Delta)\big).$$

4.2 Le théorème de densité.

On considère la représentation du groupe fondamental sauvage formel :

$$\hat{\mu}_f : \boldsymbol{T}_e \rtimes (\hat{\gamma}_0) \to \mathrm{Gal}_{\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{K}}),$$

où $\hat{\mu}_f(\chi, \hat{\gamma}_0^k) = \tau \hat{m}^k$ avec $\tau \in \mathrm{Gal}_{\hat{\boldsymbol{K}}_F}(\hat{\boldsymbol{K}})$ et pour tout $q \in \boldsymbol{E}$ on a $\tau(e^q) = \chi(q)e^q$.

Théorème 4.10 (J.P. Ramis) *Soit* (Δ) *un système d'équations différentielles linéaires sur le corps différentiel* K *de germes de fonctions méromorphes à l'origine de* $\mathbb{C}$. *Soit* $K(\Delta)$ *la seule extension de Picard–Vessiot associée à* (Δ) *contenue dans le corps* $\hat{\boldsymbol{K}}$. *Soit* $G = \mathrm{Gal}_K\big(K(\Delta)\big)$ *le groupe algébrique des automorphismes différentiels de* $K(\Delta)$ *qui laissent fixes les éléments de* K. *Soit* H *le sous groupe de* G *engendré par l'automorphisme de monodromie formelle* $\hat{m}_{|K(\Delta)}$, *par le tore exponentiel (i.e. par les automorphismes* $\hat{\mu}_f(\chi)_{|K(\Delta)}$, *avec* $\chi \in \boldsymbol{T}_e$*) et par les opérateurs de Stokes* $\boldsymbol{St}_d$ *associées a toute direction* $d \in \widetilde{S}$. *Alors* H *est Zariski dense dans* G.

Preuve. D'après la proposition 1.43 et la correspondance de Galois il suffit de montrer que

$$K = \{\xi \in K(\Delta) \mid \sigma(\xi) = \xi,\ \forall \sigma \in H\}.$$

Soit $\xi \in K(\Delta)$ tel que $\hat{m}(\xi) = \xi$ et $\tau(\xi) = \xi$ pour tout $\tau \in \hat{\mu}_f(\boldsymbol{T}_e)$. Par le théorème 2.96 on a que $\xi \in K^{\mathrm{diff}} \subseteq \hat{K}$. Par la remarque 4.1 on a ξ est une série formelle multisommable. Donc il existe $(k_1, \ldots, k_r)$ tel que ξ et $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable. On a que $\boldsymbol{St}_d(\xi) = \xi$ pour toute direction $d \in \widetilde{S}$, alors $\boldsymbol{S}_d^+(\xi) = \boldsymbol{S}_d^-(d)$ pour toute direction d. Par la proposition 3.110 l'ensemble de directions $(k_1, \ldots, k_r)$-singulières de ξ est vide. Par le corollaire 3.107, $\xi \in K$.
∎

Bibliographie

[Bal.94] Balser *From Divergent Power Series to Analytic Functions*, Ed. Springer–Verlag, L.N.M. 1582 (1994).

[1] , Borel, A., “Linear Algebraic Groups”, Springer-Verlag, 1991.

[2] Deligne, P., *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, L.N.M., No. 163, Springer-Verlag, 1970.

[3] Fabry, E. *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels*, Thèse, 1885 Paris.

[Hum] Humphreys, J.E. Linear Algebraic Groups. G.T.M. vol. 21, Springer–Verlag New York, 1975.

[Jac] Jacobson, Nathan, “Basis Algebra II”, Ed. W.H. Freeman and Company, New York 1989.

[4] Kaplansky, I. “An introduction to Differential Algebra”, Ed. Hermann, 1957.

[5] Katz, N., “A simple algorithm for cyclic vectors”, Amer. J. Math. 109 (1987), 65–70.

[6] Levelt, A.H.M. *Differential Galois theory and tensor products*, Indag. Mathem., **1** (4), 1990, 439–450.

[7] Levelt, A.H.M. *Jordan decomposition of a class of singular differential operators*, Ark. Mat. **13** (1975), 1–27.

[8] Malgrange, B. *Sur la réduction formelle des équations à singularités irrégulières*, Preprint, Grenoble (1979), non publié.

[9] Malgrange, B. “Equations Différentielles à Coefficients Polynomiaux”, Progress in Math. Vol. 96, Ed. Birkhäuser, 1991.

[10] Malgrange, B. *Sommation des séries divergentes*, Expo. Math. **13** (1995), 163–222.

[11] Malgrange, B. et Ramis, J.P. *Fonctions multisommables*, Ann. Ins. Fourier (Grenoble), **41** (1991), 1–16.

[Mum] Mumford, D. Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties. Springer–Verlag, 1976.

[12] van der Put, M., Singer, M.F. "Galois Theory of Difference Equations", Springer-Verlag 1997.

[13] Ramis, J.P. *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard–Vessiot d'une équation différentielle irrégulière*, preprint d'Instituto de Matématica Pura e Aplicada (IMPA) **45**, Rio de Janeiro, 1985.

[14] J.P. Ramis & Y. Sibuya, *Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotics solutions of Gevrey type*, Asympt. Anal. **2** (1989), 39–94.

[15] Robba, P. *Lemme de Hensel pour des opérateurs différentielles*, Ens. Math. **26**, fasc. 3–4 (1980), 279–311.

[16] Springer, T. A., "Linear Algebraic Groups", Birkhäuser 1981.

[17] Tougeron, J.C. Notes d'un cours de troisième cicle Rennes–Toronto (1989-90).

[18] Turrittin, H.L. *Convergent Solutions of Ordinary Linear Homogeneous Differential Equations in the Neighborhood of an Irregular Singular Point*, Acta Mathematica **93** (1995), 27–66.

[19] Wasow, W. "Asymptotic expansion for ordinary differential equations", Intersc. Publi., 1965.

[20] Watson,G.N. *A Theory of Asymptotics Series*, Philosophical Transactions of the Royal Society, Ser. A, bf 211 (1912), 279–313.