

TD n°5. Suites numériques.

1 Exercices généralistes

Exercice 1 Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n^2}{n+1}, \quad v_n = \sqrt{3n+1}, \quad w_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{5}{2}n^2 + 6n + 1.$$

Exercice 2 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$
2. Etudier les variations de $(u_n)_n$.
3. La suite $(u_n)_n$ peut-elle converger vers une limite finie ?

2 Suites arithmétiques et géométriques

2.1 Pour se préparer

- Exercice 3**
1. Calculer la raison d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 5$ et de huitième terme $u_8 = 8,5$.
 2. On donne les termes $u_4 = -3$ et $u_7 = -12$ d'une suite arithmétique. Calculer le premier terme de la suite et la raison.
 3. Soit une suite arithmétique U_n de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 3$. Ecrire les quatre premiers termes de la suite. Calculer le terme de rang 100.
 4. Calculer la somme des huit premiers termes d'une suite arithmétique de 1er terme 6 et de raison 5.

- Exercice 4**
1. Calculer la raison d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de septième terme $u_7 = 0,03125$.
 2. On donne les termes $u_2 = 8$ et $u_7 = -256$ d'une suite géométrique. Calculer le premier terme de la suite et la raison.
 3. Soit une suite géométrique U_n de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = 3$. Ecrire les quatre premiers termes de la suite. Calculer le terme de rang 10.
 4. Calculer la somme des huit premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 2 et de raison 3.

Exercice 5 Déterminez un nombre x tel que les nombres

$$25, \quad x, \quad ,16$$

soient les termes successifs d'une suite géométrique de raison négative.

2.2 Pour s'entraîner

Exercice 6 Soit U une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = -14$.

1. Calculer U_1 et U_2 .
2. Ecrire U_{n+1} en fonction de U_n .
3. Ecrire U_n en fonction de n , retrouver les valeurs de U_1 et U_2 , calculer U_{57} .
4. Préciser le sens de variation de U ainsi que sa limite.
5. Considérons S_p la somme des $p + 1$ premiers terme de la suite U .
Ecrire S_p en fonction de p . Calculer S_6 .
6. Déterminer p_0 pour que $S_{p_0} = -54$

Exercice 7 Soit U une suite géométrique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = -14$.

1. Calculer U_1 et U_2 .
2. Ecrire U_{n+1} en fonction de U_n .
3. Ecrire U_n en fonction de n , retrouver les valeurs de U_1 et U_2 , calculer U_{57} .
4. Préciser le sens de variation de U ainsi que sa limite.
5. Considérons S_p la somme des $p + 1$ premiers terme de la suite U .
Ecrire S_p en fonction de p . Calculer S_6 de deux façons.
6. Déterminer p_0 pour que $S_{p_0} = -3570$.

Exercice 8 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par :

$$u_n = e^{1-\frac{n}{2}}, \quad v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme ainsi que la raison.
2. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser son premier terme ainsi que la raison.
3. On note

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \quad \text{et} \quad P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n.$$

- (a) Donner les formes explicites de (S_n) et (P_n) .
- (b) Préciser la nature de ces suites, ainsi que leurs éventuelles limites.

3 Des applications...

Exercice 9 *Simulation d'un crédit*

M. X achète par correspondance à une société qui lui fait un crédit de 900 euros. Le taux mensuel de ce crédit est de 1,5 %. Chaque mois, M. X doit rembourser 45 euros. Cette somme comprend d'une part les intérêts dus pendant le mois et d'autre part une partie du remboursement du crédit.

1. Calculer les intérêts dus à l'issue du premier mois et en déduire le montant du crédit qu'il reste à rembourser à M. X après son premier versement de 45 euros.
2. On note $U_0 = 900$ le crédit initial et U_n le montant du crédit qu'il reste à rembourser à l'issue du n -ième mois.
Montrer que pour tout entier n ,

$$U_{n+1} = 1,015.U_n - 45$$

3. On pose $V_n = U_n - 3000$.
 - (a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
 - (c) A partir de combien de mois M. X aura-t-il remboursé la moitié de son crédit ?

Exercice 10 *En vous inspirant des idées de l'exercice précédent...*

On veut emprunter une somme S à un taux de $t\%$ sur une durée de N années. Donner une formule donnant la mensualité. Préciser la part du capital et intérêt de chaque mensualité.

Exercice 11 Le président d'une association sportive constate que, chaque année, l'association garde 75% de ces anciens adhérents et qu'il y a 800 nouveaux inscrits.

On suppose que l'évolution du nombre d'adhérents reste le même au fil des années. On se propose d'étudier cette évolution.

On note U_n le nombre d'adhérents au bout de n années. On sait qu'au démarrage de l'association il y avait 1600 adhérents ($U_0 = 1600$).

1. Montrer que pour tout entier n ,

$$U_{n+1} = 0,75.U_n + 800$$

2. On pose $V_n = 3200 - U_n$.

(a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) Exprimer V_n en fonction de n .

3. Etudier la limite de la suite U .

Que peut-on en déduire concernant le nombre d'adhérent de l'association ?

Exercice 12 Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

- 1er contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.
- 2ième contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est à dire du 36 ième mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs)
