TD n°4. Sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Familles libres, génératrices. Notion de dimension.

1 Sous espaces vectoriels

Exercice 1

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x + y + z = 0$$

   est un sev de $\mathbb{R}^3$

2. (a) Montrer que l'ensemble : $\mathcal{S} = \{(a, 0, 0, b);\ a, b \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$
   (b) Donner deux éléments de $\mathbb{R}^4$ permettant de recouvrir S à l'aide de combinaisons linéaires.

****

Exercice 2
Pourquoi les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels ?

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - 3y + z = 5\} \quad E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0 \ et\ y \geqslant 0\}$$

****

2 Familles génératrices

Exercice 3

1. Expliquer pourquoi les 3 vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ génèrent $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u_1 = (1, 0, 0)$ $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$

****

Exercice 4
Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$;
2. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$;
3. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

****

Exercice 5

1. Les vecteurs $a = (1, 0, 0)$ $b = (0, 1, 0)$ et $c = (2, 5, 0)$ forment ils une famille génératrice de l'espace $\mathbb{R}^3$?
2. Considérons les vecteurs

$$u = (1, 4, -3),\ v = (-4, -4, 8)\ et\ w = (-3, 0, 5).$$

   La famille $\{u, v, w\}$ est elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

****

3 Familles libres

Exercice 6
Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

1. (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 4, 6)$;
2. (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$;
3. (u, v, w, z) avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$, $w = (7, 8, 9)$ et $z = (10, 11, 12)$.

****

Exercice 7
Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

****

4 Bases, Dimension, TDR

Exercice 8
Soient $v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 1, 0)\ v_3 = (0, 1, 0)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

****

Exercice 9

1. On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1, 2, 1)$ $u_2 = (2, 1, 3)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$.
   (a) Ces vecteurs sont ils linéairement indépendants ? Forment ils une base ?
   (b) Ecrire le vecteur $v = (6, 7, 8)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
2. On note $t_1 = (1, 0, 0),\ t_2 = (1, 1, 0)$ et $t_3 = (1, 1, 1)$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{t_1, t_2, t_3\}$ est libre. Que peut-on en conclure ?
   (b) Déterminer les coordonnées de tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

****

Exercice 10
On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - z = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 0, 2),\ u_2 = (0, 1, 3)$ forment une famille libre de $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que tout vecteur de $\mathcal{P}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.
   (c) En déduire une base de $\mathcal{P}$.
3. Quelles sont les coordonnées de tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathcal{P}$ dans la base $\{u_1, u_2\}$?

****

Exercice 11
Soit f l'application linéaire telle que sa matrice dans les bases canoniques correspondantes soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez une base de $Ker(f)$
2. Déterminez $dim(Im(f))$. En déduire une base de $Im(f)$.

****

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$. Décrire $Ker(f)$.

****

Exercice 13
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0$.

****