

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - TOULOUSE III

**Manuscrit**

*présenté pour l'obtention de*

**l'Habilitation à Diriger des Recherches**

*par*

**Aude RONDEPIERRE**

de

l'Institut de Mathématiques de Toulouse

**“ Contributions en optimisation non lisse et applications  
dans le domaine de l'aéronautique et du spatial. ”**

Soutenance le lundi 28 novembre 2016, devant le jury composé de :

Rapporteurs :	M. Joseph-Frédéric BONNANS	Directeur de Recherche INRIA Saclay
	M. Jean-Baptiste CAILLAU	Professeur à l'Université de Dijon
	Mme Claudia SAGASTIZÀBAL	Directrice de Recherche, IMPA-Brésil
Examineurs :	M. Samir ADLY	Professeur à l'Université de Limoges
	M. Denis ARZELIER	Directeur de Recherche au LAAS-CNRS
	M. Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY	Professeur émérite à l'Université de Toulouse
	M. Christophe PRIEUR	Directeur de Recherche GIPSA-CNRS
Parrain :	M. Dominikus NOLL	Professeur à l'Université de Toulouse



# Remerciements

Ce mémoire revient sur dix années de recherche depuis mon arrivée à Toulouse en 2006. Quand je me retourne et vois le chemin parcouru, je vois aussi tous ceux et celles qui m'ont accompagnée tout au long de mon parcours scientifique, et sans qui ce mémoire ne serait pas ce qu'il est. Qu'ils en soient ici remerciés.

Je remercie sincèrement mes rapporteurs, Frédéric Bonnans, Jean-Baptiste Caillau et Claudia Sagastizàbal, pour m'avoir fait l'honneur de consacrer un peu de leur temps précieux à la lecture approfondie de ce mémoire. Merci pour vos retours constructifs et bienveillants qui comptent beaucoup pour moi.

Mes remerciements vont également à Dominikus Noll, mon parrain, pour m'avoir accueillie à Toulouse après ma thèse et m'avoir fait découvrir le domaine de recherche de l'optimisation non lisse. De post-doctorante à maître de conférence, j'apprécie toujours autant notre collaboration et nos discussions qui m'ont énormément appris.

Je remercie de tout coeur Jean-Baptiste Hiriart-Urruty qui a été un coach formidable dans la préparation de cette habilitation. Merci pour ta disponibilité et tes précieux conseils, ta présence aujourd'hui est importante pour moi.

Mes remerciements vont également à Denis Arzelier pour notre collaboration, sa disponibilité, son regard à la fois critique et constructif sur mes travaux et sa participation au Jury. Son exigence scientifique et sa bienveillance constante m'ont beaucoup apporté ces dernières années. Je lui suis également très reconnaissante de m'avoir fait découvrir les mathématiques appliquées au spatial, domaine dans lequel j'avais toujours voulu travailler.

Je remercie également chaleureusement Samir Adly et Christophe Prieur qui ont accepté de participer au Jury. Votre présence me touche et m'honore.

J'ai eu le privilège de souvent mener mes travaux de recherche en collaboration, c'est aussi ce que j'apprécie dans ce métier et je ne saurais assez dire l'enrichissement de mon travail dû à ces échanges. Merci à Denis Arzelier, Lucie Baudouin, Matthieu Belleville, Thierry Druot, Mioara Joldes, Pierre Maréchal, Dominikus Noll et Olivier Prot. Une pensée toute particulière à Sylvain Prigent et Romain Serra, mes deux anciens doctorants, avec qui j'ai adoré travailler et qui m'ont aussi beaucoup appris : merci !

Un grand merci également à mes collègues de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, aussi bien à l'Université qu'au département GMM, pour leur présence amicale et la bonne ambiance qui règne dans nos couloirs. C'est un plaisir de venir travailler !

J'en profite également pour remercier de tout coeur ma famille et mes amis pour leur patience, leur écoute et leur soutien durant toutes ces années. Votre présence est précieuse. Une pensée toute particulière pour ma petite famille et Vincent qui a supporté mes doutes et m'a encouragée à persévérer en me laissant la place pour le faire. A vous tous : m e r c i.



A Soeur Jeanne-Marie

A ma grand-mère



# Table des matières

<b>Présentation générale du manuscrit</b>	<b>1</b>
<b>I Deux algorithmes de descente en optimisation non lisse, non convexe avec applications en synthèse de loi de commande structurée</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Algorithme de faisceaux avec contrôle de proximité</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction et principaux résultats . . . . .	7
1.1.1 Les méthodes de faisceaux : le cas convexe . . . . .	7
1.1.2 Extension au cas non convexe . . . . .	9
1.1.3 Résumé des contributions . . . . .	10
1.2 La notion de modèle au cœur de l'algorithme . . . . .	11
1.3 Algorithme de faisceaux avec contrôle de proximité . . . . .	12
1.3.1 Boucle intérieure ou comment générer un pas de descente . . . . .	13
1.3.2 Algorithme de faisceaux . . . . .	15
1.4 Convergence de l'algorithme de faisceaux . . . . .	16
1.4.1 Résultat de convergence globale . . . . .	16
1.4.2 Application à quelques cas particuliers . . . . .	17
1.5 Application à l'optimisation sous contrainte . . . . .	19
1.6 Commentaires et perspectives . . . . .	21
<b>2 Applications en synthèse de loi de commande structurée</b>	<b>23</b>
2.1 La synthèse mixte $H_2/H_\infty$ . . . . .	23
2.1.1 Définition et calcul des normes $H_2$ et $H_\infty$ . . . . .	24
2.1.2 Formulation du problème $H_2/H_\infty$ . . . . .	26
2.2 Approche non lisse pour la commande structurée . . . . .	28
2.3 Algorithmes de descente non lisses pour la synthèse $H_2/H_\infty$ . . . . .	30
2.3.1 Algorithme de descente avec recherche linéaire . . . . .	30
2.3.2 Algorithme de faisceaux de premier ordre . . . . .	32
2.3.3 Critères d'arrêt et test de criticalité . . . . .	33
2.4 Résultats numériques . . . . .	34
2.5 Commentaires et perspectives . . . . .	36
<b>II Questions de convergence</b>	<b>37</b>
<b>Introduction</b>	<b>39</b>
A propos du sous-différentiel en analyse non lisse : quelques définitions . . . . .	39
L'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz : le cas non lisse . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Convergence sous hypothèse de Kurdyka-Łojasiewicz</b>	<b>41</b>
3.1	Convergence pour des fonctions de classe $C^1$	41
3.1.1	Algorithmes de descente avec recherche linéaire par rebroussement	42
3.1.2	Algorithmes de descente de type région de confiance	44
3.2	Convergence locale de la méthode des projections alternées	46
3.2.1	Etat de l'art et contributions	46
3.2.2	Ingrédients pour la convergence, lien avec l'inégalité de Łojasiewicz	49
3.2.3	Convergence de l'algorithme de Gerchberg-Saxton	52
3.3	Conclusion et perspectives	52
 <b>III Applications dans le domaine de l'aéronautique et du spatial</b>		<b>53</b>
<b>Introduction</b>		<b>55</b>
<b>4</b>	<b>Problème du rendez-vous orbital en temps fixé et consommation minimale</b>	<b>57</b>
4.1	Présentation du problème du rendez-vous orbital	58
4.2	Théorie du vecteur efficacité et conditions d'optimalité	60
4.2.1	Conditions d'optimalité de Carter	61
4.2.2	Solution analytique du problème du rendez-vous hors-plan	62
4.2.3	Un algorithme mixte pour le problème co-planaire	63
4.3	Optimisation, problème de moments et programmation non linéaire - Une approche classique revisitée	65
4.3.1	Formulation en un problème convexe semi-infini	66
4.3.2	Un nouvel algorithme basé sur des méthodes de discrétisation	67
4.3.3	Résultats analytiques pour le problème hors-plan	69
4.3.4	Tests numériques pour le problème du rendez-vous	70
4.4	Conclusion et perspectives	70
<b>5</b>	<b>Evaluation du risque et calcul de manœuvres pour l'évitement de collision</b>	<b>73</b>
5.1	Modèles de rencontre	74
5.1.1	Définition du modèle général de rencontre	74
5.1.2	Définition de la probabilité de collision	75
5.1.3	Hypothèses et cadre de travail	76
5.2	Evaluation du risque de collision	77
5.2.1	Formule analytique pour des objets à géométrie sphérique	77
5.2.2	Bornes analytiques sur la probabilité de collision et calcul certifié	79
5.3	Algorithmes pour le calcul de manœuvres d'évitement	80
5.3.1	Deux approches en rencontre rapide	80
5.3.2	Rencontres lentes : de l'intérêt de la modélisation polyédrale	82
5.4	Conclusion et perspectives	86
<b>6</b>	<b>Approche novatrice pour la conception et l'exploitation d'avions écologiques</b>	<b>87</b>
6.1	Modélisation, simulation et validation	88
6.1.1	Description du processus de conception avion	88
6.1.2	Configuration de l'avion hybride	90
6.2	De l'optimisation déterministe à l'optimisation sous contrainte en probabilité	91
6.2.1	Formulation du problème	91
6.2.2	Quantification et propagation d'incertitudes	93
6.2.3	Optimisation sous contrainte en probabilité de l'avion hybride	96
6.3	Premiers pas vers l'optimisation robuste	98
6.4	Conclusion	100



<b>7</b>	<b>Autres perspectives de recherche</b>	<b>101</b>
7.1	Autour de la commande robuste $H_\infty$ . . . . .	101
7.1.1	Calcul robuste de la norme $H_\infty$ . . . . .	101
7.1.2	Commande active de vibrations d'un cable incliné . . . . .	102
7.2	Dans le domaine du spatial . . . . .	103
7.2.1	Evitement de collision en rencontres multiples . . . . .	103
7.3	Optimisation et apprentissage . . . . .	104
7.3.1	Optimisation distribuée et apprentissage de dictionnaire. Applications en imagerie et en géophysique . . . . .	105
7.3.2	Méthodes de faisceaux pour l'apprentissage . . . . .	106
	<b>Publications de l'auteur</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>



# Présentation générale du manuscrit

Ce mémoire d'habilitation rend compte de l'essentiel des recherches que j'ai menées depuis mon arrivée à l'Institut de Mathématiques de Toulouse. En rupture avec mes travaux de doctorat, mes recherches actuelles s'inscrivent dans la thématique générale de l'optimisation, avec une certaine variété des outils mathématiques manipulés et des applications considérées.

Pour ces raisons, j'ai organisé la lecture de ce mémoire en trois parties distinctes, pouvant être lues indépendamment les unes des autres. Les deux premières portent sur des enjeux propres à l'optimisation numérique : algorithmes pour l'optimisation non lisse, non convexe dans la première partie, questions de convergence d'algorithmes d'optimisation bien connus dans la deuxième. La troisième partie porte sur mes travaux dans le domaine du spatial et de l'aéronautique : rendez-vous orbital, évitement de collision, conception d'avions. Chacun des trois chapitres présentés peut être lu indépendamment des autres. Afin de rendre la lecture plus intéressante et plus pédagogique (du moins, je l'espère), j'ai pris le temps, dans chaque partie et dans chaque chapitre, de bien décrire le contexte théorique ou applicatif dans lequel j'ai travaillé, ainsi que les enjeux propres à chaque thématique. Cela justifie, en partie, la longueur de ce mémoire et de la bibliographie.

La première partie s'inscrit dans la problématique du développement de nouvelles stratégies d'optimisation non lisse et non convexe, en vue de leur application en synthèse de lois de commande structurées. Le Chapitre 1 est consacré aux méthodes de faisceaux. Après un nécessaire état de l'art, je décris un nouvel algorithme de faisceaux de second ordre avec contrôle de proximité, publié dans [209], et dont on démontre la convergence sous des hypothèses raisonnables. Ces travaux ont été motivés par des applications en automatique et, plus précisément, en synthèse de lois de commande robustes [14, 15, 16]. L'idée est que tout problème de synthèse de lois de commande peut être reformulé en un problème d'optimisation non lisse et/ou non convexe, auquel auront été intégrées d'éventuelles contraintes d'ordre et de structure du correcteur cherché. Cette approche est mise en œuvre au Chapitre 2 pour la résolution numérique du problème mixte  $H_2/H_\infty$  structuré : après une description succincte du problème  $H_2/H_\infty$ , deux algorithmes sont proposés et testés sur plusieurs exemples issus de la littérature.

La deuxième partie de ce mémoire s'articule autour des questions de convergence de quelques algorithmes, bien connus de la communauté de l'optimisation, à l'aide de l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz. Cette partie, associée à des travaux récents que je souhaite développer dans un avenir proche, comprend un unique chapitre. L'idée est, dans un premier temps, d'expliquer comment cette inégalité permet d'obtenir la convergence des itérés générés par un algorithme de descente, sous hypothèse que la fonction objectif soit de classe  $C^1$  et vérifie une certaine condition de décroissance suffisante. Appliquée aux algorithmes bien connus de recherche linéaire et de région de confiance [210], cette approche permet de généraliser les résultats de convergence classiques, et de démontrer la convergence d'un nouvel algorithme de recherche linéaire avec mémoire du pas. Dans un second temps, je m'intéresse à la convergence de l'algorithme des projections alternées entre deux ensembles fermés d'intersection non vide [211]. A l'aide de l'inégalité de Lojasiewicz, nous obtenons une explication théorique au fait qu'en pratique, même en l'absence de convexité, cet algorithme a de bonnes propriétés de convergence au voisinage de l'intersection. Nous obtenons également la première démonstration de la convergence de l'algorithme de Gerchberg-Saxton en recouvrement de phase.

La troisième partie de ce mémoire est consacrée à mes travaux dans le domaine du spatial et de l'aéronautique. Les Chapitres 4 et 5 rendent compte des travaux réalisés en collaboration avec des collègues du LAAS (Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes), sur les thématiques respectivement du rendez-vous orbital et de l'évitement de collision. Dans ces deux chapitres, on se place sous l'hypothèse de poussées impulsives : lorsque la durée de la phase de poussée est très petite devant la durée de la mission, l'approximation impulsive consiste à substituer un changement de vitesse instantané à cette phase de poussée. L'avantage est de pouvoir se ramener, dans un cas comme dans l'autre, à un problème d'optimisation de dimension finie, dont les paramètres sont le nombre d'impulsions, les vecteurs de ces impulsions et leurs dates d'application.

Dans le Chapitre 4, je m'intéresse à des problèmes de commande optimale impulsive, appliqués au problème du rendez-vous orbital entre un véhicule cible passif et d'un véhicule chasseur commandé, évoluant sur deux orbites elliptiques képlériennes. Deux approches sont présentées : la première s'inscrit dans le cadre des méthodes indirectes, basées sur les conditions nécessaires d'optimalité dérivant du principe du maximum de Pontryagin et conduisant, dans le cadre impulsionnel, à la théorie du vecteur efficacité [23, 258]. La seconde consiste à reformuler le problème de commande optimale initial en un problème de moment de norme minimum. Ce problème est transformé en un problème d'optimisation convexe semi-infini à l'aide d'une relaxation et de la théorie de la dualité dans des espaces vectoriels normés. Un nouvel algorithme basé sur des méthodes de discrétisation est proposé pour résoudre ce problème, ainsi qu'une procédure très simple de reconstruction des impulsions optimales et de leurs dates d'application [19].

Dans le Chapitre 5, je m'intéresse à la problématique de l'évitement de collision entre un satellite actif et un débris spatial non commandé. Cette thématique a fait l'objet de la thèse de R. Serra, co-financée par CNRS et Airbus Defence and Space. L'objectif est d'évaluer le risque de collision entre les deux objets afin de pouvoir programmer une éventuelle manœuvre d'évitement. Les données concernant les positions et vitesses des deux objets sont supposées connues avec une certaine incertitude. Le problème de l'évaluation du risque de collision se reformule naturellement en un problème de calcul de la probabilité de collision. Une contribution importante a été de proposer une nouvelle méthode de calcul de la probabilité de collision en rencontre rapide, et de la probabilité instantanée de collision, sous incertitude gaussienne pour des objets à géométrie sphérique [253, 254]. Dans un second temps, nous nous intéressons au calcul de manœuvres d'évitement dans le cas où le risque est jugé trop important. Les travaux ont été organisés autour de l'étude de deux cas particuliers (les rapprochements rapides [257] et les rapprochements lents [255]), où des hypothèses spécifiques permettent d'obtenir des solutions. Dans les deux cas, le problème d'évitement de collision se reformule comme un problème d'optimisation sous contraintes en probabilité.

Le Chapitre 6 s'inscrit dans le cadre de la thèse CIFRE de S. Prigent aux Avant-Projets d'Airbus. L'idée est de proposer une nouvelle méthodologie pour l'optimisation globale de la conception d'avions plus écologiques et plus économiques, en tenant compte des différentes disciplines impliquées (géométrie de la cellule avion, moteurs, profil de mission). Les objectifs à minimiser sont : la consommation de carburant, l'impact climatique et le coût d'opération de l'avion. L'étude est organisée autour de la recherche de compromis entre ces trois objectifs, afin d'identifier les configurations d'avions optimales selon le critère sélectionné, et de proposer une analyse de ces résultats. Un enjeu de la thèse a été de prendre en compte, dans le problème d'optimisation, les incertitudes présentes au niveau des modèles. Deux approches d'optimisation stochastique [226] et d'optimisation robuste [227] ont été proposées. Une configuration d'avion hybride est proposée et optimisée pour atteindre l'objectif de réduction d'impact climatique.

Dans un dernier chapitre, je détaille plusieurs perspectives de recherche pour les années à venir, ne découlant pas nécessairement des travaux présentés dans ce mémoire. Certaines de ces pistes constituent déjà des projets en cours, tandis que d'autres sont des perspectives à plus long terme, vers lesquelles je souhaiterais orienter mes recherches.

*Mes publications sont accessibles en ligne à l'adresse :*

<http://perso.math.univ-toulouse.fr/rondepierre/publications/>

## Première partie

# Deux algorithmes de descente en optimisation non lisse, non convexe avec applications en synthèse de loi de commande structurée



# Introduction

La théorie de l'optimisation est au coeur de l'automatique moderne (commande LQ, LQG,  $H_2$ ,  $H_\infty$ ,  $H_2/H_\infty$ ) de sorte que chacune des deux communautés bénéficie des progrès effectués par l'une ou l'autre. Les lois de commande optimales s'expriment comme solutions d'équations algébriques de Lyapunov ou de Riccati, ou comme solutions de problèmes d'optimisation sous contraintes matricielles de positivité. Ces vingt dernières années, le succès des méthodes fondées sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI) pour la commande robuste a été accompagné d'un essor remarquable du domaine de la programmation semi-définie positive (SDP) en optimisation, avec l'apparition de méthodes itératives telles que les méthodes de points intérieurs. Cependant tous les problèmes de commande ne sont pas réductibles à des LMI ou des programmes SDP. Par exemple, les approches LMI ne permettent pas directement la prise en compte de contraintes d'ordre sur les lois de commande cherchées. De plus l'apparition de variables de Lyapunov dans ces inégalités, dont la taille croît avec le carré de l'ordre du système à commander, rend les méthodes LMI impraticables en grande dimension. Des approches plus récentes à base d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI) et de programmation non convexe, restent limitées par la taille de ces variables.

La nécessité de proposer une alternative aux méthodes LMI/BMI est allée de paire avec la nécessité de disposer d'une théorie de l'optimisation adéquate et d'algorithmes d'optimisation efficaces pour la résolution numérique de problèmes de complexité croissante. En particulier l'optimisation non différentiable est devenue une alternative sérieuse à la résolution effective de problèmes LMI traditionnels et a donné lieu à de nombreux développements récents, en particulier en vue de la commande robuste. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les liens entre optimisation et théorie de la commande robuste au mémoire d'Habilitation de D. Arzelier [17] qui propose une analyse complète sous l'angle de la théorie de Lyapunov.

Les bénéfices des techniques d'optimisation non lisse pour la synthèse de lois de commande se situent à plusieurs niveaux : elles sont flexibles dans le sens où elles permettent, sans effort supplémentaire, d'intégrer des contraintes d'ordre et de structure sur les lois de commande cherchées, et suffisamment générales pour pouvoir être appliquées à une large variété de problèmes avec ou sous contraintes, et quel que soit le nombre de contraintes. De plus, ces méthodes nous fournissent des certificats d'optimalité locale que ne donnent pas toujours d'autres approches.

## Algorithmes pour l'optimisation non lisse.

Les problèmes d'optimisation non lisse, même en l'absence de contraintes, sont en général très difficiles à résoudre. Il existe actuellement trois grandes familles de méthodes : les méthodes de *sous-gradients* [223, 260], les méthodes de *faisceaux* [149, 286, 169, 134, 171] et plus récemment les méthodes d'*échantillonnage de gradient* (sous-gradient) [70, 72].

Les méthodes de sous-gradients sont une généralisation naturelle des méthodes de gradient au cas non différentiable en remplaçant le gradient par *un* sous-gradient arbitraire. Ces méthodes (appelées *méthodes de Kiev*) ont été introduites dans les années 60 par N.Z. Shor [259] pour la minimisation sans contrainte de fonctions convexes, et l'on trouve les premiers résultats de convergence dans les travaux de Y.M. Ermoliev [108] ou de B.T. Polyak [224]. Une référence classique sur le sujet est le livre de N.Z. Shor [260]. Le succès de ces méthodes est dû à la simplicité de leur mise en œuvre, en particulier en grande dimension. Bien qu'elles soient largement utilisées en optimisation non lisse, elles souffrent de plusieurs inconvénients : contrairement aux méthodes de

gradient en optimisation différentiable, ce ne sont pas des méthodes de descente. Cela peut conduire à des phénomènes oscillatoires et à de mauvaises performances numériques. On ne dispose pas de critère d'arrêt naturel et implémentable permettant de détecter l'optimalité. Enfin, leur vitesse de convergence est en général assez faible (sous-linéaire) même s'il est possible de maintenir une convergence linéaire par des techniques de dilatation en espace le long du gradient [260, Chapitre 3].

Les méthodes de faisceaux ont constitué une avancée majeure pour la résolution de problèmes d'optimisation non différentiable. Considérées en 2001 comme "l'outil le plus efficace et le plus prometteur pour l'optimisation non lisse" [185], elles ont été largement éprouvées et ont fait leurs preuves dans le cas convexe [149, 286, 169, 134, 185, 61]. L'hypothèse de convexité étant un élément clé de ces méthodes, leur généralisation au cas non convexe est loin d'être immédiate et a fait l'objet de mes travaux de post-doctorat. Nous reviendrons en détails sur ces méthodes dans le Chapitre 1 dans lequel nous décrivons un nouvel algorithme de faisceaux du second ordre pour la minimisation de fonctions non lisses et non convexes.

Depuis 2002, une nouvelle approche basée sur des algorithmes d'échantillonnage de gradient (ou sous-gradients) et développée par J.V. Burke, A.S. Lewis et M.L. Overton [70, 72], s'est peu à peu imposée en méthode concurrente des méthodes de faisceaux, tant sur le plan théorique que sur le plan des performances numériques. Cette méthode, qui peut être vue comme une version stabilisée de l'algorithme de plus profonde descente, est dédiée à la minimisation de fonctions localement lipschitziennes, supposées de classe  $C^1$  sur un sous-ensemble ouvert dense de  $\mathbb{R}^n$ . La fonction objectif est possiblement non lisse, non convexe. L'idée centrale est d'approcher le sous-différentiel de la fonction objectif par l'enveloppe convexe d'un échantillonnage aléatoire de gradients calculés dans un voisinage du point courant. Un premier résultat de convergence avec une probabilité 1 a été démontré dans [70, 72], puis généralisé par K.C. Kiwiel dans [145]. A noter également une extension de cet algorithme au cas sans dérivée [146].

Une implémentation de ces méthodes est en accès libre<sup>1</sup> sous la forme d'un package Matlab HANSO (Hybrid Algorithm for Non-Smooth Optimization). Signalons également l'existence du package HIFOO<sup>2</sup> ( $H_\infty$ - $H_2$  Fixed Order Optimization) développé par M. Overton, D. Henrion et D. Arzelier [126, 21]. Basé sur HANSO, ce package a été conçu pour la stabilisation et la synthèse de lois de commande  $H_\infty$  et  $H_2$ . C'est le concurrent le plus sérieux des travaux décrits dans cette partie. Sans entrer dans les détails, les algorithmes utilisés dans HANSO et HIFOO mettent en œuvre en première phase un algorithme de type BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannon). Cet algorithme, appliqué à des problèmes d'optimisation non lisses, se comporte relativement bien en pratique : la convergence est rapide et conduit souvent à une approximation raisonnablement satisfaisante de l'optimum. Ce phénomène a tout d'abord été observé par plusieurs auteurs : C. Lemaréchal en 1982 [168], L. Lukšan et J. Vlček en 1999 et 2001 [184, 272] avant d'être étudié de façon plus approfondie par A. Lewis et M. Overton [178] très récemment. L'idée est que les fonctions localement lipschitziennes sont différentiables presque partout et qu'en pratique les itérés ne tombent pas sur les points de non-différentiabilité. C'est pour cela que la plupart des codes existants applique en première phase un algorithme de type BFGS, avant d'utiliser des méthodes plus sophistiquées de type faisceaux ou échantillonnage de gradients.

## Plan de la partie

La première partie de ce mémoire s'inscrit dans la problématique du développement de nouvelles stratégies d'optimisation non lisse non convexe en vue de leur application en synthèse de lois de commande structurées. Le premier chapitre est consacré aux méthodes de faisceaux pour l'optimisation de fonctions localement lipschitziennes, potentiellement non lisses et non convexes. Le second chapitre est consacré à la résolution numérique du problème mixte  $H_2/H_\infty$  structuré. Il s'agit de déterminer des correcteurs d'ordre et de structure imposés, minimisant un critère  $H_2$  deux fois différentiable sous une contrainte de type  $H_\infty$  à la fois non lisse et non convexe. Deux algorithmes non lisses sont proposés et testés sur plusieurs exemples issus de la littérature.

1. <http://www.cs.nyu.edu/faculty/overton/software/hanso>

2. <http://www.cs.nyu.edu/faculty/overton/software/hifoo>



# Chapitre 1

## Algorithme de faisceaux du second ordre avec contrôle de proximité

Considérons un problème d'optimisation non lisse non convexe très général de la forme :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \quad (1.1)$$

avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localement lipschitzienne, potentiellement non lisse et non convexe. On suppose dans tout ce chapitre que l'on dispose d'un oracle de premier ordre : pour un point  $x \in \mathbb{R}^n$  donné, on sait calculer  $f(x)$  et au moins un sous-gradient  $g(x) \in \partial f(x)$  de  $f$  en  $x$ , où  $\partial f(x)$  désigne le sous-différentiel de Clarke [85] de  $f$  au point  $x$ . On cherche une solution locale du problème (1.1) i.e. un point  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant la condition nécessaire d'optimalité de Clarke :  $0 \in \partial f(\bar{x})$  [85].

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme de faisceaux de second ordre pour la minimisation de fonctions non lisses et non convexes. L'élément central est l'utilisation d'un modèle convexe local de la fonction objectif, servant à générer des pas de descente. Contrairement aux approches traditionnelles, le modèle  $\Phi$  n'est pas nécessairement polyédral, ce qui améliore significativement les résultats en pratique. L'algorithme complet est décrit en détails dans l'article [209]. Cet article est une formalisation et une généralisation de l'algorithme de faisceaux de premier ordre décrit dans [15, 16], et spécialisé pour la résolution du problème  $H_2/H_\infty$  présenté dans le Chapitre 2.

Dans la première partie de ce chapitre, sans oser prétendre à l'exhaustivité compte tenu de l'abondance de la littérature sur le sujet, nous présentons un historique des méthodes de faisceaux ainsi qu'un résumé des contributions de ce chapitre. Dans une deuxième partie, nous introduisons la notion de modèle qui est centrale pour la conception de nos algorithmes. La troisième partie est consacrée à la description de l'algorithme de faisceaux, et la quatrième aux résultats de convergence de cet algorithme. Enfin, nous terminons ce chapitre en montrant comment appliquer les résultats précédents à des problèmes d'optimisation non lisses, non convexes sous contraintes.

### 1.1 Introduction et principaux résultats

#### 1.1.1 Les méthodes de faisceaux : le cas convexe

Historiquement, les méthodes de faisceaux sont basées sur la méthode des plans sécants [83, 143], pour la minimisation sans contrainte de fonctionnelles convexes. Le principe est le suivant : au lieu de faire appel à l'oracle pour générer des candidats à la descente, on se sert des informations de premier ordre de la fonction objectif  $f$  pour construire un modèle (convexe) de  $f$ , plus facile à minimiser. Etant donné un faisceau d'informations :  $\{(x_i, f_i = f(x_i), s_i \in \partial f(x_i)) ; i = 1, \dots, k\}$  obtenu à partir des itérations précédentes, on construit une approximation convexe linéaire par morceaux de la fonction  $f$  (cf Figure 1.1) :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \phi_k(y) = \max_{i=1, \dots, k} \{f_i + \langle s_i, y - x_i \rangle\} (\leq f(y)).$$

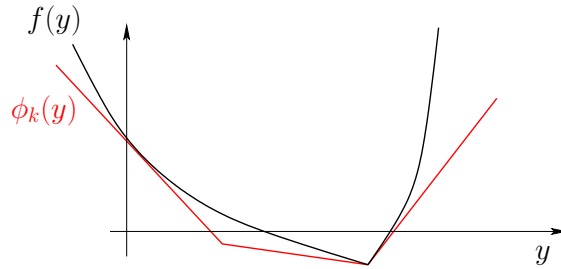


FIGURE 1.1 – Méthode des plans sécants - Construction d'un modèle convexe linéaire par morceaux d'une fonction  $f$  convexe, non différentiable.

A chaque itération de l'algorithme, la minimisation du modèle  $\phi_k$  donne un nouvel itéré  $x_{k+1}$  qui va permettre d'enrichir le modèle courant par la donnée d'un nouveau plan sécant. L'information passée est ainsi conservée au fil des itérations.

Ces méthodes souffrent de nombreuses limitations : en effet, pour des fonctions convexes très générales, la méthode des plans sécants peut être très instable et avoir de mauvaises performances numériques. Comme pour les algorithmes de sous-gradient, ce ne sont pas des méthodes de descente de la fonction  $f$ . L'algorithme peut osciller très fortement, par exemple, lorsque la pente des plans sécants ajoutés au modèle, est très faible. Un exemple connu et particulièrement catastrophique du point de vue de la stabilité, est décrit dans les travaux de A. Nemirovskii [200, Chapitre 4, Section 4.3.6] et repris e.g. dans [61, Chapitre 9, Exemple 9.7]. Une autre limitation provient de l'accumulation infinie de plans sécants dans le faisceau ce qui augmente à chaque itération la complexité du problème d'optimisation à résoudre, en termes de taille du problème à résoudre mais aussi de conditionnement. Nous verrons dans la suite que des techniques d'agrégation dues à K.C. Kiwiel [147, 149, 152] permettent de contrôler la taille (et si possible, le conditionnement) des sous-problèmes sans perdre les propriétés de convergence de l'algorithme.

Il existe plusieurs façons de stabiliser la méthode des plans sécants. Cette stabilisation peut se faire par exemple par des techniques de type région de confiance [175, 249, 250, 115, 240], surfaces de niveau [170, 144], ou encore par pénalisation du déplacement [278, 167, 190, 147], [61, Chapitre 10]. Les approches par pénalisation sont les plus utilisées dans la littérature : l'idée est de pénaliser l'écart du nouvel itéré au point courant conduisant aux méthodes dites proximales de faisceaux. Cette stabilisation proximale a l'avantage de permettre de limiter le nombre de plans sécants dans le faisceaux, en supprimant certains plans sécants ou en compressant l'information par le biais de la technique d'agrégation, sans perdre les propriétés de convergence de la méthode. Le principe est le suivant : soit  $x_k$  l'itéré courant. Etant donné un faisceau :  $\{(x_i, f_i = f(x_i), s_i \in \partial f(x_i)) ; i \in \mathcal{B}_k\}$ , d'informations issues des itérations précédentes (où  $\mathcal{B}_k$  est un ensemble fini d'indices), on construit un modèle convexe  $\phi_k$  de  $f$  par des techniques de plans sécants :

$$\phi_k(y) = \max_{i \in \mathcal{B}_k} \{f_i + \langle s_i, y - x_i \rangle\},$$

puis on résout le problème quadratique suivant :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \phi_k(y) + \frac{\tau_k}{2} \|y - x_k\|^2, \quad (1.2)$$

où le paramètre de pénalisation  $\tau_k > 0$  est aussi appelé paramètre proximal ou encore paramètre de contrôle de proximité. Si la solution  $y^{k+1}$  du programme tangent (1.2), ou pas d'essai, assure une "décroissance suffisante" de  $f$ , alors  $y^{k+1}$  est appelée pas sérieux et  $x_{k+1} = y_{k+1}$  devient le nouvel itéré (ou centre de stabilité). Sinon  $y^{k+1}$  est appelée pas nul (ce n'est pas un pas de descente de  $f$  ou bien la décroissance n'est pas suffisante). Dans ce cas  $x_{k+1} = x_k$  et on met à jour le modèle en ajoutant par exemple l'information  $(y^{k+1}, f(y^{k+1}), s_{k+1} \in \partial f(y^{k+1}))$  dans le faisceau et en ajustant la valeur du paramètre proximal  $\tau_k$ .

Le principe des méthodes de faisceaux est assez naturel : le modèle tire profit des informations issues des itérations précédentes tandis que le paramètre proximal permet de réduire l'influence des erreurs dues au modèle, et donc de réduire les instabilités. Pour cela, une méthode de faisceaux est déterminée par deux mécanismes fondamentaux : définir ce qu'est une descente "suffisante", et établir une stratégie de mise à jour du paramètre de proximité. Théoriquement on pourrait fixer une fois pour toutes la valeur de  $\tau_k$  mais l'expérience a montré qu'en termes de vitesse de convergence, le réglage dynamique de ce paramètre est un point clé des méthodes de faisceaux dans le cas convexe [152, 234].

Une fois les méthodes de faisceaux bien connues et éprouvées dans le cas convexe, est apparue une nouvelle génération de méthodes de faisceaux, basées sur des modèles de second ordre, cherchant à améliorer la vitesse de convergence. L'idée générale de ces méthodes à métrique variable est de combiner les propriétés de convergence globale des méthodes de faisceaux avec l'efficacité des méthodes de quasi-Newton. Citons les tous premiers travaux de C. Lemaréchal sur le sujet [167] puis vingt ans plus tard une série d'articles [173, 191, 174, 195] basés sur la régularisée de Moreau-Yosida [199, 283] et la formule de mise à jour BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannon). Ces travaux généralisent les idées des méthodes de quasi-Newton à l'optimisation convexe non différentiable. En particulier, dans [183, 184], L. Lukšan et J. Vlček proposent une méthode de faisceaux basée sur l'utilisation d'un oracle de second ordre : en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ , on sait évaluer  $f(x)$ , un sous-gradient de  $f$  en  $x$  et une matrice symétrique jouant le rôle de substitut de la matrice Hessienne de  $f$  en  $x$ . L'algorithme proposé est un algorithme de faisceaux avec recherche linéaire dans lequel le modèle polyédral de plans sécants usuel est remplacé par un modèle quadratique par morceaux.

Mentionnons également l'existence de variantes  $\mathcal{VU}$  des méthodes de faisceaux [172, 192, 193], dont la convergence est super-linéaire dans le cas différentiable. Un tel taux semble malheureusement inaccessible dans le cas non lisse [194].

### 1.1.2 Extension au cas non convexe

La généralisation des méthodes de faisceaux au cas non convexe est loin d'être immédiate. Bien adapté à la minimisation de fonctions convexes, le mécanisme de plans sécants devient artificiel et délicat à manipuler en l'absence de convexité, puisque les plans sécants ne sont plus des hyperplans support de la fonction  $f$  à minimiser (cf Figure 1.2).

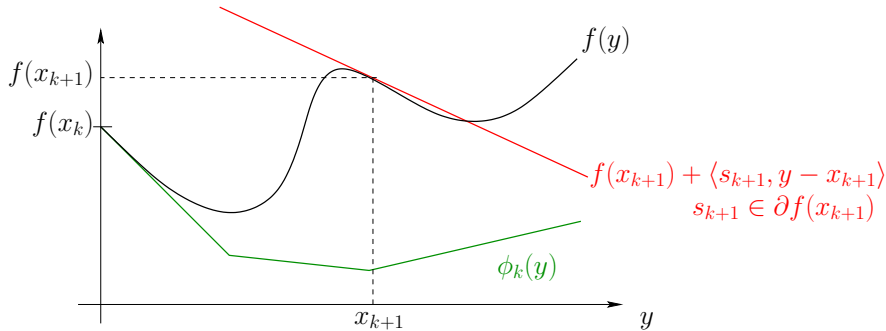


FIGURE 1.2 – Illustration d'un plan sécant qui n'est pas support de  $f$  en l'absence de convexité.

En réponse à ce phénomène, Fuduli *and al.* [114, 115] proposent un nouveau type de méthodes de faisceaux, pour lesquelles les plans tangents aux points d'essai sont classés en deux groupes en vue de construire une sur- et une sous-approximation de la fonction  $f$ . Cette information est utilisée pour définir une région de confiance autour du point courant. Les auteurs obtiennent un résultat de convergence globale, mais ne résolvent pas complètement le problème de l'accumulation indéfinie de plans sécants, généralement abordé par les techniques d'agrégation développées par K.C. Kiwiel [147, 149, 152]. Citons également les travaux de L. Lukšan et J. Vlček [272] qui ont

généralisé les méthodes de faisceaux à métrique variable à l’optimisation non lisse, non convexe pour certaines classes de fonctions.

Des techniques plus anciennes combinant faisceaux et contrôle de proximité comme dans [249, 250, 129], sont essentiellement basées sur le cas convexe. Pour la minimisation de fonctions  $f$  non convexes, les auteurs proposent des techniques de décalage des plans sécants aux pas d’essai si jamais ceux-ci ne sont pas des plans support de  $f$ , et prouvent qu’alors au moins un point d’accumulation de la suite des itérés sérieux générés par l’algorithme, est un point critique de  $f$ . Cette idée des plans sécants décalés fonctionne bien en pratique comme peuvent en témoigner les codes BT [287] et M2FC1 [175], mais une justification rigoureuse semble manquer.

### 1.1.3 Résumé des contributions

Dans la publication [209], nous proposons un nouvel algorithme de faisceaux de second ordre avec contrôle de proximité pour la minimisation de fonctions localement lipschitziennes non lisses et non convexes. Notre approche est basée sur une idée nouvelle, inspirée de nombreux travaux menés par D. Noll et P. Apkarian dans l’étude de problèmes d’optimisation non lisses pour la synthèse de lois de commande en boucle fermée [12, 11] par exemple, ou pour l’optimisation de valeurs propres [207, 208]. Nous introduisons le concept de *modèle convexe local*  $\Phi(\cdot, x)$  de la fonction objectif  $f$  au voisinage de l’itéré courant  $x$ . Ce modèle local peut être vu comme un analogue non lisse du développement de Taylor et nous le choisissons de la forme :

$$\Phi(y, x) = \phi(y, x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top Q(x)(y - x),$$

où  $\phi(\cdot, x)$  est un modèle convexe non lisse de premier ordre de  $f$  au point  $x$ . Le terme de second ordre est quadratique, de classe  $C^1$ , mais aucune hypothèse de convexité n’est imposée. Contrairement aux approches classiques, le modèle  $\phi(\cdot, x)$  n’est *a priori* pas affine par morceaux.

L’idée d’utiliser un modèle local de la fonction à minimiser n’est pas nouvelle. Elle est par exemple un élément central des méthodes d’optimisation par région de confiance [87] ou des méthodes proximales [240]. L’originalité de notre approche est que le modèle local  $\Phi(\cdot, x)$  étant généralement trop couteux à manipuler, il n’est pas utilisé pour générer des pas de recherche. A la place, nous construisons à chaque itération une approximation grossière  $\Phi_k(\cdot, x)$  de la forme :

$$\Phi_k(y, x) = \phi_k(y, x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top Q(x)(y - x)$$

du modèle idéal  $\Phi(\cdot, x)$ , appelée modèle de travail. Le terme de premier ordre  $\phi_k(\cdot, x)$  est convexe et mis à jour par des techniques de plans sécants et d’agrégation appliquées au modèle idéal  $\Phi(\cdot, x)$ . Le terme de second ordre est quant à lui fixé durant la boucle intérieure, c’est-à-dire jusqu’à ce qu’un pas assurant une décroissance “suffisante” de  $f$  soit trouvé.

Le principe de l’algorithme de faisceaux proposé dans [209], est le suivant : soit  $x$  le point courant et  $k$  le compteur de la boucle intérieure qui tourne jusqu’à trouver un itéré sérieux, i.e. un point assurant une décroissance suffisante de la fonction objectif  $f$ . Au  $k$ ième tour de la boucle intérieure, on calcule un pas d’essai  $y^{k+1}$  comme solution du programme tangent :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi_k(y, x) + \frac{\tau_k}{2} \|y - x\|^2, \quad (1.3)$$

où  $\tau_k > 0$  est le paramètre de contrôle de proximité. Si la solution  $y^{k+1}$  assure une décroissance suffisante de  $f$ , alors  $x^+ = y^{k+1}$  est le nouvel itéré, appelé *pas sérieux* suivant la terminologie standard en optimisation non lisse. Si au contraire,  $y^{k+1}$  n’est pas un pas de descente ou n’assure pas une décroissance suffisante, alors on dit que  $y^{k+1}$  est un pas nul. Dans ce cas, l’itéré courant  $x$  ne change pas, mais on utilise l’information transmise par  $y^{k+1}$  pour améliorer le terme de premier ordre  $\phi_k(\cdot, x)$  du modèle de travail. Le paramètre  $\tau_k$  est également mis à jour, et on revient au programme tangent (1.3) pour obtenir un “meilleur” pas d’essai  $y^{k+2}$ .

Cette procédure de mise à jour du modèle d’une part et du paramètre de contrôle de proximité d’autre part, s’appuie sur les techniques classiques de plans sécants et d’agrégation appliquées au

terme de premier ordre  $\phi(\cdot, x)$  du modèle idéal, et non pas à  $f$  directement. Le terme de second ordre est gardé inchangé entre chaque itération sérieuse. Cette stratégie nous permet d'offrir à la méthode une convergence super-linéaire si la fonction  $f$  possède des propriétés de régularité cachées, comme c'est souvent le cas dans les applications [221, 60].

## 1.2 La notion de modèle au cœur de l'algorithme

Définissons maintenant plus précisément ce qu'est un modèle local de la fonction  $f$  :

**Définition 1.1** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée modèle de premier ordre de  $f$  sur  $\Omega$  si pour tout  $x \in \Omega$ , la fonction  $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(M_1) \quad \phi(x, x) = f(x) \text{ et } \partial_1 \phi(x, x) \subset \partial f(x).$$

(M<sub>2</sub>) Pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, [\|y - x\| \leq \delta \Rightarrow f(y) - \phi(y, x) \leq \varepsilon \|y - x\|].$$

(M<sub>3</sub>) La fonction  $\phi$  est conjointement semi-continue supérieurement sur  $\mathbb{R}^n \times \Omega$  i.e. : pour toute suite  $(y_j, x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $(y, x)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \Omega$  :  $\limsup_{j \rightarrow +\infty} \phi(y_j, x_j) \leq \phi(y, x)$ .

Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $\phi$  est simplement appelé modèle de premier ordre de  $f$ .

On peut alors facilement démontrer que toute fonction  $f$  localement lipschitzienne admet un modèle de premier ordre, appelé *modèle standard*, défini par :

$$\phi^\sharp(y, x) := f(x) + f^0(x; y - x),$$

où  $f^0(x; d)$  désigne la dérivée directionnelle de Clarke, également appelée dérivée directionnelle généralisée, au point  $x$  dans la direction  $d$ , définie par :

$$f^0(x; d) = \limsup_{z \rightarrow x, t \downarrow 0} \frac{f(z + td) - f(z)}{t}.$$

Le modèle standard de  $f$  est le plus petit modèle possible de  $f$  au sens où quelque soit  $\phi$  modèle de premier ordre de  $f$ , on a :  $\phi^\sharp \leq \phi$ . En particulier, l'Axiome (M<sub>1</sub>) s'écrit :  $\partial_1 \phi^\sharp(x, x) = \partial f(x)$

Nous verrons dans la suite que les axiomes (M<sub>1</sub>) et (M<sub>2</sub>) suffisent à démontrer que la boucle intérieure de l'algorithme de faisceaux trouve un itéré sérieux en un nombre fini d'itérations. En revanche, pour obtenir la convergence globale (de la boucle extérieure) de l'algorithme, la notion de modèle définie plus tôt ne suffira pas : du fait de la non-convexité de  $f$ , nous aurons besoin d'une plus grande régularité du modèle local (Axiome (M<sub>3</sub>)) et de renforcer l'Axiome (M<sub>2</sub>). Nous introduisons pour cela la notion de modèle fort, illustrée sur la Figure 1.3 :

**Définition 1.2** Un modèle de premier ordre  $\phi(\cdot, \cdot)$  de  $f$  sur  $\Omega$  est dit fort si les axiomes (M<sub>1</sub>), (M<sub>3</sub>) et la version forte de l'Axiome (M<sub>2</sub>) sont vérifiés :

( $\widetilde{M}_2$ ) Pour tout ensemble borné  $B \subset \mathbb{R}^n$ , il existe une constante  $L > 0$  telle que :

$$\forall x \in B \cap \Omega, \forall y \in B, f(y) - \phi(y, x) \leq L \|y - x\|^2 \quad (1.4)$$

Prenons pour illustrer cette notion de modèle fort le cas d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable. Il est naturel de proposer comme modèle de premier ordre le développement de Taylor d'ordre 1 de  $f$  au voisinage de  $x$ , à savoir :

$$\phi(y, x) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, ce n'est pas nécessairement un modèle de premier ordre de  $f$  au sens de la Définition 1.1 : bien que les axiomes (M<sub>1</sub>) et (M<sub>2</sub>) soient satisfaits, l'Axiome (M<sub>3</sub>) n'est pas vérifié pour les fonctions différentiables qui ne sont pas de classe  $C^1$ .

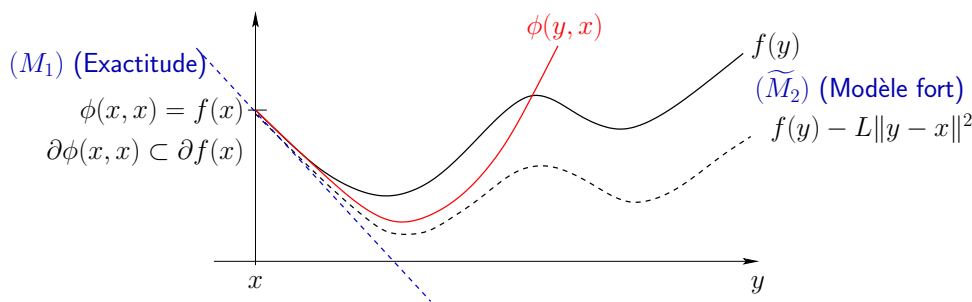


FIGURE 1.3 – En rouge, un modèle fort  $\phi(\cdot, x)$  d'une fonction  $f$  non convexe

Supposons maintenant que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$ . Le modèle standard de  $f$  est donné par le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction  $f$  :

$$\phi^\sharp(y, x) = f(x) + f^0(x; y - x) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

Il s'agit bien cette fois-ci d'un modèle du premier ordre au sens de la Définition 1.1 mais ce n'est pas un modèle fort. Pour cela, il faudrait pouvoir écrire une estimation de la forme :

$$f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq \mathcal{O}(\|y - x\|^2).$$

Une condition suffisante pour que le modèle standard de  $f$  soit fort est par exemple que  $f$  soit de classe  $C^{1,1}$  i.e. de classe  $C^1$  et de gradient lipschitzien.

Maintenant que les notions de modèle de premier ordre et de modèle fort ont été définies, considérons quelques classes bien connues de fonctions et construisons quelques modèles :

**Fonctions composées.** Toute fonction  $f = g \circ F$ , avec  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^2$ , admet comme modèle local de premier ordre la fonction :

$$\phi(y, x) = g(F(x) + J_F(x)(y - x)),$$

où  $J_F(x)$  désigne la Jacobienne de  $F$  au point  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ce modèle est appelé *modèle non standard* de la fonction composée  $f$ , et est un modèle fort de  $f$ .

Cet exemple de modèle non standard (motivé par les applications en synthèse de lois de commande présentées au Chapitre 2) est intéressant dans le sens où il met en évidence le fait que le modèle de premier ordre d'une fonction  $f$  donnée est loin d'être unique. Il est également possible qu'un des modèles de  $f$  soit fort tandis qu'un autre ne l'est pas.

**Fonctions convexes.** Toute fonction convexe est son propre modèle fort :  $\phi(y, x) = f(y)$ .

**Supremum.** Soit  $f = \sup_{i=1, \dots, N} f_i$ , où les  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont supposées localement lipschitziennes de modèle  $\phi_i(\cdot, x)$ . Alors un modèle naturel de premier ordre pour la fonction  $f$  est :

$$\phi(y, x) = \sup_{i=1, \dots, N} \phi_i(y, x). \quad (1.5)$$

Si les modèles  $\phi_i$  sont forts, alors le modèle  $\phi$  défini par (1.5) est également un modèle fort de  $f$ . Ce type de modèle nous sera utile, en particulier pour l'application de la méthode de faisceaux à des problèmes d'optimisation sous contrainte au Paragraphe 1.5.

### 1.3 Algorithme de faisceaux avec contrôle de proximité

Une fois définie la notion de modèle, l'idée est d'appliquer localement les méthodes de faisceaux au modèle convexe. L'algorithme complet est détaillé dans l'article [209]. Nous nous contentons ici d'en rappeler le principe général.

### 1.3.1 Boucle intérieure ou comment générer un pas de descente

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  l'itéré courant. Etant donnée une matrice symétrique  $Q(x)$  supposée bornée sur des voisinages bornés de  $x$ , on définit le modèle idéal de  $f$  au point  $x$  :

$$\Phi(y, x) = \phi(y, x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top Q(x)(y - x), \quad (1.6)$$

où  $\phi(\cdot, x)$  est un modèle local de premier ordre de  $f$  au point  $x$ . Le choix d'un terme quadratique est motivé par des considérations pratiques : nous aurions en effet pu choisir un terme de second ordre  $q(y, x)$  tout à fait général en imposant seulement :  $0 \in \partial_1 q(x, x)$ , mais le problème d'optimisation associé risquait d'être impraticable.

Dans notre algorithme, nous ne travaillons pas directement avec le modèle de premier ordre  $\phi(\cdot, x)$ , mais avec une approximation  $\phi_k(\cdot, x)$ , appelée modèle de travail, mise à jour à chaque itération  $k$ , plus "facile" et moins couteuse à manipuler que le modèle idéal  $\phi(\cdot, x)$  :

**Définition 1.3** On appelle modèle de travail de premier ordre de  $f$  au point  $x$  toute fonction  $\phi_k(\cdot, x)$  convexe vérifiant :

$$\phi_k(x, x) = \phi(x, x) = f(x), \quad \partial_1 \phi_k(x, x) \subset \partial_1 \phi(x, x) \quad \text{et} \quad \phi_k(\cdot, x) \leq \phi(\cdot, x).$$

Le modèle de travail associé au modèle idéal (1.6) est défini par :

$$\Phi_k(y, x) = \phi_k(y, x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top Q(x)(y - x).$$

Le principe de la boucle intérieure est le suivant : on note  $k$  le compteur de la boucle intérieure. Supposons qu'à l'itération  $k$ , un modèle de travail  $\Phi_k(y, x)$  a été construit (cf Figure 1.4).

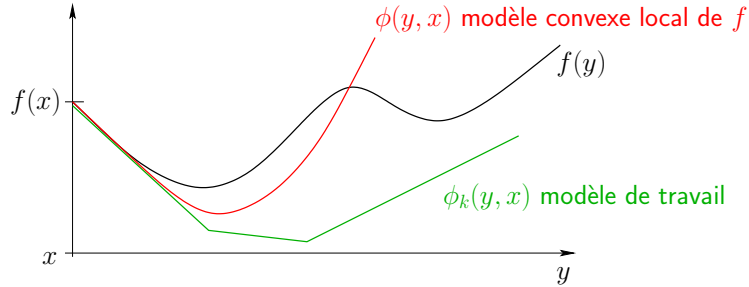


FIGURE 1.4 – Modèle idéal et modèle de travail d'une fonction  $f$  (non convexe) au point  $x$ .

Pour un paramètre de contrôle de proximité  $\tau_k > 0$  fixé, on résout le programme tangent :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi_k(y, x) + \frac{\tau_k}{2} \|y - x\|^2. \quad (1.7)$$

dans lequel on suppose  $Q(x) + \tau_k I$  définie positive. La solution locale du problème (1.7), notée  $y^{k+1}$  et appelée pas d'essai, vérifie la condition nécessaire d'optimalité de Clarke du problème (1.7) :

$$0 \in \partial_1 \phi_k(y^{k+1}, x) + (Q(x) + \tau_k I)(y^{k+1} - x). \quad (1.8)$$

Si  $y^{k+1} = x$ , la condition nécessaire d'optimalité (1.8) s'écrit :  $0 \in \partial_1 \phi_k(x, x)$ , ce qui implique :  $0 \in \partial f(x)$ . Le point courant  $x$  est donc un point critique de  $f$ . Ainsi, à moins que  $x$  ne soit déjà une solution du problème (1.7), le pas d'essai  $y^{k+1}$  apporte nécessairement quelque chose de nouveau.

### Test d'acceptation d'un pas d'essai.

Supposons à partir de maintenant que  $0 \notin \partial f(x)$ . On cherche à déterminer quand le pas d'essai  $y^{k+1}$  est un pas sérieux, accepté comme le nouvel itéré  $x^+ = y^{k+1}$ . Pour cela, on introduit deux constantes  $0 < \gamma < \Gamma < 1$ , et on calcule le quotient :

$$\rho_k = \frac{f(x) - f(y^{k+1})}{f(x) - \Phi_k(y^{k+1}, x)}, \quad (1.9)$$

qui mesure la concordance entre la fonction  $f$  et son modèle de travail  $\Phi_k(\cdot, x)$  au point  $y^{k+1}$ .

Si  $\rho_k \geq \gamma$ , alors le pas d'essai  $y^{k+1}$  est un pas de descente de la fonction objectif  $f$  qui assure une descente garantie d'au moins  $\gamma \frac{\tau_k}{2} \|y^{k+1} - x\|^2$ . Le pas  $y^{k+1}$  est alors accepté, et  $x^+ = y^{k+1}$  devient le nouvel itéré sérieux.

Si  $\rho_k < \gamma$ , le pas d'essai  $y^{k+1}$  est rejeté : c'est un *pas nul*, ce qui signifie que soit  $y^{k+1}$  n'est pas un pas de descente de  $f$ , soit la décroissance n'est pas suffisante. Un point crucial de l'algorithme consiste alors à définir une stratégie de mise à jour du programme tangent afin d'obtenir un meilleur pas d'essai  $y^{k+2}$  à la prochaine itération de la boucle intérieure. Cette stratégie est résumée sur la Figure 1.5 et repose sur l'utilisation d'un second paramètre de contrôle :

$$\tilde{\rho}_k = \frac{f(x) - \Phi(y^{k+1}, x)}{f(x) - \Phi_k(y^{k+1}, x)},$$

qui mesure la concordance entre le modèle idéal  $\Phi(\cdot, x)$  et le modèle de travail  $\Phi_k(\cdot, x)$  en  $y^{k+1}$ .

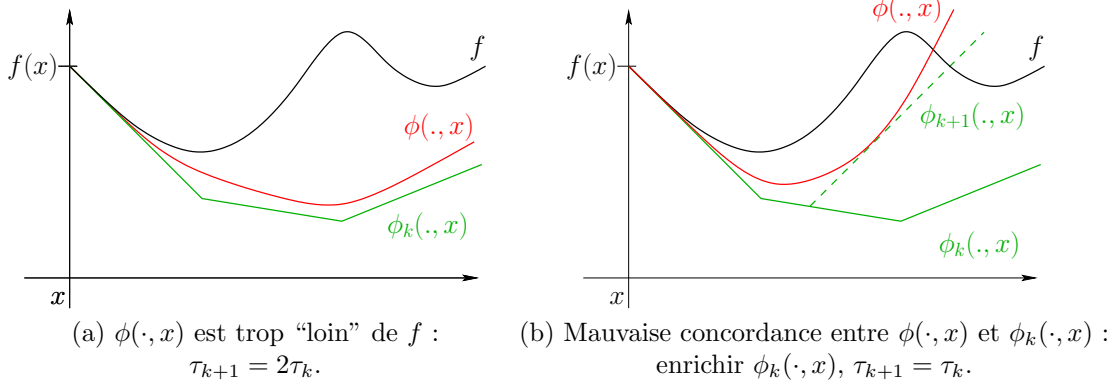


FIGURE 1.5 – Stratégie de mise à jour du programme tangent dans le cas où  $y^{k+1}$  est un pas nul.

Essentiellement, l'idée est que rien ne sert d'améliorer le modèle de travail si le modèle idéal  $\Phi(\cdot, x)$  est de toute façon "trop loin" de la fonction  $f$  (cf Figure 1.5, cas (b)). Dans ce cas, pour forcer à la prochaine itération de la boucle intérieure,  $\Phi(y^{k+2}, x)$  à être proche de  $f(y^{k+2})$ , on propose de réduire la région de confiance ou, dualement, de resserrer le contrôle de proximité en augmentant  $\tau_k$ . Dans le cas où le modèle de travail  $\Phi_k(\cdot, x)$  est loin du modèle idéal  $\Phi(\cdot, x)$  (et de la fonction  $f$  à minimiser) au point  $y^{k+1}$  (cf Figure 1.5 (a)), on améliore le modèle de travail  $\Phi_k(\cdot, x)$  en appliquant les techniques de plans sécants et d'agrégation au modèle idéal  $\Phi(\cdot, x)$ . Le paramètre de contrôle de proximité est laissé inchangé.

**Remarque 1.1** Notre stratégie de mise à jour du paramètre de contrôle de proximité repose sur une intuition issue des méthodes de région de confiance et l'utilisation d'un second paramètre de contrôle  $\tilde{\rho}_k$  qui permet de mieux appréhender la non-convexité de la fonction objectif  $f$ . En effet, dans le cas convexe, il est bien connu que régions de confiance et contrôle de proximité peuvent être considérés comme équivalents [134]. Il se trouve qu'il en est de même en l'absence de convexité.



### Mise à jour du modèle de travail par plans sécants et agrégation.

Il reste enfin à construire à partir d'un modèle de travail  $\Phi_k(\cdot, x)$ , un nouveau modèle  $\Phi_{k+1}(\cdot, x)$  qui permette de progresser dans la recherche d'un itéré sérieux. Cette mise à jour du modèle de travail repose sur trois éléments fondamentaux des techniques de faisceaux : l'*exactitude*, les *plans sécants* et l'*agrégation* comme illustré sur la Figure 1.6. Ces techniques appliquées au modèle local convexe  $\phi(\cdot, x)$  étant bien connues, nous nous contentons d'en rappeler ici le principe général. Les détails techniques sont présentés dans [209].

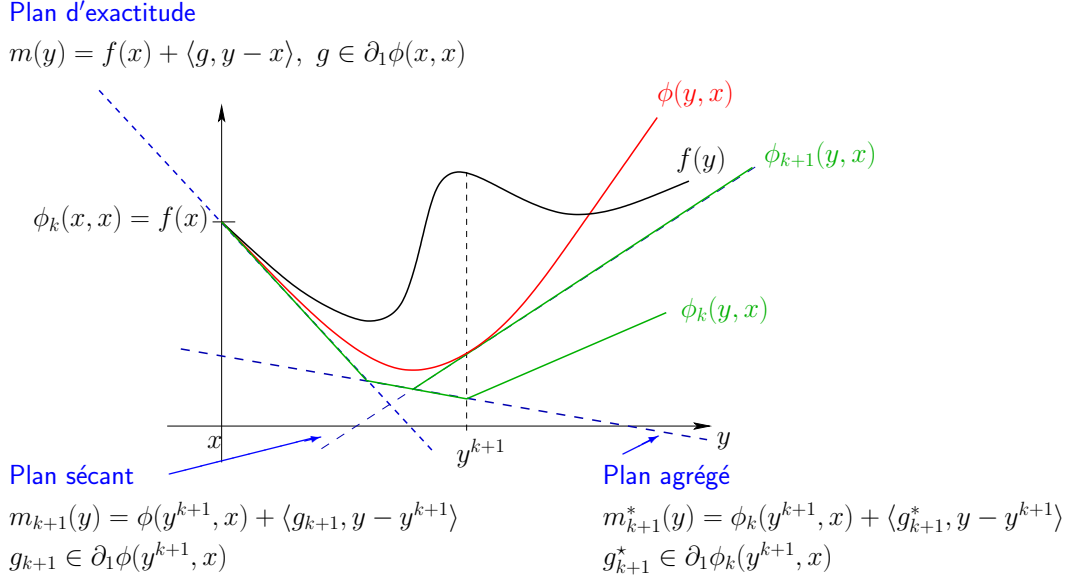


FIGURE 1.6 – Mise à jour du modèle de travail : passage de  $\phi_k(\cdot, x)$  à  $\phi_{k+1}(\cdot, x)$ .

L'idée est, à chaque mise à jour du modèle de travail, de construire un nouveau modèle  $\phi_{k+1}(\cdot, x) \leq \phi(\cdot, x)$  qui admette le plan d'exactitude, le plan sécant de  $\phi(\cdot, x)$  en  $y^{k+1}$  et le plan agrégé comme hyperplans support i.e. tel que :

$$\max \{m(y), m_{k+1}(y), m_{k+1}^*(y)\} \leq \phi_{k+1}(y, x) \leq \phi(y, x),$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ . Une mise à jour élémentaire consisterait par exemple à poser :  $\phi_{k+1}(y, x) = \max \{m(y), m_{k+1}(y), m_{k+1}^*(y)\}$ . Ce cas est illustré sur la Figure 1.6.

### 1.3.2 Algorithme de faisceaux

L'algorithme de faisceaux est décrit ci-après (cf Algorithme 1). Revenons sur les éléments clés de la boucle extérieure, à savoir les mises à jour du terme quadratique et du paramètre mémoire.

Soit  $x^j$  l'itéré courant. La matrice  $Q_j = Q(x^j)$  du terme quadratique est mise à jour à chaque itération de la boucle extérieure et maintenue inchangée au cours de la boucle intérieure. Afin de garantir l'unicité de la solution du programme tangent, on souhaite imposer :  $Q_j + \tau_k I \succ 0$ , à chaque itération  $k$  de la boucle intérieure. Comme le paramètre de contrôle de proximité  $\tau_k$  ne décroît jamais dans la boucle intérieure, ceci est garanti à condition d'initialiser la boucle intérieure avec un paramètre  $\tau_1$  vérifiant :  $Q_j + \tau_1 I \succ 0$ .

Quant à la mise à jour du paramètre mémoire, l'idée est la suivante : si le nouvel itéré  $x^{j+1}$  calculé par la boucle intérieure après  $k_j$  itérations, est un "bon" pas sérieux dans le sens où la concordance entre le modèle de travail et la fonction  $f$  à minimiser, est bonne ( $\rho_{k_j} \geq \Gamma > \gamma$ ), on agrandit la région de confiance autour de  $x^{j+1}$  ce qui revient à diminuer le paramètre mémoire  $\tau_j^\sharp$ .

---

**Algorithme 1.** Algorithme de faisceaux avec contrôle de proximité.

---

**Paramètres:**  $0 < \gamma < \tilde{\gamma} < \Gamma < 1$ , et  $0 < q < \infty$ .

1: **Initialisation de la boucle extérieure.** Choisir un point initial  $x^1$  et une matrice  $Q_1 = Q_1^\top$  avec  $-qI \preceq Q_1 \preceq qI$ . Initialiser le paramètre mémoire  $\tau_1^\sharp$  tel que  $Q_1 + \tau_1^\sharp I \succ 0$ .  $j = 1$ .

2: **Tant que**  $0 \notin \partial f(x^j)$  **faire**

3: **Initialisation de la boucle intérieure.** Soit  $k = 1$  le compteur de la boucle intérieure et  $\tau_1 = \tau_j^\sharp$ . Construire un modèle de travail convexe initial  $\phi_1(\cdot, x^j)$ , et définir le modèle idéal :  $\Phi_1(y, x^j) = \phi_1(y, x^j) + \frac{1}{2}(y - x^j)^\top Q_j (y - x^j)$ .

4: **Répéter**

5: **Génération d'un pas d'essai.** Calculer la solution  $y^{k+1}$  du programme tangent :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi_k(y, x^j) + \frac{\tau_k}{2} \|y - x^j\|^2.$$

6: **Test d'acceptation.** Calculer

$$\rho_k = \frac{f(x^j) - f(y^{k+1})}{f(x^j) - \Phi_k(y^{k+1}, x^j)}.$$

7: **Si**  $\rho_k < \gamma$  (i.e. si  $y^{k+1}$  est un pas nul) **alors**

8: **Mise à jour du paramètre de proximité.** Calculer :

$$\tilde{\rho}_k = \frac{f(x^j) - \Phi(y^{k+1}, x^j)}{f(x^j) - \Phi_k(y^{k+1}, x^j)}.$$

$$\text{On pose : } \tau_{k+1} = \begin{cases} \tau_k, & \text{si } \tilde{\rho}_k < \tilde{\gamma} \\ 2\tau_k, & \text{si } \tilde{\rho}_k \geq \tilde{\gamma} \end{cases} \quad (\text{mauvais}).$$

9: **Mise à jour du modèle de travail.** Construire un nouveau modèle de travail  $\phi_{k+1}(\cdot, x^j)$  respectant les trois règles : exactitude, plan sécant et agrégation.  $k \leftarrow k + 1$ .

10: **fin Si**

11: **jusqu'à ce que**  $\rho_k \geq \gamma$  ( $y^{k+1}$  est un pas sérieux).

12: **Mise à jour de la matrice  $Q_j$  et du paramètre mémoire.** Mettre à jour la matrice  $Q_j \rightarrow Q_{j+1}$  en respectant les règles suivantes :  $Q_{j+1} = Q_{j+1}^\top$  et  $-qI \preceq Q_{j+1} \preceq qI$ . Stocker le nouvel élément mémoire

$$\tau_{j+1}^\sharp = \begin{cases} \tau_{k+1}, & \text{si } \gamma \leq \rho_k < \Gamma \quad (\text{pas mauvais}) \\ \frac{\tau_{k+1}}{2}, & \text{si } \rho_k \geq \Gamma \quad (\text{bon}) \end{cases}$$

Augmenter  $\tau_{j+1}^\sharp$  si nécessaire pour garantir que :  $Q_{j+1} + \tau_{j+1}^\sharp I \succ 0$ .

13: **fin Tant que**

14: **Retourner**  $x^j$ .

---

## 1.4 Convergence de l'algorithme de faisceaux

### 1.4.1 Résultat de convergence globale

Notre principal résultat de convergence est énoncé ci-après. L'ensemble des preuves détaillées figure dans l'article [209] et ne sont pas reproduites ici. Seules les étapes clés des démonstrations sont rappelées, en insistant sur les nouveautés et les difficultés par rapport au cas convexe.

**Théorème 1.1** *Soit  $f$  une fonction localement Lipschitz, et  $x^1 \in \mathbb{R}^n$  tel que l'ensemble de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^1)\}$  soit borné. Supposons que  $f$  admette un modèle fort noté  $\Phi(\cdot, x)$  en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors tout point d'accumulation de la suite des itérés sérieux générés par l'Algorithme 1 est un point critique de  $f$ .*

**Éléments de démonstration du Théorème 1.1:** La démonstration de ce résultat de convergence globale se fait en deux temps : tout d’abord, on vérifie que la boucle intérieure trouve un itéré sérieux en un nombre fini d’itérations. La technique de démonstration de ce résultat intermédiaire est essentiellement connue ; les résultats peuvent être retrouvés dans le cas  $Q = 0$  en appliquant [90, Proposition 4.3], [134, Chapitre XV] ou [61, Part II]. Sans entrer dans les détails, soulignons que pour obtenir ce résultat, il suffit de supposer que le modèle local  $\Phi(\cdot, x)$  satisfait les axiomes  $(M_1)$  et  $(M_2)$ . On n’a besoin ni de l’Axiome  $(M_3)$ , ni d’avoir un modèle fort (Axiome  $(\widetilde{M}_2)$ ) de  $f$ .

Dans un second temps, on s’intéresse à la preuve de convergence globale de la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  des pas sérieux générés par l’Algorithme 1 : étant donné un point d’accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ , il suffit de démontrer que ce point est un point critique du modèle local de premier ordre (i.e. que :  $0 \in \partial_1 \phi(\bar{x}, \bar{x})$ ), ce qui impliquera par l’Axiome  $(M_1)$  que  $\bar{x}$  est également un point critique de  $f$ . La démarche est à peu de choses près la même que celle mise en œuvre dans le cas convexe [152], [240, Chapitre 7, section 7.4.2], en appliquant les techniques de démonstration au modèle idéal  $\phi$  et à son modèle de travail  $\phi_k$ . La seule vraie difficulté est d’arriver à démontrer que le paramètre de contrôle de proximité  $\tau_j^\sharp$  reste borné. C’est à ce stade de la démonstration que nous avons besoin de l’hypothèse que  $\phi$  est un modèle fort de la fonction  $f$  à minimiser (Axiome  $(\widetilde{M}_2)$ ).  $\square$

**Remarque 1.2** *L’Algorithme 1 ne laisse que peu de liberté quant à la gestion du paramètre  $\tau_k$ , la preuve de convergence de la boucle intérieure couvre en réalité des stratégies plus générales que celle présentée ici. Plusieurs variantes sont proposées dans l’article [209].*

Mentionnons qu’il est possible d’affaiblir l’Axiome  $(\widetilde{M}_2)$  du modèle fort de  $f$  sous réserve d’une légère modification de l’algorithme. La difficulté est alors que, sans l’Axiome  $(\widetilde{M}_2)$ , il faut procéder à une gestion plus fine du mécanisme de preuve du Théorème 1.1 pour contrôler les situations où le paramètre  $\tau_{k_j}$  est non borné. Pour pallier cette difficulté, nous aurons besoin de deux ingrédients : un modèle local *strict* de  $f$  pouvant être vu comme un intermédiaire entre les notions de modèle et de modèle fort, ainsi qu’une règle de sauvegarde contre les pas “trop grands” :

$$\text{Si } \tau_j^\sharp > T, \text{ alors poser : } \tau_j^\sharp = T,$$

où  $T > q$  est une constante fixée par l’utilisateur. Malgré une ressemblance certaine, cette règle ne doit pas être confondue avec un mécanisme de réinitialisation du paramètre  $\tau$  lorsque celui-ci devient numériquement trop grand. Le lecteur intéressé pourra se référer à [209, Section 6] pour une présentation détaillée de l’algorithme modifié et une analyse complète de sa convergence.

## 1.4.2 Application à quelques cas particuliers

La méthode de faisceaux décrite dans ce chapitre, étant assez abstraite, prenons le temps de comprendre le fonctionnement de l’Algorithme 1 sur quelques cas particuliers bien connus.

**Cas d’une fonction lisse munie de son modèle standard.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On choisit comme modèle idéal de  $f$  son modèle standard de premier ordre :

$$\Phi^\sharp(y, x) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

Le modèle standard étant affine, le modèle de travail est choisi égal au modèle idéal :  $\Phi_k = \Phi^\sharp$ . Soit  $x$  le point courant. Regardons d’un peu plus près l’itération  $k$  de la boucle intérieure :

**Programme tangent.** On résout :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\tau_k}{2} \|y - x\|^2.$$

La solution du programme tangent (ou pas d’essai) est donnée par :  $y^{k+1} = x - \tau_k^{-1} \nabla f(x)$ . On reconnaît une itération de descente de gradient de pas  $\tau_k^{-1}$ .

**Test d'acceptation.** Le pas  $y^{k+1}$  est accepté si  $\rho_k \geq \gamma$ , i.e. si :

$$f(x) - f(y^{k+1}) \geq \gamma (f(x) - \Phi^\sharp(y^{k+1}, x)) = \gamma \tau_k^{-1} \|\nabla f(x)\|^2.$$

Autrement dit, le pas  $\tau_k^{-1}$  de la descente de gradient est accepté s'il satisfait la condition de Armijo de paramètre  $0 < \gamma < 1$ .

**Mise à jour du paramètre de contrôle de proximité.** Si  $\rho_k < \gamma$  (i.e.  $y^{k+1}$  est un pas nul), le second paramètre de contrôle  $\tilde{\tau}_k$  étant toujours égal à 1 (puisque  $\Phi_k = \Phi^\sharp$ ), on augmente le paramètre de contrôle de proximité :

$$\tau_{k+1} = 2\tau_k, \quad \text{soit : } \tau_{k+1}^{-1} = \frac{1}{2}\tau_k^{-1}. \quad (1.10)$$

**Mise à jour du modèle de travail.** Le modèle de travail étant égal au modèle idéal qui est affine, cette étape est ici sans objet.

Pour une fonction de classe  $C^1$  munie de son modèle standard de premier ordre, l'Algorithme 1 se ramène à une méthode de descente de gradient de pas  $\tau_k^{-1}$  avec recherche linéaire d'Armijo de paramètre  $0 < \gamma < 1$ . La mise à jour (1.10) du paramètre  $\tau_k$  correspond dans ce cadre à une stratégie de rebroussement (*backtracking*) dans laquelle le pas est réduit de moitié jusqu'à ce que la condition de Armijo soit satisfaite. En appliquant le Théorème 1.1, on retrouve un résultat connu des méthodes de descente de gradient [46, Chapitre 1] : la méthode de descente de gradient avec mémoire du pas définie par l'Algorithme 1 converge si  $f$  est de classe  $C^{1,1}$ .

**Cas d'une fonction de classe  $C^2$  muni de son modèle standard avec un terme de second ordre.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et  $x$  le point courant. On choisit comme modèle idéal de  $f$  de son modèle standard de premier ordre, plus un terme second ordre :

$$\Phi^\sharp(y, x) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2}(y - x)^\top H_f(x)(y - x),$$

où  $H_f(x)$  est la matrice hessienne de  $f$  en  $x$ . On choisit à nouveau un modèle de travail de premier ordre égal au modèle idéal :  $\phi_k = \phi^\sharp$ .

**Programme tangent.** On résout :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2}(y - x)^\top (H_f(x) + \tau_k I)(y - x).$$

La solution du programme tangent est donnée par :  $y^{k+1} = x - (H_f(x) + \tau_k I)^{-1} \nabla f(x)$ . On reconnaît ici une itération d'un algorithme de type Newton.

**Test d'acceptation.** Le pas  $y^{k+1}$  est accepté si  $\rho_k \geq \gamma$ , i.e. si :

$$f(x) - f(y^{k+1}) \geq \gamma (f(x) - \Phi^\sharp(y^{k+1}, x)). \quad (1.11)$$

**Mise à jour du paramètre de contrôle de proximité.** Si  $\rho_k < \gamma$  (i.e.  $y^{k+1}$  est un pas nul), le second paramètre de contrôle  $\tilde{\tau}_k$  étant toujours égal à 1 (puisque  $\Phi_k = \Phi^\sharp$ ), on augmente le paramètre de contrôle de proximité :

$$\tau_{k+1} = 2\tau_k, \quad \text{soit : } \tau_{k+1}^{-1} = \frac{1}{2}\tau_k^{-1}. \quad (1.12)$$

**Mise à jour du modèle de travail.** Le modèle de travail étant égal au modèle idéal, cette étape est ici sans objet.

Pour une fonction de classe  $C^2$  munie de son développement de Taylor d'ordre 2 comme modèle idéal, l'Algorithme 1 se ramène à un algorithme de quasi-Newton avec une recherche linéaire (1.11) particulière. Si le pas  $\tau_k$  est choisi très grand, alors on retrouve une descente de gradient de pas  $\tau_k^{-1}$  couplée à une recherche linéaire de Armijo. Si le pas  $\tau_k$  est choisi petit, l'algorithme se rapproche

d'une méthode de Newton classique. Pour toute fonction de classe  $C^2$  admettant un modèle fort, le Théorème 1.1 nous donne la convergence de cette méthode sans hypothèse supplémentaire.

Il est intéressant de remarquer que dans ce cas, l'Algorithme 1 converge super-linéairement : en effet, dès que les itérés sérieux  $x^j$  entrent dans la zone de convergence de la méthode de Newton, on sait que le rapport  $\rho_{k_j}$  reste proche de 1. D'après l'Algorithme 1, il existe donc  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $j \geq j_0$ ,  $\rho_{k_j} \geq \Gamma$  et  $k_j = 1$ . On en déduit alors que pour tout  $j \geq j_0$ ,  $\tau_j^\sharp = 2^{-(j-j_0)}\tau_{j_0}^\sharp$ . L'Algorithme 1 se ramène donc à l'algorithme suivant :

$$x^{j+1} = x^j - (H_f(x^j) + 2^{-j}\tau_0 I)^{-1} \nabla f(x^j),$$

en posant  $\tau_0 = 2_0^j \tau_{j_0}^\sharp$ . D'après le Théorème de Dennis-Moré [94, Theorem 8.2.4], on a bien convergence super-linéaire pour des fonctions de classe  $C^{1,1}$ .

**Cas d'une fonction convexe.** Naturellement se pose la question de ce que devient l'Algorithme 1 pour la minimisation de fonctions convexes non lisses : l'algorithme de faisceaux classique du cas convexe est un cas particulier de l'Algorithme 1 pour  $Q(x) \equiv 0$  et en choisissant comme modèle idéal (et modèle de travail) le modèle polyédral standard.

Regardons d'un peu plus près le réglage du paramètre de contrôle de proximité qui est un des points délicats de l'approche non convexe. Dans le cas convexe (avec  $Q(x) = 0$ ), la fonction  $f$  est son propre modèle (i.e. :  $\Phi(\cdot, x) = \phi(\cdot, x) = f$ ), si bien que le test  $\rho_k < \gamma$  à l'étape 7 de l'Algorithme 1 implique toujours à l'étape 8 :

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k < \gamma < \tilde{\gamma}.$$

Par conséquent, le paramètre de contrôle de proximité  $\tau_k$  n'est jamais augmenté, mais peut décroître à l'étape 12 si  $\rho_k > \Gamma$ . Ainsi, dans le cas convexe, contrairement aux approches traditionnelles dans lesquelles le paramètre  $\tau$  est fixé une fois pour toutes, l'Algorithme 1 donne à l'utilisateur davantage de marge de manœuvre quant à la gestion de ce paramètre. Dans le cas non convexe, une mise à jour astucieuse du paramètre  $\tau$  est obligatoire.

## 1.5 Application à l'optimisation sous contrainte

Considérons un problème générique d'optimisation sous contrainte :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ sous : } g(x) \leq 0, \tag{1.13}$$

où l'une au moins des fonctions  $f$  et  $g$  est supposée non lisse et/ou non convexe. Le but de ce paragraphe est de montrer que, par l'introduction d'une fonction dite de progrès, il est possible de remplacer le problème (1.13) par un problème min-max localement équivalent auquel on pourra appliquer les algorithmes développés dans le cadre de l'optimisation sans contrainte.

La présence de contraintes rend les problèmes d'optimisation non lisse encore plus difficiles et il existe actuellement peu de méthodes numériques efficaces. Pour certains problèmes d'optimisation convexe avec des contraintes simples (typiquement des contraintes de boîte ou bien des contraintes linéaires), il est possible d'intégrer directement ces contraintes dans le programme tangent, ou bien de projeter à chaque itération les itérés sur le domaine admissible, cf par exemple [151, 150] ou [112]. Pour des problèmes généraux, les approches les plus courantes consistent à insérer les contraintes dans la fonction objectif pénalisée et à résoudre le problème d'optimisation sans contrainte équivalent associé [148, 153]. Ces approches souffrent des inconvénients habituels des méthodes par pénalisation : estimation du paramètre de pénalisation, difficultés numériques qui surviennent pour des valeurs grandes de ce paramètre.

Plus récemment, des méthodes de filtres ont été proposées comme alternative aux méthodes par pénalisation exacte dans le cadre des méthodes de faisceaux [109], mais leur complexité ainsi que le fait qu'elles ne gèrent pas explicitement la question de l'accumulation indéfinie de plans sécants, les rend peu utilisables en pratique. Mentionnons qu'il existe également une classe de méthodes

de faisceaux pour l'optimisation sous contrainte qui n'utilise ni la pénalisation ni les techniques de filtres mais demandent un point initial admissible, cf [189] par exemple. L'inconvénient essentiel de ces approches est que calculer un point dans le domaine des contraintes peut se révéler aussi difficile et coûteux que résoudre le problème initial (1.13).

Dans le cadre des méthodes de faisceaux, la façon la plus populaire de gérer les contraintes consiste à définir une fonction dite d'amélioration :

$$G(y, x) = \max\{f(y) - f(x), g(y)\},$$

associée au problème (1.13). Tout point  $\bar{x}$  est solution du problème (1.13) si et seulement si  $\bar{x}$  est un point de minimum de la fonction  $F(\cdot, \bar{x})$ . Jusqu'en 2005, cette fonction d'amélioration était avant tout un outil théorique pour démontrer la convergence des méthodes de faisceaux appliquées à des problèmes convexes non lisse avec contraintes [189, 149]. Dans [242], C. Sagastizabal et M. Solodov proposent pour la première fois un algorithme de faisceaux de type proximal s'appliquant directement à la minimisation de la fonction d'amélioration sans contrainte. Le principal avantage de cette méthode est que le point initial peut être choisi en dehors du domaine admissible. Tout algorithme de descente est alors de type Phase I-Phase II, réalisant un équilibre entre la minimisation de  $f$  et la recherche d'un point admissible.

Dans [14] et [15], nous avons proposé une variante de la fonction d'amélioration permettant de contrôler la remontée de l'objectif en phase I. Cette variante est intéressante en pratique car elle influe non pas sur la convergence de l'algorithme, mais sur la vitesse de convergence. Plusieurs tests numériques seront présentés dans le Chapitre 2 pour illustrer le comportement de l'algorithme.

Soit  $\mu > 0$  un paramètre arbitrairement choisi. D'après une idée de E. Polak [222], nous avons introduit la fonction :

$$F_\mu(y, x) = \max\{f(y) - f(x) - \mu g(x)_+; g(y) - g(x)_+\},$$

appelée fonction de progrès associée au problème (1.13), avec  $g(x)_+ = \max(g(x), 0)$ . Cette fonction de progrès est une généralisation de la fonction d'amélioration  $G(\cdot, x)$  dans le sens où :  $F_1(y, x) = G(y, x) - G(x, x)$ . L'idée est de remplacer localement le problème (1.13) par le problème d'optimisation sans contrainte localement équivalent :

**Lemme 1.1** [15, Lemma 5.1] *Soit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Si  $\bar{x}$  est un point de minimum local de  $f$  sous la contrainte  $g \leq 0$ , alors  $\bar{x}$  est également un point de minimum local de  $F(\cdot, \bar{x})$  et  $0 \in \partial_1 F(\bar{x}, \bar{x})$ .*

*Réciproquement, supposons que  $0 \in \partial_1 F(\bar{x}, \bar{x})$ . Alors :*

1. *Soit  $g(\bar{x}) < 0$ , et  $\bar{x}$  est alors un point critique de  $g$ .*
2. *Soit  $g(\bar{x}) \leq 0$ , et  $\bar{x}$  vérifie alors les conditions nécessaires d'optimalité de Fritz-John du problème (1.13).*

Ce type de formulation conduit à des approches de type Phase I-Phase II [222, section 2.6] dont le principe est le suivant : soit  $x$  le point courant. Si  $g(x) > 0$ , alors un pas de descente  $x^+$  de  $F_\mu(\cdot, x)$  au point  $x$  est un pas de descente de la contrainte et on autorise une remontée d'au plus  $\mu g(x) > 0$  de l'objectif :

$$f(x^+) \leq f(x) + \mu g(x) \quad \text{et} \quad g(x^+) \leq g(x).$$

Si  $g(x) \leq 0$ , alors un pas de descente  $x^+$  de  $F_\mu(\cdot, x)$  au point  $x$  est un pas de descente de  $f$  au point  $x$  et on maintient la faisabilité de  $x^+$  :

$$f(x^+) \leq f(x) \quad \text{et} \quad g(x^+) \leq 0.$$

Autrement dit, tant que les itérés ne sont pas admissibles, minimiser  $F_\mu(\cdot, x)$  revient à réduire la violation des contraintes en autorisant une éventuelle remontée de l'objectif. C'est la Phase I de l'algorithme. Une fois qu'un itéré admissible a été trouvé, la Phase I se termine avec succès et c'est la Phase II qui commence : minimiser  $F_\mu(\cdot, x)$  revient à minimiser  $f$  tout en maintenant la faisabilité des itérés. L'avantage de cette approche est d'éviter que l'algorithme se retrouve "piégé" dans des points de minimum local de  $f$  en Phase I. En revanche, l'existence de minima locaux de la violation des contraintes reste un problème auquel il n'y a actuellement pas de solution.

## 1.6 Commentaires et perspectives

Concluons ce chapitre par quelques perspectives : nous avons proposé un algorithme de faisceaux de second ordre pour la minimisation de fonctions non convexes et non lisses, dont nous démontrons la convergence indépendamment du choix du terme quadratique (autrement dit, de la matrice  $Q(x)$ ). Le choix du modèle est un élément clé des méthodes de faisceaux, mais la façon de construire le terme de second ordre, afin d’accélérer la convergence de l’algorithme, est encore mal maîtrisée : intuitivement la matrice  $Q(x)$  peut être considérée comme une approximation du hessien du Lagrangien dans le cas différentiable. S’inspirant des méthodes de quasi-Newton, nous avons testé dans [209] des mises à jour de type SR1 (*Symmetric Rank 1*) et BFGS. Ces approches, appliquées à la minimisation du maximum d’un nombre fini de fonctions quadratiques (problème *maxquad*), permet en pratique d’accélérer la convergence de l’algorithme, bien qu’on ne dispose pas dans le cas général de formule de mise à jour réellement satisfaisante.

### Décalage et oracle de plans sécants

Depuis 2008, date de mes derniers travaux sur le sujet, l’algorithme de faisceaux, tel qu’il a été présenté dans ce chapitre et publié dans [209], a servi de point de départ à plusieurs études visant à améliorer la rapidité et l’efficacité de l’algorithme.

Un enjeu a été d’arriver à se “débarrasser” du modèle idéal  $\phi$ . En effet, si ce modèle a un intérêt théorique certain, son évaluation peut se révéler bien plus coûteuse que celle de la fonction objectif  $f$ , et entraîner un ralentissement significatif de l’algorithme [13]. Partant de ce constat, l’idée a été de réutiliser les mécanismes de décalage des plans sécants, discutés pour la première fois dans [190], et mis en œuvre dans les codes de faisceaux de C. Lemaréchal et C. Sagastizàbal [175, 174] et dans les codes BT de J. Zowe [287, 250] dans le cas convexe. Une première contribution sur le sujet a été proposée dans la thèse de M. Gabarrou [116, 117] : à chaque itération de la boucle intérieure, le faisceau est enrichi en décalant vers le bas une tangente de  $f$  au pas d’essai nul (i.e. n’étant pas un pas de descente ou n’assurant pas une décroissance suffisante). Le décalage est indispensable, dans le cas non convexe, afin de préserver l’exactitude du modèle de travail vis-à-vis de la fonction  $f$  au point sérieux courant. La convergence de l’algorithme est obtenue pour la classe des fonctions  $C^1$  inférieurement (*lower- $C^1$* ) [264, 237]. Généralisant encore cette approche, D. Noll a proposé dans [204] la notion abstraite d’oracle de plans sécants, en substitut de la notion de plans sécants, et permettant à chaque itération de la boucle intérieure, de construire un modèle de travail. Cette approche a été approfondie dans la thèse de M.N. Dao [93, 92], et a permis d’obtenir des résultats de convergence de l’algorithme de faisceaux modifié pour des fonctions *lower  $C^1$*  et *upper- $C^1$* .

### Algorithmes de faisceaux inexacts

Terminons ce chapitre en évoquant les méthodes de faisceaux inexacts. Les méthodes de faisceaux, comme celle présentée dans ce chapitre, se sont basées sur des oracles exacts, i.e. sur l’évaluation exacte de la fonction objectif et d’au moins un de ses sous-gradients. En pratique, pour des problèmes complexes, un oracle peut ne pas être calculable exactement si ce calcul est trop gourmand en temps, ou même pas du tout calculable si des équations différentielles, par exemple, sont impliquées. C’est ce qu’on appelle un oracle inexact. Ce n’est qu’en 2001 que la référence [133], suivie des références [263, 154], a ouvert la voie vers l’inexactitude. Les méthodes de faisceaux inexacts ont fait l’objet d’importantes recherches au cours de quinze dernières années : citons, entre autres, [154, 214, 241, 213, 212] dans le cas convexe, et [205, 130] dans le cas non convexe. Il serait intéressant de voir comment modifier les algorithmes proposés afin de généraliser les résultats de convergence obtenus par chacune des deux approches.





## Chapitre 2

# Applications en synthèse de loi de commande structurée

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique du problème de synthèse mixte  $H_2/H_\infty$  pour des systèmes Linéaires et Invariants en Temps (LTI) à temps continu. Il s'agit d'un problème d'optimisation non convexe très important, tant sur le plan théorique qu'applicatif, consistant à déterminer des correcteurs d'ordre et de structure imposés, minimisant un critère  $H_2$  deux fois différentiable sous une contrainte  $H_\infty$ , à la fois non lisse et non convexe. Typiquement, la contrainte  $H_\infty$  fournit une garantie de robustesse du système, tandis que le critère  $H_2$  en mesure les performances.

Originellement, l'intérêt pour la synthèse de lois de commande  $H_2/H_\infty$  est apparu à la suite de trois publications [103, 104, 45] dans les années 80-90. Les méthodes numériques proposées par ces auteurs sont basées sur des équations de Riccati couplées avec des méthodes d'homotopie, mais les résultats numériques n'ont pas été concluants. Avec l'apparition et le succès des méthodes LMI à la fin des années 90, différentes stratégies permettant de convexifier le problème, sont devenues très populaires, le prix à payer étant un conservatisme fort des solutions obtenues ou la synthèse de correcteurs de grande dimension [132, 121]. Dans [246, 247, 248], C. Scherer propose des approches LMI pour la synthèse de correcteurs  $H_2/H_\infty$  d'ordre plein, et ramène le problème à la résolution de LMI couplées avec des équations algébriques non linéaires. Sous cette forme, le problème  $H_2/H_\infty$  peut être résolu en utilisant des techniques de programmation SDP mais les solveurs adéquats sont rapidement limités en taille : du fait de la présence de variables de Lyapunov dont le nombre croît avec le carré de l'ordre du système [65], les formulations LMI et BMI conduisent à des problèmes de grande taille pour lesquels les outils numériques classiques sont mis en défaut.

Après une courte introduction, le problème  $H_2/H_\infty$  est reformulé dans la Section 2.2 en un problème d'optimisation (non lisse et non convexe) sans contrainte localement équivalent au problème initial, dans lequel ont été intégrées les éventuelles contraintes d'ordre et de structure du correcteur. Dans la Section 2.3, nous décrivons deux algorithmes d'optimisation non lisses pour résoudre ce problème : le premier est basé sur l'utilisation d'une fonction d'optimalité permettant de générer des pas de descente et le second est l'algorithme de faisceaux présenté au Chapitre 1 et appliqué au premier ordre au problème  $H_2/H_\infty$  permettant une meilleure prise en compte des non-différentiabilités du problème considéré. Nous terminons ce chapitre par un certain nombre de tests numériques afin de valider numériquement la pertinence et l'efficacité des méthodes proposées.

A noter que la démarche adoptée dans ce chapitre pour résoudre le problème  $H_2/H_\infty$  est tout à fait générique, et peut être appliquée à n'importe quel problème de synthèse de loi de commande structurée, reformulé comme un problème d'optimisation avec ou sans contraintes.

### 2.1 La synthèse mixte $H_2/H_\infty$

Commençons ce chapitre par une description succincte du problème  $H_2/H_\infty$ .

### 2.1.1 Définition et calcul des normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

Avant d'entrer dans les détails des espaces  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  et des normes associées, prenons le temps d'introduire un peu de vocabulaire autour des fonctions de transfert en automatique.

Considérons un système linéaire et invariant en temps (LTI) de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

En prenant la transformée de Laplace  $\mathcal{L}$  du système (2.1), on vérifie aisément que la fonction de transfert de  $U = \mathcal{L}[u]$  à  $Y = \mathcal{L}[y]$  s'écrit :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

La fonction  $G$  est une fonction rationnelle réelle de la variable de Laplace  $s$ . La notion de stabilité est fondamentale pour les systèmes dynamiques, qu'il s'agisse de commande en boucle ouverte ou en boucle fermée. Il existe différentes définitions de la stabilité : dans le cas d'une approche entrée-sortie par matrice de transfert, on parle de stabilité BIBO (*Bounded Input / Bounded Output*). Si l'état  $x(t)$  du système est connu au travers d'une réalisation (2.1), on peut introduire une notion plus forte de stabilité interne :

**Définition 2.1** *Le système LTI (2.1), défini par la réalisation  $(A, B, C, D)$ , est stable de façon interne si pour tout état initial  $x(0) = x_0$ , et en l'absence de signal de commande ( $u \equiv 0$ ), on a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0.$$

*L'état d'équilibre  $x_e = 0$  est dit asymptotiquement stable.*

On montre facilement que la stabilité interne est équivalente à la propriété de Hurwitz de la matrice d'état  $A$  (toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négative). On dit que :

- $G$  est stable si  $A$  est stable i.e. si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative.
- $G$  est propre si  $G(\infty) < \infty$ , strictement propre si  $G(\infty) = 0$  i.e. si  $D = 0$ .

La question des normes que l'on choisit afin d'évaluer la "taille" du système, est liée aux performances du système que l'on va vouloir estimer (et optimiser), mais aussi aux espaces fonctionnels dans lesquels vivent les fonctions de transfert qui nous intéressent. Pour cela, on s'intéresse à deux espaces de Hardy en particulier, l'espace  $\mathcal{H}_2$  et l'espace  $\mathcal{H}_\infty$ , [285, Chapitre 4].

**Définition et calcul de la norme  $\mathcal{H}_2$ .** Soit  $\mathcal{H}_2$  l'espace de Hardy des fonctions  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n,p}$  de  $\mathcal{L}_2$ , analytiques dans  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$  muni de la norme :

$$\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(F(j\omega)^* F(j\omega)) d\omega}. \quad (2.2)$$

où  $\text{Tr}$  désigne l'opérateur Trace sur les matrices. L'espace  $\mathcal{H}_2$  est un espace de Hilbert. En effet, en utilisant les relations de Parseval, on peut démontrer qu'il existe un isomorphisme isométrique entre les espaces  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  et  $\mathcal{H}_2$  défini par la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2[0, \infty) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{H}_2 \\ f &\longmapsto F = \mathcal{L}[f] \text{ définie par : } \forall s > 0, F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt. \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{RH}_2$  le sous-espace de  $\mathcal{H}_2$  des fonctions rationnelles réelles  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n,p}$  vérifiant :  $\|F\|_2 < \infty$ . Cet espace décrit la classe des fonctions de transfert stables et strictement propres. La norme  $\mathcal{H}_2$  d'un élément  $G$  de  $\mathcal{RH}_2$  peut s'écrire :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G(j\omega)^* G(j\omega)) d\omega} = \sup_{\|u\|_\infty < \infty, u \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_\infty},$$

où  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_2$  désignent respectivement les normes  $\mathcal{L}_\infty$  et  $\mathcal{L}_2$  des signaux  $y(t)$  et  $u(t)$ . Il existe plusieurs interprétations de la norme  $H_2$  [215]. Les deux principales sont les suivantes : la norme  $H_2$  mesure l'énergie en sortie du système en réponse à un bruit blanc normalisé (i.e. de densité spectrale uniforme), et pour des entrées scalaires, elle correspond à l'énergie de la réponse impulsionnelle du système.

En théorie, la norme  $H_2$  pourrait être calculée d'après sa définition ou en utilisant une reformulation comme une intégrale de contour le long de l'axe imaginaire pur. En pratique, en se basant sur la représentation en espace d'état de  $G$ , il existe une formule particulièrement simple de calcul de cette norme, cf e.g. [102] ou [285, Lemma 4.4] :

**Lemme 2.1** *Soit  $G$  une fonction de transfert stable et strictement propre définie par :  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ . Alors :*

$$\|G\|_2^2 = \text{Tr}(B^*XB) = \text{Tr}(CYC^*),$$

où  $X$  et  $Y$  sont deux matrices symétriques semi-définies positives, solutions des équations de Lyapunov :

$$A^*X + XA + C^*C = 0, \quad AY + YA^* + BB^* = 0. \quad (2.3)$$

**Définition et calcul de la norme  $H_\infty$ .** Soit  $\mathcal{H}_\infty$  l'espace de Hardy des fonctions  $F : s \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n,p}$  de  $\mathcal{L}_\infty$  analytiques bornées dans  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$  muni de la norme  $H_\infty$  :

$$\|F\|_\infty = \max_{\omega \in [0, \infty[} \sigma_{\max}(G(j\omega)),$$

où  $\sigma_{\max}$  désigne la plus grande valeur singulière d'une matrice. Le sous-espace des fonctions rationnelles réelles propres et stables, noté  $\mathcal{RH}_\infty$ , décrit la classe des fonctions de transfert stables et bornées.

Soit  $G \in \mathcal{L}_\infty$ . L'espace  $\mathcal{H}_2$  est invariant par l'opérateur linéaire  $M_G : U \mapsto GU$ , et la norme  $H_\infty$  de  $G$  coïncide avec la norme de  $M_G$  vu comme un opérateur linéaire de  $\mathcal{H}_2$  dans  $\mathcal{H}_2$ . La norme  $H_\infty$  de  $G$  peut donc être vue comme la norme induite par la norme  $\mathcal{L}_2$  :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\|u\|_\infty < \infty, u \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}.$$

Autrement dit, la norme  $H_\infty$  d'une matrice de transfert mesure le gain  $\mathcal{L}_2$  du système considéré. C'est le plus grand gain possible entre l'énergie en entrée et l'énergie en sortie.

Le calcul de la norme  $H_\infty$  est quant à lui moins immédiat que celui de la norme  $H_2$ . Dans les articles [63] et [68], les auteurs mettent en évidence des relations fortes entre les valeurs singulières de la fonction de transfert  $G$  et les valeurs propres imaginaires pures d'une certaine matrice Hamiltonienne.

**Théorème 2.1** [63, Théorèmes 1 et 2] *Soit  $A$  une matrice stable,  $\omega_0 \in [0, +\infty[$  et  $\gamma > \sigma_{\max}(D)$ . On définit la matrice Hamiltonienne :*

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^\top C & -A^\top \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B \\ C^\top D \end{bmatrix} (D^\top D - \gamma^2 I)^{-1} \begin{bmatrix} D^\top C & B^\top \end{bmatrix}.$$

Alors :

1.  $\gamma$  est une valeur singulière de la matrice  $G(j\omega_0)$  si et seulement si  $j\omega_0$  est une valeur propre de  $H_\gamma$ .
2.  $\|T\|_\infty \geq \gamma$  si et seulement si  $H_\gamma$  a au moins une valeur propre imaginaire pure.

Le calcul de la norme  $H_\infty$  revient ainsi à déterminer la plus petite valeur possible du paramètre  $\gamma$  pour laquelle la matrice Hamiltonienne  $H_\gamma$  n'a aucune valeur propre imaginaire pure. Ce résultat est au cœur de l'algorithme de bisection proposé par S. Boyd, V. Balakrishnan, N. Bruinsma et M. Steinbuch en 1989-90 [63, 68].

En pratique, le calcul de la norme  $H_\infty$  et des fréquences actives par l'algorithme de bisection est bien trop couteux pour être appliqué à des problèmes de grande taille. Récemment dans [196], T. Mitchell et M. Overton ont proposé un nouvel algorithme basé sur la manipulation de pseudo-spectres structurés (*spectral value set* en anglais) et un nouveau schéma hybride d'expansion-contraction. Cet algorithme s'est révélé très rapide et performant pour des problèmes creux de grande taille sur lesquels la méthode de bisection de Boyd *and al.* ne peut être appliquée du fait de sa complexité cubique à chaque itération.

### 2.1.2 Formulation du problème $H_2/H_\infty$

Commençons par définir la forme standard associée à tout problème de synthèse de lois de commande. Il s'agit d'une formulation générique proposée par J.C. Doyle en 1983 [101] et donnant un cadre général unifié pour l'analyse et la synthèse des systèmes de commande en boucle fermée. Elle facilite l'expression du cahier des charges en identifiant parmi les entrées et les sorties du système, celles intervenant dans les spécifications.

La forme standard du problème  $H_2/H_\infty$  est représentée par la Figure 2.1. Le système  $P(s)$

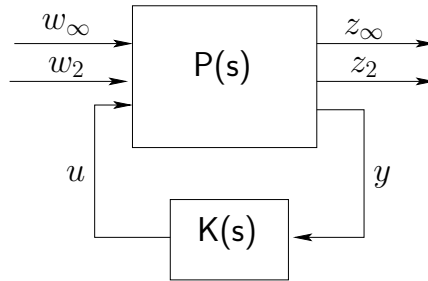


FIGURE 2.1 – Modèle standard du problème  $H_2/H_\infty$

est appelé modèle généralisé et  $K(s)$  est le correcteur généralisé. Dans tout ce chapitre, le modèle  $P(s)$  et le correcteur  $K(s)$  sont supposés Linéaires et Invariants en Temps (LTI) à temps continu et de dimension finie. Bien que les systèmes réels rencontrés dans l'industrie soient principalement non linéaires, cette hypothèse est raisonnable dans le sens où le domaine de validité de ces modèles vus comme une approximation des systèmes réels considérés, est limité par exemple au voisinage d'un point de fonctionnement, à une bande de fréquence ou à un intervalle de temps.

Parmi les entrées du système  $P(s)$ , on distingue celles délivrées par le correcteur  $K(s)$  et celles dites exogènes. Ces dernières sont regroupées dans un vecteur  $w = (w_2, w_\infty)$ , et représentent des perturbations, du bruit ou encore des signaux de consigne. L'entrée  $u$  correspond à la commande, c'est-à-dire aux signaux des actionneurs générés par le correcteur. De même parmi les sorties du système  $P(s)$ , on distingue les sorties mesurées, notées  $y$ , qui sont accessibles au correcteur pour la synthèse de lois de commande, de celles notées  $z$  qui contiennent les sorties à réguler/contrôler, et sur lesquelles portent les spécifications.

Exprimée en espace d'état, la forme standard du problème  $H_2/H_\infty$  peut également s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_\infty \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\infty & B_2 & B \\ C_\infty & D_\infty & 0 & D_{\infty u} \\ C_2 & 0 & D_2 & D_{2u} \\ C & D_{y\infty} & D_{y2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_\infty \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

avec la condition initiale :  $x(0) = 0$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système et  $P(s)$  la matrice de transfert des signaux d'entrée  $w_\infty$ ,  $w_2$  et  $u$  vers les signaux de sortie  $z_\infty$ ,  $z_2$  et  $y$ .

**Remarque 2.1** Afin d'alléger la formulation en espace d'état de la forme standard  $H_2/H_\infty$  on a supposé sans perte de généralité qu'il n'y a pas de transmission directe de  $u$  vers  $y$ . Cette hypothèse

est très souvent vérifiée dans les applications, et on peut facilement s'y ramener par un simple changement de variables au niveau du correcteur [285].

De même, on introduit

$$K : \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

une réalisation du correcteur  $K(s)$ , de variable d'état  $x_K \in \mathbb{R}^{n_K}$ , telle que :

$$K(s) = C_K(sI - A)^{-1}B_K + D_K.$$

On appelle *ordre du correcteur*  $K$ , noté  $n_K$ , le nombre de variables d'état du correcteur (et donc également la dimension de la matrice carrée  $A_K$ ). Le correcteur est dit statique si  $n_K = 0$ , dynamique d'ordre réduit si  $1 \leq n_K < n$ , dynamique d'ordre plein si  $n_K = n$ .

L'interconnexion entre le système  $P$  et le correcteur  $K$  représentée sur la Figure 2.1 est appelée boucle fermée et est obtenue en substituant (2.5) dans (2.4). Le système bouclé s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ z_\infty \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(K) & \mathcal{B}_\infty(K) & \mathcal{B}_2(K) \\ \mathcal{C}_\infty(K) & \mathcal{D}_\infty(K) & \mathcal{D}_{\infty 2}(K) \\ \mathcal{C}_2(K) & \mathcal{D}_2(K) & \mathcal{D}_{1\infty}(K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ z_\infty \\ z_2 \end{bmatrix}$$

où  $X = [x \ x_k]^\top \in \mathbb{R}^{n+n_K}$  est l'état augmenté. On peut alors définir les fonctions de transfert :

$$\begin{aligned} T_\infty(K, s) &= C_\infty(K)(sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\mathcal{B}_\infty(K) + \mathcal{D}_\infty(K), \\ T_2(K, s) &= C_2(K)(sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\mathcal{B}_2(K) + \mathcal{D}_2(K), \end{aligned}$$

associées respectivement aux canaux de performance  $w_\infty \rightarrow z_\infty$  et  $w_2 \rightarrow z_2$  de la boucle fermée. Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que la fonction de transfert  $T_2$  est strictement propre afin de pouvoir définir sa norme  $H_2$ . Sachant que  $\mathcal{D}_2(K) = D_2 + D_{2u}D_KD_{y2}$ , cela revient faire l'hypothèse suivante :

### Hypothèse 2.1

$$D_2 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} D_{2u} = 0 \quad \text{ou} \quad D_{y2} = 0 \\ \text{ou} \\ \text{le correcteur } K \text{ est strictement propre (i.e. } D_K = 0). \end{cases}$$

En synthèse mixte  $H_2/H_\infty$ , l'objectif est d'optimiser les performances nominales de la boucle fermée mesurées par la norme  $H_2$  sous contrainte de réduire l'effet des entrées exogènes  $w_\infty$  sur les sorties régulées  $z_\infty$ . Cette contrainte de robustesse s'exprime par la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert de  $w_\infty$  vers  $z_\infty$ . Une autre interprétation définit le problème  $H_2/H_\infty$  comme un problème de commande optimale  $H_2$  sous une contrainte de rejet de perturbation mesuré par la norme  $H_\infty$ . Le problème  $H_2/H_\infty$  standard est défini de la façon suivante :

**Problème 2.1 (Problème mixte  $H_2/H_\infty$ )** Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des correcteurs  $K$  stabilisant de façon interne  $P$  en boucle fermée i.e. tels que la matrice  $\mathcal{A}(K)$  est stable.

Etant donné un niveau de performance  $H_\infty$  admissible  $\gamma_\infty$ , déterminer un correcteur par retour de sortie  $K \in \mathcal{K}$  solution du problème d'optimisation :

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} \|T_2(K, \cdot)\|_2 \quad \text{sous :} \quad \|T_\infty(K, \cdot)\|_\infty \leq \gamma_\infty. \quad (2.6)$$

Il est important de bien calibrer le seuil de performance  $\gamma_\infty$  imposé au canal  $H_\infty$ . Pour cela, on définit les correcteurs optimaux des synthèses  $H_2$  et  $H_\infty$  :

$$K_2^* = \arg \min_{K \in \mathcal{K}} \|T_2(K, \cdot)\|_2, \quad K_\infty^* = \arg \min_{K \in \mathcal{K}} \|T_\infty(K, \cdot)\|_\infty. \quad (2.7)$$

Si  $\gamma_\infty < \|T_\infty(K_\infty^*, \cdot)\|_\infty$ , alors le problème (2.6) n'est pas réalisable. Si  $\gamma_\infty \geq \|T_\infty(K_2^*, \cdot)\|_\infty$ , la contrainte de performance  $H_\infty$  est redondante, et le problème (2.6) se réduit à un problème de synthèse  $H_2$  uniquement [276]. Le seul cas intéressant est donc celui pour lequel  $\gamma_\infty$  vérifie :

$$\|T_\infty(K_\infty^*, \cdot)\|_\infty \leq \gamma_\infty < \|T_\infty(K_2^*, \cdot)\|_\infty.$$

Une synthèse des résultats existants quant à l'existence, l'unicité et l'ordre du correcteur  $H_2/H_\infty$  optimal peut être trouvée dans [17, 18]. Dans la suite, nous supposons que les hypothèses classiques garantissant que le problème mixte  $H_2/H_\infty$  est réalisable (i.e.  $\mathcal{K} \neq \emptyset$ ) sont vérifiées :

**Hypothèse 2.2**  $(A, B)$  est stabilisable et  $(A, C)$  est détectable.

Le problème standard  $H_2/H_\infty$  est un problème très difficile à résoudre pour lequel il n'existe pas à l'heure actuelle de solution analytique. En particulier on ne connaît pas *a priori* de borne sur l'ordre du correcteur optimal. En revanche la question de l'unicité du correcteur optimal a été entièrement résolue dans [275] : à l'aide de la paramétrisation de Youla de l'ensemble des correcteurs stabilisant, on montre que le problème (2.6) est équivalent à un problème d'optimisation convexe en dimension infinie dont la solution (à chercher dans l'espace de Hardy  $\mathcal{RH}_2$ ) est unique à condition que le problème  $H_2/H_\infty$  soit réalisable [275]. De plus, pour une contrainte  $H_\infty$  non redondante (i.e. active à l'optimum), l'ordre du correcteur optimal est infini. La fonction de transfert résultante est également d'ordre infini et ne permet pas de réalisation exponentiellement stable [187]. Ceci met en évidence le fait que contrairement à la synthèse  $H_2$  et à la synthèse  $H_\infty$ , il est inutile de chercher à résoudre le problème mixte  $H_2/H_\infty$  (2.6) sans structure de commande, et justifie les hypothèses habituelles d'ordre et de structure imposées aux correcteurs.

## 2.2 Approche non lisse pour la commande structurée

Nous proposons maintenant d'aborder le problème mixte  $H_2/H_\infty$  par le biais de l'optimisation non lisse. L'idée est de reformuler le problème (2.6) comme un problème d'optimisation très général auquel on aura intégré des contraintes de structure sur le correcteur : ordre réduit, correcteur strictement propre, Proportionnel Intégral Dérivée (PID), etc.

**Paramétrage d'une classe de correcteurs d'ordre et de structure imposés.** Notons  $x \in \mathbb{R}^k$  le vecteur des paramètres constituant le correcteur. Un paramétrage différentiable d'une classe de correcteurs d'ordre et de structure imposés est une application  $K : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{(n_K+n_y) \times (n_K+n_u)}$ . Considérons par exemple la classe des correcteurs d'ordre réduits, non structurés : soit

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}.$$

un correcteur d'ordre  $n_K$  fixé, avec  $0 \leq n_K \leq n$ . De façon générale, il existe plusieurs paramétrages possibles d'une même classe de correcteurs. Pour des correcteurs non structurés, le plus simple consiste à poser :

$$x = \text{vec}(K) \in \mathbb{R}^{(n_K+n_y)(n_K+n_u)}. \quad (2.8)$$

De même, considérons la classe des correcteurs d'ordre réduit et strictement propres i.e. de la forme :

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & 0_{n_u \times n_y} \end{bmatrix}.$$

On choisit naturellement un paramétrage par bloc :

$$x = \begin{bmatrix} \text{vec}(A_K) \\ \text{vec}(B_K) \\ \text{vec}(C_K) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_K(n_K+n_u+n_y)}. \quad (2.9)$$

**Reformulation du problème  $H_2/H_\infty$  structuré en un problème d'optimisation non lisse.**  
Soit :

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^k : K(x) \in \mathcal{K}\}$$

l'ensemble des paramétrages d'une classe donnée de correcteurs, stabilisant le système  $P$  de façon interne en boucle fermée. On définit les fonctions objectifs et contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g : \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|T_2(K(x), \cdot)\|_2^2 & & & x &\longmapsto \|T_\infty(K(x), \cdot)\|_\infty^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le problème  $H_2/H_\infty$  standard s'écrit alors sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte très général :

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{sous :} \quad g(x) \leq \gamma_\infty^2. \quad (2.11)$$

Afin de pouvoir mettre en œuvre un algorithme d'optimisation adapté, il reste à étudier la régularité des fonctions  $f$  et  $g$  et à calculer leurs gradients ou sous-gradients. On définit :

$$f = f_2 \circ K, \quad g = g_\infty \circ K$$

en notant :

$$f_2(K) = \|T_2(K, \cdot)\|_2^2, \quad g_\infty(K) = \|T_\infty(K, \cdot)\|_\infty^2$$

La fonction  $f_2$  est différentiable, et même de classe  $C^2$ , sur le domaine  $\mathcal{K}$  des correcteurs stabilisant de façon interne le système  $P$  en boucle fermée [232] mais non convexe. On dispose d'une expression explicite de son gradient [232, Théorème 3.2], [15, Lemme 3.1]. Quant à la fonction  $g_\infty$ , elle est non différentiable avec deux sources possibles de non-différentiabilité : le maximum sur un ensemble infini de fréquences, et la fonction valeur propre maximum qui est convexe mais non lisse. Il est néanmoins possible de calculer les sous-gradients de Clarke de  $g_\infty$  comme cela a été fait dans [62, 60, 15] en se basant sur [64] ou [11, Section IV].

Il reste ainsi à calculer la jacobienne du paramétrage  $K : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{(n_K+n_y) \times (n_K+n_u)}$  pour pouvoir en déduire les gradient et sous-gradients des fonctions  $f$  et  $g$ . Pour des raisons pratiques, on s'intéresse plutôt à l'application :

$$\begin{aligned} \text{vec}(K) : \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^{(n_K+n_y)(n_K+n_u)} \\ x &\longmapsto \text{vec}(K(x)) \end{aligned}$$

où  $\text{vec}$  désigne l'opération de vectorisation qui convertit une matrice  $A$  en un vecteur colonne obtenu en mettant les colonnes de  $A$  les unes après les autres. Le gradient de la fonction objectif  $f$  s'écrit alors :

$$\nabla f(x) = J_{\text{vec}(K(x))}(x)^\top \text{vec}(\nabla f_2(K(x))),$$

où  $J_{\text{vec}(K)}(x) \in \mathbb{R}^{(n_K+n_y)(n_K+n_u) \times k}$  est la matrice jacobienne de l'application  $\text{vec}(K)$ . Pour calculer les sous-gradients de la fonction  $g$ , on applique la règle de la chaîne [85, section 2.3] : tout sous-gradient  $s_x \in \partial g(x)$  est de la forme :

$$s_x = J_{\text{vec}(K(x))}(x)^\top \text{vec}(\Phi_{Y_x}),$$

où  $\Phi_{Y_x}$  est un sous gradient de  $g_\infty$  en  $K(x)$ .

**Exemple 2.2.1** *Revenons aux paramétrages évoqués précédemment. Pour la classe des correcteurs non structurés d'ordre réduit et le paramétrage (2.8), la jacobienne est donnée par :*

$$J_{\text{vec}(K)}(x) = I_{(n_K+n_y)(n_K+n_u)}.$$

*Pour la classe des correcteurs strictement propres d'ordre réduit et le paramétrage (2.9), nous obtenons une expression un peu compliquée de la jacobienne, quoique très simple à implémenter :*

$$J_{\text{vec}(K)}(x) = \left[ \left[ \begin{array}{c} I_{n_K} \\ 0_{n_y \times n_K} \end{array} \right] \otimes \left[ \begin{array}{c} I_{n_K} \\ 0_{n_u \times n_K} \end{array} \right] \parallel \left[ \begin{array}{c} 0_{n_K \times n_y} \\ I_{n_y} \end{array} \right] \otimes \left[ \begin{array}{c} I_{n_K} \\ 0_{n_u \times n_K} \end{array} \right] \parallel \dots \right. \\ \left. \left[ \begin{array}{c} I_{n_K} \\ 0_{n_y \times n_K} \end{array} \right] \otimes \left[ \begin{array}{c} 0_{n_K \times n_u} \\ I_{n_u} \end{array} \right] \right].$$

**Initialisation par un correcteur stabilisant.** La contrainte de stabilité  $x \in \mathcal{X}$  peut être vue comme une contrainte cachée du problème  $H_2/H_\infty$  du fait que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^k : K(x) \in \mathcal{K}\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ . Il s'agit toutefois d'une contrainte forte qui doit être maintenue à chaque itération. Le problème de la stabilisation interne en boucle fermée des systèmes LTI est un problème supposé NP-difficile [52]. La stabilité interne peut s'exprimer en termes d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI), mais résoudre ces BMI est algorithmiquement difficile : l'introduction des variables de Lyapunov, pour symétriser le problème, augmente en effet significativement le nombre de paramètres de décision et conduit souvent à de mauvais conditionnements numériques. Une autre approche consiste à optimiser l'abscisse spectrale de la matrice d'état du système en boucle fermée jusqu'à ce qu'une valeur strictement négative soit obtenue, en appliquant des techniques d'optimisation non lisse adaptées, comme cela a été fait par exemple dans [69, 71] et [59].

En pratique, la résolution du problème  $H_2/H_\infty$  sous la forme (2.11) se déroule en deux étapes : la stabilisation interne du système en boucle fermée puis l'optimisation, sachant que la résolution du problème de stabilisation conditionne l'initialisation du problème de synthèse  $H_2/H_\infty$  structurée. Dans ce mémoire, nous nous intéressons uniquement à la phase d'optimisation pour le problème :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^k} f(x) \quad \text{sous :} \quad g(x) \leq \gamma_\infty^2, \quad (2.12)$$

en supposant les algorithmes initialisés par un correcteur  $K_0 = K(x_0)$  stabilisant de façon interne le système en boucle fermée. Ce correcteur est calculé en utilisant les techniques décrites dans [59], et implémentées par V. Bompard au cours de son doctorat [58]. La question est alors de savoir si la stabilité est maintenue au fil des itérations. En pratique, en appliquant un algorithme de descente à la fonction de progrès associée au Problème (2.11) et définie au Chapitre 1, Section 1.5) et en partant de  $f(x^0) < \infty$  et  $g(x^0) < \infty$ , l'algorithme va générer des itérés  $x^j$  vérifiant :  $f(x^j) < \infty$  et  $g(x^j) < \infty$ , ce qui la plupart du temps implique la stabilité interne du système en boucle fermée pour le correcteur  $K(x^j)$ . Dans de rares cas où ceci n'est pas vérifié, une solution consisterait à définir un canal supplémentaire de stabilisation en boucle fermée :  $T_{stab}(K, s) = (sI - \mathcal{A}(K))^{-1}$  dont on minimiserait la norme  $H_\infty$  en plus de la minimisation  $H_2$  sous contrainte  $H_\infty$ . Pour  $\varepsilon > 0$  petit, cela reviendrait à résoudre :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^k} \max (\|T_2(K(x), \cdot)\|_2^2, \varepsilon \|T_{stab}(K(x), \cdot)\|_\infty^2) \quad \text{sous :} \quad \|T_\infty(K(x), \cdot)\|_\infty^2,$$

ce qui ne pose pas de difficulté particulière dans le cadre du formalisme développé au Chapitre 1.

## 2.3 Deux algorithmes de descente non lisses pour la synthèse $H_2/H_\infty$ structurée

Une fois formulé le problème mixte de commande  $H_2/H_\infty$  structurée, intéressons nous à sa résolution. Dans [14] et [15, 16], nous proposons deux algorithmes de descente non lisses pour la synthèse mixte  $H_2/H_\infty$  de correcteurs d'ordre et de structure imposés : le premier est un algorithme de descente avec recherche linéaire basé sur l'utilisation d'une fonction dite d'optimalité pour générer des directions de descente du problème considéré. Le second est l'algorithme de faisceaux présenté au Chapitre 1, adapté au cas avec contrainte et en prenant comme modèle idéal un modèle de premier ordre ( $Q \equiv 0$ ) et comme modèle de travail un modèle polyédral.

### 2.3.1 Algorithme de descente avec recherche linéaire

Dans la continuité des travaux présentés dans [11, 59, 58], une idée naturelle est de reformuler le problème  $H_2/H_\infty$  structuré (2.12) en un problème min-max (on dit aussi *minimax*) sans contrainte pour lequel il existe des algorithmes dédiés [221, 222]. Ces algorithmes sont basés sur l'utilisation d'une fonction dite d'optimalité dont les zéros sont les points critiques du problème initial. Le concept de fonction d'optimalité a été introduit par E. Polak pour la résolution de problèmes



minimax de familles finies ou infinies de fonctions lisses [221], [222, Chapitre 3], et peut être généralisé au cas de fonctions non lisses.

Prenons un exemple simple pour décrire le principe général de la méthode. Soit  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement Lipschitzienne, non lisse et non convexe, à minimiser et  $x \in \mathbb{R}^k$  le point courant. On cherche à calculer une direction de descente de  $f$  en  $x$ . Pour cela, on construit un modèle polyédral de  $f$  donné ici par son modèle standard de premier ordre :

$$\phi(y, x) = f(x) + f^\circ(x; y - x) = \max_{g \in \partial f(x)} \{f(x) + \langle g, y - x \rangle\}$$

La fonction d'optimalité associée au problème  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  est définie par :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \min_{h \in \mathbb{R}^n} \phi(x + h, x) + \frac{\delta}{2} \|h\|^2, \\ &= \min_{h \in \mathbb{R}^n} \max_{g \in \partial f(x)} \left( f(x) + \langle g, y - x \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

où  $\delta > 0$  est un paramètre de pénalisation arbitrairement choisi. En utilisant la dualité de Fenchel pour permuter le *min* et le *max*, on obtient la forme duale du problème (2.13) dans laquelle le problème de minimisation interne par rapport à  $h$  est sans contrainte et peut être résolu explicitement. On obtient ainsi :

$$\theta(x) = \max_{g \in \partial f(x)} \left( f(x) - \frac{1}{2\delta} \|g\|^2 \right),$$

où la solution  $h(x)$  du problème de minimisation interne est donné par :  $h(x) = -\frac{1}{\delta}g$ . On en déduit des propriétés de la fonction  $\theta$  qui seront utiles pour la construction de l'algorithme de descente :

**Proposition 2.1** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^k$ ,*

1.  $\theta(x) \leq f(x)$  et :  $(\theta(x) = f(x) \iff 0 \in \partial f(x))$ .
2. Si  $0 \notin \partial f(x)$ , alors  $h(x)$  est une direction de descente de  $f$  en  $x$ . Plus précisément :

$$f'(x; h(x)) \leq \theta(x) - \frac{\delta}{2} \|h(x)\|^2 \leq \theta(x).$$

C'est l'approche présentée dans l'article de conférence [14] pour la synthèse mixte  $H_2/H_\infty$  structurée. Les modèles sont plus élaborés mais les idées sont les mêmes. La partie délicate est la construction d'un modèle polyédral de la fonction :

$$g : x \mapsto \|T_\infty(K(x), \cdot)\|_\infty^2 = \max_{\omega \in [0, \infty]} \lambda_{max}(G(x, \omega)).$$

Comme cela a été fait dans [11], on introduit l'ensemble :

$$\Omega(x) = \{\omega \in [0, \infty] : g(x) = \lambda_{max}(G(x, \omega))\}$$

des fréquences actives au point  $x$ , et  $\Omega_e(x)$  une extension finie de cet ensemble qui dépend continûment de  $x$ . On peut alors définir pour  $g$  le modèle polyédral suivant :

$$\phi_g(y, x) = \max_{\omega \in \Omega_e(x)} \max_{\substack{Y \succeq 0 \\ Tr(Y) = 1}} \lambda_{max}(G(x, \omega)) + \langle \Phi_Y, h \rangle$$

où  $\Phi_Y \in \partial_1 \lambda_{max}(G(x, \omega))$ . Ceci nous permet de définir un modèle polyédral de la fonction de progrès au voisinage de  $x$  :

$$\phi(y, x) = \max \left( \nabla f(x)^\top (y - x) - \mu[g(x) - \gamma_\infty]_+; \phi_g(y, x) - \gamma_\infty^2 - [g(x) - \gamma_\infty]_+ \right)$$

et ensuite de définir une fonction d'optimalité  $\theta_e(x)$  associée au problème  $H_2/H_\infty$ . Le calcul de  $\theta_e(x)$  et du minimiseur  $h(x)$  en passant par le dual du problème min-max, sont détaillés dans [14, Section IIIB.]. En conclusion, par cette approche, on démontre :

**Théorème 2.2**  $x \in \mathbb{R}^k$  est un point critique de Fritz-John du problème (2.12) si et seulement si  $\theta_e(x) = 0$  et  $g(x) \leq \gamma_\infty^2$ . De plus, si  $\theta_e(x) < 0$ , la solution  $h(x)$  du problème  $\min_{h \in \mathbb{R}^k} \phi(x+h, x) + \frac{\delta}{2} \|h\|^2$ , est une direction de descente de  $F_\mu(\cdot, x)$  au point  $x$ . Plus précisément :

- Si  $g(x) < \gamma_\infty^2$ ,  $h(x)$  est une direction de descente de  $f$  au point  $x$ .
- Si  $g(x) > \gamma_\infty^2$ ,  $h(x)$  est une direction de descente de  $g$  au point  $x$ .
- Si  $g(x) = \gamma_\infty^2$ ,  $h(x)$  est une direction de descente à la fois de  $f$  et de  $g$  au point  $x$ .

Ces observations nous ont permis de développer un algorithme de descente non lisse avec recherche linéaire, adapté à la synthèse  $H_2/H_\infty$  (cf Algorithme 2).

---

**Algorithme 2** Algorithme non lisse avec recherche linéaire pour la synthèse mixte  $H_2/H_\infty$

---

**Paramètres:**  $\gamma_\infty$  le niveau de performance  $H_\infty$ ,  $K_{struct}$  le paramétrage de la classe de correcteurs d'ordre  $n_K$  et de structure choisie,  $\mu > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $\alpha \in (0, 0.25]$ .

- 1: **Initialisation.** Trouver un correcteur stabilisant  $K_0 = K_{struct}(x^0)$ . Poser  $j = 0$ .
- 2: **Tant que**  $x^j$  ne vérifie pas la condition nécessaire d'optimalité, **faire**
- 3: **Génération des fréquences.** Construire une extension finie  $\Omega_e(x^j)$  de l'ensemble  $\Omega(K_j)$  des fréquences actives en  $K(x^j)$ .
- 4: **Programme tangent.** Résoudre :

$$\min_{h \in \mathbb{R}^n} \phi(x^j + h; x^j) + \frac{\delta}{2} \|h\|^2.$$

La solution est notée :  $h^j = h(x^j)$ . Calculer  $\theta_j = \theta_e(x^j)$ .

- 5: **Recherche linéaire.** Par des techniques de rebroussement, calculer un pas  $s$  tel que :

$$F_\mu(x^j + sh_j; x^j) \leq s\alpha\theta_j$$

et tel que  $K(x^j) + sh_j$  reste stabilisant de façon interne.

- 6: **Mise à jour.**  $x^{j+1} := x^j + sh_j$ ;  $j := j + 1$ .
  - 7: **fin Tant que**
- 

On démontre la convergence globale de l'Algorithme 2 au sens où tout point d'accumulation de la suite des itérés est un point stationnaire du problème mixte  $H_2/H_\infty$  :

**Théorème 2.3** Supposons que l'ensemble de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq g(x_0)\}$  est borné et que  $f$  est faiblement coercive sur  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \gamma_\infty^2\}$  dans le sens suivant : si  $x_j$  est une suite d'itérés admissibles avec  $\limsup_{j \rightarrow \infty} \|x_j\| = \infty$ , alors la suite  $(f(x_j))_j$  n'est pas décroissante.

Alors la suite des itérés générés par l'Algorithme 2 est bornée, et tout point d'accumulation est soit un point critique de Fritz-John du (2.12), soit un point critique de la violation des contraintes.

### 2.3.2 Algorithme de faisceaux de premier ordre

Appliquons maintenant l'algorithme de faisceaux décrit au Chapitre 1 au problème mixte  $H_2/H_\infty$  écrit sous la forme (2.12). Les ingrédients nécessaires à la mise en place de cet algorithme sont :

- un modèle idéal  $\phi(\cdot, x)$  de la fonction de progrès associée au problème (2.12) :

$$F_\mu(y, x) = \max \{ f(y) - f(x) - [g(x) - \gamma_\infty^2]_+; g(y) - \gamma_\infty^2 - [g(x) - \gamma_\infty^2]_+ \}.$$

- un modèle de travail  $\phi_k(\cdot, x)$  associé et une stratégie de mise à jour de ce modèle.

On choisit, ici, de travailler avec des modèles de premier ordre (i.e. :  $Q(x) = 0$ ). Suivant les règles établies au Chapitre 1, on construit un modèle convexe local fort au sens de la Définition 1.2, de la fonction de progrès  $F_\mu(\cdot, x)$  au voisinage de  $x$ , de la façon suivante :

$$\Phi(y, x) = \phi(y, x) = \max \{ \nabla f(x)^\top (y - x) - \mu[g(x) - \gamma_\infty^2]_+; \Phi_g(y, x) - \gamma_\infty^2 - [g(x) - \gamma_\infty^2]_+ \},$$

où  $\Phi_g$  est le modèle non standard d'ordre 1 de la fonction  $g = \lambda_{max} \circ G(\cdot, \omega)$  :

$$\Phi_g(y, x) = \phi_g(y, x) = \max_{\omega \in [0, \infty]} \lambda_{max}(G(x, \omega) + G'(x, \omega)(y - x)).$$

Regardons d'un peu plus près la construction d'un modèle de travail  $\phi_k(\cdot, x)$  à partir du modèle idéal  $\phi(\cdot, x)$ . L'idée est de réécrire le modèle local  $\phi_g(\cdot, x)$  de  $g$  de la façon suivante :

$$\phi_g(y, x) = \max_{\omega \in [0, \infty]} \max_{\substack{Z \in \mathbb{S}_m \\ Z \succeq 0, \text{Tr}(Z) = 1}} \langle Z, G(x, \omega) \rangle_F + \langle G'(x, \omega)^* Z, y - x \rangle.$$

En posant :

$$\begin{aligned} a_0 &= -\mu[g(x) - \gamma_\infty^2]_+, & a(\omega, Z) &= \langle Z, G(x, \omega) - \gamma^2 - [g(x) - \gamma^2]_+ \rangle_F \in \mathbb{R} \\ s_0 &= \nabla f(x), & s(\omega, Z) &= G'(x, \omega)^* Z \in \mathbb{R}^n \\ \mathcal{G} &= \text{co}(\{(a_0, s_0)\} \cup \{(a(\omega, Z), s(\omega, Z)) : \omega \in [0, \infty], Z \in \mathbb{S}_m, Z \succeq 0, \text{Tr}(Z) = 1\}), \end{aligned}$$

le modèle local  $\phi(\cdot, x)$  peut alors s'écrire sous la forme d'une enveloppe de plans coupants :

$$\phi(y, x) = \max\{a + \langle s, y - x \rangle : (a, s) \in \mathcal{G}\}, \quad (2.14)$$

Les avantages de cette formulation sont d'une part que les éléments  $(a, s)$  de  $\mathcal{G}$  sont plus faciles à stocker que les éléments  $(\omega, Z) \in [0, \infty] \times \{Y \in \mathbb{S}_m : Y \succeq 0, \text{Tr}(Y) = 1\}$ , et d'autre part, qu'il est alors possible de construire un modèle de travail  $\phi_k(\cdot, x)$  simplement en choisissant un sous-ensemble  $\mathcal{G}_k$  de  $\mathcal{G}$  :

$$\phi_k(y, x) = \max\{a + \langle s, y - x \rangle : (a, s) \in \mathcal{G}_k\}, \quad \mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}.$$

Le sous-ensemble  $\mathcal{G}_k$  est construit de sorte à respecter les trois règles : exactitude, plan coupant et agrégation, décrites au Chapitre 1, Paragraphe 1.3.1. La construction itérative explicite de  $\mathcal{G}_k$  est détaillée et discutée dans [15, 16]. En pratique, il peut être utile d'enrichir un peu plus l'ensemble  $\mathcal{G}_{k+1}$  en s'arrangeant pour qu'il contienne tout le sous-différentiel  $\partial_1 F_\mu(x, x)$  au point courant  $x$ . Dans le cas où l'ensemble des fréquences actives  $\Omega(x) = \{\omega \in [0, \infty] : g_\infty(K(x)) = g_\infty(K(x), \omega)\}$  est fini, ceci est faisable en ajoutant les éléments actifs dans le modèle.

### 2.3.3 Critères d'arrêt et test de criticalité

L'algorithme de faisceaux appliqué au problème de synthèse mixte  $H_2/H_\infty$  est une méthode de premier ordre qui peut être lente au voisinage d'une solution locale. Pour ces raisons, il est important de bien choisir les critères d'arrêt de l'algorithme afin d'éviter les calculs inutiles et coûteux en phase finale lorsque les itérés ne progressent quasiment plus.

Les trois critères utilisés sont les suivants : un test de criticalité du point courant  $x$ , un test qui "mesure" les progrès du modèle local du point courant  $x$  au nouvel itéré  $x^+$  et un test qui mesure les progrès relatifs réalisés par les itérés. Pour  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$  fixés, on teste si :

$$\inf\{\|h\| : h \in \partial_1 F_\mu(x, x)\} \leq \varepsilon_1. \quad (2.15)$$

$$|F_\mu(x^+, x)| \leq \varepsilon_2. \quad (2.16)$$

$$\|x^+ - x\| \leq \varepsilon_3(1 + \|x\|). \quad (2.17)$$

L'algorithme de faisceau s'arrête si l'un au moins de ces trois critères est satisfait.

Dans le cas particulier de la synthèse  $H_2/H_\infty$ , le test (2.15) de criticalité est possible car on est capable de calculer tout le sous-différentiel de la norme  $H_\infty$ . En pratique, nous nous sommes également servi d'un autre test de criticalité basé sur la fonction d'optimalité :

$$\theta(x) = \min_{h \in \mathbb{R}^k} \phi(y, x) + \frac{\delta}{2} \|h\|^2,$$

où  $\phi(\cdot, x)$  est un modèle de la fonction de progrès  $F_\mu(\cdot, x)$  au sens de la Définition 1.1. On vérifie que si  $\theta(x) = F_\mu(x, x)$ , alors  $0 \in \partial_1 \phi(x, x) \subset \partial_1 F_\mu(x, x)$ . Ainsi, dans les cas où la fonction d'optimalité peut être calculée efficacement et rapidement, le test (2.15) est remplacé par :  $|\theta(x)| \leq \varepsilon_1$ .

## 2.4 Résultats numériques

Les deux algorithmes présentés dans ce chapitre pour la synthèse  $H_2/H_\infty$  ont été implémentés en Matlab© et testés pour différentes classes de correcteurs : correcteurs structurés et non structurés, correcteurs d'ordre plein ou d'ordre réduit. Le code se sert des routines développées par V. Bompart et P. Apkarian [58] pour la stabilisation, le calcul de la norme  $H_\infty$  et la résolution du programme tangent. Les nouveautés du code concernent majoritairement le calcul de la norme  $H_2$  et de son gradient pour des correcteurs d'ordre et de structure imposés, la résolution numérique du problème de synthèse  $H_2$  seul, l'implémentation des deux algorithmes proposés. A noter que c'est la version enrichie du modèle de travail qui a été implémentée (tous les plans coupants actifs au point d'essai, sont intégrés au modèle) afin d'accélérer la convergence de la méthode.

Les détails de l'implémentation et des exemples testés sont décrits dans [14] pour l'algorithme avec recherche linéaire et dans [15] pour l'algorithme de faisceaux avec contrôle de proximité. Pour chaque algorithme, la résolution des problèmes-tests  $H_2/H_\infty$  considérés se fait en trois étapes :

**1. Initialisation par un correcteur stabilisant**, (cf Section 2.2). Ce correcteur n'est *a priori* pas un correcteur admissible pour le problème (2.12) ce qui nous permet de tester la Phase I de l'algorithme ainsi que l'influence du paramètre  $\mu$  sur la vitesse de convergence.

**2. Choix du seuil de performance  $\gamma_\infty$** . Comme cela a été expliqué au Paragraphe 2.1.2, on définit des correcteurs  $H_2$  et  $H_\infty$  (localement) optimaux :

$$\begin{aligned} x_2^* &= \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \|T_2(K(x), \cdot)\|_2^2, & K_2^* &= K(x_2^*), \\ x_\infty^* &= \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \|T_\infty(K(x), \cdot)\|_\infty^2, & K_\infty^* &= K(x_\infty^*), \end{aligned}$$

et on choisit  $\gamma_\infty$  de sorte que :

$$\|T_\infty(K_\infty^*, \cdot)\|_\infty \leq \gamma_\infty < \|T_\infty(K_2^*, \cdot)\|_\infty.$$

Le correcteur  $K_\infty^*$  a été calculé en utilisant les techniques décrites dans [11] et implémentées par V. Bompart et P. Apkarian [58]. On aurait tout aussi bien pu utiliser le package HIFOO [126, 21]. Quant au calcul du correcteur  $K_2^*$ , la norme  $H_2$  en boucle fermée étant de classe  $C^2$ , cela nous ouvre les portes de l'optimisation différentiable. Toutefois comme la fonction  $f$  n'est pas définie en dehors du domaine des correcteurs stabilisant de façon interne le système en boucle fermée, les algorithmes d'optimisation classiques sont mis en défaut. Nous avons alors implémenté et testé deux méthodes : un algorithme de gradient conjugué de Polak-Ribière ainsi qu'un algorithme de quasi-Newton (BFGS), dans lesquels on force les itérés (au cours de la recherche linéaire) à rester dans le domaine des correcteurs stabilisants.

Les résultats sont présentés dans la Table 2.1 pour 4 problèmes issus de la littérature  $H_2/H_\infty$  et pour différents ordres du correcteur.

Problems	$(n, n_y, n_u)$	$n_K$	$\ T_2(K_2^*, \cdot)\ _2$	$\ T_\infty(K_\infty^*, \cdot)\ _\infty$	$\ T_\infty(K_2^*, \cdot)\ _\infty$
Four Disks [45]	(8, 1, 1)	2	0.5319	0.31411	3.1658
		4	0.4767	0.31393	2.6194
		8	0.3782	0.27537	1.39
From <i>COMPlib</i> [165] : 'BDT2'	(82, 4, 4)	0	7.9389e-01	0.67421	1.3167
		10	7.8877e-01	0.72423	1.1386
		41	7.7867e-01	0.77405	1.1302
'HF1'	(130, 1, 2)	0	5.8193e-02	0.44721	0.4611
		10	5.8151e-02	0.44721	0.4617
		25	5.8149e-02	0.44721	0.4613
'CM4'	(240, 1, 2)	0	9.2645e-1	0.81650	1.6546
		50	9.3844e-1	0.81746	4.2541

TABLE 2.1 – Dimensions et bornes obtenues pour les synthèses  $H_2$  et  $H_\infty$  seules pour quelques problèmes issus de la littérature.

Les problèmes BDT2, HF1 et CM4 sont issus de la bibliothèque *COMPl<sub>e</sub>ib* [165] : BDT2 pour *Binary Distillation Tower*, HF1 pour *Heat Flow* et CM4 pour *Cable Mass model*.

**3. Synthèse mixte  $H_2/H_\infty$ .** On peut maintenant résoudre le problème mixte  $H_2/H_\infty$  pour la classe de correcteurs d'ordre et de structure choisie. Les deux algorithmes non lisses développés ont été testés sur une variété de problèmes issus de la littérature, et en particulier de la bibliothèque *COMPl<sub>e</sub>ib* de F. Leibfritz [165]. Les résultats sont présentés dans la Table 2.2 pour les quatre exemples évoqués précédemment et différents ordres du correcteur sur chaque exemple.

Pb ( $n_x, n_y, n_u$ )	$n_K$	$\gamma_\infty$	Algo. avec rech. linéaire			Algo. de faisceaux		
			Iter.	f(x)	g(x)	Iter.	f(x)	g(x)
Four Disks [45]	2	0.52	14*	0.2335	0.5199	23*	0.2321	0.5200
	4	0.52	19*	0.2302	0.5200	18*	0.2308	0.5200
	8	0.52	15*	0.2299	0.5199	39*	0.2299	0.5200
'BDT2' (82, 4, 4)	0	0.8	115*	8.1892e-01	7.9994e-01	324*	7.9092e-01	7.9999e-01
	10	0.8	300	7.7021e-01	7.9976e-01	404*	7.7146e-01	0.8000
	41	0.8	300	8.4477e-01	7.9998e-01	115*	7.8882e-01	0.8000
'HF1' (130, 1, 2)	0	0.45	13*	5.8808e-02	4.4972e-01	7*	5.8795e-02	4.4999e-01
	10*	0.45	19	5.8707e-02	4.4983e-01	7*	5.8706e-02	4.5000e-01
	25	0.45	25*	5.8700e-02	4.4993e-01	33*	5.8700e-02	4.4993e-01
'CM4' (240, 1, 2)	0	1	19*	9.8436e-01	1	20*	9.8438e-01	1
	50	1	49*	9.4216e-01	9.9977e-01	41*	9.4038e-01	1.000

TABLE 2.2 – Résultats des deux algorithmes non lisses appliqués au problème  $H_2/H_\infty$ .

Regardons d'un peu plus près le comportement des deux algorithmes sur l'exemple 'BDT2' de F. Leibfritz : c'est un modèle de colonne à distiller à 82 états, 4 entrées, 4 sorties dont la matrice d'état  $A$  est creuse. Le modèle est construit de sorte que la norme  $H_2$  est bien définie quelle que soit la structure du correcteur [165, 164]. La Figure 2.2 montre l'évolution de la norme  $H_2$  au cours des 50 premières itérations et met en évidence l'existence d'une Phase I et d'une Phase II. Tant que les itérés restent infaisables, les pas de descente permettent de réduire la violation des

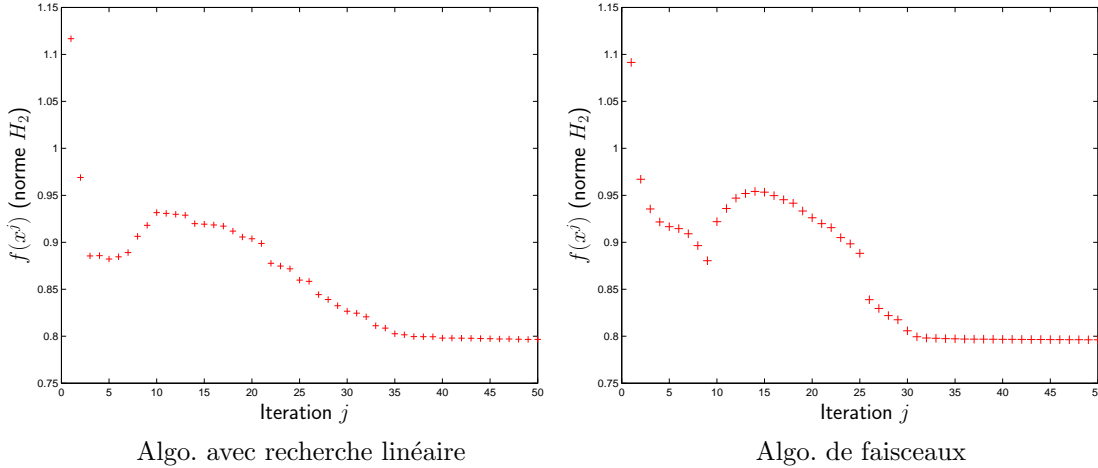


FIGURE 2.2 – Exemple 'BDT2' - Norme  $H_2$  au cours des 50 premières itérations

contraintes quitte à permettre une remontée (contrôlée) de la fonction objectif. Dès que le domaine admissible  $g(x) \leq \gamma_\infty^2$  est atteint, l'algorithme passe en Phase II, à savoir minimiser la fonction  $f$  tout en maintenant la faisabilité.

De plus, comme attendu, on observe que le choix du paramètre  $\mu$  dans la fonction de progrès a une influence sur la vitesse de convergence de l'algorithme mais rien de décisif ne peut véritablement

être établi : choisir  $\mu > 0$  permet également, par exemple, d'éviter que l'algorithme reste piégé dans un minimum local infaisable de  $f$  (cf [15] pour davantage de détails).

Enfin, une question naturelle est de savoir lequel des deux algorithmes est le plus performant. Dans [209], nous avons procédé à une comparaison détaillée entre l'algorithme avec recherche linéaire et l'algorithme de faisceaux testés sur plusieurs exemples de synthèse  $H_\infty$  seule issus de la bibliothèque *COMPl<sub>e</sub>ib* [165]. Sans entrer dans les détails de cette comparaison, soulignons que l'algorithme avec recherche linéaire s'arrête généralement plus tôt que l'algorithme de faisceaux, et avec une mesure de criticalité plus grande. Ceci s'explique par le fait que l'algorithme avec recherche linéaire détecte moins bien les non-différentiabilités du problème, à savoir les situations où les deux premières valeurs singulières de la fonction de transfert coalescent comme illustré sur la Figure 2.3, et s'arrête prématurément.

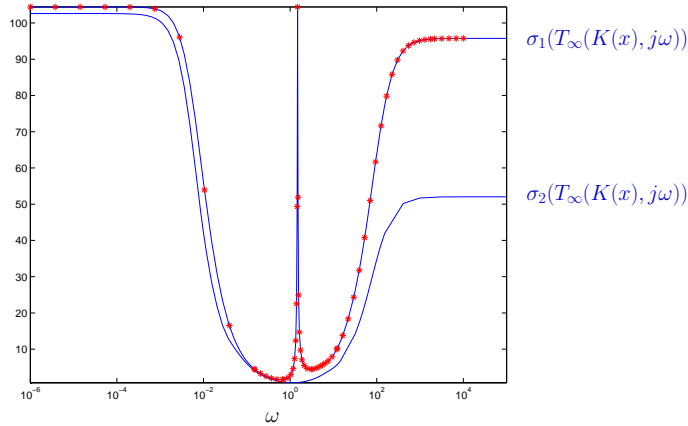


FIGURE 2.3 – Coalescence sur une bande de fréquence assez large des deux premières valeurs singulières :  $\omega \mapsto \sigma_i(T_\infty(K(x), j\omega))$ ,  $i = 1, 2$ , au dernier pas  $x$  avant arrêt de l'algorithme avec recherche linéaire.

## 2.5 Commentaires et perspectives

Les contributions algorithmiques de ce chapitre reposent sur l'idée que tout problème de synthèse de loi de commande structurée peut se reformuler en un problème d'optimisation classique, potentiellement non lisse et non convexe, auquel auront été intégrées les contraintes d'ordre et de structure des correcteurs. Deux algorithmes d'optimisation ont été proposés et testés sur un certain nombre d'exemples issus de la littérature.

Ce qu'il manque très clairement dans ces travaux, ce sont des comparaisons numériques entre les deux algorithmes proposés, et d'autres approches de la littérature. Du point de vue de l'optimisation non lisse, le seul code concurrent, à notre connaissance, est le package Matlab HIFOO de M. Overton [126, 21]. Quelques comparaisons numériques ont été effectuées entre HIFOO et le code de faisceaux (avec tangentes décalées) sur des exemples de synthèse  $H_\infty$  issus de la bibliothèque *COMPl<sub>e</sub>ib* [10, 116], ainsi que sur quelques exemples de synthèse  $H_2/H_\infty$  dans [21]. Une étude comparative plus poussée des deux approches serait une perspective de recherche tout à fait intéressante. Signalons qu'à l'époque des travaux présentés dans ce chapitre (en 2008), la partie  $H_2$  du package HIFOO n'existait pas encore, ce qui justifie que des comparaisons n'aient pas pu être faites à l'époque.

Plus généralement, il reste à fournir un travail conséquent de revue des méthodes plus classiques de l'automatique moderne (approches LMI ou BMI) pour la synthèse  $H_2/H_\infty$ , en vue de comparer les résultats et les performances des algorithmes proposés. Citons, entre autres, le package RoMulOC développé par D. Peaucelle et D. Arzelier [219, 80], ainsi que le package BMIsolver pour la résolution de problèmes d'optimisation avec des contraintes BMI [96, 97].

Deuxième partie

Questions de convergence





# Introduction

Dès lors que l'on s'intéresse aux méthodes de descente pour la minimisation de fonctions convexes, il semble naturel de s'attendre à ce que l'algorithme génère une suite de points convergeant globalement vers une solution du problème considéré. Ce n'est, malheureusement, pas souvent le cas. Pour obtenir ce type de convergence dans le cas convexe, une approche standard consiste à démontrer que la suite des itérés est (quasi-) Fejér monotone par rapport à l'ensemble des minimiseurs de la fonction objectif [37, Chapitre 5]. Dans le cas non convexe, les propriétés de monotonie sont en général perdues, et les méthodes de descente peuvent exhiber des comportements hautement oscillatoires [91]. Afin d'éviter de tels comportements, il est nécessaire de travailler avec des fonctions présentant une certaine structure, pouvant être de nature algébrique (fonctions quadratiques, polynomiales ou analytiques réelles), ou bien capturée par des hypothèses analytiques, telles que la régularité métrique [177, 179] ou le fait d'être partiellement lisse [176].

L'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz est devenue une hypothèse centrale dans l'étude de la convergence des algorithmes d'optimisation, et fait l'objet de recherches intensives depuis une dizaine d'années, cf [2, 54, 26, 55, 27, 28, 113] pour n'en citer que quelques uns. Son succès est dû au fait qu'en pratique, de nombreux problèmes mettent en jeu (sans le savoir) des fonctions satisfaisant de telles inégalités et que, très souvent, elles sont relativement simples à vérifier. Cela explique que, même en l'absence de justifications théoriques, certains algorithmes, tels que l'algorithme des projections alternées, possèdent de bonnes et surprenantes propriétés de convergence.

Les travaux présentés dans cette partie s'inscrivent dans la continuité de ceux menés par P.-A. Absil, R. Mahony et B. Andrews [2], et dans le formalisme développé par H. Attouch et J. Bolte dans [2, 54, 55, 27, 28]. Je m'intéresse, dans un premier temps, à la convergence des algorithmes de descente en général, sous hypothèse que la fonction soit de classe  $C^1$  et vérifie l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz et, dans un second temps, à la convergence locale de l'algorithme classique des projections alternées, sous des hypothèses moins restrictives que celles de la littérature.

## A propos du sous-différentiel en analyse non lisse : quelques définitions

Les notions d'analyse non-lisse, utilisées dans cette partie, sont extraites des ouvrages [85, 237, 197, 198]. Je me suis également inspirée de [54, Section 2] qui explique très bien, et de manière synthétique, l'essentiel des notions dont nous aurons besoin dans la suite.

La notion de sous-différentiel est au cœur des développements théoriques et algorithmiques qui vont suivre. En particulier, les différents passages à la limite utilisés dans les preuves de convergence des algorithmes ont mis en évidence la nécessité de disposer d'une notion plus stable de sous-différentiel : le sous-différentiel limite [156, 157, 136, 197, 198].

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  et  $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) < +\infty\}$  son domaine. La fonction  $f$  est dite *propre* si  $\text{dom } f \neq \emptyset$ , et *semi-continue inférieurement* si pour tout réel  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$  est fermé.

Pour tout  $x \in \text{dom } f$ , le sous-différentiel de Fréchet de  $f$  au point  $x$ , noté  $\hat{\partial}f(x)$  est défini par :

$$\hat{\partial}f(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \liminf_{y \neq x, y \rightarrow x} \frac{1}{\|x - y\|} (f(y) - f(x) - \langle v, y - x \rangle) \geq 0 \right\}.$$

Si  $x \notin \text{dom } f$  alors :  $\hat{\partial}f(x) = \emptyset$ . Cette notion de sous-différentiel de Fréchet n'est pas complètement satisfaisante du point de vue de l'optimisation, car ce n'est pas une application fermée, ce qui peut

conduire à des instabilités numériques. Pour cette raison, c'est le sous-différentiel limite de Fréchet (aussi appelé, simplement, sous-différentiel) qui sera utilisé dans la suite.

Le sous-différentiel limite de Fréchet de  $f$  en  $x \in \text{dom} f$ , noté  $\partial^L f(x)$ , est défini par :

$$\partial^L f(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \exists x^k \rightarrow x, f(x^k) \rightarrow f(x) \text{ et } v^k \in \hat{\partial} f(x^k) \rightarrow v \right\}.$$

Le sous-différentiel de Fréchet est un ensemble convexe tandis que le sous-différentiel est un ensemble fermé. Par définition des sous-différentiels de Fréchet et de Clarke (utilisé dans la première partie de ce mémoire), on a [54] :

$$\hat{\partial} f(x) \subset \partial^L f(x) \subset \partial f(x).$$

Ces notions de sous-différentiels généralisés impliquent des notions généralisées de points critiques : on dira qu'un point  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  est un point critique (généralisé) de  $f$  si  $0 \in \partial^L f(x)$ .

### L'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz : le cas non lisse

En 1963, S. Łojasiewicz [180, 181] a démontré qu'une fonction réelle analytique  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie la propriété suivante, appelée propriété de Łojasiewicz : étant donné un point critique  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  de  $f$ , il existe un voisinage  $U$  de  $\bar{x}$ ,  $c > 0$  et  $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$  tels que :

$$\forall x \in U, |f(x) - f(\bar{x})|^\theta \leq c \|\nabla f(x)\|.$$

En 1998, K. Kurdyka a présenté une construction plus générale s'appliquant à des fonctions différentiables définissables dans une structure o-minimale [159]. Une extension aux fonctions non lisses a été proposée par J. Bolte *et al.* dans [54] et se formule de la façon suivante :

**Définition 2.2 (L'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz dans le cas non lisse)** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction propre, semi-continue inférieurement. On dit que  $f$  vérifie l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz (KL) au point  $\bar{x} \in \text{dom} \partial^L f = \{x \in \mathbb{R}^n : \partial^L f(x) \neq \emptyset\}$  s'il existe  $\eta > 0$ ,  $U$  un voisinage de  $\bar{x}$  et  $\varphi : [0, \eta] \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction continue et concave tels que :

1.  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $(0, \eta)$ , et  $\varphi' > 0$  sur  $(0, \eta)$ .
2. Pour tout  $x \in U \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) < f(x) < f(\bar{x}) + \eta\}$ ,

$$\varphi'(f(x) - f(\bar{x})) \text{dist}(0, \partial^L f(x)) \geq 1. \quad (2.18)$$

Cette inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz a été largement étudiée tant sur le plan théorique que sur le plan géométrique dans les travaux de H. Attouch, J. Bolte et différents collaborateurs, cf par exemple [55, 27, 28]. Les grandes idées à retenir en première approche sont les suivantes : tout d'abord, l'inégalité (2.18) est automatiquement satisfaite en tout point non-critique de  $f$ , ce qui en fait une condition sur les points critiques. De plus, la fonction  $\varphi$  joue le rôle de fonction désingularisante : prenons l'exemple [28, Remarque 2.5] d'une fonction  $f$  différentiable, à valeurs finies et telle que  $f(\bar{x}) = 0$  dans la Définition 2.2. Dans ce cas, l'inégalité (2.18) s'écrit :

$$\forall x \in U \cap \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < f(x) < \eta\}, \|\nabla(\varphi \circ f)(x)\| \geq 1,$$

Cette inégalité peut être interprétée de la façon suivante : la fonction  $\varphi$  vue comme une reparamétrisation de la fonction  $f$ , joue le rôle d'une fonction désingularisante dans le sens où elle transforme les régions à gradients arbitrairement petits en des régions où le gradient est borné loin de 0. L'inégalité de Łojasiewicz est un cas particulier de l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz dans laquelle on a choisi :  $\varphi(s) = s^{1-\theta}$ ,  $\theta \in [\frac{1}{2}, 1)$ .

Pour terminer cette courte présentation de l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz, citons quelques classes de fonctions vérifiant cette inégalité : typiquement il s'agit des fonctions analytiques [180, 54], des fonctions semi-algébriques ou plus généralement, définissables dans une structure o-minimale [53, 54, 27]. Il est intéressant de remarquer que les fonctions convexes ne vérifient pas nécessairement l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz [55]. Une fonction fortement convexe vérifiera l'inégalité de Łojasiewicz avec un exposant de Łojasiewicz  $\theta = \frac{1}{2}$ , tandis qu'une fonction convexe, non fortement convexe, devra vérifier en plus une certaine condition de croissance autour de ces points critiques pour satisfaire (2.18) [55, Théorème 30].

## Chapitre 3

# Convergence de quelques algorithmes sous hypothèse de Kurdyka-Łojasiewicz

Traditionnellement, la convergence globale des méthodes de descente avec recherche linéaire ou région de confiance ne garantit que la convergence de sous-suites des itérés vers un point critique, alors que la convergence de la suite elle-même n'est pas garantie. Des références classiques sur le sujet sont, par exemple, [46, Proposition 1.2.1] ou [203, Theorem 3.2] pour les méthodes de gradient avec recherche linéaire, ou encore [87, Théorème 6.4.6] pour les méthodes de régions de confiance. Ces résultats ont été obtenus pour les fonctions de classe  $C^{1,1}$  ou  $C^2$ . Récemment, P.A. Absil, R. Mahoney et B. Andrews [2] ont démontré la convergence des itérés générés par une méthode de descente, vers un point limite pour des fonctions analytiques en utilisant le fait que cette classe de fonctions satisfait l'inégalité de Łojasiewicz [180, 181].

Dans ce chapitre, nous généralisons ces résultats aux méthodes de descente pour des fonctions de classe  $C^1$  vérifiant l'inégalité de Kurdyka-Łojasiewicz, une généralisation de l'inégalité de Łojasiewicz. Cette étude a été motivée par de récents résultats de convergence obtenus dans d'autres contextes, cf travaux de H. Attouch, J. Bolte et al [54, 55, 27, 28] entre autres. Concernant les méthodes avec recherche linéaire, nous démontrons, de plus, comment mémoriser le pas entre deux itérés sérieux dans le cas d'une fonction de classe  $C^{1,1}$ . Cette possibilité est en particulier intéressante pour les problèmes de grande taille, pour lesquels le second ordre est inaccessible en pratique. Pour les méthodes par région de confiance, nous discutons et proposons de nouveaux tests d'acceptation du pas. Dans ce contexte, nous obtenons la convergence de l'algorithme de région de confiance sous des hypothèses encore plus faibles.

Enfin, nous nous intéressons à la convergence locale de la suite des projections alternées entre deux ensembles non vides, fermés, non convexes sous des hypothèses moins restrictives que celles de la littérature [177, 179, 39, 40], et sous lesquelles les ensembles peuvent s'intersecter tangentiellement. Nous ferons en particulier le lien entre la nature de l'intersection de deux ensembles fermés sous-analytiques et l'inégalité de Łojasiewicz.

### 3.1 Convergence des méthodes de descente pour des fonctions de classe $C^1$ vérifiant l'inégalité KL

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $x^0$  un point quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathcal{A}$  un algorithme de descente donné et  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  la suite des itérés générés par  $\mathcal{A}$  à partir de  $x^0$  :

$$\forall j \in \mathbb{N}, f(x^j) \geq f(x^{j+1}).$$

Le but de cette partie est de déterminer sous quelles hypothèses génériques, la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge vers un point critique de la fonction  $f$  à minimiser.

La démonstration de la convergence de la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  vers un point critique de  $f$  s'effectue généralement en deux étapes : on démontre tout d'abord que tout point d'accumulation est un point critique de  $f$ , puis que la suite des itérés  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge vers un point limite. La partie délicate est la seconde. Dans [210], nous démontrons la convergence des itérés générés par les algorithmes de descente avec recherche linéaire par rebroussement et les algorithmes de région de confiance, vers un unique point limite pour des fonctions objectif de classe  $C^1$  satisfaisant l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz [159]. La clé de ce résultat est le théorème suivant :

**Théorème 3.1** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  vérifiant l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz. Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  quelconque. Supposons que l'ensemble de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \leq f(x^0)\}$  est borné. Alors toute suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant la condition forte de descente suffisante :*

$$\forall j \in \mathbb{N}, f(x^j) - f(x^{j+1}) \geq \sigma \|\nabla f(x^j)\| \|x^{j+1} - x^j\|, \quad (3.1)$$

*est finie ou bien converge vers un point  $x^* \in \mathbb{R}^n$ .*

**Idée de la démonstration:** On se place dans le cas où la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  des itérés est infinie. Soit  $K$  l'ensemble des points d'accumulation de la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ . Les grandes étapes de la démonstration sont les suivantes : on montre que  $K$  est fermé borné et que la fonction objectif  $f$  est constante sur  $K$ . En appliquant ensuite l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz combinée avec la condition forte de descente (3.1), on obtient alors la convergence de la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  vers un point  $\bar{x} \in K$ .  $\square$

En pratique, pour chaque algorithme de descente considéré, il suffira donc de démontrer que la condition forte de décroissance (3.1) est automatiquement satisfaite, quitte éventuellement à modifier légèrement l'algorithme. Ainsi, sous l'hypothèse que  $f$  vérifie l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz, le Théorème 3.1 nous donne automatiquement la convergence de la suite des itérés. Il restera à démontrer que tout point d'accumulation est un point critique de  $f$ .

### 3.1.1 Algorithmes de descente avec recherche linéaire par rebroussement

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux méthodes de type gradient i.e. aux méthodes de descente dont les directions sont orientées selon le gradient :

**Définition 3.1** *Soit  $(d^j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de directions choisies par un algorithme de descente aux points  $x^j \in \mathbb{R}^n$ . La suite  $(d^j)_{j \in \mathbb{N}}$  est dite orientée selon le gradient s'il existe  $c \in (0, 1)$  tel que l'angle  $\phi_j = \angle(d^j, -\nabla f(x^j))$  vérifie :*

$$\forall j \in \mathbb{N}, 0 < c \leq \cos(\phi_j). \quad (3.2)$$

Autrement dit, un algorithme est de type gradient si les directions de descente choisies à chaque itération forment un angle strictement aigu avec la direction de plus forte descente.

L'Algorithme 3 est un algorithme classique de descente de type gradient avec un pas de Armijo calculé par des techniques de rebroussement (*backtracking*). Les démonstrations standard de convergence pour ce type d'algorithme supposent en général que la fonction objectif  $f$  est de classe  $C^{1,1}$  i.e. de classe  $C^1$  et à gradient Lipschitz, et ne donnent que la convergence de sous-suites vers des points critiques de  $f$  [46, Proposition 1.2.4]. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la convergence de la suite des itérés générés par l'Algorithme 3 pour des fonctions de classe  $C^1$  uniquement. Comme expliqué en introduction, nous avons procédé en deux temps : tout d'abord, nous avons démontré qu'en combinant le test d'acceptation  $\rho_{k_j} \geq \gamma$  du point  $x^{j+1} = x^j + t_{k_j} d^j$  avec la condition d'angle (3.2) appliquée à  $d^j$ , la condition forte de descente (3.1) est automatiquement vérifiée :

$$\forall j \in \mathbb{N}, f(x^j) - f(x^{j+1}) \geq \sigma \|\nabla f(x^j)\| \|x^{j+1} - x^j\|.$$

---

**Algorithme 3** Algorithme classique de descente avec recherche linéaire par rebroussement.

---

**Paramètres:**  $0 < \gamma < 1$ ,  $0 < \underline{\theta} < \bar{\theta} < 1$ ,  $0 < c < 1$  et  $\tau > 0$ .

- 1: **Initialisation.** Soit  $x^1$  un point initial arbitrairement choisi et  $j = 1$  le compteur de boucle.
  - 2: **Tant que**  $\nabla f(x^j) \neq 0$  **faire**
  - 3:     Calculer une direction de descente  $d^j$  orientée selon le gradient avec  $\cos \phi_j \geq c$ .
  - 4:     **Initialisation de la recherche linéaire.** Soit  $k = 1$ . Choisir  $t_1$  tel que :  $t_1 \geq \tau \frac{\|\nabla f(x^j)\|}{\|d^j\|}$ ,  
       et calculer :  $\rho_1 = \frac{f(x^j) - f(x^j + t_1 d^j)}{-t_1 \nabla f(x^j)^\top d^j}$
  - 5:     **Tant que**  $\rho_k < \gamma$  **faire**
  - 6:         Réduire la longueur du pas de sorte que :  $t_{k+1} \in [\underline{\theta} t_k, \bar{\theta} t_k]$  ;
  - 7:          $k \leftarrow k + 1$
  - 8:         Calculer :  

$$\rho_k = \frac{f(x^j) - f(x^j + t_k d^j)}{-t_k \nabla f(x^j)^\top d^j}$$
  - 9:     **fin Tant que**
  - 10:      $x^{j+1} = x^j + t_k d^j$  ;  $j \leftarrow j + 1$ .
  - 11: **fin Tant que**
  - 12: **Retourner**  $x^j$ .
- 

Le Théorème 3.1 nous assure alors la convergence de la suite des itérés vers un point limite  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Nous avons ensuite démontré que tout point d'accumulation est un point critique de  $f$ , généralisant ainsi les résultats classiques de convergence des algorithmes de type gradient avec recherche linéaire (Armijo, Goldstein, plus profonde descente) [46, Propositions 1.2.1 et 1.2.2]) aux algorithmes avec recherche linéaire par rebroussement. Dans cette partie de la démonstration, l'hypothèse clé est le fait que l'angle entre la direction de descente et la direction opposée au gradient reste borné loin de 0 au cours des itérations. En résumé, nous avons donc le résultat suivant :

**Théorème 3.2** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  vérifiant l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz et  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^1)\}$  supposé borné. Alors la suite des itérés  $x^j$  générés par l'Algorithme 3 est soit finie et se termine avec  $\nabla f(x^j) = 0$  pour un certain  $j \in \mathbb{N}$ , soit converge vers un point critique de  $f$ .*

Dans un second temps, nous avons réfléchi à une nouvelle stratégie d'initialisation de la recherche linéaire à chaque itération de l'Algorithme 3. En effet, à chaque itération  $j$  de l'algorithme, la recherche linéaire est initialisée par un pas vérifiant :  $t_1 \geq \tau \frac{\|\nabla f(x^j)\|}{\|d^j\|}$ , choisi indépendamment de ce qui s'est passé aux itérations précédentes. Dans les algorithmes de type quasi-Newton, il est par exemple classique d'initialiser la recherche linéaire avec le pas  $t = 1$ . Pour des méthodes de premier ordre, il peut être intéressant de revoir cette stratégie, et d'essayer de tirer profit des itérations précédentes afin d'éviter les rebroussements inutiles.

Plus précisément, les preuves standard de convergence des algorithmes avec recherche linéaire par rebroussement s'appliquent à des fonctions de classe  $C^{1,1}$ . La constante de Lipschitz du gradient  $\nabla f(x)$  permet une estimation précise du pas de Armijo :

$$t_\gamma = \sup\{t > 0 : f(x + td) - f(x) < \gamma t \nabla f(x)^\top d\}.$$

Tant que la recherche linéaire est initialisée par des pas grands :  $t > t_\gamma$ , le rebroussement pour calculer  $t_{k+1} \in [\underline{\theta} t_k, \bar{\theta} t_k]$  conduit à un pas acceptable  $t^*$  vérifiant :  $\underline{\theta} t_\gamma \leq t^* \leq t_\gamma$ . Ce mécanisme garantit que le pas accepté n'est pas trop petit et remplace les conditions habituelles contre les pas trop petits. Mémoriser le dernier pas accepté ne permet plus de se prémunir contre les pas trop petits : il n'y a donc plus de garantie de trouver un pas dans l'intervalle  $[\underline{\theta} t_\gamma, t_\gamma]$ . Pour remédier à cette situation, nous avons proposé dans [210, Section 4] une variante de l'Algorithme 3 avec mémoire du pas (cf Algorithme 4 décrit ci-après).

---

**Algorithme 4** Algorithme de descente avec recherche linéaire par rebroussement et mémoire du pas.

---

**Paramètres:**  $0 < \gamma < \Gamma < 1$ ,  $0 < c < 1$ ,  $0 < \underline{\theta} < \bar{\theta} < 1$ ,  $\Theta > 1$ .

1: **Initialisation.** Soit  $x^1$  un point initial arbitrairement choisi,  $\tau_1 = 1$  le pas mémoire initial et  $j = 1$  le compteur de boucle.

2: **Tant que**  $\nabla f(x^j) \neq 0$  **faire**

3: Calculer une direction de descente  $d^j$  avec  $\|d^j\| = \|\nabla f(x^j)\|$  et  $\cos \phi_j \geq c$ .

4: **Initialisation de la recherche linéaire.** Soit  $k = 1$ . Poser :  $t_1 = \tau_j$  (pas mémoire courant)

et calculer :  $\rho_1 = \frac{f(x^j) - f(x^j + t_1 d^j)}{-t_1 \nabla f(x^j)^\top d^j}$

5: **Tant que**  $\rho_k < \gamma$  **faire**

6: Réduire la longueur du pas en choisissant :  $t_{k+1} \in [\underline{\theta} t_k, \bar{\theta} t_k]$ ;  $k \leftarrow k + 1$ ;

7: Calculer :

$$\rho_k = \frac{f(x^j) - f(x^j + t_k d^j)}{-t_k \nabla f(x^j)^\top d^j}$$

8: **fin Tant que**

9:  $x^{j+1} = x^j + t_k d^j$ ;

10: **Mise à jour du pas mémoire.** Définir un nouveau pas mémoire  $\tau_{j+1}$  de la façon suivante :

$$\tau_{j+1} = \begin{cases} t_{k_j} & \text{si } \gamma \leq \rho_{k_j} < \Gamma, \\ \Theta t_{k_j} & \text{si } \rho_{k_j} \geq \Gamma. \end{cases}$$

où  $t_{k_j}$  est le dernier pas accepté à l'étape 6. Faire :  $j \leftarrow j + 1$ .

11: **fin Tant que**

12: **Retourner**  $x^j$ .

---

Nous obtenons alors un résultat de convergence de l'Algorithme 4 pour des fonctions de classe  $C^{1,1}$  vérifiant l'inégalité (KL) :

**Théorème 3.3** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{1,1}$  sur  $\Omega$  vérifiant l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz. On suppose que l'ensemble de niveau  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^1)\}$  est borné. Alors toute suite de points  $x^j$  générée par l'Algorithme 4 est finie et se termine avec  $\nabla f(x^j) = 0$  pour un certain  $j \in \mathbb{N}$ , soit elle converge vers un point critique de  $f$ .

La difficulté de se prémunir contre les pas trop petits se retrouve dans la démonstration du Théorème 3.3 quand il s'agit de démontrer que tout point d'accumulation est critique [210, démonstration du Théorème 2]. Nous contournons cette difficulté grâce aux estimations fournies par la constante de Lipschitz du gradient.

En pratique, il n'y a aucune garantie que le pas mémoire  $\tau_j$  ne devienne pas arbitrairement petit malgré la possibilité de ré-augmenter si de bons pas sont faits (étape 5 de l'Algorithme 4). Afin de tester l'algorithme 4 sur ce point, nous nous sommes intéressés aux algorithmes de type Newton pour lesquels la direction de descente est de la forme :  $d^j = -H_j^{-1} \nabla f(x^j)$ , où  $H_j$  est la Hessienne de  $f$  au point  $x^j$  ou une approximation calculée par des méthodes de sécante. En supposant que les directions  $d^j$  sont orientées selon le gradient, nous avons démontré qu'il est possible de faire suffisamment de bons pas ( $\rho_k \geq \Gamma$ ) pour que le pas mémoire atteigne  $t = 1$  et conserve ainsi la possibilité d'effectuer un pas de Newton et ainsi de bénéficier de la rapidité (quadratique) de convergence de cet algorithme [210, Theorem 3].

### 3.1.2 Algorithmes de descente de type région de confiance

Dans la continuité de l'étude des méthodes de recherche linéaire avec mémoire du pas, nous nous sommes également intéressés aux méthodes de région de confiance, telles qu'elles sont présentées dans le livre de A. Conn, N. Gould, et P. Toint [87] qui fait référence sur le sujet. L'algorithme classique de région de confiance est rappelé ci-après.

---

**Algorithme 5** Algorithme de région de confiance [87].

---

**Paramètres:**  $0 < \gamma < \Gamma < 1$ ,  $0 < \underline{\theta} < \bar{\theta} < 1$ ,  $\tau > 0$ .

1: **Initialisation.**  $x^1$  un point initial et  $\Delta_1^\sharp > 0$  le rayon initial de la région de confiance;  $j = 1$ .

2: **Tant que**  $\nabla f(x^j) \neq 0$  **faire**

3: Définir un modèle  $m(\cdot, x^j)$  de  $f$  dans la région de confiance  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^j\| \leq \Delta_j^\sharp\}$  :

$$m(y, x^j) = f(x^j) + \nabla f(x^j)^\top (y - x^j) + \frac{1}{2}(y - x^j)^\top B_j (y - x^j),$$

où  $B_j$  est une approximation ou un substitut de la matrice Hessienne de  $f$  au point  $x^j$ .

4: **Initialisation de la boucle intérieure.** Soit  $k = 1$  le compteur de boucle et  $\Delta_1 = \Delta_j^\sharp$ .

5: **Programme tangent.** A chaque itération  $k$  de la boucle intérieure, calculer  $y^{k+1}$  solution approchée du problème :  $\min_{y \in \mathbb{R}^n} m(y, x^j)$  sous  $\|y - x^j\| \leq \Delta_k$ , au sens où  $y^{k+1}$  doit seulement vérifier une condition de décroissance suffisante :

$$f(x^j) - m(y^{k+1}, x^j) \geq c \|\nabla f(x^j)\| \min \left( \Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^j)\|}{1 + \|B_j\|} \right).$$

6: **Test d'acceptation.** Tester si :

$$\rho_k = \frac{f(x^j) - f(y^{k+1})}{f(x^j) - m(y^{k+1}, x^j)} \geq \gamma.$$

7: **Si**  $\rho_k < \gamma$  **alors**

8:  $\Delta_{k+1} \in [\underline{\theta}\Delta_k, \bar{\theta}\Delta_k]$ ;  $k \leftarrow k + 1$ ; Retourner à l'étape 5;

9: **else**

10:  $x^{j+1} = y^{k+1}$  et :  $\Delta_{j+1}^\sharp \in \begin{cases} [\Delta_k, +\infty[ & \text{si } \rho_k > \Gamma \text{ et } \|y^{k+1} - x^j\| = \Delta_k, \\ [\bar{\theta}\Delta_k, \Delta_k] & \text{sinon.} \end{cases}$

11: **fin Si**

12: **fin Tant que**

---

Revenons sur le programme tangent : au lieu de chercher à minimiser le modèle de région de confiance, le pas  $y^{k+1}$  doit seulement satisfaire une condition de décroissance suffisante :

$$f(x^j) - m(y^{k+1}, x^j) \geq c \left[ f(x^j) - m(x_C^{j+1}, x^j) \right] \quad (3.3)$$

où  $x_C^{j+1}$  est le point de Cauchy défini comme la solution du problème unidimensionnel :

$$\min_{0 \leq t \leq \Delta_k} m \left( x^j - t \frac{\nabla f(x^j)}{\|\nabla f(x^j)\|}, x^j \right). \quad (3.4)$$

Nous nous inscrivons, ici, dans la continuité des travaux de A. Conn, N. Gould, et P. Toint [87] qui détermine un pas  $y^{k+1}$  vérifiant une condition un peu plus faible :

$$f(x^j) - m(y^{k+1}, x^j) \geq c \|\nabla f(x^j)\| \min \left( \Delta_k, \frac{\|\nabla f(x^j)\|}{1 + \|B_j\|} \right). \quad (3.5)$$

On vérifie que la condition (3.3) implique la condition faible (3.5) de décroissance suffisante, et que la solution exacte du programme tangent de l'étape 5 vérifie également (3.5).

La démonstration de la convergence globale de l'Algorithme 5 est détaillée dans [87] et [203, Théorème 4.8], pour des fonctions de classe  $C^1$ , à condition que les matrices  $B_j$  soient uniformément bornées. D'après le Théorème 3.1, nous avons donc sans effort le résultat suivant :

**Théorème 3.4** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  vérifiant l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz. On suppose que l'ensemble de niveau  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^1)\}$  est borné. Si la

suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  des itérés générés par l'Algorithme 5 vérifie la condition forte de descente (3.1) et si les matrices Hessiennes  $B_j$  sont uniformément bornées, alors soit la suite  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  est finie et se termine avec  $\nabla f(x^j) = 0$ , soit elle converge vers un point critique de  $f$ .

L'enjeu a donc été de proposer des critères pratiques garantissant que la suite des itérés vérifie la condition forte de descente (3.1). Dans l'esprit de ce qui a été fait dans [2], nous avons proposé les modifications suivantes de l'Algorithme 5 :

**Cas où  $y^{k+1}$  vérifie (3.3).** Dans ce cas, nous proposons la modification suivante du programme tangent à l'étape 5 :  $y^{k+1}$  est une solution approchée du programme tangent si  $y^{k+1}$  vérifie la condition (3.3) de décroissance suffisante couplée avec la condition suivante sur la courbure du modèle en  $y^{k+1}$  :

$$\omega(y^{k+1}, x^j) \geq \mu \omega(x_C^{j+1}, x^j) \text{ si } \|x_C^{j+1} - x^j\| \leq \Delta_k \quad (3.6)$$

**Cas où  $y^{k+1}$  vérifie (3.5).** Dans le cas où nous souhaitons conserver l'étape 5 de l'Algorithme 5 avec la condition faible de décroissance suffisante (3.5), deux cas se présentent :

(a) Les matrices  $B_j$  sont définies positives et il existe  $\kappa \geq 1$  tel que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{cond}_2(B_j) \stackrel{\text{def}}{=} \|B_j\|_2 \|B_j^{-1}\| \leq \kappa,$$

où  $\text{cond}_2(B_j)$  est le conditionnement de la matrice  $B_j$  pour la norme 2.

(b) Les matrices  $B_j$  ne sont pas définies positives. On modifie le test d'acceptation (étape 6) de l'Algorithme 5 de la façon suivante : soit  $0 < \mu < 1$ . Le pas  $y^{k+1}$  est accepté si :

$$\rho_k = \frac{f(x^j) - f(y^{k+1})}{f(x^j) - m(y^{k+1}, x^j)} \geq \gamma \quad \text{et} \quad \|\nabla f(x^j)\| \geq \mu \|B_j\| \|x^{j+1} - x^j\|. \quad (3.7)$$

Pour chaque modification du programme tangent et/ou du test d'acceptation, on vérifie que la boucle intérieure trouve un itéré sérieux en un nombre fini d'itérations, et que la condition forte de descente (3.1) est automatiquement satisfaite par les itérés générés par l'Algorithme 5 modifié. D'après le Théorème 3.4, ceci entraîne la convergence des itérés vers un point critique de  $f$ .

## 3.2 Convergence locale de la méthode des projections alternées

La méthode des projections alternées est un outil classique pour la résolution de problèmes de faisabilité : Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides, fermés de  $\mathbb{R}^n$ . Trouver un point  $x^*$  dans l'intersection  $A \cap B$ . Etant donné un point initial :  $b_0 \in B$ , l'algorithme des projections alternées génère deux suites de points  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $k \geq 1$ ,

$$a_k \in P_A(b_{k-1}), \quad b_k \in P_B(a_k),$$

où  $P_A(x) = \{a \in A; \|x - a\| = d_A(x)\}$  désigne la projection du point  $x$  sur  $A$ , et  $d_A(x) = \min\{\|x - a\|; a \in A\}$  est la distance de  $x$  à l'ensemble  $A$ .

$$b_0 \xrightarrow{P_A} a_1 \xrightarrow{P_B} b_1 \xrightarrow{P_A} a_2 \xrightarrow{P_B} b_2 \xrightarrow{P_A} \dots$$

### 3.2.1 Etat de l'art et contributions

La méthode des projections alternées a été inventée par H. Schwarz en 1869 [251] pour résoudre le problème classique de Dirichlet pour des fonctions harmoniques, puis reprise et vulgarisée par les travaux de J. von Neumann [273]. Cette méthode est devenue très populaire du fait de sa simplicité, de ses bonnes propriétés de convergence en pratique, et de ses nombreuses applications [95, 37]. Citons, en particulier, des applications en synthèse de lois de commande par des approches LMI [123] et en recouvrement de phase [120, 38, 107].



Les premiers résultats de convergence datent de 1933 : dans [273], J. von Neumann a démontré que la suite des projections alternées converge en norme vers  $P_{A \cap B}(b_0)$  lorsque  $A$  et  $B$  sont des sous-espaces affines d'un espace de Hilbert. L'algorithme des projections alternées de von Neumann s'étend naturellement au cas de deux ensembles non vides convexes fermés (cf Figure 3.1).

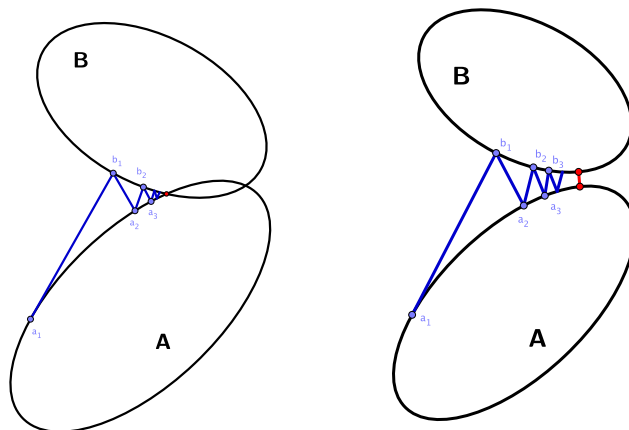


FIGURE 3.1 – Illustration de la méthode des projections alternées dans le cas convexe.

Dans  $\mathbb{R}^n$ , un résultat classique est le suivant [84] : si  $A \cap B \neq \emptyset$ , la suite des projections alternées converge vers un point de l'intersection  $A \cap B$ . La convergence est linéaire pourvu que :  $A \cap \text{int}(B) \neq \emptyset$ , ou plus généralement :  $\text{ri}(A) \cap \text{ri}(B) \neq \emptyset$  [124, 35]. Le cas convexe a été essentiellement résolu en 1995. Le lecteur intéressé trouvera un excellent article de revue dans [36].

Dans le cas non convexe, les difficultés viennent en particulier du fait que la convergence, si elle a lieu, est *a priori* locale, et que la projection sur un ensemble non convexe n'est pas nécessairement uni-valuée (cf Figure 3.2). Sans hypothèse supplémentaire, un résultat classique est le suivant : si

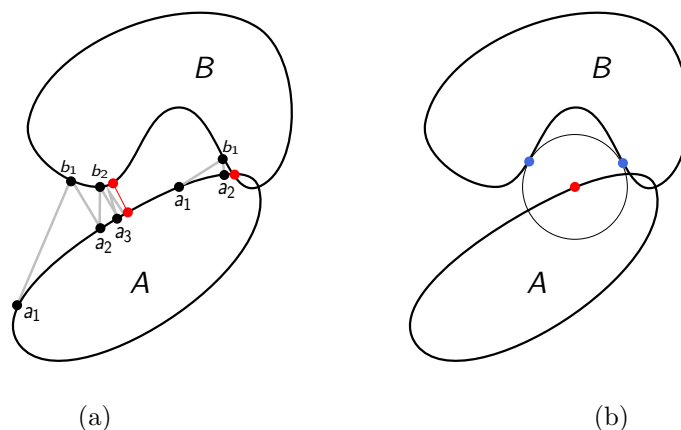


FIGURE 3.2 – Illustration de la méthode des projections alternées dans le cas où les ensembles  $A$  et  $B$  sont fermés et non convexes : (a) La convergence est *a priori* locale (b) La projection sur un ensemble  $B$  non convexe n'est pas nécessairement unique.

la suite des projections alternées  $a_k, b_k$  est bornée et vérifie :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|a_k - b_k\| = 0$  alors tout point d'accumulation est dans l'intersection  $A \cap B$ . La question fondamentale est de savoir sous quelles conditions la suite des projections alternées converge vers un seul point limite  $x^* \in A \cap B$ .

Dans une des toutes premières contributions dans le cas non convexe, P.L. Combettes et H.J. Trussell ont montré que l'ensemble des points d'accumulation d'une suite bornée de projections alternées vérifiant  $\|a_k - b_k\| \rightarrow 0$ , est soit un singleton, soit un continuum compact non trivial [86, Théorème 4.2]. Très récemment, H. Bauschke et D. Noll [41] ont démontré que le cas d'un continuum non trivial peut effectivement se produire (cf Figure 3.3). Cela montre qu'en l'absence de convexité, la suite des projections alternées peut ne pas converger.

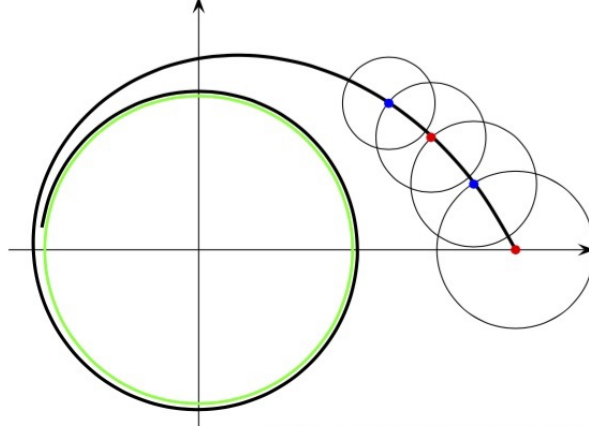


FIGURE 3.3 – Construction d'une suite de projections alternées dont l'ensemble des points d'accumulation est un continuum compact non trivial [41, Section 3]. Soient  $A = \{\text{Points rouges}\} \cup C(0,1)$  et  $B = \{\text{Points bleus}\} \cup C(0,1)$ . Les points rouges et bleus sont sur la spirale d'équation :  $z(t) = ((1 + e^t) \cos(t), (1 + e^{-t}) \sin(t))$ . L'ensemble des points d'accumulation de la suite des projections alternées est le cercle  $C(0,1)$ .

En 2008, A. Lewis et J. Malick [177] ont démontré que la suite des projections alternées converge linéairement localement si  $A$  et  $B$  sont des variétés de classe  $C^2$  s'intersectant transversalement. En 2009, A. Lewis, R. Luke et J. Malick étendent ce résultat à deux ensembles  $A$  et  $B$  s'intersectant non tangentielllement au sens de la régularité linéaire, et dont l'un des deux ensembles est super-régulier [179]. En 2013, H. Bauschke et al. ont poussé plus loin le cas des intersections non tangentiellles, et démontré la convergence linéaire sous des hypothèses de régularité plus faible et de transversalité [39, 40].

Dans [211], nous démontrons la convergence locale de la suite des projections alternées entre deux ensembles non vides, fermés, non convexes, sous des hypothèses moins restrictives, permettant aux ensembles  $A$  et  $B$  de s'intersecter tangentielllement. Pour cela, nous introduisons un nouveau concept géométrique, l'*intersection séparable* qui, combiné à une hypothèse de *régularité de Hölder* moins forte que la prox-régularité, donne la convergence locale de la suite des projections alternées. Ce concept d'intersection séparable a des retombées importantes dans les applications, car il englobe une variété de cas où les ensembles  $A$  et  $B$  s'intersectent tangentielllement. En particulier, à l'aide de l'inégalité de Lojasiewicz, nous démontrons que deux ensembles fermés sous-analytiques s'intersectent toujours séparablement. Ceci conduit au résultat central [211, Corollaire 8] :

**Théorème 3.5 (Convergence locale pour des ensembles fermés sous-analytiques).** *Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles fermés sous-analytiques. Supposons que  $B$  est Hölder régulier au point  $x^* \in A \cap B$  par rapport à  $A$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  tel que toute suite de projections alternées  $a_k, b_k$  qui entre dans  $V$ , converge vers un certain  $b^* \in A \cap B$  avec le taux  $\|b_k - b^*\| = \mathcal{O}(k^{-\rho})$  pour un certain  $\rho \in (0, \infty)$ .*

Comme ces hypothèses sont très souvent satisfaites en pratique, nous obtenons une explication théorique au fait qu'en pratique, même en l'absence de convexité, l'algorithme des projections

alternées a de bonnes propriétés de convergence au voisinage  $A \cap B$ . En application, nous obtenons également la première démonstration de la convergence locale de l'algorithme classique de Gerchberg-Saxton [120] en recouvrement de phase.

### 3.2.2 Ingrédients pour la convergence, lien avec l'inégalité de Łojasiewicz

Dans cette partie, nous présentons les deux concepts qui nous ont permis d'obtenir la convergence locale de l'algorithme des projections alternées : l'intersection séparable ou condition d'angle, et la notion de régularité de Hölder.

**Définition 3.2 (Intersection séparable/Condition d'angle)**  $B$  intersecte  $A$  séparablement au point  $x^* \in A \cap B$  avec un exposant  $\omega \in [0, 2)$  et une constante  $\gamma > 0$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $x^*$  tel que pour toute séquence  $b \rightarrow a^+ \rightarrow b^+$  de projections alternées dans  $U$ , on a :

$$\langle b - a^+, b^+ - a^+ \rangle \leq (1 - \gamma \|b^+ - a^+\|^\omega) \|b - a^+\| \|b^+ - a^+\| \quad (3.8)$$

En introduisant l'angle  $\alpha = \angle(b - a^+, b^+ - a^+)$ , la condition (3.8) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\|a^+ - b^+\|^\omega} \geq \gamma \quad (3.9)$$

appelée *condition d'angle* pour la séquence  $b \rightarrow a^+ \rightarrow b^+$  de projections alternées et illustrée par la Figure 3.4. L'interprétation est la suivante : l'angle  $\alpha$  entre deux projections successives

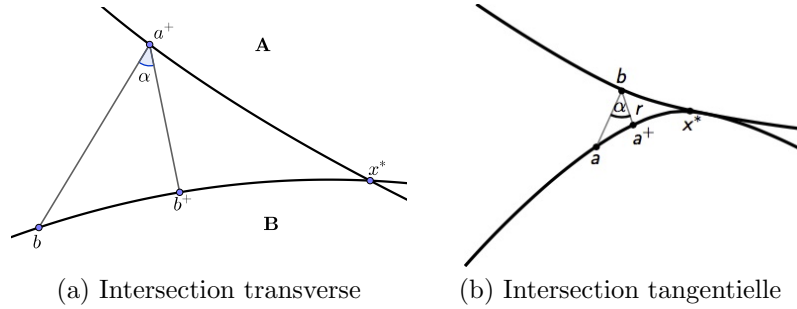


FIGURE 3.4 – Illustration de la condition d'angle entre les ensembles  $A$  et  $B$

$b \rightarrow a^+ \rightarrow b^+$  peut tendre vers 0 quand les itérés se rapprochent du point  $x^*$ , mais  $\alpha$  ne peut pas diminuer trop vite. On obtient également une nouvelle définition de la transversalité pour  $\omega = 0$  :

$$\cos(\alpha) \leq 1 - \gamma. \quad (3.10)$$

Autrement dit, l'angle  $\alpha$  est borné loin de 0 même si la suite des itérés vérifie :  $\|a^+ - b^+\| \rightarrow 0$ . Nous dirons alors que les ensembles  $A$  et  $B$  s'intersectent *transversalement* ou *avec un angle*. Dans ce cas, on s'attend à ce que l'algorithme de projections alternées se comporte bien et converge linéairement. Le cas délicat est celui de l'intersection tangentielle entre les deux ensembles, pour lequel la convergence peut être très lente, voire même échouer.

Notre concept de  $\omega$ -séparabilité n'excluant pas certains types d'intersections tangentielles, a apporté un regard nouveau sur les intersections tangentielles et, de ce fait, sur les résultats de convergence que l'on peut attendre. Dans l'article [211], nous avons montré que l'hypothèse de 0-séparabilité (qui implique l' $\omega$ -séparabilité pour tout  $\omega \in (0, 2)$ ) est plus faible que les hypothèses de transversalité rencontrées dans la littérature : la transversalité pour l'intersection de deux variétés de classe  $C^2$  de A. Lewis et J. Malick [177] en 2008, la régularité linéaire au sens de A. Kruger [158, 179] en 2009, la condition de qualification des contraintes de H. Bauschke *et al.* [39, Definition 6.6] en 2013 et la transversalité intrinsèque proposée dans [105] en 2015.

L'un des résultats clés pour l'étude de la convergence de l'algorithme des projections alternées est le suivant :

**Théorème 3.6** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles sous-analytiques fermés. Alors  $A$  et  $B$  s'intersectent séparablement.

**Idée de la démonstration:** Les grandes idées de la démonstration sont les suivantes : soit  $i_A$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ . On introduit la fonction :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty \\ x \mapsto i_A(x) + \frac{1}{2}d_B^2(x).$$

On vérifie que  $f$  est bien sous-analytique et vérifie l'inégalité de Lojasiewicz avec un exposant  $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$  au point  $x^* \in A \cap B$ . On en déduit que l'ensemble  $B$  intersecte  $\omega$ -séparablement l'ensemble  $A$  avec  $\omega = 4\theta - 2 \in (0, 2)$  et une constante  $\gamma' = 2^{-2\theta-1}\gamma^2$ .  $\square$

Le second ingrédient pour avoir la convergence de la suite des projections alternées est la régularité de Hölder d'un des deux ensembles par rapport à l'autre :

**Définition 3.3 (Régularité de Hölder)** Soit  $\sigma \in [0, 1)$ . L'ensemble  $B$  est  $\sigma$ -Hölder régulier par rapport à  $A$  au point  $b^* \in A \cap B$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $b^*$  et une constante  $c > 0$  tels que pour tout  $a^+ \in A \cap U$  et tout  $b^+ \in P_B(a^+) \cap U$ , on a :

$$\mathcal{B}(a^+, (1+c)r) \cap \{b \in P_A(a^+)^{-1} : \langle a^+ - b^+, b - b^+ \rangle > \sqrt{cr^{\sigma+1}} \|b - b^+\|\} \cap B = \emptyset, \quad (3.11)$$

avec  $r = \|a^+ - b^+\|$ . On dit que  $B$  est Hölder régulier par rapport à  $A$  si  $B$  est  $\sigma$ -Hölder régulier par rapport à  $A$  pour tout  $\sigma \in [0, 1)$ .

En introduisant l'angle  $\beta = \angle(a^+ - b^+, b - b^+)$ , la condition (3.11) se réécrit de la façon suivante :

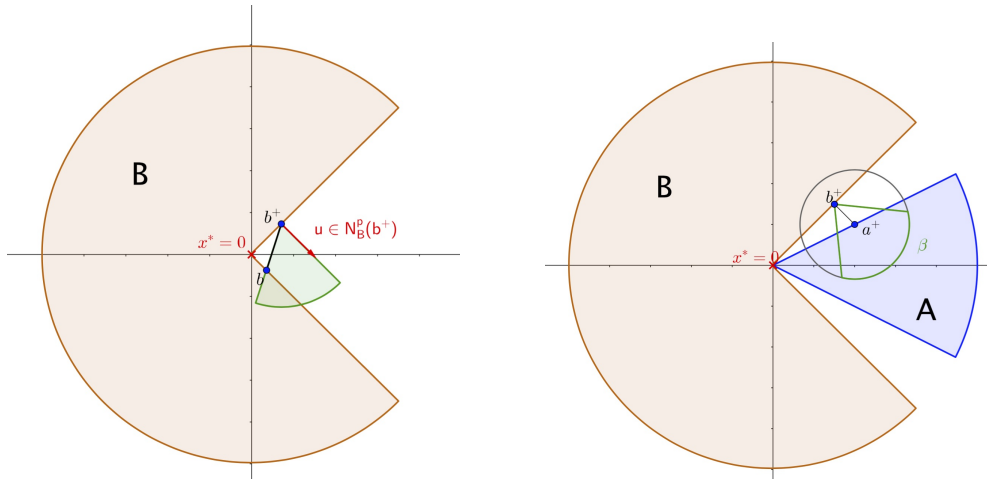
$$\mathcal{B}(a^+, (1+c)r) \cap \{b \in P_A(a^+)^{-1} : \cos \beta > \sqrt{cr^\sigma}\} \cap B = \emptyset. \quad (3.12)$$

Géométriquement, cela signifie que le cône circulaire droit d'axe  $a^+ - b^+$  et d'angle  $\beta = \arccos \sqrt{cr^\sigma}$  tronqué par la boule  $\mathcal{B}(a^+, (1+c)r)$  et le cône normal proximal  $\widehat{N}_A^B(a^+)$  restreint à  $B$  ne contient aucun point de  $B$  autre que  $b^+$  (cf Figure 3.5).

Nous avons démontré, dans [211], que l'on a la classification suivante vis-à-vis des régularités les plus courantes :

$$\begin{array}{ccccc} B \text{ convexe} & \Rightarrow & B \text{ prox-régulier [237]} & \Rightarrow & B \text{ super-régulier [179]} \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & B \text{ } \sigma\text{-Hölder-régulier par} & \Rightarrow & B \text{ 0-Hölder-régulier} \\ & & \text{rapport à } A \text{ pour tout } \sigma \in [0, 1) & & \text{par rapport à } A \end{array}$$

A noter qu'il existe des ensembles Hölder-réguliers qui ne sont pas super-réguliers (cf Figure 3.6).



Le packman n'est pas super-régulier au point  $x^* = 0$ .

Le packman est Hölder-régulier par rapport à  $A$  au point  $x^* = 0$  pour tout  $c > 1$  et  $\sigma \in [0, 1)$ .

FIGURE 3.6 – Exemple d'ensemble Hölder-régulier mais pas super-régulier.

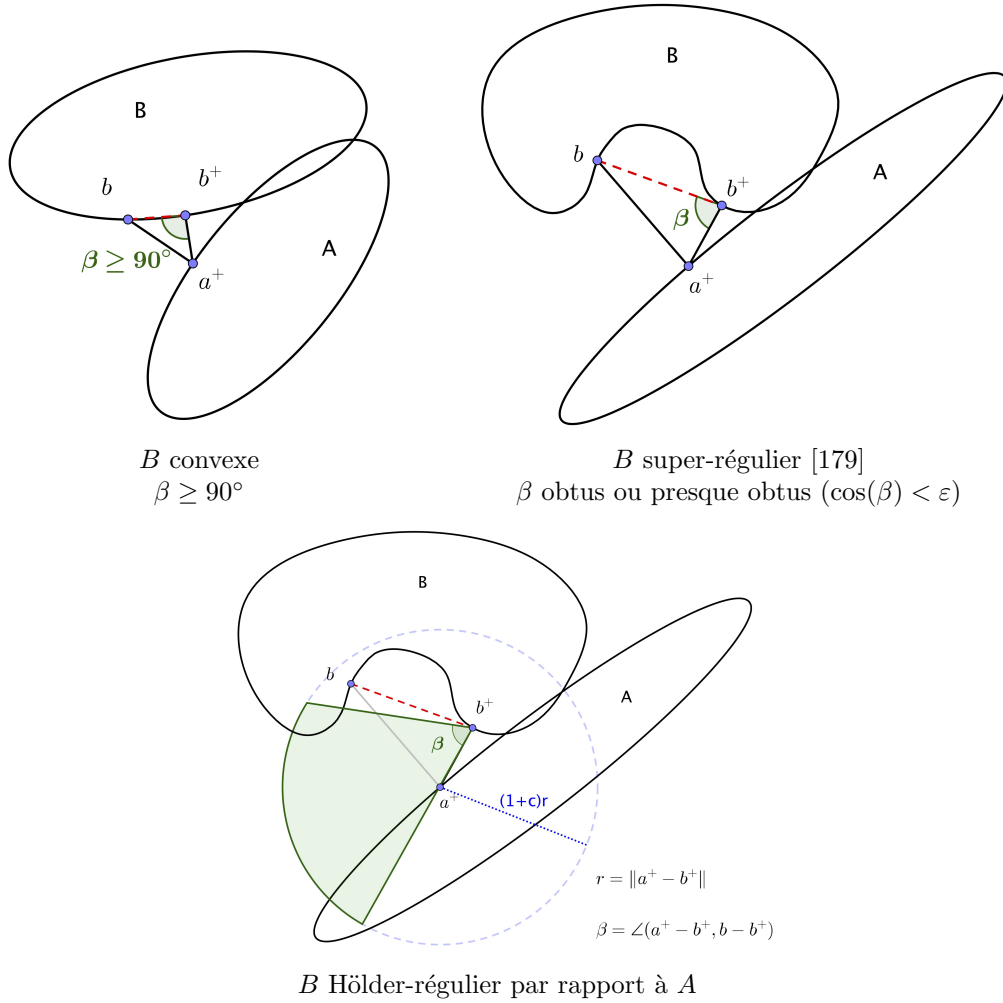


FIGURE 3.5 – Illustration de la définition de la régularité de Hölder. Le point  $a^+$  n'est la projection d'aucun point appartenant à la fois à la portion de cône vert et à  $B$

Ces deux ingrédients nous permettent d'obtenir notre principal résultat : l'algorithme des projections alternées converge localement pour deux ensembles qui s'intersectent séparablement et dont l'un des deux est Hölder-régulier par rapport à l'autre. Plus précisément :

**Théorème 3.7 (Convergence locale)** *Supposons que  $B$  intersecte  $A$  séparablement en  $x^* \in A \cap B$  avec un exposant  $\omega \in [0, 2)$  et une constante  $\gamma > 0$ . On suppose également que  $B$  est  $\omega/2$ -Hölder régulier en  $x^*$  par rapport à  $A$  et de constante  $c < \frac{\gamma}{2}$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  tel que toute suite de projections alternées entre  $A$  et  $B$  qui entre dans  $V$ , converge vers un point  $b^*$  de l'intersection  $A \cap B$ .*

De plus :

- Si  $\omega \in (0, 2)$  alors :  $\|b_k - b^*\| = \mathcal{O}\left(k^{-\frac{2-\omega}{2\omega}}\right)$  et  $\|a_k - b^*\| = \mathcal{O}\left(k^{-\frac{2-\omega}{2\omega}}\right)$ .
- Si  $\omega = 0$  alors la convergence est  $R$ -linéaire.

Grâce au Théorème 3.7, on retrouve les résultats connus de la littérature tels que [40, Théorème 3.14], [179] ou [105]. Une conséquence importante de ce théorème est le Théorème 3.5 pour des ensembles sous-analytiques, expliquant le fait qu'en pratique, même en l'absence de convexité, l'algorithme des projections alternées se comporte bien au voisinage de l'intersection  $A \cap B$ .

### 3.2.3 Convergence de l'algorithme de Gerchberg-Saxton

Concluons ce chapitre par une application en recouvrement de phase. Le problème de recouvrement de phase [120, 38, 107] consiste à estimer un signal inconnu  $x \in \mathbb{C}^N$  dont on connaît l'amplitude de Fourier  $|\hat{x}(\omega)| = a(\omega)$ ,  $\omega = 0, \dots, N-1$ . Identifier  $x$  revient à retrouver la phase  $\hat{x}(\omega)/|\hat{x}(\omega)|$  dans le domaine des fréquences.

Formellement, étant donnée une fonction  $a(\cdot) : \{0, \dots, N-1\} \rightarrow [0, \infty)$ , on définit l'ensemble :

$$B = \{x \in \mathbb{C}^N : |\hat{x}(\omega)| = a(\omega) \text{ for all } \omega = 0, \dots, N-1\}. \quad (3.13)$$

Déterminer un élément dans  $B$  étant un problème sous-déterminé, on ajoute de l'information sous la forme :  $x \in A$ , où  $A$  est un fermé de  $\mathbb{C}^N$ . Le problème consiste alors à trouver un point  $x \in A \cap B$ .

L'algorithme de Gerchberg-Saxton de réduction d'erreur [120] calcule une solution du problème de recouvrement de phase de la façon suivante : soit  $x \in \mathbb{C}^N$  l'itéré courant.

1. Calculer  $\hat{x}$  et corriger son amplitude de Fourier par :

$$\hat{y}(\omega) = a(\omega) \begin{cases} \frac{\hat{x}(\omega)}{|\hat{x}(\omega)|} & \text{si } \hat{x}(\omega) \neq 0 \\ 1 & \text{si } \hat{x}(\omega) = 0. \end{cases}$$

2. Calculer la transformée de Fourier discrète inverse  $y$  de  $\hat{y}$ .
3. Construire un nouvel itéré  $x^+$  en projetant  $y$  sur  $A$ .

Jusqu'en 2015, il n'existait pas de preuve de convergence de cet algorithme. Nous avons proposé la première dans [211]. Le résultat de convergence est le suivant :

**Théorème 3.8** *Soit  $A$  un ensemble sous-analytique fermé et  $x^* \in A \cap B$ . Alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que, si la suite des itérés  $x_k$  générés par l'algorithme de Gerchberg-Saxton entre dans  $\mathcal{B}(x^*, \epsilon)$ , alors elle converge vers un point  $\bar{x} \in A \cap B$  avec :  $\|x_k - \bar{x}\| = \mathcal{O}(k^{-\rho})$  pour un certain  $\rho \in (0, \infty)$ .*

Pour obtenir ce résultat, nous avons montré que l'algorithme de Gerchberg-Saxton est une instance de la méthode des projections alternées entre un ensemble  $A$  sous-analytique fermé et l'ensemble  $B$  défini par (3.13). Il ne restait plus qu'à vérifier que l'ensemble  $B$  est non convexe, sous-analytique et prox-régulier pour pouvoir appliquer le Théorème 3.7.

## 3.3 Conclusion et perspectives

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la convergence des méthodes de descente en optimisation différentiable, sous l'hypothèse que la fonction objectif vérifie l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz. Une question naturelle est alors de savoir s'il est possible d'étendre les résultats présentés dans ce chapitre, au cas non lisse. La réponse est que, dans le cas non lisse, l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz n'est pas toujours suffisante pour garantir la convergence vers un point critique de la suite des itérés. C'est le cas, par exemple, des méthodes de descente non lisses orientées selon un sous-gradient : dans [206], il est démontré que la convergence de la suite des itérés n'est garantie que si  $f$  vérifie l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz et admet un modèle standard strict (cf Chapitre 1, Section 1.2 et [209]).

Quant à la seconde partie de ce chapitre, plusieurs pistes de recherche sont à explorer : une première extension consisterait à étudier la convergence de l'algorithme des projections alternées dans le cas de deux ensembles fermés d'intersection vide, ainsi que dans le cas où l'un des deux ensembles admet une stratification de Whitney. Si cette dernière condition est largement utilisée, c'est qu'elle est facilement satisfaite dans les applications : à titre d'exemple, les ensembles semi-algébriques et les ensembles sous-analytiques admettent une stratification de Whitney. Enfin, une autre piste de recherche, totalement ouverte à l'heure actuelle, serait de voir si l'on peut obtenir le même type de résultat de convergence pour la méthode de Douglas-Rachford [100], appliquée à la recherche d'un point dans l'intersection de deux ensembles fermés non vides. En effet, bien que l'on obtienne des résultats de convergence locale pour des unions finies d'ensembles convexes, le cas non convexe pose problème et la convergence peut même échouer [42].

## Troisième partie

# Applications dans le domaine de l'aéronautique et du spatial





# Introduction

Cette troisième partie est consacrée à trois applications dans le domaine de l'aéronautique et du spatial : le rendez-vous orbital (Chapitre 4), l'évaluation du risque et le calcul de manœuvre pour l'évitement de collision (Chapitre 5) et la conception préliminaire d'avions (Chapitre 6).

Dans le Chapitre 4, nous nous intéressons au problème du rendez-vous entre un véhicule cible passif et d'un véhicule chasseur commandé, évoluant sur deux orbites elliptiques képlériennes. Les orbites sont supposées suffisamment proches pour permettre la linéarisation au premier ordre du mouvement relatif. Il s'agit d'un problème de guidage pouvant être reformulé comme un problème de commande optimale en temps fixé avec contraintes sur la commande.

Dans le Chapitre 5, nous nous intéressons au problème de l'évitement de collision entre un satellite actif et un débris spatial non commandé. Le but est d'évaluer le risque de collision entre les deux objets afin de pouvoir programmer une éventuelle manœuvre d'évitement. Les positions et vitesses des deux objets étant supposées connues avec incertitude, la question de l'évaluation du risque de collision se reformule alors naturellement en un problème de calcul de probabilité.

Dans ces deux chapitres, nous travaillons sous l'hypothèse de poussées impulsionnelles. Cela signifie que des incréments de vitesse instantanés sont appliqués au véhicule actif tandis que sa position est continue, et représente une idéalisation des poussées fortes en propulsion chimique. Cette approximation est utilisée lorsque la durée des poussées est faible devant la période orbitale. En pratique, la nature des poussées n'est pas purement impulsionnelle, mais il a été montré dans [236] que l'erreur de trajectoire est faible et suffisamment localisée pour être négligée à l'échelle de la trajectoire globale. L'intérêt de cette hypothèse est de ramener l'un et l'autre des problèmes considérés, à un problème d'optimisation en dimension finie.

## Le problème du rendez-vous orbital

Dans le Chapitre 4, le problème du rendez-vous orbital se reformule en un problème de commande optimale impulsionnelle : il s'agit d'un problème d'optimisation paramétrique sous contraintes, dont les paramètres sont le nombre d'impulsions, l'amplitude et la direction de ces impulsions et leurs dates d'application. La difficulté de ce problème dépend très clairement de la complexité du modèle d'état. En particulier, le nombre d'impulsions influe directement sur le nombre de variables à optimiser, et est généralement fixé *a priori* conduisant ainsi à des solutions sous-optimales pour le problème initial. Classiquement, ce problème peut être abordé de différentes façons : les méthodes directes, dans lesquelles des outils de programmation linéaire ou non linéaire sont utilisés pour résoudre directement, numériquement, le problème, et les méthodes indirectes, pour une résolution via les conditions nécessaires d'optimalité associées.

Contrairement aux méthodes indirectes, l'objectif des méthodes directes n'est pas d'énoncer des conditions nécessaires d'optimalité, mais de calculer directement une suite de solutions conduisant à une décroissance stricte du critère à minimiser [48]. Les méthodes directes présentent un certain nombre d'avantages par rapport aux méthodes indirectes [268] : elles ne mettent pas en jeu d'état adjoint, la mise en œuvre est plus simple, elles sont généralement numériquement plus robustes et peu sensibles au choix du point initial du problème d'optimisation paramétrique. De plus, il est assez simple de prendre en compte, dans le problème d'optimisation, un grand nombre de contraintes sur la trajectoire. En revanche, ce sont des méthodes peu précises : les solutions

obtenues peuvent être éloignées d'une solution optimale. Ces méthodes ont été largement utilisées dans le domaine spatial (cf [47] pour un panorama assez complet).

Les méthodes indirectes sont basées sur la résolution des conditions nécessaires (et parfois, suffisantes) d'optimalité, dérivant du principe du maximum de Pontryagin [57, 166]. La théorie de Pontryagin, appliquée au problème du rendez-vous, conduit à la théorie du vecteur efficacité [161, 201, 229, 79], qui permet de déterminer la trajectoire du vecteur adjoint associée à la vitesse et, indirectement, la trajectoire optimale du vecteur d'état. Toutefois, l'application du principe du maximum, pour obtenir les conditions d'optimalité dans le cas impulsionnel, n'est pas aussi directe que dans le cas classique, du fait de la présence de fonctions généralisées (distributions ou impulsions de Dirac) [235, 66, 67, 261].

Dans ce chapitre, deux approches sont proposées : la première s'inscrit dans le cadre des méthodes indirectes, et est basée sur la résolution des conditions nécessaires d'optimalité, telles qu'elles ont été formulées dans les travaux de D.F. Lawden [161] et de T.E. Carter [79]. La seconde est basée sur les travaux de L. Neustadt [201] : le point de départ de cette approche est le problème de commande original (à poussées continues) que l'on va relaxer et transformer jusqu'à obtenir une formulation algorithmiquement exploitable.

### **Evaluation du risque et calcul de manœuvres pour l'évitement de collision**

L'hypothèse impulsionnelle appliquée au problème de l'évitement de collision en orbite, permet de le reformuler en un problème d'optimisation sous contraintes en probabilité. Les enjeux dans ce chapitre sont de proposer une nouvelle méthode de calcul certifié de la probabilité de collision, puis de proposer des algorithmes efficaces et rapides pour le calcul de plans de manœuvres d'évitement, dans le cas où le risque est évalué comme trop important. L'une des difficultés de ce problème réside dans la nature probabiliste de la contrainte et, plus précisément, dans la réévaluation du risque de collision après manœuvre : dans le cas général de dynamiques orbitales non-linéaires, l'introduction de manœuvres modifie la nature des vecteurs aléatoires, qui ne sont donc, par exemple, plus nécessairement gaussiens. Ceci met en évidence la nécessité de travailler en utilisant des hypothèses simplificatrices et/ou des relaxations du problème initial afin d'obtenir des formulations plus exploitables algorithmiquement.

### **Approche novatrice pour la conception et l'exploitation d'avions écologiques**

Dans le Chapitre 6, le problème de conception d'avion est modélisé par un problème d'optimisation multidisciplinaire incertain. Dans une première approche, nous nous intéressons à une formulation du problème en un problème d'optimisation sous contraintes en probabilité. Dans une seconde approche, des hypothèses spécifiques ont permis de reformuler le problème de conception d'avions en un problème d'optimisation linéaire robuste selon les techniques décrites dans [43, Chapitre 1], que l'on peut résoudre par des techniques classiques de programmation linéaire. Une des difficultés de cette étude est que les fonctions objectif et contraintes sont calculées en boîte noire par un code interne aux Avant-Projets d'Airbus, ce qui conduit naturellement à l'utilisation d'algorithmes issus de l'optimisation sans dérivée. A noter que, par différentiation automatique, il est possible d'obtenir les gradients des fonctions en jeu, mais qu'en pratique, les algorithmes d'optimisation différentiable échouent dès que le nombre de variables ou la complexité des modèles augmentent (c'est en fait le nombre de points de non-différentiabilité qui augmentent).

## Chapitre 4

# Problème du rendez-vous orbital en temps fixé et consommation minimale

Depuis les premières missions spatiales (Gemini, Apollo, Vostok) impliquant plus d'un véhicule, le rendez-vous entre deux engins spatiaux est devenu une technologie clé dans le domaine de l'aérospatial. Le vol en formation (PRISMA), les opérations de maintenance en orbite ou encore les missions d'approvisionnement de la Station Spatiale Internationale sont des missions faisant appel à des manœuvres de rendez-vous orbital. Un enjeu majeur de ces missions est la capacité à réaliser en autonomie des opérations de rendez-vous sur des orbites elliptiques, tout en préservant l'optimalité des manœuvres en termes de consommation en carburant. Schématiquement, une mission de rendez-vous consiste à réaliser la jonction entre deux engins spatiaux partant de conditions initiales connues pour aboutir à une rencontre fixée par des conditions finales données. L'opération de rendez-vous proprement dite s'effectue en navigation relative, et se termine lorsque le chasseur a atteint les conditions finales fixées en position et vitesse en proximité de la cible. L'optimalité vis-à-vis de la consommation d'ergols et la robustesse du plan de manœuvres conditionnent fortement la sécurité et la flexibilité des missions alors que l'embarquabilité des algorithmes de guidage est évidemment prépondérante pour l'autonomie des missions.

Le problème du rendez-vous ainsi formulé s'identifie à un problème de commande optimale en consommation minimale et en temps fixé avec contraintes sur la commande, défini dans le cadre des modèles linéaires. Dans ce chapitre qui rend compte des travaux réalisés en collaboration avec D. Arzelier, C. Louembet et M. Joldes, nous proposons deux approches différentes, conduisant à la résolution du problème du rendez-vous impulsif. Depuis quelques années, des relations étroites entre le LAAS d'une part, et le CNES et Airbus Defence and Space d'autre part, ont été développées sur cette problématique. Les résultats des premières études ont permis de construire différents codes de calcul de plans de manœuvres pour le cas co-planaire sous hypothèses képlériennes dans le cadre d'une approche indirecte [141, 140] et dans le cadre des approches directes [25, 24]. Dans le premier cas, les aspects d'optimalité des trajectoires prévalent alors que dans le second, les aspects de calcul temps réel et de robustesse des solutions sont privilégiés.

Une première approche, présentée en Section 4.2, s'inscrit dans le cadre des méthodes indirectes et, plus précisément, de la théorie du vecteur efficacité [161, 229, 230]. Pour un nombre fixé d'impulsions, T. Carter et J. Brient [78] ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Etant donnée la nature non convexe et polynomiale de ces conditions, une solution numérique est très difficile à calculer, et n'est que sous-optimale par rapport au problème du rendez-vous initial pour lequel le nombre de manœuvres possibles est libre. Nous proposons dans ce chapitre un nouvel algorithme itératif permettant de résoudre ces conditions d'optimalité sans fixer *a priori* le nombre d'impulsions. Quoique très efficace dans la plupart des cas, cet algorithme n'est qu'heuristique et peut exhiber, dans de rares cas, des solutions sous-optimales [23].

La seconde approche, présentée en Section 4.3, s'inscrit dans la continuité des travaux de L. Neustadt [201] : le problème du rendez-vous est relaxé puis reformulé en un problème d'optimisation convexe semi-infini en dimension finie. D'après les résultats publiés dans [201], on retrouve un fait bien connu de la communauté aérospatiale, à savoir que la trajectoire optimale du problème relaxé est purement impulsionnelle. L'originalité de nos travaux est d'avoir proposé un nouvel algorithme convergent basé sur des méthodes de discrétisation [233].

En particulier, nous montrerons que ces deux approches nous permettent d'obtenir la solution analytique du problème du rendez-vous hors-plan.

## 4.1 Présentation du problème du rendez-vous orbital

Considérons une mission de rendez-vous entre les orbites elliptiques képlériennes d'un véhicule cible passif et d'un véhicule chasseur commandé (ni la cible, ni le chasseur ne subissent de perturbations extérieures). Les orbites sont supposées suffisamment proches pour permettre la linéarisation des équations du mouvement relatif. Cette hypothèse est valide à condition que la distance du véhicule cible au véhicule chasseur soit petite devant le rayon de l'orbite du véhicule cible. Les équations du mouvement relatif sont exprimées dans un repère mobile Local-Vertical-Local-Horizontal (LVLH) attaché à la cible, et tournant à la vitesse angulaire du véhicule cible. L'orientation des vecteurs de la base locale est définie sur la Figure 4.1.

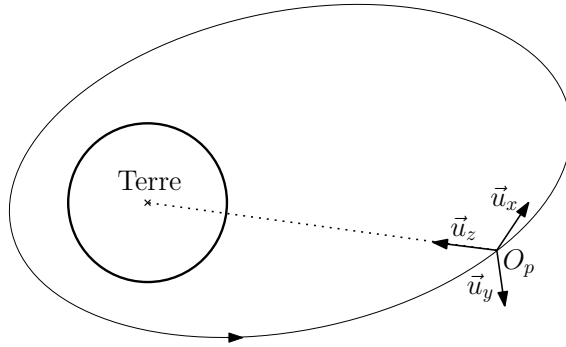


FIGURE 4.1 – Repère Local-Vertical-Local-Horizontal (LVLH) attaché au véhicule cible : l'axe  $z$  est radial orienté du satellite vers le centre de la Terre. L'axe  $y$  est normal au plan orbital du chasseur dans la direction opposée du moment cinétique. L'axe  $x$  complète le repère.

On choisit comme variable indépendante l'anomalie vraie, notée  $\nu$ , caractérisant la position du véhicule cible sur son orbite dans le repère inertiel attaché à la Terre. Dans le repère LVLH ainsi défini, on note  $X(\nu)$  le vecteur d'état composé des positions et vitesses relatives du véhicule chasseur et  $u(\nu)$  le vecteur de commande, proportionnel à son accélération. Le vecteur  $u$  correspond à la force par unité de masse appliquée par le moteur de poussée sur le satellite chasseur.

Sous les hypothèses précédentes, et en effectuant les changements de variables d'état et de commande classiques [280], les équations du mouvement relatif sont données par :

$$X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu)u(\nu) \quad (4.1)$$

où les matrices  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  définissent le modèle d'état simplifié de Tschauner-Hempel [269] :

$$A(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{1+e \cos(\nu)} & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\nu) = \frac{1}{1+e \cos(\nu)} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

**Remarque 4.1** La forme de ces matrices montre que les équations décrivant les mouvements relatifs co-planaires et hors-plan peuvent être découplées et traitées séparément. La solution du problème complet pourra être obtenue de façon simple en rassemblant les plans de manœuvres co-planaires et hors-plan optimaux en un seul. Dans la suite on notera  $n$  la dimension de la variable d'état et  $r$  celle de la commande. On a :  $n = 6$  et  $r = 3$  pour le problème non découplé,  $n = 2$  et  $r = 1$  pour le problème hors-plan et  $n = 4$  et  $r = 2$  pour le problème co-planaire.

Définissons maintenant le problème du rendez-vous orbital. Suivant la configuration géométrique des moteurs de poussée montés sur les axes rigides du satellite, la consommation en fuel est traditionnellement définie comme la norme  $\mathcal{L}_1$  de la norme  $p$  de l'accélération :

$$\|u\|_{1,p} = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \|u(\sigma)\|_p d\sigma, \quad (4.3)$$

où  $\nu_0$  et  $\nu_f$  désignent les valeurs initiale et finale de l'anomalie vraie pendant la phase de rendez-vous. Le choix de  $p \in \{1, 2\}$  dépend du type de propulsion considéré [238] : dans le cas où l'on dispose d'un unique propulseur orientable dans n'importe quelle direction, on choisit :  $p = 2$ . Dans le cas où l'on dispose de propulseurs dans chaque direction, on choisit :  $p = 1$ . On a :

$$\|u\|_{1,2} \leq \|u\|_{1,1}.$$

Pour que l'expression (4.3) ait un sens, on suppose que la commande  $u$  appartient à l'espace vectoriel normé  $\mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  des fonctions intégrables au sens de Lebesgue de  $[\nu_0, \nu_f]$  dans  $\mathbb{R}^r$ , équipé de la norme donnée par (4.3). On peut maintenant définir le problème du rendez-vous :

**Problème 4.1 (Problème du rendez-vous en temps fixé et consommation optimale)**

Soient  $\nu_0$  et  $\nu_f$  fixés. Trouver  $\bar{u} \in \mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  solution du problème :

$$\min_{u \in \mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)} \|u\|_{1,p} = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \|u(\sigma)\|_p d\sigma \quad \text{sous} \quad \left\{ \begin{array}{l} X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu)u(\nu) \\ X(\nu_0) = X_0, \quad X(\nu_f) = X_f. \end{array} \right.$$

Le Problème 4.1 est un problème de commande optimale dans l'espace  $\mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$ . Suivant l'approche de L.W. Neustadt [201], ce problème peut être reformulé en un problème de moment de norme minimum, en intégrant l'équation :  $X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu)u(\nu)$ . D'après [9, Section 1.14], cette équation admet une unique solution vérifiant la condition initiale :  $X(\nu_0) = X_0$ , donnée par :

$$X(\nu) = \Phi(\nu, \nu_0)X_0 + \int_{\nu_0}^{\nu} \Phi(\nu, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma. \quad (4.4)$$

Les matrices  $\Phi(\nu, \nu_0) = \varphi(\nu)\varphi(\nu_0)^{-1}$  et  $\varphi(\nu)$  désignent respectivement la matrice de transition du système :  $X'(\nu) = A(\nu)X(\nu)$ , et la matrice fondamentale de Yamanaka-Ankersen [280] du mouvement relatif sur des orbites képlériennes elliptiques. La condition finale :  $X(\nu_f) = X_f$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\varphi(\nu_f)^{-1}X_f - \varphi(\nu_0)^{-1}X_0 = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \varphi(\sigma)^{-1}B(\sigma)u(\sigma)d\sigma.$$

En posant :  $z_f = \varphi(\nu_f)^{-1}X_f - \varphi(\nu_0)^{-1}X_0$  et  $Y(\nu) = \varphi(\nu)^{-1}B(\nu)$ , le Problème 4.1 peut être reformulé de façon équivalente :

**Problème 4.2 (Problème de moments de norme minimum)** Soient  $\nu_0$  et  $\nu_f$  fixés. Trouver une commande  $\bar{u} \in \mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  solution du problème :

$$\min_{u \in \mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)} \|u\|_{1,p} = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \|u(\sigma)\|_p d\sigma \quad \text{sous} \quad \int_{\nu_0}^{\nu_f} Y(\sigma)u(\sigma)d\sigma = z_f.$$

## 4.2 Théorie du vecteur efficacité et conditions d'optimalité

Supposons que la loi de commande est impulsionnelle, i.e. que la commande  $u$  est de la forme :

$$u(\nu) = \sum_{i=1}^N \Delta V_i \delta(\nu - \nu_i), \quad (4.5)$$

où  $N$  est le nombre d'impulsions,  $(\nu_i)_{i=1,\dots,N}$  les dates de ces impulsions et  $\Delta V_i$  l'incrément de vitesse appliqué à la date  $\nu_i$ . En supposant les modèles dynamiques du mouvement relatif linéarisés au premier ordre, le Problème 4.2 s'écrit :

**Problème 4.3 (Problème du rendez-vous impulsionnel)** Soient  $\nu_0$  et  $\nu_f$  fixés. Trouver  $N \in \mathbb{N}$ ,  $(\nu_i)_{i=1,\dots,N} \in [\nu_0, \nu_f]^N$  et  $(\Delta V_i)_{i=1,\dots,N} \in (\mathbb{R}^r)^N$  solutions du problème :

$$\min_{N, \nu_i, \Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_p \quad \text{sous} \quad \sum_{i=1}^N \frac{R(\nu_i)}{r(\nu_i)} \Delta V_i = z_f.$$

en posant :  $r(\nu) = 1 + e \cos(\nu)$  et  $R(\nu) = r(\nu)\varphi(\nu)^{-1}B(\nu)$ .

Autrement dit, étant données la position, la vitesse et la masse du véhicule chasseur à un instant initial spécifié, déterminer la loi de propulsion impulsionnelle, donnée par une série de changements de vitesse instantanés, minimisant la consommation et amenant le chasseur en un état terminal, donné par le satellite de référence, en un temps final fixé (cf Figure 4.2).

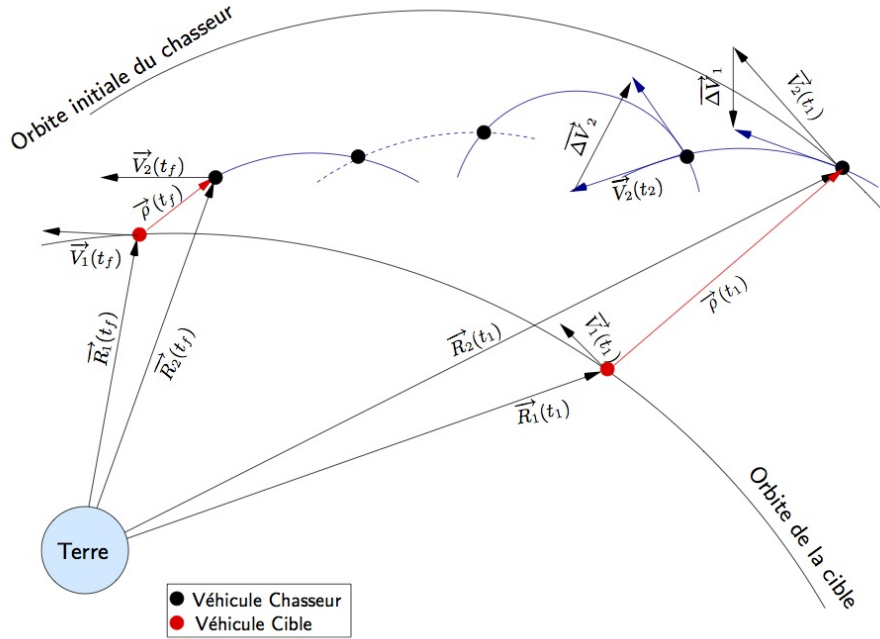


FIGURE 4.2 – Illustration du problème du Rendez-Vous impulsionnel en consommation minimale et en temps fixé pour une dynamique linéaire

Dans toute cette section, nous supposons de plus que le propulseur du véhicule chasseur peut être orienté dans n'importe quelle direction aux instants de manœuvre, ce qui revient à minimiser la consommation en fuel du véhicule chasseur mesurée en norme  $\mathcal{L}_1/l_2$  (i.e.  $p = 2$ ) :

**Problème 4.4 (Problème du rendez-vous impulsif en norme  $\mathcal{L}_1/l_2$ )** Soient  $\nu_0$  et  $\nu_f$  fixés. Trouver  $N$ ,  $(\nu_i)_{i=1,\dots,N}$  et  $(\Delta V_i)_{i=1,\dots,N}$  solutions du problème :

$$\min_{N, \nu_i, \Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_2 \quad \text{sous} \quad \sum_{i=1}^N \frac{R(\nu_i)}{r(\nu_i)} \Delta V_i = z_f.$$

Dans la suite nous présentons une solution analytique du problème hors-plan et un nouvel algorithme pour la résolution du problème co-planaire. Ces deux solutions s'appuient sur la formulation algébrique des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité formulées par T.E. Carter [79].

### 4.2.1 Conditions d'optimalité de Carter

Dans la littérature, deux approches ont été utilisées pour dériver les conditions nécessaires (et suffisantes) d'optimalité du problème du rendez-vous impulsif : appliquer le principe du maximum de Pontryagin au Problème de commande optimale 4.1 sous l'hypothèse de poussées impulsives et pour un nombre  $N$  fixé d'impulsions, comme cela a été fait par Lawden dans [161], ou bien utiliser une approche par multiplicateurs de Lagrange comme dans [78]. Dans les deux cas, les conditions nécessaires d'optimalité s'expriment en fonction du vecteur d'état adjoint associé à la vitesse relative du chasseur et appelé *vecteur efficacité* (ou *primer vector*). Elles deviennent suffisantes lorsqu'elles sont renforcées par une contrainte semi-infinie sur la norme du vecteur efficacité [229]. Le lecteur intéressé pourra se référer au Chapitre 2 dans [230] pour davantage de détails sur la théorie du vecteur efficacité.

Les conditions nécessaires d'optimalité, ou conditions de Lawden, datent des travaux de D.F. Lawden au début des années 60, dans lesquels la théorie du vecteur efficacité a été citée pour la première fois et prouvée rigoureusement un peu plus tard par L. Neustadt dans [201] :

- CNS 1** Le vecteur efficacité  $p$  et sa dérivée sont continus partout sur la trajectoire optimale.
- CNS 2** Les impulsions sont appliquées dans la direction du vecteur efficacité aux instants pour lesquels sa norme est égale à 1.
- CNS 3** La tangente à la norme du vecteur  $p$  est horizontale aux dates des impulsions intérieures.
- CNS 4** La norme du vecteur efficacité est inférieure ou égale à 1 sur la trajectoire optimale.

Reprenant les travaux de Lawden [161] et de Prussing [229], T.E. Carter a reformulé ces conditions sous forme algébrique [79] :

**Théorème 4.1 ([161], [201])**  $(\nu_1, \dots, \nu_N, \Delta V_1, \dots, \Delta V_N)$  est une solution optimale du problème (4.3) si et seulement s'il existe un vecteur non nul  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $m = \dim(z_f)$  vérifiant :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \Delta V_i = -p(\nu_i) \|\Delta V_i\|_2, \quad (4.6)$$

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \|\Delta V_i\|_2 = 0 \text{ ou } \|p(\nu_i)\|_2 = 1, \quad (4.7)$$

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \|\Delta V_i\|_2 = 0 \text{ ou } \nu_i \in \{\nu_0, \nu_f\} \text{ ou } \frac{d\|p\|_2^2}{d\nu}(\nu_i) = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{R(\nu_i)}{r(\nu_i)} p(\nu_i) \|\Delta V_i\|_2 = -z_f, \quad (4.9)$$

$$\forall \nu \in [\nu_0, \nu_f], \quad \|p(\nu)\|_2 \leq 1, \quad (4.10)$$

où  $p(\nu)$  est appelé *vecteur efficacité* [79], et est défini pour le problème du rendez-vous par :

$$p(\nu) = \frac{R(\nu)^T \lambda}{r(\nu)}. \quad (4.11)$$

D'après (4.11), le vecteur efficacité est complètement déterminé par le choix des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ . L'intérêt de la formulation algébrique est d'avoir permis de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions optimales, et d'être plus propice au développement d'algorithmes. La principale difficulté est liée à la variable  $N$  supposée fixée. En effet, peu de résultats dans la littérature permettent de connaître *a priori* le nombre d'impulsions nécessaires pour aboutir à une solution optimale. Seule une borne supérieure sur le nombre maximal d'impulsions a pu être donnée en fonction du nombre de variables d'état finales fixées :

**Théorème 4.2 (Borne de Neustadt [202])** *Le nombre d'impulsions conduisant à une solution de cout minimal est au plus égal au nombre de variables d'état fixées à la date finale du rendez-vous.*

Dans les cas co-planaire et hors-plan, cette borne supérieure est égale respectivement à 4 et à 2. Il faut comprendre ce résultat de la façon suivante : il existe toujours une solution optimale à  $N$  impulsions avec  $N \leq N^*$  où  $N^*$  désigne la borne de Neustadt. Une solution à  $N > N^*$  peut néanmoins être optimale, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

## 4.2.2 Solution analytique du problème du rendez-vous hors-plan

Plaçons nous maintenant dans le cas hors-plan. Pour simplifier les notations, on note :  $\Delta V_i \in \mathbb{R}$  les impulsions hors-plan. Le problème du rendez-vous impulsionnel hors-plan s'écrit :

**Problème 4.5 (Problème du rendez-vous impulsionnel hors-plan)** *Déterminer  $N$ ,  $(\nu_i)_{i=1,\dots,N} \in [\nu_0, \nu_f]^N$  et  $(\Delta V_i)_{i=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^N$  solutions du problème :*

$$\min_{N, \nu_i, \Delta V_i} \sum_{i=1}^N |\Delta V_i| \quad \text{sous} \quad \sum_{i=1}^N \frac{R(\nu_i)}{1 + e \cos(\nu_i)} \Delta V_i = z_f.$$

Le vecteur efficacité s'exprime simplement sous la forme :

$$p(\nu) = \frac{R(\nu)^\top \lambda}{1 + e \cos(\nu)} = \frac{-\lambda_1 \sin(\nu) + \lambda_2 \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)},$$

et est complètement déterminé par le choix du paramètre  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ .

Une caractérisation complète des solutions optimales du Problème 4.5 a été donnée dans le cas circulaire ( $e = 0$ ) par J. Prussing dans [228], et une solution analytique a été décrite dans [77] en fonction des conditions aux bords pour un rendez-vous de durée  $2\pi$ . A notre connaissance, il n'existait pas jusqu'à présent de solution analytique au problème du rendez-vous hors-plan elliptique. Nous avons proposé la première dans [258, 256] au cours de la thèse de R. Serra [252].

La démarche que nous avons adoptée, a consisté à exploiter les propriétés particulières du vecteur efficacité et à discuter les différentes configurations possibles : le vecteur  $p$  est une fonction  $2\pi$ -périodique qui change de signe tous les  $\pi$  et admet deux extrema par période. La recherche de la solution optimale a alors été organisée en fonction de la durée du rendez-vous et du nombre d'impulsions (par période) : deux impulsions intérieures, une unique impulsion intérieure, une impulsion intérieure et une impulsion initiale (ou finale), une unique impulsion initiale (ou finale), une impulsion initiale et une impulsion finale. Dans chaque situation, on résout les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de Carter données par le Théorème 4.1. La solution optimale obtenue dépend fortement de la durée du rendez-vous  $\nu_f - \nu_0$ , des anomalies initiales et finales  $\nu_0$ ,  $\nu_f$ , et des conditions initiales et finales rassemblées dans le vecteur  $z_f$ . Les résultats complets et leurs démonstrations sont donnés dans [256, 252]. Malgré huit cas différents à discuter, la solution analytique est très simple et s'exprime explicitement en fonction des paramètres du rendez-vous. Elle se calcule presque instantanément sans moyen informatique particulier. Ceci est un point clé en vue de l'implémentation à bord et de l'autonomie des futures missions de rendez-vous orbital.

Regardons d'un peu plus près les résultats obtenus lorsque la durée du rendez-vous est supérieure à  $2\pi$ . Nos simulations numériques sont basées sur la mission PROBA-3 (*Project for On-board autonomy*) de l'ESA (Agence Spatiale Européenne) dont les objectifs étaient la mise au point et



la validation de nouvelles technologies spatiales, liées au vol en formation des satellites [220]. La mission met en jeu deux mini-satellites évoluant sur des orbites fortement elliptiques voisines, et sur lesquels sont testés des stratégies de guidage et des algorithmes de navigation et de contrôle.

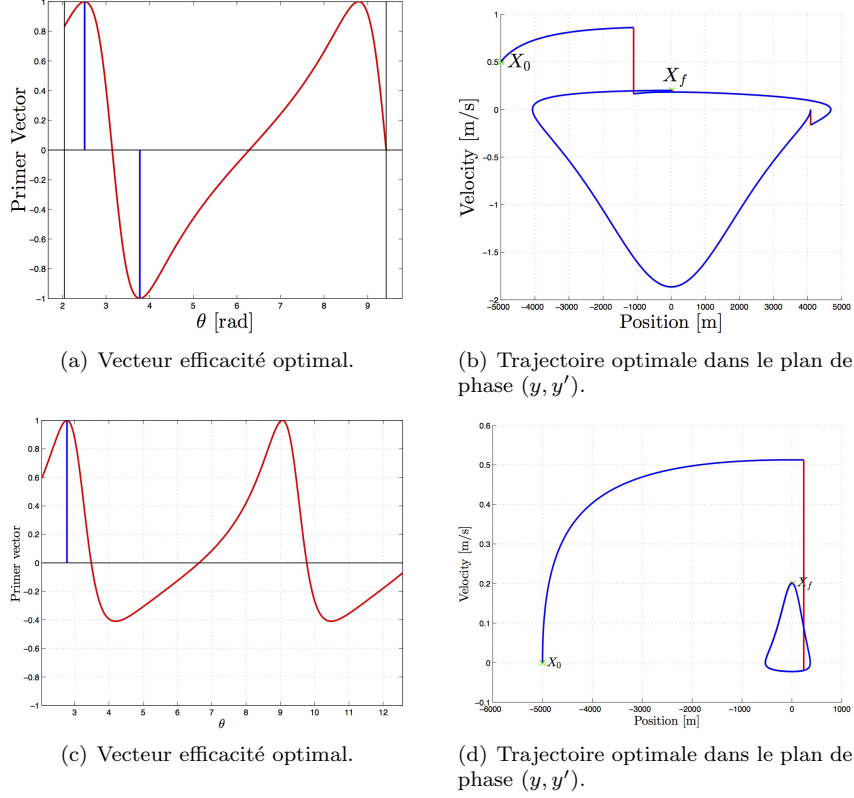


FIGURE 4.3 – Mission PROBA-3 : solutions analytiques à 2 impulsions (Figures (a) et (b)) et à 1 (Figures (c) et (d)) impulsions pour une durée de rendez-vous supérieure à  $2\pi$ .

A titre d'illustration, la Figure 4.3 donne des exemples de vecteurs efficacité optimaux calculés dans deux configurations différentes.

Lors de la dérivation de la solution analytique, nous avons démontré que, dans le cas  $\nu_f - \nu_0 \geq 2\pi$ , il est toujours possible de choisir une solution optimale répartie sur le nombre maximum de manœuvres possibles (i.e. sur plusieurs périodes), sans augmenter la consommation optimale en fuel. Cette solution est illustrée sur la Figure 4.4 pour des paramètres de rendez-vous identiques à ceux conduisant à la solution optimale à deux impulsions présentée sur la Figure 4.3 (a)-(b). Les consommations en fuel des solutions à 2 et à 3 impulsions sont les mêmes. L'intérêt de pouvoir répartir les impulsions se justifie par l'ajout éventuel de contraintes opérationnelles : par exemple, si l'opérateur impose que les incréments de vitesse ne dépassent pas  $0.5 \text{ m.s}^{-1}$ , on voit facilement que la solution à deux impulsions n'est plus admissible alors que celle à trois impulsions l'est toujours. En revanche la solution à deux impulsions est préférable lorsque l'on souhaite, d'un point de vue opérationnel, éviter d'allumer et éteindre les moteurs de poussée plus souvent que nécessaire.

### 4.2.3 Un algorithme mixte pour le problème co-planaire

Concernant le problème du rendez-vous co-planaire, on ne dispose pas à l'heure actuelle de solution analytique. La plupart des méthodes numériques existantes fixant *a priori* le nombre d'impulsions, elles échouent naturellement à optimiser les plans de manœuvres par rapport au

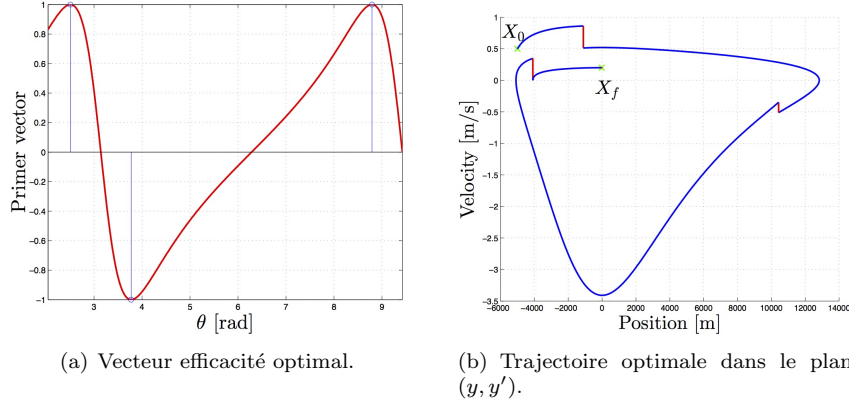


FIGURE 4.4 – Mission PROBA-3 : solution analytique à 3 impulsions pour une durée de rendez-vous supérieure à  $2\pi$ .

nombre d'impulsions. Dans [77], T.E. Carter propose une procédure itérative heuristique pour optimiser le lieu des impulsions dans le cas circulaire, puis généralisée au cas elliptique dans [78], tout en permettant de fixer une partie des impulsions. Pour optimiser le nombre d'impulsions ainsi que leurs lieux d'application, un algorithme itératif basé sur le calcul des variations, et originellement développé par Lion et Handelsman [128], a été proposé dans [139, 138, 230]. La principale difficulté est que la trajectoire obtenue est possiblement non lisse et sous-optimale. Pour surmonter ce problème, une étape de minimisation par pénalisation est ajoutée afin de déplacer les impulsions et obtenir une trajectoire lisse optimale [138, 230, 231].

Dans [23] qui marque le début de ma collaboration avec D. Arzelier et C. Louembet du LAAS, est proposé un nouvel algorithme itératif construisant un plan de manœuvres optimal à partir d'une solution à 2 impulsions initiale et finale, en ajoutant et/ou déplaçant des impulsions intermédiaires à chaque itération. Le principe est le suivant : tant que la borne  $N^*$  de Neustadt (cf Théorème 4.2) n'est pas atteinte, on ajoute une impulsion intermédiaire à la date  $\nu_m$  définie par :

$$\nu_m = \arg \max_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} \|p(\nu)\|_2.$$

Une fois la borne  $N^*$  atteinte, trois actions sont possibles : déplacer une impulsion, ajouter une impulsion, fusionner deux impulsions. Le choix de l'action à effectuer dépend de la localisation de l'anomalie  $\nu_m$  et des variations du vecteur efficacité au voisinage de  $\nu_m$ . Plus précisément, la méthode consiste à calculer la variation du coût associé à une trajectoire donnée lorsqu'on ajoute une impulsion. Dans [128], des conditions ont été obtenues respectivement sur la norme et la dérivée de la norme du vecteur efficacité pour que l'ajout d'une impulsion ou d'une période de cabotage initiale et/ou finale, améliore le coût associé à la trajectoire perturbée. Ces conditions ont été originellement utilisées pour réduire le coût d'une trajectoire de référence (non optimale) à 2 impulsions. Une des originalités de l'algorithme proposé dans [23] a été de montrer que ces conditions s'étendent naturellement au cas d'impulsions intermédiaires ne vérifiant pas la condition nécessaire d'optimalité de tangence nulle (cf condition (4.8) du Théorème 4.1).

### Algorithme mixte [23]

Notons  $T_{imp}$  l'ensemble courant des dates des impulsions. Les grandes lignes sont les suivantes : on initialise l'algorithme mixte avec une solution optimale à 2 impulsions.

Tant que  $\|p(\nu_m)\| > 1$ ,

1. Déterminer  $\nu_a, \nu_b \in T_{imp}$  tels que  $\nu_a < \nu_m < \nu_b$  et :

$$T_{imp} = T_{imp} \cup \{\nu_m\}, \quad N_{imp} = \text{card}(T_{imp}).$$

2. Si  $N_{imp} > N_{max}$  alors :
  - (a) Si retarder l'impulsion initialement prévue en  $\nu_a$  et avancer l'impulsion initialement prévue en  $\nu_b$  améliore le cout (i.e. si :  $p'(\nu_a)^\top p(\nu_a) > 0$  et  $p'(\nu_b)^\top p(\nu_b) < 0$ ), on fusionne les deux impulsions en une seule à la date  $\nu_m$ , i.e. :  $T_{imp} = T_{imp} - \{\nu_a, \nu_b\}$ .
  - (b) Sinon
    - (a) Si  $\nu_a \neq \nu_0$  et si retarder l'impulsion initialement prévue en  $\nu_a$  améliore le cout (i.e. si :  $p'(\nu_a)^\top p(\nu_a) > 0$ ), on déplace l'impulsion de  $\nu_a$  en  $\nu_m$  i.e. :  $T_{imp} = T_{imp} - \{\nu_a\}$ .
    - (b) Si  $\nu_b \neq \nu_f$  et si avancer l'impulsion initialement prévue en  $\nu_b$  améliore le cout (i.e. si :  $p'(\nu_b)^\top p(\nu_b) < 0$ ), on déplace l'impulsion de  $\nu_b$  en  $\nu_m$  i.e. :  $T_{imp} = T_{imp} - \{\nu_b\}$ .
    - (c) Si décaler les impulsions initialement prévues en  $\nu_a$  et  $\nu_b$  ne permet pas d'améliorer le cout (i.e. si :  $p'(\nu_a)^\top p(\nu_a) < 0$  et  $p'(\nu_b)^\top p(\nu_b) > 0$ ), on réinitialise l'algorithme en enlevant les impulsions en  $\nu_a$  et  $\nu_b$  :  $T_{imp} = T_{imp} - \{\nu_a, \nu_b\}$ .
3. Résoudre le système polynomial des conditions nécessaires et suffisantes de Carter par rapport aux variables  $(\lambda, \Delta v_i)$  (en utilisant PHCPack [271]).

$$\begin{aligned}
\lambda^\top R(\nu_i)R(\nu_i)^\top \lambda &= 1, & \forall \nu_i \in T_{imp}, \\
\sum_{\nu_i \in T_{imp}} [R(\nu_i)R(\nu_i)^\top] \lambda \Delta v_i &= -z_f, \\
\Delta v_i &\geq 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

et sélectionner la solution de cout minimal.

4. Propager l'état adjoint :  $p(\nu) = R(\nu)^\top \lambda$ ,  $\nu \in [\nu_0, \nu_f]$  et calculer  $\nu_m = \arg \max_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} \|p(\nu)\|$ .

Cet algorithme a été développé et implémenté au LAAS. Il a été testé à la fois sur des exemples académiques [77], et des exemples plus réalistes issus du programme ATV [160] et du banc d'essai PRISMA [44]. Les résultats détaillés sont présentés dans [23].

Dans tous les cas, l'algorithme mixte converge vers une solution à  $N$  impulsions dont on certifie l'optimalité pour ce nombre d'impulsions grâce à l'algorithme PRDV (*Polynomial Rendezvous Delta-V*) proposé dans [22] et également implémenté par les collègues du LAAS. L'algorithme mixte est un algorithme heuristique simple et efficace qui converge vers une solution optimale dans la plupart des cas. Il est également important de noter que la courbe de la norme du vecteur efficacité  $\|p(\nu)\|$  reste dérivable en tout point et pour chaque étape, évitant ainsi le principal inconvénient de la procédure itérative originellement proposée par Lion-Handelsman [128] et développée ultérieurement par Jezewski dans les références [139, 138].

Les principales difficultés rencontrées par l'algorithme sont : la propagation du vecteur efficacité, le mauvais conditionnement numérique du système polynomial (4.12) et la non-convergence de l'algorithme dans les (rares) cas où l'on n'a pas de "bonne" solution du système (4.12). Dans ces cas-là, la solution retournée est sous-optimale. Ces limitations constituent des pistes de recherche à explorer pour améliorer l'algorithme. Nous verrons, au paragraphe suivant, un nouvel algorithme basé sur la formulation du problème du rendez-vous comme un problème d'optimisation convexe semi-infini et dont on démontre rigoureusement la convergence.

### 4.3 Optimisation, problème de moments et programmation non linéaire - Une approche classique revisitée

Revenons maintenant à la formulation générale du problème du rendez-vous comme un problème de moment de norme minimum (cf Problème 4.2) :

$$\inf_{u \in \mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)} \|u\|_{1,p} = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \|u(\sigma)\|_p d\sigma \quad \text{sous} \quad \int_{\nu_0}^{\nu_f} Y(\sigma)u(\sigma)d\sigma = z_f, \quad (\nu_0, \nu_f \text{ fixés}).$$

Ce problème est mal posé au sens où il n'admet pas nécessairement de solution dans l'espace  $\mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  à cause des effets de concentration [239]. Ceci s'explique principalement par le

fait que l'espace  $\mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  n'est le dual topologique d'aucun espace fonctionnel normé [182, Chapitre 5]. Il est alors nécessaire de relaxer le Problème 4.2 dans l'espace des fonctions à variations bornées qui est le dual de l'espace de Banach  $\mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$ . Le problème du rendez-vous peut alors être reformulé en un problème d'optimisation convexe semi-infini (cf Section 4.3.1) pour lequel un nouvel algorithme a été proposé dans [19] et dont on montre rigoureusement la convergence.

**Notations.** Soit  $\mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  l'espace de Banach des fonctions continues sur  $[\nu_0, \nu_f]$  équipé de la norme :  $\|f\|_q = \sup_{\nu_0 \leq \nu \leq \nu_f} \|f(\nu)\|_q$ , où :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . La norme d'un élément  $l$  du dual  $\mathcal{C}^*([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  est définie par :

$$\|l\| = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \|l(f)\|.$$

On note  $\text{NBV}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  l'espace des fonctions à variations bornées sur l'intervalle  $[\nu_0, \nu_f]$ , qui s'annulent au point  $\nu_0$  et qui sont continues à droite sur  $(\nu_0, \nu_f]$ . La norme d'un élément  $g \in \text{NBV}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  est donnée par :

$$\|g\|_{tv,p} = \sup_{P_\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} \|g(\nu_i) - g(\nu_{i-1})\|_p,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des partitions finies  $P_\kappa = (\nu_i)_{i=1, \dots, \kappa}$  de  $[\nu_0, \nu_f]$ .

### 4.3.1 Formulation en un problème convexe semi-infini

Dans ce paragraphe nous rappelons succinctement comment transformer le problème de moments 4.2 en un problème d'optimisation convexe semi-infini. S'appuyant sur le formalisme développé dans [201] et [182], les grandes étapes sont les suivantes :

**1. Relaxation du Problème 4.2 dans le sous-espace  $\text{NBV}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$ .** A chaque élément  $u \in \mathcal{L}_{1,p}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  correspond une fonction  $g \in \text{NBV}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  définie par :

$$g(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} u(\sigma) d\sigma. \quad (4.13)$$

L'isomorphisme défini par (4.13) est isométrique :  $\|g\|_{tv,p} = \|u\|_{1,p}$ . Le problème relaxé s'écrit :

$$\inf_{g \in \text{NBV}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)} \|g\|_{tv,p} \quad \text{sous} \quad \int_{\nu_0}^{\nu_f} Y(\nu) dg(\nu) = z_f. \quad (4.14)$$

**2. Reformulation du problème relaxé dans l'espace dual  $\mathcal{C}^*([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$ .** D'après le Théorème de représentation de Riesz [182, §5.5, Théorème 1], on définit une unique association entre les espaces  $\text{NBV}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  et  $\mathcal{C}^*([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$ . Plus précisément, à chaque fonction  $g \in \text{BV}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  correspond une fonctionnelle  $l \in \mathcal{C}^*([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$  définie par :

$$l(y) = \int_{\nu_0}^{\nu_f} y(\nu) dg(\nu), \quad \forall y \in \mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r). \quad (4.15)$$

Ainsi en posant  $Y(\nu) = [y_1(\nu) \ y_2(\nu) \ \dots \ y_n(\nu)]^\top$  où les fonctions  $y_i : [\nu_0, \nu_f] \rightarrow \mathbb{R}^r$  sont supposées linéairement indépendantes dans  $\mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)$ , le problème relaxé est équivalent au problème de norme minimum suivant [201] :

$$\bar{\eta} = \inf_{l \in \mathcal{C}^*([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^r)} \|l\| \quad \text{sous} \quad l(y_i) = \langle y_i(\cdot), l \rangle = z_{f,i}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4.16)$$

puisque à nouveau l'isomorphisme défini par (4.13) est isométrique.

**3. Reformulation en un problème de programmation convexe semi-infini.** Cette étape repose sur l'utilisation d'un résultat fondamental établi par L.S. Neustadt dans [201] dans sa forme complète, et partiellement dans [155] pour certaines classes de problèmes d'optimisation. Dans [19], nous avons repris la démarche de D.G. Luenberger dans [182, Chapitre 5].

D'après [182, Section 5.9, Corollaire 1], le problème (4.16) en dimension infini est équivalent à la recherche d'un vecteur  $\bar{\lambda}$  dans un espace de dimension finie soumis à un continuum de contraintes et conduisant à un problème d'optimisation convexe semi-infini (SICP) :

**Problème 4.6 (Problème SICP)** *Trouver  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$  solution de :*

$$\bar{\mu} = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} -z_f^\top \lambda \quad \text{sous} \quad \|Y(\nu)^\top \lambda\|_q \leq 1. \quad (4.17)$$

Les problèmes (4.16) et (4.17) peuvent être considérés comme duaux du fait de l'égalité de leurs valeurs optimales ( $\bar{\eta} = -\bar{\mu}$ ) et de la relation entre leurs solutions grâce à la condition d'alignement :  $\bar{l}(\bar{y}) = \|\bar{l}\| \|\bar{y}\|_q$  où l'on a posé :  $\bar{y}(\nu) = Y(\nu)^\top \bar{\lambda}$ . Une fois le problème primal (4.17) résolu en  $\lambda$ , cette condition d'alignement nous permettra dans le paragraphe suivant de reconstruire la solution optimale à variations bornées du problème relaxé (4.14).

**Remarque 4.2** *Le vecteur  $y(\nu) = Y(\nu)^\top \lambda$  intervenant dans le Problème (4.6) n'est autre que le vecteur efficacité de Lawden [161].*

Dans [201, Théorème 3], L. Neustadt a démontré l'existence de solutions du Problème relaxé (4.14) sous la forme de fonctions en escalier  $\bar{g}$  avec au plus  $n$  points de discontinuité : notons  $N$  le nombre de points de discontinuité  $\hat{\nu}_i$  de la fonction  $\bar{g}$  et  $\Delta V(\hat{\nu}_i)$  les sauts de  $\bar{g}$  en ces points. La contrainte du problème relaxé (4.14) s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^N Y(\hat{\nu}_i) \Delta V(\hat{\nu}_i) = z_f. \quad (4.18)$$

et la direction des impulsions est donnée par celle du vecteur efficacité  $\bar{y}$  optimal aux instants de norme égale à 1 et définie par :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \frac{\Delta V(\hat{\nu}_i)}{\|\Delta V(\hat{\nu}_i)\|_q} = Y(\hat{\nu}_i)^\top \bar{\lambda}. \quad (4.19)$$

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \|Y(\hat{\nu}_i)^\top \bar{\lambda}\|_q = 1. \quad (4.20)$$

Ce résultat important est bien connu de la communauté aérospatiale, mais n'a jamais été totalement exploité pour obtenir des algorithmes numériques efficaces. Il nous apprend que la trajectoire optimale du problème du rendez-vous elliptique képlérien en consommation minimum est purement impulsionnelle et que le nombre d'impulsions est au plus  $n$ , i.e. le nombre de conditions finales fixées dans le problème de contrôle optimal de départ (cf Théorème 4.2).

### 4.3.2 Un nouvel algorithme basé sur des méthodes de discrétisation

Les algorithmes décrits dans cette partie reposent sur le travail de deux stagiaires N. Deak et F. Bréhart sous la supervision de M. Joldes, D. Arzelier et C. Louembet. Nous ne donnerons pas ici la preuve de convergence de l'algorithme proposé : elle a été rédigée par M. Joldes et figurera dans un article de revue en préparation.

**Choix d'une méthode de discrétisation** Soient  $\Theta$  est un compact de  $\mathbb{R}^m$ ,  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times \Theta, \mathbb{R})$ . Considérons un problème d'optimisation semi-infini de la forme :

$$\mathcal{P}(\Theta) \quad \left| \begin{array}{l} \min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} f(\lambda) \\ \text{sous} \quad g(\lambda, \nu) \leq 0, \nu \in \Theta. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

On note :  $M(\Theta) = \{\lambda : g(\lambda, \nu) \leq 0, \nu \in \Theta\}$  le domaine admissible du problème  $\mathcal{P}(\Theta)$ . L'idée des méthodes de discrétisation, décrites dans [233], est de se ramener à minimiser la fonction objectif  $f$  sous un nombre fini de contraintes. Sous certaines hypothèses à vérifier pour garantir la convergence, le principe général de l'algorithme choisi est le suivant : soit  $\Theta_0$  un sous-ensemble fini initial de  $\Theta$  et  $\lambda^{(0)}$  une solution du problème discrétisé  $\mathcal{P}(\Theta_0)$ . On construit par récurrence une suite  $(\Theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sous-ensembles finis de  $\Theta$  de la façon suivante : connaissant  $\Theta_i$ , on définit :

$$\Theta_{i+1} = \Theta_i \cup \arg \max_{\nu \in \Theta} g(\lambda^{(i)}, \nu),$$

où  $\lambda^{(i)}$  est une solution du problème discrétisé  $\mathcal{P}(\Theta_i)$ . L'avantage de ces méthodes est de ne travailler qu'avec des sous-ensembles finis de  $\Theta$  pour lesquels il est facile de vérifier avec précision la faisabilité du programme  $\mathcal{P}(\Theta_i)$ . La convergence des solutions  $(\lambda^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{P}(\Theta_i)$  vers une solution de  $\mathcal{P}(\Theta)$  est garantie par le théorème suivant :

**Théorème 4.3** [233, Lemme 2.4, Théorème 2.8, Corollaire 2.9] *Supposons les fonctions  $f$  et  $g(\cdot, \nu)$ ,  $\nu \in \Theta$ , convexes. Supposons que :*

(H<sub>1</sub>)  $(\Theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite d'ensembles compacts telle que  $\Theta_0$  est fini,  $\Theta_i \subseteq \Theta_{i+1} \subseteq \Theta$  et :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_H(\Theta_i, \Theta) = 0,$$

où  $d_H(\Theta_i, \Theta)$  est la distance de Hausdorff entre les ensembles  $\Theta_i$  et  $\Theta$ .

(H<sub>2</sub>) Il existe  $\lambda_\Theta \in M(\Theta)$  tel que  $L(\lambda_\Theta, \Theta_0) = M(\Theta_0) \cap \{\lambda : f(\lambda) \leq f(\lambda_\Theta)\}$  est borné.

Alors l'ensemble des solutions de  $\mathcal{P}(\Theta_i)$  est non vide et compact. L'algorithme génère une suite infinie de  $\lambda_i$  telle que tout point d'accumulation est solution du problème  $\mathcal{P}(\Theta)$ .

**Application au problème du rendez-vous.** Dans le cas du rendez-vous orbital, la fonction objectif  $f$  est linéaire,  $g(\cdot, \nu)$  est convexe et  $\Theta = [\nu_0, \nu_f]$ . L'algorithme de discrétisation spécialisé pour la résolution du problème relaxé (4.17) et décrit par l'Algorithme 6, est initialisé par :

- un ensemble  $\Theta_0$  à deux impulsions  $\theta_0$  et  $\theta_1$  dans  $[\nu_0, \nu_f]$  telles que :  $\theta_1 - \theta_0 \notin \pi\mathbb{Z}$ . C'est une condition suffisante pour que l'hypothèse (H<sub>2</sub>) soit satisfaite.
- un point initial  $\lambda^{(0)}$  calculé en résolvant les équations (4.18) et (4.19) pour  $\nu \in \{\theta_0, \theta_1\}$ .

---

**Algorithme 6.** Algorithme de discrétisation pour résoudre le Problème (4.17).

---

**Paramètres:**  $\Theta = [\nu_0, \nu_f]$ ,  $Y(\nu) = \varphi(\nu)^{-1}B(\nu)$ ,  $z_f$ ,  $\varepsilon > 0$ .

- 1: **Initialisation.**  $i \leftarrow 0$ ;  $\Theta_0 = \{\theta_0; \theta_1\} \subset \Theta$  tel que  $\theta_0 - \theta_1 \neq k\pi$ ;
- 2: Calculer  $\lambda^{(0)}$  solution du système (4.18) et (4.19) pour  $\nu \in \{\theta_0, \theta_1\}$ .
- 3: **Tant que**  $\max_{\theta \in \Theta} \|Y(\theta)^T \lambda^{(i)}\|_q - 1 > \varepsilon$  **faire**
- 4:  $\Theta_{i+1} = \Theta_i \cup \arg \max_{\theta \in \Theta} \|Y^T(\theta) \lambda^{(i)}\|_q$ ;
- 5: **Trouver**  $\lambda^{(i)}$  solution du problème discrétisé :

$$\mu^{(i)} = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^n} -c^T \lambda \quad \text{sous} \quad \|Y^T(\theta_k) \lambda\|_q \leq 1, \text{ for all } \theta_k \in \Theta_i.$$

6: **fin Tant que**

7: Retourner  $\mu^{(i)}, \lambda^{(i)}$ .

---

Cet algorithme fournit des solutions approchées du Problème  $\mathcal{P}(\Theta_i)$  qui ne sont pas admissibles pour le Problème  $\mathcal{P}(\Theta)$ , mais qui fournissent une suite croissante de bornes inférieures de sa solution. Si une solution  $\lambda^{(i)}$  de  $\mathcal{P}(\Theta_i)$  est admissible pour le problème  $\mathcal{P}(\Theta)$ , alors c'est aussi une solution de  $\mathcal{P}(\Theta)$  puisque :

$$f(\lambda^{(i)}) = \inf_{\lambda \in M(\Theta_i)} f(\lambda) \leq \inf_{\lambda \in M(\Theta)} f(\lambda) \leq f(\lambda^{(i)}).$$

Etant donnée une précision  $\varepsilon > 0$  souhaitée, on fournit dans [19, Lemme 2] un encadrement de la valeur optimale du problème relaxé original :

$$\frac{-\mu^{(i)}}{1 + \varepsilon} \leq \bar{\eta} \leq -\mu^{(i)}. \quad (4.22)$$

Ainsi, l'Algorithme 6 fournit une bonne approximation du cout optimal  $\bar{\eta}$  du problème initial. Une fois le Problème 4.6 résolu, il reste à retrouver les dates des impulsions et les incréments de vitesse. Pour cela, on exploite les résultats de L. Neustadt [201, Théorème 3] résumés par (4.18-4.20). Dans les grandes lignes, étant donnée une grille  $\Gamma_d$  de points de discrétisation de  $[\nu_0, \nu_f]$ ,

1. Chercher les dates  $\hat{\nu}_k \in \Gamma_d$  auxquelles la norme du vecteur efficacité est égale à 1. Numériquement on cherche :  $\Gamma = \{\hat{\nu}_k \in [\nu_0, \nu_f] : \|Y(\hat{\nu}_k)^T \lambda^{(i)}\|_q \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]\}$ .
2. Résoudre le système (4.18) :

$$z_f = \sum_{\hat{\nu}_i \in \Gamma_{imp}} Y(\hat{\nu}_i) \Delta V_i,$$

ce qui est toujours possible d'après [201]. Soit  $\Gamma$  est de cardinal au plus  $n$  ( $\Gamma_{imp} = \Gamma$ ) et le système est sous-déterminé ou déterminé auquel cas il existe bien au moins une solution. Soit  $\Gamma$  est de cardinal supérieur à  $n$  et dans ce cas, on sélectionne  $n$  dates dans  $\Gamma$  ( $\Gamma_{imp} \subset \Gamma$  et  $card \Gamma_{imp} = n$ ) de sorte que le système (4.18) ait une solution.

### 4.3.3 Résultats analytiques pour le problème hors-plan

Comme précédemment, commençons par le problème du rendez-vous hors-plan : tout d'abord, il est intéressant de se demander si, par l'approche des moments, on retrouve la solution analytique du Paragraphe 4.2.2, puis de tester les algorithmes de discrétisation (cf Algorithme 6) et de reconstruction sur un exemple dont on connaît la solution analytique.

La formulation SICIP du problème du rendez-vous hors-plan ( $n = 2$  et  $r = 1$ ) est la suivante :

$$\min_{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2} -c^T \lambda \quad \text{sous : } -1 \leq \frac{-\lambda_1 \sin(\nu) + \lambda_2 \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)} \leq 1, \quad \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f]. \quad (4.23)$$

Le problème (4.23) est un problème de programmation linéaire en dimension 2 que l'on résout analytiquement par des considérations géométriques sur la forme de son domaine admissible : celui-ci dépend à la fois de l'excentricité de l'orbite de référence et de la durée du rendez-vous. Bien qu'il soit toujours convexe, il peut ainsi prendre différentes formes (cf Figure 4.3.3).

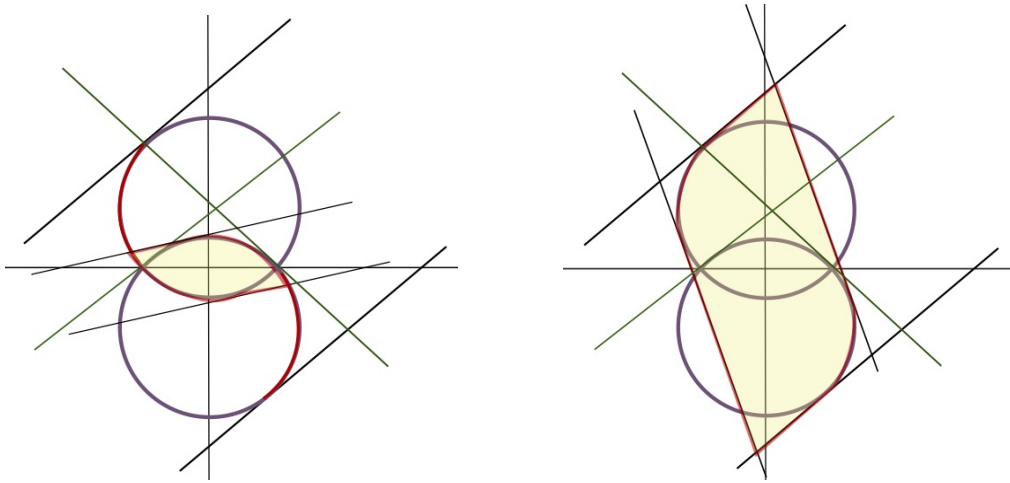


FIGURE 4.5 – Exemples de formes du domaine admissible du problème (4.23).

La solution optimale analytique du Problème (4.23) est obtenue classiquement en cherchant le point  $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$  pour lequel la droite de coefficient directeur  $-z_{f,1}/z_{f,2}$  et d'ordonnée minimum est tangente au domaine admissible. Suivant la géométrie du domaine admissible et les valeurs des paramètres  $z_{f,1}$  et  $z_{f,2}$ , on retrouve les 8 cas présentés dans [258, 256] pour la solution analytique du problème du rendez-vous hors-plan et obtenus à l'aide de développements lourds. Une fois la solution  $\bar{\lambda}$  obtenue analytiquement, il ne reste plus qu'à appliquer l'algorithme de reconstruction pour retrouver les date et les impulsions optimales.

#### 4.3.4 Tests numériques pour le problème du rendez-vous

Les algorithmes de discrétisation et de reconstruction ont été implémentés par N. Deak et M. Joldes en langage C. Les problèmes SDP discrétisés sont résolus grâce au logiciel SDPA développé par Yamashita et al. [281]. A nouveau, le problème du rendez-vous est résolu en découplant le problème hors-plan du problème co-planaire [19, 20].

##### Manœuvres hors-plan pour une mission GTO (*Geostationary transfer orbit*)

Dans le cas hors-plan, l'algorithme retrouve exactement et rapidement la solution analytique décrite dans [258, 256] pour le problème du rendez-vous elliptique hors-plan.

##### Manœuvres co-planaires pour une mission ATV (*Automated Transfer Vehicle*)

Un avantage de la formulation SICP du rendez-vous est de s'appliquer aussi bien au rendez-vous en norme  $\mathcal{L}_{1,1}$  qu'en norme  $\mathcal{L}_{1,2}$  qui sont les deux cas considérés en pratique :

- Pour le rendez-vous en norme  $\mathcal{L}_{1,1}$ , la formulation SICP du problème s'écrit :

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} -z_f^\top \lambda \quad \text{sous} \quad \|Y(\nu)^\top \lambda\|_\infty \leq 1. \quad (4.24)$$

Il s'agit donc d'un problème de programmation linéaire semi-infini.

- Pour le rendez-vous en norme  $\mathcal{L}_{1,1}$ , la formulation SICP du problème s'écrit :

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} -z_f^\top \lambda \quad \text{sous} \quad \|Y(\nu)^\top \lambda\|_2 \leq 1. \quad (4.25)$$

Il s'agit donc d'un problème de programmation semi-définie positive (SDP).

Ces deux formulations sont des instances particulières du problème SICP général (4.21) dont les versions discrétisées peuvent être résolues numériquement efficacement. Les algorithmes de discrétisation et de reconstruction ont été testés sur plusieurs exemples réalistes, et en particulier sur une mission ATV [160] sur laquelle l'algorithme mixte présenté au Paragraphe 4.2.3 avait été mis en défaut dans le cas  $\mathcal{L}_{1,2}$ . La solution optimale illustrée sur la Figure 4.3.4, a été obtenue en 6 itérations pour une précision  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Les tests numériques mettent en évidence la simplicité, la rapidité et la fiabilité de cette nouvelle approche.

## 4.4 Conclusion et perspectives

La seconde approche pour la résolution du problème du rendez-vous relaxé et transformé en un problème SICP, présente plusieurs avantages par rapport aux approches indirectes présentées dans la première partie de ce chapitre : tout d'abord, elle est plus générique dans le sens où elle permet la résolution du problème du rendez-vous impulsif, aussi bien en norme  $\mathcal{L}_{1,1}$  qu'en norme  $\mathcal{L}_{1,2}$ . Dans le cas de la norme  $\mathcal{L}_{1,2}$ , on retrouve de façon élégante la solution analytique du problème hors-plan par des arguments géométriques simples, et sans les développements analytiques lourds de la première étude [258, 256]. Enfin, l'algorithme de résolution proposé pour la résolution du problème SICP (en dimension finie) est simple, rapide et fiable.

Plusieurs pistes de recherche à court terme sont envisagées : analyser la vitesse de convergence de l'Algorithme 6, travailler sur l'interprétation géométrique de cette formulation et voir s'il ne serait pas possible d'obtenir une solution analytique du problème co-planaire.



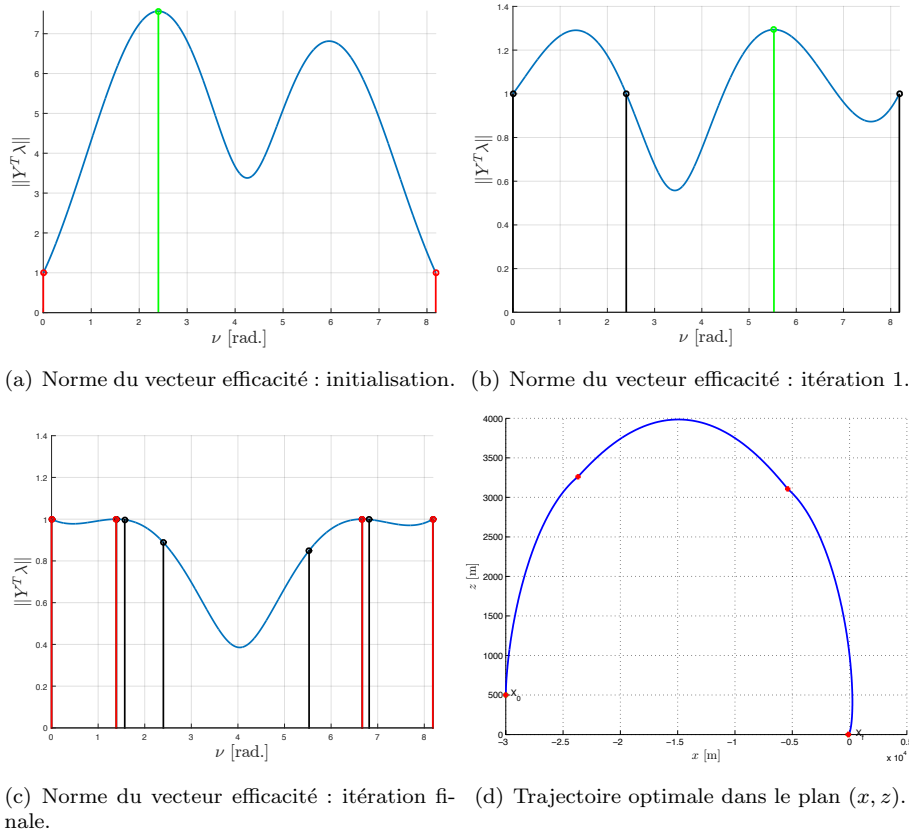


FIGURE 4.6 – Solution optimale à 4 impulsions du rendez-vous en norme  $\mathcal{L}_{1,2}$  pour un exemple ATV [160] - Consommation optimale : 10.7989  $m/s$  au lieu de 11.01 par l'algorithme mixte.

A plus long terme, un sujet que j'aimerais explorer, est la justification de l'hypothèse impulsionnelle pour le problème de commande optimale initial (cf Problème 4.1). Cela suggère d'analyser la littérature dédiée à ce type de problématique, indépendamment de l'application particulière du rendez-vous spatial (cf [235, 261, 66, 67] entre autres). Cette hypothèse, régulièrement utilisée dans le domaine spatial, implique que l'espace des commandes admissibles peut contenir des fonctions ordinaires mais aussi des fonctions généralisées. Cette classe de problèmes nécessite un appareil mathématique sophistiqué (théorie de la mesure et analyse non différentiable entre autres) et fait l'objet de recherches actuelles, en particulier afin d'étendre le principe du maximum de Pontryagin à cette classe de problèmes.



## Chapitre 5

# Evaluation du risque et calcul de manœuvres pour l'évitement de collision

Au cours des dernières décennies, le nombre de débris spatiaux en orbite autour de la Terre n'a cessé d'augmenter. Provenant de satellites ou d'étages supérieurs de lanceurs, ces débris représentent maintenant la majorité des objets en orbite, et constituent une menace réelle pour les engins spatiaux opérationnels. Tous ces objets (satellites actifs et débris) sont sous surveillance constante. Dès qu'une collision potentielle est prédite, un message d'alerte est envoyé à l'opérateur qui décide ou non d'effectuer une ou plusieurs manœuvres d'évitement si le risque est jugé trop grand. Une ou plusieurs manœuvres de retour sur la trajectoire nominale peuvent également être nécessaires. Enfin, afin de réduire au maximum l'impact d'une telle mesure sur la durée de vie du satellite, on cherche à réaliser les manœuvres d'évitement de collision qui minimisent la consommation de carburant du satellite opérationnel.

Le cadre général du problème d'évitement de collision étudié dans ce chapitre, est celui d'un satellite actif menacé par un débris spatial non contrôlé. Les données concernant les positions et vitesses des deux objets à un instant de référence fixé sont supposées connues. Ces informations sont fournies par le JSpOC (*Joint Space Operations Center*) dont l'objectif principal est de détecter, suivre, identifier et cataloguer tous les objets artificiels orbitant autour de la Terre. L'opérateur et/ou le propriétaire d'un satellite en opérations possèdent également des données de restitution d'orbite qui peuvent être croisées avec celles du JSpOC. Outre les informations concernant le temps de rapprochement minimal ou la distance minimale entre les deux objets, les messages d'alerte (CSM - *Conjunction Summary Message*) fournis par le JSpOC, contiennent également des informations statistiques sur la position et la vitesse des deux objets. L'évaluation du risque de collision se reformule alors naturellement en un problème de calcul de probabilité de collision. L'objectif est alors d'évaluer le risque de collision entre les deux corps afin de pouvoir programmer une éventuelle manœuvre d'évitement permettant la conservation du satellite opérationnel.

Cette problématique a fait l'objet de la thèse de R. Serra co-encadrée avec D. Arzelier et soutenue en décembre 2015. Ce chapitre rend compte des travaux effectués au cours de la thèse en collaboration avec D. Arzelier et M. Joldes : après avoir présenté le problème de l'évitement de collision et le cadre de travail que nous nous sommes fixés, nous nous intéressons dans un premier temps à l'évaluation du risque de collision, i.e. au calcul de la probabilité de collision entre deux objets. Une contribution importante a été de proposer une nouvelle méthode de calcul de la probabilité de collision en rencontre rapide, et de la probabilité instantanée de collision, sous incertitude gaussienne pour des objets à géométrie sphérique [253, 254]. Dans un second temps, nous nous intéressons au calcul de manœuvres d'évitement dans le cas où le risque est jugé trop important. Dans toute l'étude, les poussées sont supposées impulsives. Les travaux ont été organisés autour de l'étude de deux cas particuliers (les rapprochements rapides [257] et les

rapprochements lents [255]), où des hypothèses spécifiques permettent d’obtenir des solutions. Dans les deux cas, le problème d’évitement de collision se reformule comme un problème d’optimisation sous contrainte en probabilité.

## 5.1 Modèles de rencontre

Considérons un système composé de deux objets spatiaux en orbite autour de la Terre : l’un des deux objets, appelé *objet primaire*, est typiquement un satellite actif, et le second, appelé *objet secondaire*, un débris spatial quelconque. Les alertes de collision envoyées aux opérateurs, contiennent des informations sur la géométrie, la position et la vitesse des deux objets à une date de référence. Par exemple dans le cas des alertes envoyées par le JSpOC, cette date de référence correspond au temps de plus proche passage, c’est-à-dire la date à laquelle la distance entre les trajectoires moyennes des deux objets est la plus petite. Les positions et vitesses initiales des deux objets sont supposées incertaines, le message d’alerte fournissant l’espérance et la matrice de covariance associées à chaque objet.

### 5.1.1 Définition du modèle général de rencontre

Soient  $x_p = (r_p, v_p)$  et  $x_s = (r_s, v_s)$  les vecteurs position et vitesse des centres de gravité respectifs des deux objets dans un repère de référence  $\mathcal{R}$ , qui peut être le repère inertiel attaché au centre de la Terre ou bien un repère local. Sans hypothèse supplémentaire, les équations du mouvement, supposées déterministes, s’écrivent de façon très générale sous la forme :

$$\frac{dv_p}{dt}(t) = f_p(t, x_p(t), u(t)), \quad \frac{dv_s}{dt}(t) = f_s(t, x_s(t)), \quad (5.1)$$

où  $u$  désigne le vecteur de commande du satellite actif  $p$  proportionnel à son accélération comme au chapitre précédent. Ces équations tiennent compte de l’attraction gravitationnelle newtonienne et d’éventuelles perturbations orbitales (non-sphéricité de la Terre, frottement atmosphérique, par exemple). Quel que soit le modèle adopté, on suppose que, pour des conditions initiales données, les solutions  $(x_p, x_s)$  du système (5.1) existent et sont uniques.

Notons  $X_p^0$  et  $X_s^0$  les vecteurs aléatoires de position et vitesse des objets primaire et secondaire à l’instant de référence noté  $t_0$ , dans le repère  $\mathcal{R}$ . Leurs espérances  $\mu_p^0$  et  $\mu_s^0$  et matrices de covariance  $\Sigma_p^0$  et  $\Sigma_s^0$  sont données par le message d’alerte, mais pas la loi de probabilité suivie par ces variables. Une hypothèse standard [81] consiste à supposer que les deux objets sont non corrélés :

**Hypothèse 5.1** Les vecteurs aléatoires  $X_p^0$  et  $X_s^0$  sont non corrélés (i.e. de covariance nulle).

Classiquement les deux objets sont modélisés par des boules [3, 217, 6, 81, 89] : cette hypothèse permet d’ignorer les aspects liés à l’orientation des objets, et de modéliser de manière conservative l’objet secondaire dont la géométrie est souvent mal connue (cf Figure 5.1).

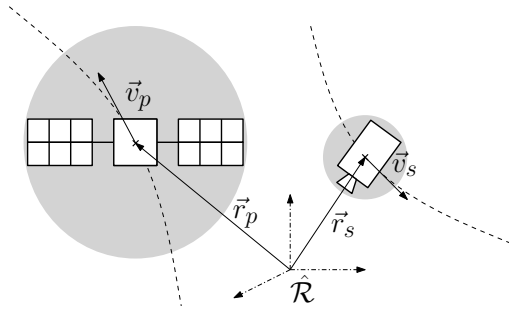


FIGURE 5.1 – Profil d’une rencontre entre deux objets sphériques.

**Hypothèse 5.2 (Géométrie sphérique)** *Les objets primaire et secondaire sont modélisés par des boules de diamètres respectifs  $R_p$  et  $R_s$ .*

Quelques auteurs se sont intéressés à des géométries différentes comme des polyèdres, ou des unions de polyèdres [216, 6, 81] : ces modèles permettent une modélisation plus fine de structures complexes telles que la Station Spatiale Internationale.

**Hypothèse 5.3 (Géométrie polyédrale)** *Les objets primaire et secondaire sont modélisés par des polyèdres convexes (définis comme des intersections de demi-espaces dans  $\mathbb{R}^3$ ).*

### 5.1.2 Définition de la probabilité de collision

Notons  $\mathcal{I} = [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$  l'intervalle de temps de la rencontre. Le domaine de collision  $D_c(\mathcal{I})$  sur l'intervalle de temps  $\mathcal{I}$  est défini comme l'ensemble des conditions initiales  $(x_p^0, x_s^0) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$  conduisant à une collision à un instant  $\hat{t} \in \mathcal{I}$ .

Dans le cadre de la modélisation sphérique (Hypothèse 5.2), les objets primaire et secondaire entrent en collision s'il existe un  $\hat{t} \in \mathcal{I}$  tel que leur distance relative devient inférieure au rayon combiné  $R = R_p + R_s$  des deux objets. Le domaine de collision est alors défini par :

$$D_c(\mathcal{I}) = \{(x_p^0, x_s^0) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 : \exists t \in \mathcal{I}, \|r_p(t) - r_s(t)\|_2 \leq R\}. \quad (5.2)$$

Dans l'espace des positions relatives, le domaine de collision est assimilable à un instant donné à une boule (fictive) de rayon  $R$ , appelée objet combiné (cf Figure 5.2) :

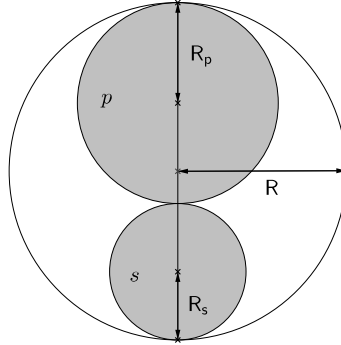


FIGURE 5.2 – Sphère combinée de deux objets à géométrie sphérique.

Ces définitions s'étendent au cas où les objets primaire et secondaire sont supposés à géométrie polyédrale : l'objet combiné est un polyèdre convexe dans l'espace des positions relatives, que l'on suppose constant au cours du temps. Cette hypothèse conservative est par exemple satisfaite si l'on choisit un polyèdre convexe englobant la sphère combinée. Si  $\{r \in \mathbb{R}^3 : Cr \leq d\}$  est l'objet combiné, alors le domaine de collision est défini par :

$$D_c(\mathcal{I}) = \{(x_p^0, x_s^0) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 : \exists t \in \mathcal{I}, C(r_p(t) - r_s(t)) \leq d\}. \quad (5.3)$$

Dans les deux cas, la probabilité de collision sur l'intervalle de temps  $\mathcal{I}$  est définie par :

$$\mathcal{P}_c(\mathcal{I}) := \mathbb{P}((X_p^0, X_s^0) \in D_c(\mathcal{I})) = \int \dots \int_{D_c(\mathcal{I})} d\rho_{(X_p^0, X_s^0)}, \quad (5.4)$$

où  $\rho_{(X_p^0, X_s^0)}$  désigne la densité de probabilité du couple de vecteurs aléatoires  $(X_p^0, X_s^0)$ .

### 5.1.3 Hypothèses et cadre de travail

Les rencontres peuvent être classifiées selon deux familles : les rencontres rapides (*short-term encounter*) [3, 81, 88, 111] et les rencontres lentes (*long-term encounter*) [81, 99].

Les rencontres rapides se caractérisent par une vitesse relative moyenne élevée supérieure au km/s, et par un temps de rencontre de l'ordre de la fraction de seconde. De telles rencontres se produisent typiquement en orbite basse où les vitesses orbitales sont assez élevées. Les hypothèses classiques du modèle de rapprochement rapide sont les suivantes [81, 88] :

#### Hypothèse 5.4 (Modèle de rencontres rapides)

- (H<sub>1</sub>) *La trajectoire relative est supposée rectiligne uniforme pendant la rencontre.*
- (H<sub>2</sub>) *Les vitesses des deux objets sont supposées déterministes à l'instant de référence t<sub>0</sub>.*
- (H<sub>3</sub>) *Les vecteurs positions des deux objets à l'instant t<sub>0</sub> sont supposés gaussiens :*

$$R_p^0 \sim \mathcal{N}_3(\mu_p^0, \Sigma_p^0), \quad R_s^0 \sim \mathcal{N}_3(\mu_s^0, \Sigma_s^0).$$

- (H<sub>4</sub>) *Chaque objet est supposé à géométrie sphérique.*
- (H<sub>5</sub>) *Le volume balayé par la sphère combinée des deux objets au cours de la rencontre, est un cylindre infini orienté selon la vitesse relative, appelé tube de collision.*

L'hypothèse de vitesse relative rectiligne uniforme conduit naturellement à choisir, comme cadre de l'étude, un repère centré sur la position moyenne de l'objet primaire, et dont l'un des axes ( $\tilde{z}$ ) est orienté selon la vitesse relative. Les deux autres axes sont orthogonaux à la vitesse relative et définissent le plan de rencontre [111, 3, 216]. L'axe  $\tilde{x}$  pointe vers la projection orthogonale de la position relative moyenne et l'axe  $\tilde{y}$  complète le repère.

Les rencontres lentes entre deux satellites ou un satellite et un débris sont de plus en plus courantes dans le cadre de vol en formation ou d'opérations de proximité. Elles se caractérisent par des vitesses relatives de l'ordre du m/s, et correspondent à des situations où les deux objets passent un temps significatif à proximité l'un de l'autre. On considère qu'au cours de la rencontre, leurs distances respectives à la position de référence de l'objet primaire sont négligeables devant leurs distances respectives au centre de la Terre. Cette hypothèse permet de linéariser les équations du mouvement. Les hypothèses classiques sont les suivantes :

#### Hypothèse 5.5 (Modèle de rencontres lentes)

- (H<sub>1</sub>) *Les équations du mouvement des objets primaire et secondaires sont supposées linéarisées au voisinage de l'orbite de référence.*
- (H<sub>2</sub>) *Les vecteurs position-vitesse des deux objets sont supposés gaussiens au temps t<sub>0</sub> :*

$$X_p^0 \sim \mathcal{N}_6(\mu_p^0, \Sigma_p^0), \quad X_s^0 \sim \mathcal{N}_6(\mu_s^0, \Sigma_s^0).$$

Les équations du mouvement sont exprimées dans un repère mobile LVLH attaché à la trajectoire nominale de l'objet primaire (cf Chapitre 4). Sous des hypothèses képlériennes, ces équations sont décrites par le modèle de Tschauner-Hempel [269] et la matrice de transition d'état de Yamanaka-Ankersen [280] associée. Notons  $X_p = (R_p, V_p)$  et  $X_s = (R_s, V_s)$  les coordonnées respectives des vecteurs position-vitesse des deux objets dans le repère de travail. La propagation de ces vecteurs d'état se fait linéairement selon les équations suivantes :

$$X_p(t) = \Phi(t, t_0)X_p^0 + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ t_i \leq t}} \Phi(t, t_i)B\Delta V_i, \quad X_s(t) = \Phi(t, t_0)X_s^0, \quad (5.5)$$

où  $\Phi$  est la matrice de Yamanaka-Ankersen et  $B = [0_{3 \times 3} \ I_3]^\top$ . La dynamique étant linéaire, la nature gaussienne des incertitudes est conservée au cours du temps. Ainsi, à tout instant  $t$  de la rencontre, on a :

$$X_p(t) \sim \mathcal{N}_6(\mu_p^t, \Sigma_p^t), \quad X_s(t) \sim \mathcal{N}_6(\mu_s^t, \Sigma_s^t),$$

avec :

$$\begin{aligned}\mu_p^t &= \Phi(t, t_0)\mu_p^0 + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ t_i \leq t}} \Phi(t, t_i)B\Delta V_i, & \Sigma_p^t &= \Phi(t, t_0)\Sigma_p^0\Phi(t, t_0)^\top, \\ \mu_s^t &= \Phi(t, t_0)\mu_s^0, & \Sigma_s^t &= \Phi(t, t_0)\Sigma_s^0\Phi(t, t_0)^\top,\end{aligned}\tag{5.6}$$

Le vecteur position et vitesse relatives  $X(t) = X_p(t) - X_s(t)$  suit lui aussi une loi gaussienne :

$$X(t) \sim \mathcal{N}_6(\mu^t = \mu_p^t - \mu_s^t, \Sigma^t = \Sigma_p^t + \Sigma_s^t).$$

## 5.2 Evaluation du risque de collision

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'évaluation du risque de collision entre deux objets à géométrie sphérique en orbite autour de la Terre i.e. au calcul de la probabilité :

$$\mathcal{P}_c(\mathcal{I}) := \mathbb{P}((X_p^0, X_s^0) \in D_c(\mathcal{I})) = \int \dots \int_{D_c(\mathcal{I})} d\rho_{(X_p^0, X_s^0)},\tag{5.7}$$

Le calcul analytique de cette probabilité est un problème très difficile : tout d'abord, il faut déterminer analytiquement le domaine d'intégration qui dépend fortement du modèle dynamique adopté, puis il faut pouvoir intégrer la densité de probabilité sur cet ensemble, ce qui est en général très complexe, même pour des distributions gaussiennes [81].

Une méthode générale pour le calcul de la probabilité de collision est basée sur les méthodes de Monte-Carlo [8]. Malheureusement le nombre de tirages nécessaires augmente drastiquement avec la précision souhaitée, ce qui en fait une méthode très coûteuse en temps et peu adaptée au calcul de probabilités de faibles valeurs. C'est pourquoi plusieurs méthodes alternatives ont été proposées. Par ordre chronologique d'apparition, citons dans le cadre des rapprochements rapides, les méthodes de Foster [111], Patera [216] et Alfano [5] basées sur des schémas d'intégration numérique, puis la méthode de Chan [82, 81] basée sur une formule analytique de la probabilité de collision comme somme d'une série à termes positifs. L'inconvénient est que cette formule n'est qu'une approximation de l'intégrale de départ et que la différence entre les deux est difficilement quantifiable. Dans le cadre des rapprochements lents, K. Chan [81] a proposé deux méthodes de calcul de la probabilité instantanée (Volumes équivalents et Approximation des distributions), mais cela reste des méthodes approchées.

Une contribution importante de la thèse de R. Serra a été de proposer une nouvelle méthode de calcul de la probabilité de collision en rencontre rapide et de la probabilité instantanée de collision sous incertitude gaussienne pour des objets à géométrie sphérique. Cette méthode a l'avantage d'être fondée sur une formule analytique exacte sous la forme d'une série convergente à termes positifs. Des bornes analytiques sur la probabilité de collision sont données, ce qui représente un outil mission essentiel car l'évaluation presque instantanée de cet encadrement permet de statuer rapidement sur l'importance du risque, sans avoir à calculer au préalable la probabilité de collision. Dans ce mémoire, nous nous contentons d'en rappeler le principe général ainsi que les résultats clés. Le lecteur intéressé par les détails techniques et les algorithmes complets, pourra se référer à la thèse de R. Serra [252] ou aux articles [253, 254] pour les rapprochements rapides et [255] pour le calcul de la probabilité instantanée.

### 5.2.1 Formule analytique pour des objets à géométrie sphérique

Sous les hypothèses de rapprochement rapide (Hypothèses 5.4), la probabilité de collision se ramène au calcul d'une intégrale en dimension 2 dans le plan de rencontre :

$$\mathcal{P}_c(\mathcal{I}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \iint_{\mathcal{B}_2(0, R)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right) dx_1 dx_2.\tag{5.8}$$

Dans un cadre plus général où l'on suppose seulement que les incertitudes sur la position à un instant  $t$  donné sont gaussiennes, la probabilité instantanée de collision s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{P}_c(\{t\}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \iiint_{\mathcal{B}_3(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) dx. \quad (5.9)$$

C'est par exemple le cas pour des rapprochements lents (Hypothèses 5.5) pour lesquels l'incertitude initiale est gaussienne, et la dynamique linéaire en la variable d'état.

**Remarque 5.1** *Les expressions simplifiées (5.8) et (5.9) de la probabilité de collision sont obtenues après des changements de variables vers la base propre de la matrice de covariance de la position relative et d'une rotation permettant d'aligner le repère avec les axes principaux de cette matrice diagonalisée (cf [252, Chapitre 1] ou [254] pour le détail de ces calculs).*

Dans les deux cas, la probabilité (notée  $\mathcal{P}_c$  pour simplifier la présentation) s'écrit comme l'intégrale d'une fonction gaussienne multi-variée sur une boule euclidienne de dimension  $d \in \{2, 3\}$  et de rayon  $R$  (rayon de la sphère combinée). De façon générique, on définit :

$$g(\zeta) = \left( (2\pi)^{d/2} \prod_{i=1}^d \sigma_i \right)^{-1} \int_{\mathcal{B}_d(0, \sqrt{\zeta})} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) dx.$$

On a donc :  $\mathcal{P}_c = g(R^2)$ . Le principe de la méthode et les outils utilisés sont les suivants :

1. Calculer la transformée de Laplace  $\mathcal{L}[g](s)$  de  $g$  pour laquelle on dispose d'une expression analytique explicite. Développer  $\mathcal{L}[g](s)$  en série de Laurent au voisinage de 0.
2. Appliquer terme à terme la transformée de Laplace inverse de la série. Ceci est justifié par des résultats d'analyse complexe [277, Chapitre 2.14] et permet d'obtenir un développement en série entière de l'intégrale de départ.
3. Déterminer la relation de récurrence vérifiée par les coefficients de la série : en s'appuyant sur la théorie et les propriétés des fonctions D-finies (ou holonomes [284, 243] : ce sont des fonctions satisfaisant une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux), on démontre que ces coefficients vérifient une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en la variable entière (l'indice du coefficient).

D'un point de vue numérique, l'évaluation directe de la série obtenue pour  $g$  peut être problématique : en effet, bien que la série soit convergente, l'évaluation des sommes partielles en précision finie souffre du phénomène de compensation. Plus précisément, deux termes consécutifs de la série sont de signes opposés et de même ordre de grandeur. Ils se compensent et leur somme, calculée en précision finie, ne comprend que peu de chiffres significatifs corrects. Pour empêcher ce phénomène, l'idée est de préconditionner la fonction  $g$  par une fonction  $\psi$  elle-même D-finie : on applique alors la méthode précédente à la fonction  $\psi g$  au lieu de  $g$ . En choisissant judicieusement le preconditionnement  $\psi$ , on s'assure que  $\psi$  et  $\psi g$  peuvent être calculées efficacement. Dans notre cas, en s'appuyant sur la méthode présentée dans [118], le preconditionnement choisi est :  $\psi(\xi) = e^{p\xi}$ ,  $p = 1/(2\sigma_d^2)$ . Ce choix a permis de montrer simplement que les termes de la série sont cette fois-ci tous positifs, et de faire le lien avec la formule analytique 2D proposée par Chan dans [81, Chapitre 4] dans le cas isotrope ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

Finalement, la probabilité de collision est de la forme :

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_d^2}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k R^{2k}, \quad (5.10)$$

où  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite dont les termes sont strictement positifs et satisfont une formule de récurrence linéaire explicite à coefficients polynomiaux (en  $k$ ).



## 5.2.2 Bornes analytiques sur la probabilité de collision et calcul certifié

Un des points forts des travaux de thèse de R. Serra avec la collaboration de M. Joldes a été de proposer une évaluation certifiée de la probabilité de collision, c'est-à-dire de garantir le calcul de cette probabilité pour n'importe quelle précision donnée.

Soit  $\mathcal{P}_n$  la somme partielle d'ordre  $n$  de la probabilité de collision sous la forme (5.10) :

$$\mathcal{P}_n = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_d^2}\right) \sum_{k=1}^n \beta_k R^{2k}.$$

La série étant à termes positifs, la somme partielle  $\mathcal{P}_n$  est une borne inférieure de la probabilité de collision. Pour avoir un calcul garanti de cette probabilité, il est nécessaire d'avoir également une borne supérieure. Les résultats obtenus et publiés dans [254] sont les suivants :

1. Encadrement analytique de l'erreur de troncature :  $l_n \leq \mathcal{P}_c - \mathcal{P}_n \leq u_n$ .
2. Encadrement analytique de la probabilité de collision :  $l_0 \leq \mathcal{P}_c \leq u_0$ .
3. Estimation du nombre minimum  $n$  de termes nécessaires dans  $\mathcal{P}_n$  pour avoir une précision donnée sur le calcul de la probabilité de collision.

La méthode a été validée sur plusieurs cas tests issus de la littérature ou d'alertes réelles envoyées par le JSPOC à notre partenaire industriel Airbus Defence and Space. S. Alfano, rapporteur pour l'article [254], a également fait un gros travail de test et de validation de cette nouvelle méthode. Le CNES aurait testé avec succès plus de 220000 cas : les résultats obtenus seraient globalement très bons et la méthode effectivement très stable et très rapide <sup>1</sup>.

Les formules obtenues pour  $l_0$  et  $u_0$  sont simples et suffisantes dans la plupart des cas testés au sens où elles fournissent une estimation fine du risque associé à la rencontre (cf Table 5.1). Concernant le nombre de termes  $n$  utilisés pour l'estimation de la probabilité de collision, il est de l'ordre d'une trentaine de termes pour une erreur absolue de  $10^{-10}$  et d'une quinzaine de termes pour une erreur absolue de  $10^{-5}$ . Sur les cas tests de S. Alfano construits pour éprouver les méthodes, le nombre de termes peut exploser dans certains cas dégénérés : ces cas se produisent lorsque la convergence de la série donnée par (5.10), est très lente. M. Joldes et B. Salvy travaillent actuellement sur des méthodes de point col pour évaluer le comportement asymptotique de la probabilité de collision, et proposer une nouvelle formule analytique de la probabilité de collision encore plus simple et plus efficace que la précédente.

Cas	$l_0$	$u_0$
CSM 1	$1.878 \times 10^{-3}$	$1.900 \times 10^{-3}$
CSM 2	$2.0101 \times 10^{-11}$	$2.0557 \times 10^{-11}$
CSM 3	$7.194 \times 10^{-5}$	$7.200 \times 10^{-5}$
CDM 1	$5.3902 \times 10^{-7}$	$5.3904 \times 10^{-7}$
CDM 2	$2.2517 \times 10^{-20}$	$2.2797 \times 10^{-20}$

TABLE 5.1 – Quelques exemples d'encadrements de la probabilité de collision (2D) pour quelques alertes réelles en rapprochement rapide, fournies par Airbus DS.

Dans le cas de la probabilité de collision instantanée (en 3D), on remarque dans le Tableau 5.2 que dans certains cas, les bornes  $l_0$  et  $u_0$  sont du même ordre de grandeur et fournissent donc une estimation quantifiable et utile de la probabilité de collision. Dans d'autres cas, l'encadrement est trop large pour être réellement utile. Ceci est du au fait qu'en 3D les inégalités théoriques obtenues sont bien plus larges que celles obtenues en 2D. En conséquence il faut également un nombre beaucoup plus élevé de termes (entre 1 et 496 termes pour les exemples présentés) pour obtenir une bonne approximation de la probabilité de collision.

1. Communication informelle

Paramètres (m)			Probabilités (-)		
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$R$	$\mu_1, \mu_2, \mu_3$	$l_0$	$\mathcal{P}_c$	$u_0$
1,2,3	1	0,0,1	$2.27 \times 10^{-2}$	$3.68 \times 10^{-2}$	$6.23 \times 10^{-2}$
1,2,3	1	0,0,10	$9.27 \times 10^{-5}$	$1.70 \times 10^{-4}$	$3.05 \times 10^{-4}$
1,2,3	10	0,0,1	$2.52 \times 10^{-2}$	$9.98 \times 10^{-1}$	$5.84 \times 10^{17}$
2,3,10	1	0,1,0	$2.90 \times 10^{-3}$	$4.05 \times 10^{-3}$	$6.20 \times 10^{-3}$
2,3,10	1	0,10,0	$1.18 \times 10^{-5}$	$1.86 \times 10^{-5}$	$2.99 \times 10^{-2}$
2,3,10	10	0,1,0	$4.03 \times 10^{-2}$	$6.41 \times 10^{-1}$	$4.99 \times 10^3$

TABLE 5.2 – Quelques exemples d’encadrements de la probabilité de collision instantanée (3D) pour des cas tests issus du Chapitre 13 du livre [81] de K. Chan.

### 5.3 Algorithmes pour le calcul de manœuvres d’évitement

Soit  $\varepsilon > 0$  le risque maximum autorisé. Supposons que le risque de collision, calculé à partir des données fournies par l’alerte, est supérieur au risque maximum autorisé i.e. :

$$\mathbb{P}((X_p^0, X_s^0) \in D_c(\mathcal{I})) > \varepsilon,$$

d’où la nécessité d’une manœuvre d’évitement. Il existe plusieurs formulations possibles du problème d’évitement de collision : une formulation possible serait, par exemple, de chercher la loi de guidage permettant de minimiser le risque de collision, sous contrainte que la consommation en fuel ne dépasse pas une valeur fixée à l’avance par l’opérateur, et que le satellite actif revienne sur sa trajectoire de référence à la fin de la rencontre. La formulation sur laquelle nous avons travaillé, est la suivante : chercher la loi de guidage minimisant la consommation en fuel du satellite actif, tout en ramenant la probabilité de collision sous le seuil  $\varepsilon$  toléré. En se plaçant dans le cadre de poussées impulsives, comme cela a été fait au Chapitre 4, le problème d’évitement de collision sur l’intervalle de temps  $\mathcal{I} = [t_0, t_f]$ , se formule de façon générique de la façon suivante :

**Problème 5.1 (Problème d’évitement de collision sous hypothèse impulsionnelle)**

Trouver un plan de manœuvre  $(N, t_1, \dots, t_N, \Delta V_1, \dots, \Delta V_N) \in \mathbb{N} \times \mathcal{I}^N \times (\mathbb{R}^3)^N$  solution de :

$$\min_{N, (t_i)_i, (\Delta V_i)_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_p \quad \text{sous : } \mathcal{P}_c^{\mathcal{I}}(N, t_1, \dots, t_N, \Delta V_1, \dots, \Delta V_N) \leq \varepsilon$$

$$b(N, t_1, \dots, t_N, \Delta V_1, \dots, \Delta V_N) = 0,$$

où  $\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}}$  désigne la probabilité de collision entre les deux objets après manœuvre et  $b$  correspond à des contraintes opérationnelles sur la trajectoire moyenne de l’objet primaire (par exemple, une contrainte finale de retour sur sa trajectoire de référence).

L’une des difficultés de ce problème réside dans la nature probabiliste de la contrainte et, plus précisément, dans la ré-évaluation du risque de collision après manœuvre. En effet, dans le cas général de dynamiques orbitales non-linéaires, l’introduction de manœuvres modifie la nature des vecteurs aléatoires qui ne sont donc plus nécessairement gaussiens. On ne peut alors plus appliquer les méthodes vues au Paragraphe 5.2. Ceci met en évidence la nécessité de travailler en utilisant des hypothèses simplificatrices et/ou des relaxations du Problème 5.1 afin d’obtenir des formulations plus exploitables algorithmiquement.

#### 5.3.1 Deux approches en rencontre rapide

Dans une première étude, nous nous sommes intéressés au problème d’évitement de collision reformulé dans le cadre des rencontres rapides (Hypothèses 5.4). Dans cette étude, nous avons considéré une version simplifiée du Problème 5.1 dans laquelle une unique impulsion  $\Delta V$  exécutée à une date  $\tau < t_0$  fixée à l’avance et antérieure à la rencontre, est autorisée. Le choix de cette

date peut être heuristique ou dicté par des contraintes opérationnelles. En pratique, une seule impulsion est généralement suffisante pour réduire le risque de collision sous un seuil acceptable [244] en l'absence de contrainte opérationnelle additionnelle.

Dans la littérature, le processus d'optimisation est souvent réalisé en deux temps : dans [218], les auteurs optimisent d'abord la direction de poussée, puis l'amplitude. Dans [244], la date et la direction de la manœuvre sont fixées *a priori*, l'objectif est de réaliser une distance de plus proche passage donnée. Les solutions obtenues sont sous-optimales. En supposant que le satellite dispose d'une unique tuyère orientable, et en n'imposant pas de condition sur la trajectoire moyenne de l'objet primaire, nous avons travaillé sur le problème simplifié suivant :

$$\min_{\Delta V} \|\Delta V\|_2^2 \text{ sous : } \mathcal{P}_c^{\mathcal{I}}(\Delta V, \Xi) \leq \varepsilon, \quad (5.11)$$

où  $\Xi = (R_p^0, R_s^0)$  est le couple des vecteurs aléatoires de position des deux objets au temps de référence  $t_0$ . La quantité  $\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}}(\Delta V, \Xi)$  désigne la probabilité de collision après manœuvre.

### Evaluation de la probabilité de collision après manœuvre

Dans le cas particulier des rencontres rapides (Hypothèses 5.4), le domaine de collision est un cylindre infini orienté selon la vitesse relative et de rayon  $R$  (cf Figure 5.3).

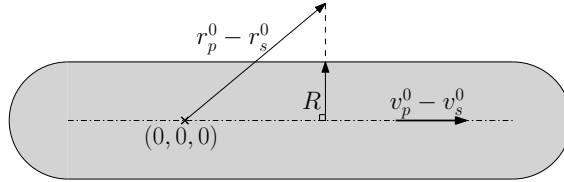


FIGURE 5.3 – Tube de collision dans le cas des rencontres rapides pour des objets à géométrie sphérique.

Ainsi, dans l'espace des positions initiales, la condition de collision est simplement qu'après manœuvre, la norme de la projection de la position relative sur le plan orthogonal à la vitesse relative soit inférieure ou égale à  $R$ . Autrement dit, étant donnée une réalisation  $\xi = (\xi_p, \xi_s)$  du vecteur aléatoire  $\Xi = (R_p^0, R_s^0)$ , la condition de collision est de la forme :

$$c(\Delta V, \xi) < 0, \quad (5.12)$$

avec :

$$c(\Delta V, \xi) = \|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|^2 - \left( (r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s)^\top \cdot \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|} \right)^2 - R^2, \quad (5.13)$$

où  $(r_p^0(\Delta V, \xi_p), v_p^0(\Delta V, \xi_p))$  est l'état propagé i.e. le vecteur de position et vitesse de l'objet primaire à l'instant  $t_0$  après qu'une manœuvre  $\Delta V$  ait été effectuée à l'instant  $\tau < t_0$ . A noter que, sous hypothèse képlérienne, les effets de la manœuvre (ou état propagé) peuvent être calculés analytiquement à l'aide des coefficients  $f$  et  $g$  de Lagrange [31, 245]. En injectant ces expressions dans (5.13), on obtient une expression analytique de la condition de collision (5.12) ne dépendant que de la manœuvre  $\Delta V$  et de l'incertitude  $\xi$ . Le problème d'évitement de collision simplifié s'écrit alors :

$$\min_{\Delta V} \|\Delta V\|_2^2 \text{ sous : } \mathbb{P}(c(\Delta V, \Xi) < 0) \leq \varepsilon, \quad (5.14)$$

La fonction contrainte  $c$  est non convexe mais différentiable par rapport à  $\Delta V$ . Le calcul de son gradient ne pose pas de problème particulier, et est détaillé dans [252, 257].

## Deux approches pour la résolution du problème simplifié (5.14) d'évitement de collision : approximation des distributions et méthode des scénarios.

Comme cela a été évoqué, la difficulté dans le cadre des rapprochements rapides provient du fait que les dynamiques non-linéaires modifient la nature des incertitudes au cours du temps. Pour pouvoir utiliser les formules de calcul de la probabilité de collision développées dans la première partie de la thèse et présentées au Paragraphe 5.2, il faudrait pouvoir garantir que le vecteur aléatoire de position  $r_p^0(\Delta V, \Xi)$  est gaussien, et que la vitesse  $v_p^0(\Delta V, \Xi)$  associée est déterministe. Pour cela, nous avons proposé deux approximations, respectivement à l'ordre 1 et à l'ordre 0, de ces deux quantités par rapport au paramètre incertain :

$$\begin{aligned} r_p^0(\Delta V, \xi) &\simeq r_p^0(\Delta V, \mathbb{E}(\Xi)) + \partial_2 r_p^0(\Delta V, \mathbb{E}(\Xi))(\xi - \mathbb{E}(\Xi)) \\ v_p^0(\Delta V, \xi) &\simeq v_p^0(\Delta V, \mathbb{E}(\Xi)) \end{aligned}$$

Sous ces conditions, le Problème (5.14) peut être résolu par des outils classiques d'optimisation. Il n'existe pas de garantie que la solution ainsi obtenue soit admissible pour le problème (5.14). Il est donc nécessaire de calculer le risque associé à cette solution *a posteriori* en utilisant par exemple une méthode de Monte-Carlo.

Une seconde approche a été proposée par la méthode dite des scénarios [73, 74] et publiée dans [257]. L'idée est la suivante : étant donné un tirage aléatoire  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , résoudre le problème de scénarios :

$$\min_{\Delta V} \|\Delta V\|_2^2 \text{ sous : } c(\Delta V, \xi_k) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.15)$$

La contrainte en probabilité a été remplacée par un nombre fini de contraintes déterministes (différentiables) plus faciles à manipuler. Le Problème (5.15) peut maintenant être résolu par des outils classiques d'optimisation différentiable sous contraintes. Un autre avantage de cette approche est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur la nature des incertitudes, à condition de pouvoir effectuer des tirages des vecteurs aléatoires  $(R_p^0, R_s^0)$ .

En revanche, se pose la question de l'admissibilité des solutions obtenues. Des garanties existent dans le cas convexe [74], mais ce n'est malheureusement pas le cas du problème (5.15). Plus précisément, si l'ensemble  $K_\xi = \{\Delta V \in \mathbb{R}^3 : c(\Delta V, \xi) \geq 0\}$  des manœuvres  $\Delta V$  ne conduisant pas à une collision, est convexe pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , il suffit de tirer  $n$  scénarios avec :

$$\sum_{i=0}^2 C_n^i \varepsilon^i (1 - \varepsilon)^{n-i} \leq \beta,$$

pour que la contrainte  $\mathbb{P}(c(\Delta V, \Xi) < 0) \leq \varepsilon$  soit satisfaite avec une probabilité égale à  $1 - \beta$ . Dans le cas non convexe, il n'existe actuellement aucune garantie théorique de l'admissibilité des solutions obtenues, même pour des  $n$  grands. A nouveau, il est donc nécessaire d'en vérifier l'admissibilité *a posteriori* en utilisant, par exemple, une méthode de Monte-Carlo.

Dans [257], nous avons proposé un algorithme itératif basé sur la méthode des scénarios pour la résolution du problème d'évitement de collision simplifié (5.14). : il s'agit de résoudre, un nombre de fois fixé à l'avance, le problème de scénarios (5.15) et de ne garder que les solutions admissibles pour le Problème (5.14) et améliorant le cout. Les expériences numériques menées sur des cas tests issus de la littérature [7] ou d'alertes envoyées par le JSpOC à notre partenaire industriel Airbus Defence and Space, ont montré qu'en pratique, même en l'absence de garantie théorique, l'approche par scénarios est un moyen efficace d'obtenir une solution admissible peu couteuse du Problème simplifié (5.14).

### 5.3.2 Rencontres lentes : de l'intérêt de la modélisation polyédrale

Revenons maintenant au problème d'évitement de collision sous sa forme générale 5.1. En plus de la contrainte en probabilité de non-collision, nous ajoutons une contrainte sur la trajectoire moyenne de l'objet primaire à savoir, ici, une contrainte de retour sur la trajectoire de référence

à l'instant final de la rencontre :  $\mathbb{E}[X_p(t_f)] = X_f$ . Sous les hypothèses de rapprochement lent, la dynamique des deux objets a été linéarisée au voisinage d'une orbite de référence de sorte que cette contrainte est linéaire en les paramètres de commande  $\Delta V_i$

Fixant *a priori* une grille de dates  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  auxquelles une manœuvre peut être effectuée, le problème d'évitement de collision en rapprochement lent s'écrit :

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_p \quad \text{sous :} \quad \mathcal{P}_c^{[t_0, t_f]}(N, t_1, \dots, t_N, \Delta V_1, \dots, \Delta V_N) \leq \varepsilon, \quad (5.16)$$

$$\Phi(t_f, t_0)\mu_p^0 + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i)B\Delta V_i = X_f.$$

A nouveau, la difficulté principale est l'évaluation de la probabilité de collision sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$ . Quelle que soit la géométrie des objets primaire et secondaire, on ne dispose pas à l'heure actuelle de formule satisfaisante pour le calcul de la probabilité de collision sur tout l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  de la rencontre : il faudrait pouvoir calculer l'ensemble des conditions initiales conduisant à une collision sur  $[t_0, t_f]$ , puis intégrer une fonction de densité gaussienne de dimension 3 sur cet ensemble. Une alternative serait d'utiliser une méthode de Monte-Carlo mais ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul. Nous avons donc préféré remplacer le problème (5.16) par un problème où la probabilité de collision sur  $[t_0, t_f]$  est remplacée par un nombre fini de probabilités de collision instantanées, plus faciles à évaluer. Plus précisément, on introduit une seconde grille de discrétisation  $\hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \dots < \hat{t}_{N'}$  de l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  (différente de la grille des instants  $t_i$  d'application des impulsions), puis on substitue au Problème (5.16) le problème suivant :

**Problème 5.2 (Problème d'évitement de collision avec probabilités instantanées)** Soit  $\varepsilon' > 0$  le risque maximum autorisé. Trouver  $(\Delta V_1, \dots, \Delta V_N)$  solution du problème :

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_p \quad \text{sous :} \quad \mathcal{P}_c^{\{\hat{t}_k\}}(\Delta V_1, \dots, \Delta V_N) \leq \varepsilon', \quad k = 1, \dots, N',$$

$$\Phi(t_f, t_0)\mu_p^0 + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i)B\Delta V_i = X_f.$$

Soulignons le fait que les probabilités instantanées du Problème 5.2 sont des minorants de la probabilité de collision sur tout l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$ . On leur impose donc une borne  $\varepsilon'$  plus petite que le risque maximum autorisé  $\varepsilon$ . Un choix heuristique consiste par exemple à prendre :  $\varepsilon' = \frac{T_0}{t_f - t_0} \varepsilon$  comme cela a été fait dans [50], avec  $T_0 = 1s$ .

Plusieurs approches pour résoudre le Problème 5.2 ont été envisagées suivant les hypothèses effectuées sur la géométrie des deux objets.

### Cas de deux objets à géométrie sphérique en rapprochement lent

En se plaçant dans le cadre du rapprochement lent entre deux objets à géométrie sphérique, les incertitudes sont gaussiennes sur tout l'intervalle de temps de la rencontre, et les probabilités de collision instantanées intervenant dans le Problème 5.2, peuvent donc être calculées efficacement par les techniques décrites au Paragraphe 5.2. Une approche naturelle est alors d'utiliser un algorithme de type boîte noire pour résoudre le Problème 5.1. Les résultats numériques obtenus par la fonction *fmincon* de ©Matlab (avec différences finies) ou le logiciel NOMAD [1, 163] ne sont pas satisfaisants, au sens où les algorithmes peinent à trouver une solution vérifiant la contrainte d'égalité de retour sur la trajectoire de référence. L'idée a alors été de changer la géométrie des objets primaire et secondaire afin de se ramener à des probabilités linéaires, et ainsi obtenir des contraintes différentiables pour lesquelles on aura une expression analytique du gradient.

### Cas de deux objets à géométrie polyédrale en rapprochement lent

Supposons qu'à chaque pas de temps, l'objet combiné est un polyèdre convexe dans l'espace des positions relatives défini par :  $\{r \in \mathbb{R}^3 : Cr \leq d\}$ . D'après les équations de la dynamique

(5.5), et sachant que :  $R(\hat{t}_k) = [ I_3 \ 0_{3 \times 3} ] X(\hat{t}_k)$ , on a :

$$R(\hat{t}_k) = \underbrace{[ I_3 \ 0_{3 \times 3} ] \Phi(\hat{t}_k, t_0)}_{\mathcal{A}_k} X^0 + \underbrace{[ I_3 \ 0_{3 \times 3} ] \sum_{\substack{i = \{1, \dots, N\} \\ t_i \leq \hat{t}_k}} \Phi(\hat{t}_k, t_i) B \Delta V_i}_{\text{terme linéaire en la commande } \Delta V \text{ de la forme } \mathcal{B}_k \Delta V}$$

où  $X^0$  est le vecteur aléatoire de position relative défini par (5.6) à  $t = t_0$  et  $\Delta V = [ \Delta V_1^\top \ \dots \ \Delta V_N^\top ]^\top$ . La probabilité de collision s'écrit sous la forme d'une contrainte en probabilité linéaire séparable :

$$P_c^{\{\hat{t}_k\}}(\Delta V_1, \dots, \Delta V_N) = \mathbb{P}(CR(\hat{t}_k) \leq d) = \mathbb{P}(C\mathcal{A}_k X^0 \leq d - C\mathcal{B}_k \Delta V)$$

Le problème d'évitement de collision s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_p \quad \text{sous :} \quad & \mathbb{P}(C\mathcal{A}_k X^0 \leq d - C\mathcal{B}_k \Delta V) \leq \varepsilon', \quad k = 1, \dots, N', \\ & \Phi(t_f, t_0) \mu_p^0 + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i) B \Delta V_i = X_f. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dans la thèse de R. Serra [252], deux approches ont été proposées :

**1. Calcul analytique de la probabilité de collision et de son gradient par rapport aux  $\Delta V_i$  en choisissant un polyèdre particulier.** L'idée est de choisir comme objet combiné un cube dont les faces sont perpendiculaires aux axes principaux de la matrice de covariance  $\Sigma^0$  (cf Figure 5.4). Cela rend possible le calcul analytique de la probabilité de collision et de son gradient à l'aide de la fonction d'erreur  $erf(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds$ , et donc l'utilisation d'algorithmes classiques d'optimisation différentiable sous contrainte.

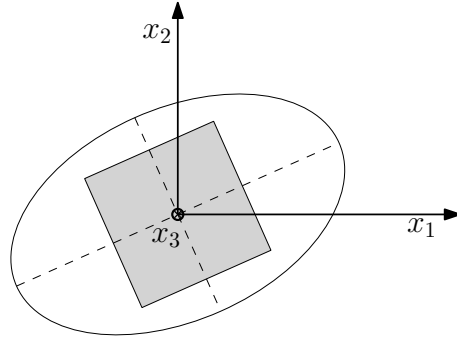


FIGURE 5.4 – Choix du cube aligné avec axes des ellipsoïdes d'incertitude.

**2. Relaxation du problème (5.17) par la méthode de sélection du risque dans le cas où le satellite actif dispose de propulseurs dans chaque direction ( $p = 1$ ).** L'idée, utilisée initialement en planification optimale probabiliste de trajectoires [50, 51], est de remplacer les contraintes en probabilités jointes par des contraintes individuelles, puis de les reformuler sous forme déterministe en utilisant la propriété suivante : soit  $Y$  une variable aléatoire gaussienne d'espérance  $\mu_Y$  et de variance  $\sigma_Y$ . Alors :

$$\mathbb{P}(Y < 0) \leq \varepsilon' \Leftrightarrow \mu_Y \geq \sqrt{2} \sigma_Y erf(1 - 2\varepsilon')^{-1}.$$

Par la méthode du "big-M" [110], le problème final prend la forme d'un problème de programmation linéaire mixte en nombres entiers que l'on sait résoudre efficacement, par exemple à l'aide de Gurobi [127]. Les détails de cette approche ont été publiés dans [252, 255].

Dans le cas d'un polyèdre combiné quelconque, une troisième approche, plus générale que les deux précédentes, consiste à exploiter la structure même du Problème (5.17), en s'appuyant sur les travaux de R. Henrion et A. Möller [131]. La contrainte en probabilité s'écrit :

$$P_c^{\{t_k\}} : (\Delta V_1, \dots, \Delta V_N) \mapsto d - \mathcal{B}_k \Delta V \mapsto \mathbb{P}(C\mathcal{A}_k X^0 \leq d - C\mathcal{B}_k \Delta V).$$

Le point délicat est le calcul de  $z \mapsto \mathbb{P}(C\mathcal{A}_k X^0 \leq z)$ , et de son gradient, sachant que  $X^0 \sim \mathcal{N}_6(\mu_0, \Sigma^0)$ . Le calcul de  $\mathbb{P}(C\mathcal{A}_k X^0 \leq z)$  se présente comme un calcul d'une fonction de répartition gaussienne multi-variée singulière. Pour l'évaluation de celle-ci, nous avons utilisé le code *qscmvnu* développé par A. Genz [119] sous Matlab et disponible en ligne<sup>2</sup>. Pour le calcul de son gradient, nous nous sommes basés sur les résultats de R. Henrion et A. Möller dans [131] : supposons que la matrice  $\Sigma$  est définie positive et que le système :  $C\mathcal{A}_k X \leq z$  est non dégénéré i.e. qu'il vérifie une contrainte de qualification d'indépendance linéaire. Sous ces conditions, le Théorème 3.3 de [131] donne une formule analytique ramenant le calcul du gradient au calcul d'une fonction du même type (mais avec des paramètres modifiés). Ainsi on peut utiliser à nouveau le code d'A. Genz pour calculer le gradient de la probabilité de collision par rapport à la manœuvre  $\Delta V_i$ . Au final, le Problème (5.17) se ramène donc à un problème d'optimisation différentiable sous contrainte que l'on peut résoudre pour des outils classiques d'optimisation numérique sous contrainte. La mise en oeuvre de cette approche fait partie des travaux en cours. Les résultats numériques présentés ci-après sont les tous premiers.

## Résultats numériques

Regardons ce que donnent ces trois approches sur un exemple issu d'un article de S. Alfano [7, Cas 1]. Il s'agit d'un cas réaliste, à défaut d'être réel, de rencontre lente sur une orbite géostationnaire entre deux objets dont la distance de plus proche passage est inférieure au rayon de la sphère combinée. Les paramètres de la rencontre sont donnés dans la Table 5.3.

$e$	$X_f$	$R$	$t_0$	$t_f$	$N'$	$\varepsilon'$	$L$
0.012	0	15 m	-50000 s	+50000 s	500	$10^{-9}$	6

TABLE 5.3 – Données de la rencontre.

On fixe le risque maximum autorisé à  $\varepsilon = 10^{-4}$  ce qui correspond à un risque  $\varepsilon' = 10^{-9}$ . Le risque instantané maximum calculé sur une discrétisation uniforme à  $N'$  points de  $[t_0, t_f]$  est de  $9.74 \times 10^{-2}$ . Afin de rendre possible la comparaison des trois méthodes, on suppose que le polyèdre choisi est le cube de rayon  $R$ , et que le satellite actif dispose de propulseurs dans chaque direction ( $p = 1$ ). Les solutions obtenues sont présentées dans le Tableau 5.4.

	$N$	Tps de calcul	Cout	Prob. inst. max.
Cube particulier	20	152s	3.682 mm/s	$1.31 \times 10^{-11}$
Sélection du risque	250	159s	4.651 mm/s	$1.27 \times 10^{-12}$
Approche directe	10	1313s	3.2827 mm/s	$4.33 \times 10^{-11}$

TABLE 5.4 – Caractéristiques des solutions obtenues.

De manière prévisible, l'approche directe est la plus couteuse en temps de calcul mais aussi la plus performante en termes de cout, la méthode par sélection du risque est la plus conservative. La Figure 5.5 présente les solutions obtenues par chacune des trois approches et met en évidence le fait que les manœuvres d'évitement auront lieu dans le hors-plan. Les trajectoires relatives moyennes sont représentées sur la Figure 5.6. La trajectoire non contrôlée (en tirets) est confinée dans le plan orbital de référence, tandis que l'on retrouve le fait que les trajectoires d'évitement ont une composante hors-plan.

2. <http://www.math.wsu.edu/faculty/genz/homepage>

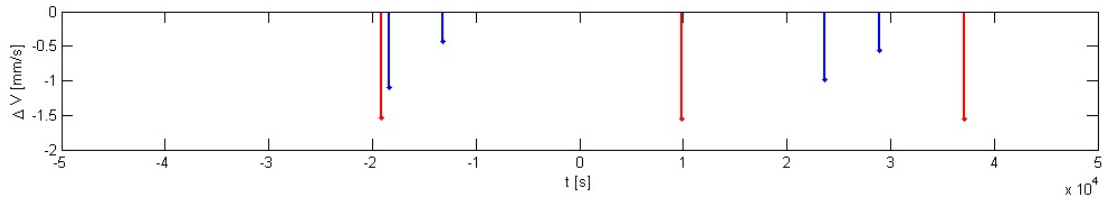


FIGURE 5.5 – Historique des impulsions (hors-plan).

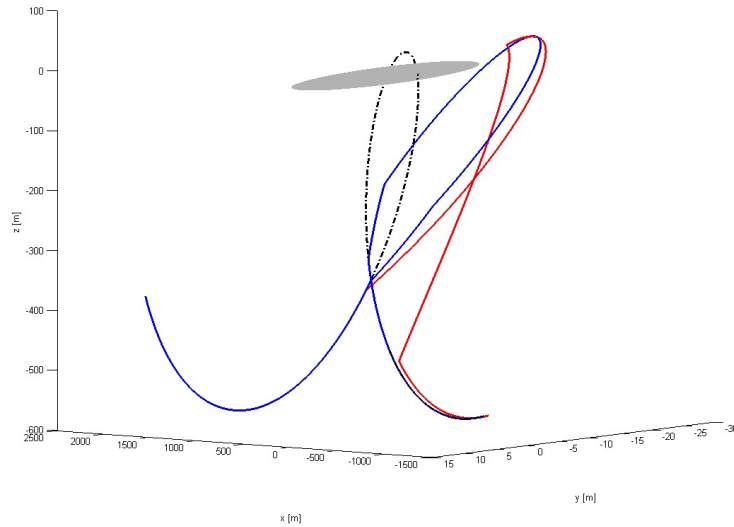


FIGURE 5.6 – Trajectoires relatives moyennes contrôlées (trait plein) et libre (tirets). Le domaine de collision est représenté par une ellipse grisée.

## 5.4 Conclusion et perspectives

Concluons ce chapitre par quelques perspectives à court terme. Concernant l'évaluation du risque de collision, les opérateurs de satellites s'intéressent de plus en plus aux variations de la probabilité de collision en fonction des paramètres caractérisant les incertitudes sur chaque objet, à savoir les espérances et écart-types de leurs coordonnées. En pratique, ces paramètres sont parfois mal connus, ce qui peut conduire à une sous-estimation du risque lorsque le niveau d'incertitude est trop élevé (phénomène de dilution [81]) : pour des incertitudes élevées, il est possible d'obtenir une probabilité de collision faible, alors qu'il existe des degrés d'incertitude plus faibles pour lesquels on obtiendrait une probabilité de collision plus élevée. C'est un aspect dont il faut tenir compte lorsque l'on évalue le risque de collision. L'idée serait donc d'écrire la probabilité de collision calculée dans la première partie de la thèse, comme une fonction des paramètres caractérisant les incertitudes, et d'essayer de calculer ses dérivées partielles afin de calculer la probabilité maximale de collision et l'incertitude associée. En dimension 1, si cette valeur est plus grande que l'incertitude effective, alors la probabilité calculée est une bonne évaluation de la probabilité de collision. Sinon, il vaut mieux garder la probabilité maximum de collision pour évaluer le risque.

Ensuite, dans le cadre du calcul de manœuvres d'évitement en rapprochement lent, je souhaite poursuivre les travaux en cours reposant sur une modélisation polyédrale des objets primaires et secondaires. Il reste essentiellement à tester l'approche directe, basée sur les travaux de R. Henrion et A. Möller [131], sur différents exemples de la littérature, et à comparer les résultats obtenus et les performances de l'algorithme avec ceux des méthodes présentées dans la thèse de R. Serra.



## Chapitre 6

# Approche novatrice pour la conception et l'exploitation d'avions écologiques

Depuis les années 1950, le trafic aérien est en constante croissance : actuellement, le nombre de passagers est d'environ 3 milliards par an et, selon les prévisions les plus basses, il devrait doubler sur les quinze prochaines années. Les acteurs du transport aérien - les constructeurs de moteur, les avionneurs, et les compagnies aériennes - sont concentrés chacun sur des enjeux propres à leur secteur d'activité, ce qui peut s'avérer limitant pour atteindre les objectifs ambitieux qui devront répondre à la croissance du trafic. En particulier, avec la place de plus en plus importante de la problématique environnementale, les objectifs réglementaires récemment mis en place afin de réduire l'impact de l'aviation sur le réchauffement climatique vont devoir être pris en compte dès la phase préliminaire de conception d'un nouvel avion.

De façon classique, lors de cette phase, le but de l'avionneur est de comparer les performances de nombreuses configurations afin de déterminer les paramètres de conception qui optimiseront l'avion de demain. L'étude des performances d'un avion est un problème d'optimisation multidisciplinaire déterministe sous contraintes. Les objectifs sont traditionnellement la consommation de fuel, le coût global d'opération de l'avion ou encore la masse maximale au décollage (qui rend compte de l'efficacité globale de l'avion). Les contraintes sont définies par les exigences du cahier des charges. Habituellement, les degrés de liberté de cette optimisation sont fixés : il s'agit de la surface de la voilure et de la taille du moteur. Des études sont souvent menées sur l'avion optimisé afin d'en étudier la sensibilité à d'autres paramètres de la géométrie, du moteur ou de la mission par exemple. Aussi, les études préliminaires de conception sont lancées à partir de modèles parfois très simplifiés, soit par volonté de réduction du temps de calcul, soit par manque de connaissance sur les concepts technologiques abordés.

La thèse CIFRE de S. Prigent réalisée aux Avant-Projets d'Airbus et co-encadrée avec P. Maréchal, introduit une nouvelle approche holistique de la conception d'avion : le but est d'agrèger aux modèles classiques, des modèles plus précis de la partie propulsive et de la trajectoire. Une fois ces modèles validés en se basant sur des données d'avions existants, ils ont été intégrés aux outils existants. Afin d'utiliser au mieux cette intégration et de profiter des synergies de cette approche, une des contributions de la thèse a été d'intégrer aux degrés de liberté usuels, des paramètres de conception du moteur et des degrés de liberté de la mission. L'étude des résultats met en évidence les gains apportés par cette nouvelle approche.

Cette thèse contribue également à répondre à la problématique environnementale de l'aviation en ajoutant la minimisation de l'impact climatique aux objectifs classiques de la conception d'avion. Une modélisation de cet impact est intégrée aux modèles existants. Pendant la phase préliminaire de conception d'avion, de nombreuses technologies innovantes sont étudiées afin de minimiser les critères précédemment cités. Nous sélectionnons certaines de ces innovations pouvant

s'intégrer au système propulsif de l'avion, à son système aérodynamique, à sa géométrie ou encore à sa mission afin de tirer de la configuration le maximum de bénéfices en termes de performances. Nous proposons ainsi d'appliquer l'approche holistique à un concept innovant d'avion à propulsion hybride électrique-fuel. Les modèles construits et utilisés pour optimiser cet avion hybride sont présentés dans la Section 6.1 et viennent compléter les modèles existants après validation par des experts dans le domaine. Les résultats de cette optimisation sont comparés à ceux d'un avion conventionnel répondant au même cahier des charges.

Toutes les études menées jusqu'à présent sont déterministes. Des incertitudes autour des modèles existent et sont traditionnellement prises en compte par des marges basées sur le savoir-faire ingénieur. Cela peut parfois mener à des contre-performances inattendues. Dans cette thèse nous introduisons une nouvelle approche prenant en compte ces incertitudes (cf Paragraphe 6.2). Nous proposons tout d'abord de résoudre une optimisation sous contrainte en probabilité du concept d'avion hybride, en prenant en compte les incertitudes liées à l'évolution des technologies nécessaires à l'hybridation. Enfin, nous proposons une nouvelle approche d'optimisation robuste de la conception d'avion. Cette approche est complémentaire à l'approche sous contrainte en probabilité et nécessite une modélisation particulière du problème décrite au Paragraphe 6.3.

## 6.1 Modélisation, simulation et validation

### 6.1.1 Description du processus de conception avion

Le processus de conception avion (OAD - *Overall Aircraft Design*) est le processus de définition globale d'un avion dont le principe est résumé sur la Figure 6.1. La première étape consiste

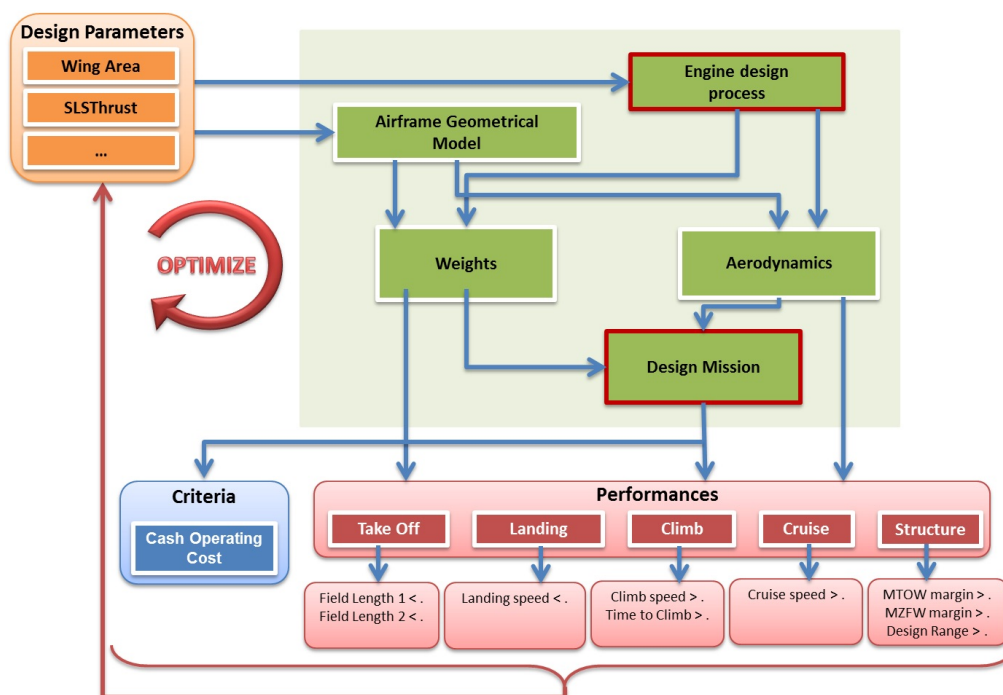


FIGURE 6.1 – Diagramme du processus classique de conception avion.

à sélectionner un certain nombre de spécifications telles que le nombre de passagers, le rayon d'action de l'avion et les performances attendues. La conception est généralement optimisée par rapport à un critère donné tel que le cout d'opération de l'avion (COC - *Cash Operating Cost*), la consommation en fuel ou la masse maximum au décollage (MTOW - *Maximum Take-Off Weight*) qui est un indicateur de performance de l'avion. Les variables de conception classiques sont la

surface de la voilure et la poussée statique au niveau de la mer (SLSthrust - *Sea Level Static Thrust*) qui conditionne la taille des moteurs. Les outils numériques de l'OAD permettent de calculer la configuration complète d'un avion et ses performances. Le but est de trouver les valeurs des variables de conception permettant à l'avion de satisfaire les spécifications demandées tout en minimisant le critère choisi. Cette optimisation qui englobe le calcul de la configuration de l'avion, est une optimisation mono-objectif déterministe sous contraintes. Le diagramme de la Figure 6.1 montre comment les différentes disciplines interagissent, comment un avion est calculé à partir des spécifications et des variables d'entrée et comment les objectifs et les contraintes sont calculés.

La conception préliminaire avion est le processus multi-disciplinaire décrivant les interactions entre différents domaines de la physique (cf cadre vert du diagramme de la Figure 6.1). Parmi les plus importants, citons la géométrie, l'aérodynamique, les masses, la propulsion, la trajectoire, l'impact environnemental. Chaque discipline est caractérisée par un ou plusieurs paramètres réels ainsi que par des fonctions de ces paramètres. L'outil de conception utilisé au cours de la thèse est un outil interne à Airbus, développé en Scilab. C'est l'aboutissement de dix années de recherche et d'expérimentations au sein du groupe [30, 49]. Une description complète des modèles peut être trouvée dans la thèse de J. Birman [49] : il s'agit de modèles semi-empiriques issus soit des lois de la physique, soit de régressions sur une base de données d'une soixantaine d'avions.

Un des objectifs de la thèse était d'intégrer au processus de nouveaux modèles semi-empiriques d'un moteur thermodynamique et de la trajectoire. Le processus de conception avion décrit par la Figure 6.1, a été renforcé au cours de la thèse (cf Figure 6.2). Tout d'abord, on élargit l'ensemble des

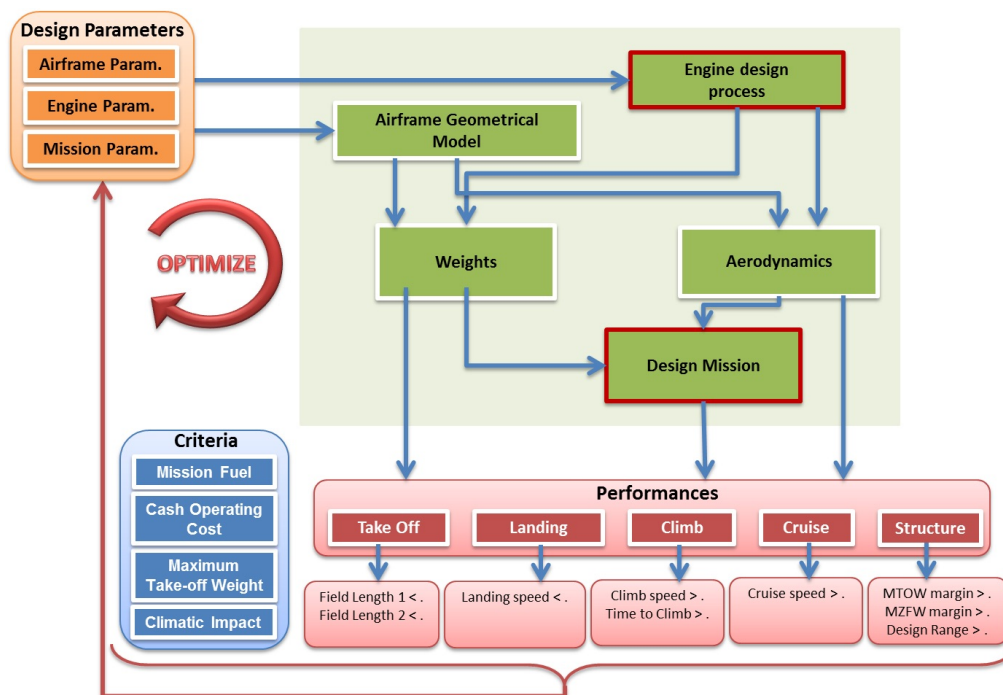


FIGURE 6.2 – Diagramme du processus de conception avion étudié pendant la thèse.

paramètres de conception (et donc de l'optimisation) en prenant en compte à la fois les paramètres de la cellule avion (taille du moteur, surface de la voilure, allongement des ailes), les paramètres du moteur thermodynamique (rapport entre les flux d'air froid et d'air chaud noté BPR - *By-Pass Ratio*) et les paramètres de mission (altitude de croisière, mach de vol, vitesses de montée et de descente de la trajectoire). Les contraintes opérationnelles peuvent être nombreuses et variées et doivent garantir à la fois la capacité à voler et la sécurité des avions. Schématiquement, un avion doit être capable de décoller des pistes existantes des aéroports actuels, de monter jusqu'à son altitude de croisière en un temps limité, de s'y maintenir et d'atterrir sur les pistes existantes.

Ceci se traduit en terme de longueur maximale de pistes au décollage ou à l'atterrissage, de masse maximum au décollage, de temps de montée, de vitesse d'approche, etc.

Quant aux critères de l'optimisation, nous nous sommes intéressés à trois critères classiques en particulier : le cout d'opération de l'avion, la masse maximum au décollage et la consommation en fuel. Nous avons ajouté à ces critères une mesure de l'impact climatique de l'avion (APGWP - *Absolute Pulsed Global Warming Potential*). Ce critère reconnu par le protocole de Kyoto, est difficile à évaluer car très dépendant de différentes disciplines et d'un grand nombre de paramètres. Au sein des Avant-Projets d'Airbus, la méthode choisie pour mesurer cet impact climatique a été développée dans le cadre d'un projet européen nommé LEEA (*Low Emission Effect Aircraft*) [135]. L'impact climatique est calculé comme une fonction de plusieurs paramètres réels : la quantité de polluants émise, l'altitude d'émission de ces polluants, la distance parcourue en vol et la consommation en fuel. L'impact environnemental est avant tout lié à la consommation en fuel mais aussi à l'endroit où les polluants sont émis. A noter que la zone entre 35000 et 37000 pieds est le pire endroit où émettre des polluants azotés et que c'est la zone dans laquelle volent les avions actuels.

### 6.1.2 Configuration de l'avion hybride

Répondant au même cahier des charges, nous avons proposé d'appliquer l'approche holistique décrite précédemment à un concept innovant d'avion à propulsion hybride électrique-fuel. L'idée a été de conserver une configuration classique d'avion et d'ajouter un moteur électrique sur le fuselage arrière de l'avion. Afin d'alimenter ce moteur, des batteries ont été placées au niveau du caisson central de l'avion. Des générateurs électriques ont été montés sur les turboréacteurs de façon à ce qu'ils puissent récupérer une partie de leur énergie et faire fonctionner le moteur électrique ou recharger les batteries. La configuration choisie est représentée sur la Figure 6.3.

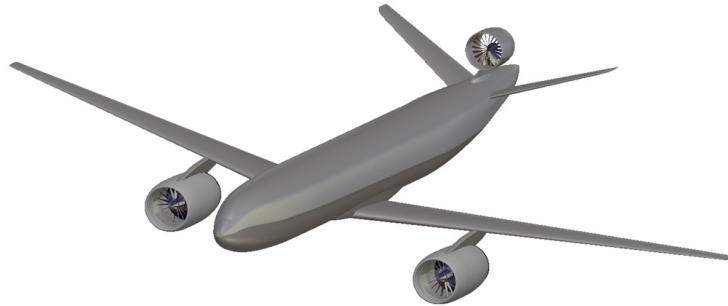


FIGURE 6.3 – Configuration d'avion hybride.

Il a ensuite fallu faire des hypothèses sur le mode de gestion de l'énergie pour cet avion en tirant partie des nouvelles possibilités apportées par l'hybridation. Il faut garder à l'esprit que ces accumulateurs électriques sont des sources d'énergie additionnelles mais temporaires. Ils permettent de réduire le sur-dimensionnement des moteurs thermodynamiques en les soulageant lors des phases critiques de la mission (décollage, fin de montée). La stratégie choisie est résumée sur la Figure 6.4.

De nouveaux modèles, par exemple de propulsion électrique, ont été construits et viennent compléter les modèles existants après validation par des experts du domaine. On sélectionne alors des variables de conception additionnelles associées à l'hybridation : en plus des variables décrites au paragraphe précédent, on ajoute la taille du moteur électrique, la puissance du moteur électrique, la densité de puissance du moteur électrique et des générateurs électriques et la densité d'énergie des batteries. Quelques améliorations du concept d'avion hybride sont proposées dans la thèse [225, Chapitre 1] mais ne sont pas décrites ici.

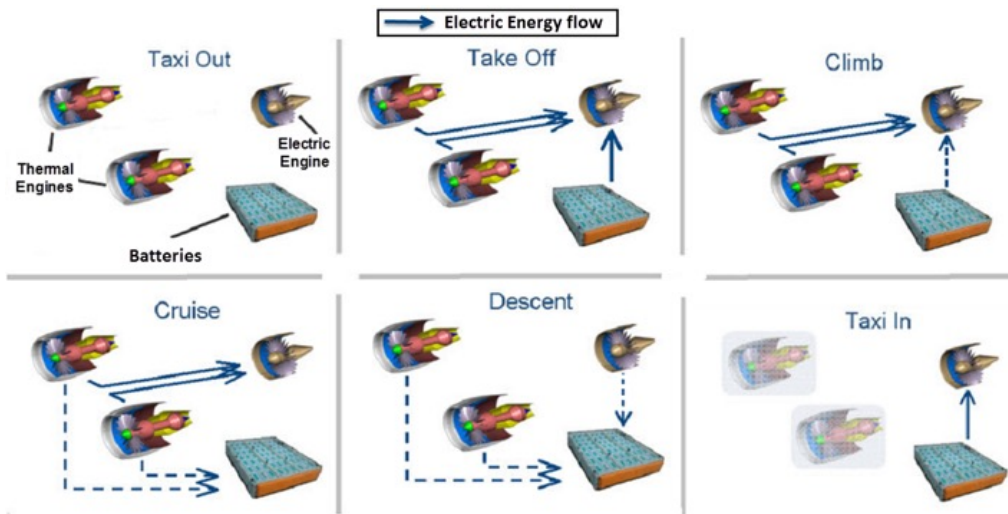


FIGURE 6.4 – Stratégie de gestion des flux d'énergie. Les flèches bleues indiquent les flux d'énergie électrique.

## 6.2 De l'optimisation déterministe à l'optimisation sous contrainte en probabilité

Une fois défini le modèle d'avion hybride, un des objectifs de la thèse a été de résoudre un problème d'optimisation globale de l'avion regroupant les paramètres de tous les modèles (cellule avion, moteur, mission et, le cas échéant, hybridation) pour un avion conventionnel de référence d'une part et pour l'avion hybride d'autre part, à cahier des charges identique. L'objet de l'étude a été d'augmenter progressivement le nombre de variables de l'optimisation afin de mesurer l'impact de chacune sur la configuration optimisée de l'avion conventionnel puis de l'avion hybride.

### 6.2.1 Formulation du problème

Considérons le problème d'optimisation de conception avion sous sa forme générique :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sous :} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (6.1)$$

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}.$$

Dans cette étude, nous avons travaillé avec 3 fonctions objectifs  $f$  différentes : le cout global d'opération de l'avion (COC), la masse maximale au décollage (MTOW) et l'impact climatique (APGWP). Pour un avion conventionnel court-courrier de référence, nous considérons 13 variables d'optimisation décrivant la cellule avion, les moteurs thermodynamiques et la mission, et 8 contraintes opérationnelles portant essentiellement sur la vitesse d'approche, les vitesses verticales de montée et de croisière, la longueur de piste au décollage, le temps de montée. Quant à l'avion hybride, nous ajoutons 3 variables associées à l'hybridation : la taille du moteur électrique, le taux de prélèvement de puissance des générateurs et la densité de puissance du moteur électrique. Nous obtenons ainsi un problème avec 16 variables de conception et 1 contrainte opérationnelle sur la poussée des moteurs au décollage.

Du point de vue de l'optimisation, le Problème (6.1) est un problème non linéaire, non convexe mais différentiable presque partout. Les gradients sont accessibles par différentiation automatique (implémentée par S. Prigent au cours de la thèse) ce qui nous permet d'utiliser des algorithmes d'optimisation numérique différentiable. Les algorithmes utilisés pour résoudre le Problème (6.1) sont les suivants : DOT (*Design Optimization Tools*) [270], MADS (*Mesh Adaptive Direct Search*)

[29] et un algorithme de Nelder-Mead modifié pour intégrer des contraintes et développé en interne aux Avant-Projets d'Airbus par S. Prigent.

Les résultats de l'optimisation par exemple par rapport au cout global d'opération de l'avion montrent que l'avion conventionnel a intérêt à voler "vite" pour minimiser le cout lié à la durée du vol et "haut" pour minimiser le cout lié à la consommation en carburant. Plus précisément, à l'optimum, les variables de l'optimisation sont à saturation. En particulier, la valeur très élevée du Mach de croisière implique des valeurs très élevée de l'impact climatique et de la masse maximum au décollage. Les polluants sont émis à la pire altitude possible du point de vue de l'impact environnemental. Quant à l'avion hybride, il est très nettement handicapé par l'excédent de masse du système de propulsion hybride. L'optimisation de l'avion hybride donne une configuration similaire à celle de l'avion conventionnel optimisé avec un cout global d'opération plus élevé de 1.5%, une masse maximale au décollage plus élevée de 2.6%. En revanche l'impact climatique est nettement réduit (environ 19% inférieur) par rapport à celui de l'avion conventionnel.

Ainsi à la question naturelle de savoir si cet avion est compétitif par rapport à un avion conventionnel, la réponse est clairement non compte-tenu des technologies actuelles. L'idée a alors été d'ajouter un modèle de prédiction de l'évolution des technologies nécessaires à l'hybridation en fonction de l'année et prenant en compte l'incertitude sur ces prédictions (cf Figure 6.5). Ceci se traduit en incertitude dans les modèles.

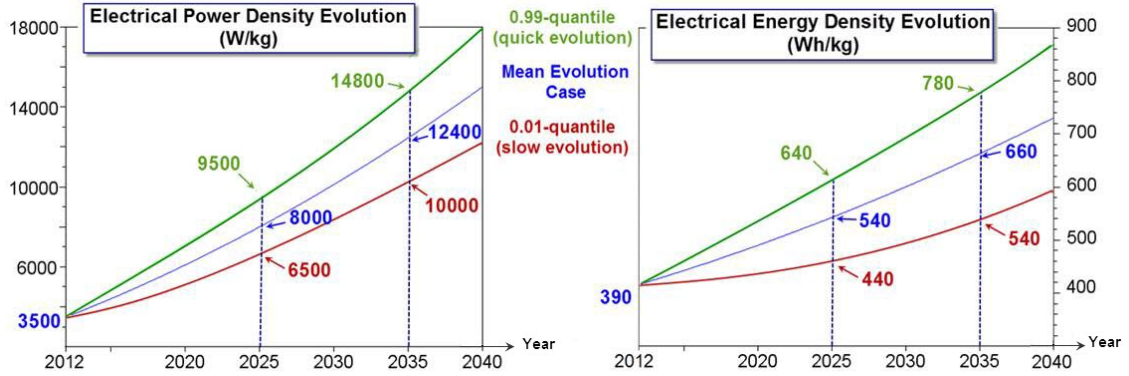


FIGURE 6.5 – Prédiction de l'évolution des technologies électriques liées à l'hybridation avec leurs incertitudes.

Les incertitudes peuvent provenir de deux sources complémentaires : les incertitudes liées à l'évolution des technologies et celles liées au processus de modélisation. En pratique, les incertitudes présentes dans les modèles sont prises en compte au travers de marges basées sur le savoir-faire ingénieur. Cela peut parfois mener à des contre-performances inattendues qui se traduisent en pénalité (en terme de cout) pour les constructeurs d'avion. De plus dans le cas de l'avion hybride, nous ne disposons pas de ce savoir-faire ingénieur : il faut donc s'attaquer au "vrai" problème et non à une représentation moyenne (déterministe) de celui-ci. Dans la thèse, le problème de conception avion a été formulé comme un problème d'optimisation stochastique pour lequel nous avons proposé deux approches. La première consiste à reformuler le problème en un problème d'optimisation sous contraintes en probabilité : notons  $\Xi$  le vecteur aléatoire modélisant les incertitudes en entrée. On veut résoudre :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathbb{E}[f(x, \Xi)] \quad \text{sous :} \quad \mathbb{P}[g_i(x, \Xi) \leq 0] > p_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (6.2)$$

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}.$$

La seconde approche explorée dans la thèse consiste à reformuler le problème de conception avion en un problème d'optimisation robuste selon la terminologie de A. Ben-Tal, L. El Ghaoui et

A. Nemirovski [43] : soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des incertitudes. Nous considérons le problème :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \sup_{\xi \in \mathcal{U}} f(x, \xi) \right) \quad \text{sous :} \quad g_i(x, \xi) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, l, \quad \forall \xi \in \mathcal{U}, \quad (6.3)$$

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}.$$

L'intérêt de cette approche est bien entendu de proposer une solution qui satisfasse toutes les contraintes imposées lorsque la violabilité des contraintes est interdite. Une formulation particulière du problème de conception avion est proposée au Paragraphe 6.3 et permet d'obtenir algorithmiquement des configurations robustes.

## 6.2.2 Quantification et propagation d'incertitudes

Avant toute chose, la formulation des problèmes (6.2) et (6.3) met en évidence la nécessité de savoir quantifier et propager l'incertitude dans les modèles. Plusieurs méthodes ont été introduites dans [225, Chapitre 4] pour caractériser les incertitudes et les propager : un état de l'art conséquent est proposé dans lequel les méthodes de propagation d'incertitudes sont présentées, classées en fonction de leurs spécificités (temps de calcul, précision, hypothèses nécessaires sur les modèles) et comparées sur des exemples numériques académiques. Le but de cette étude est de permettre à l'utilisateur de sélectionner une méthode adaptée à son problème de dimensionnement d'avion sous incertitude.

**Quantification et caractérisation des incertitudes.** En conception technique, modéliser un processus consiste à construire des modèles calculant certaines fonctions d'intérêt en fonction de paramètres d'entrée identifiés au préalable. Ces modèles peuvent provenir soit des lois de la physique quand c'est possible, soit de régression sur des bases de données d'avions existants. Plus précisément, le processus de modélisation se fait en deux temps : tout d'abord, on sélectionne les paramètres d'entrée en se basant soit sur le savoir-faire ingénieur soit sur des études statistiques permettant d'identifier les paramètres les plus influents. Ensuite, on choisit un modèle analytique dont on ajuste les paramètres par des techniques par exemple de régression sur les bases de données existantes. Le but de la quantification d'incertitudes est d'estimer la précision avec laquelle le modèle analytique approche le modèle réel. Plus concrètement, étant donné un échantillon de données  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, N}$ , on veut estimer l'échantillon :

$$\xi_i = f(x_i) - y_i,$$

appelé échantillon d'incertitudes. Une fois cet échantillon estimé, on cherche la loi de distribution de probabilité qui le représente le mieux. En pratique, on fait l'hypothèse que tout échantillon d'incertitude peut être représenté par une loi de distribution de probabilité. Pour identifier cette loi, on peut soit calculer les moments de la distribution, soit chercher graphiquement une distribution correspondant au mieux au diagramme des incertitudes. Il faut cependant garder à l'esprit que la connaissance d'un nombre fini de moments ne permet pas de définir une unique loi de probabilité et qu'un même échantillon représenté à deux échelles différentes, peut être approché par (au moins) deux lois très différentes (cf Figure 6.6).

Une des contributions de la thèse en collaboration avec J. Birman [49], a été de proposer une nouvelle famille de lois de probabilité, appelée Beta-Mystique, qui englobe plusieurs familles de distributions uni-modales. Plus précisément, le but était de proposer une loi facile à manipuler pour un non-spécialiste, couvrant un large spectre de formes de distributions et vérifiant certaines propriétés : à support compact, uni-modale et continue. La loi Beta aurait pu faire l'affaire mais le choix de ses paramètres est peu intuitif.

**Définition 6.1** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi Beta-Mystique de paramètres  $(a, b, Z, P)$ , avec  $-1 \leq Z \leq 1$  et  $P \geq 0$ , si sa fonction de densité est de la forme :

$$f_X(x; a, b, Z, P) = \begin{cases} \frac{(b-x)^{q_1-1} (x-a)^{p_1-1}}{\beta(p_1, q_1) (b-a)^{p_1+q_1-1}} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{si } x < a \text{ ou } b < x, \end{cases} \quad (6.4)$$

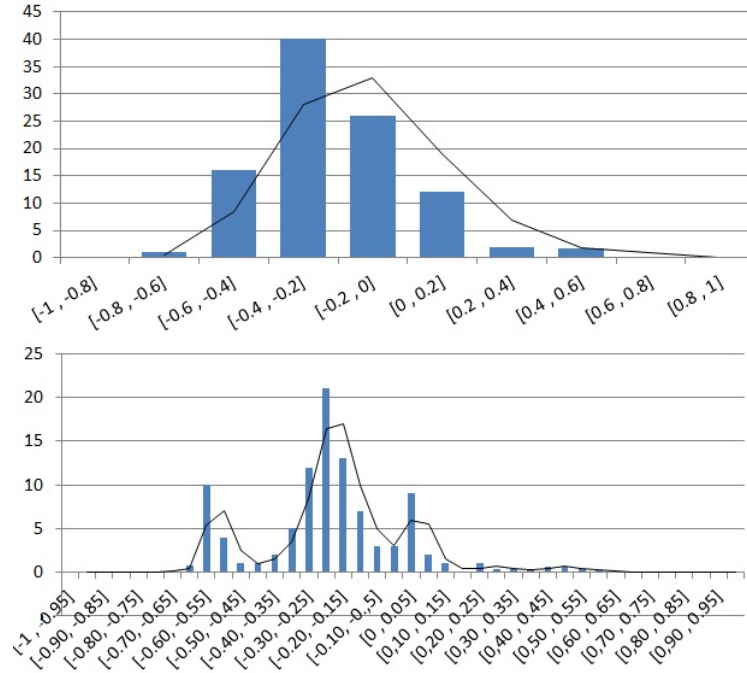


FIGURE 6.6 – Exemple de deux approximations du même échantillon représenté à deux échelles différentes, par deux distributions différentes.

avec :

$$W = \max(\varepsilon - 1, \min(Z, 1 - \varepsilon)), \quad K = 3.3 \frac{\max(\varepsilon, P)}{b - a}, \quad M = \frac{1}{2} (a(1 - W) + b(1 + W)),$$

$$p_1 = 1 + K(M - a), \quad q_1 = 1 + K(b - M), \quad \beta(p_1, q_1) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)}{\Gamma(p_1 + q_1)},$$

$$\varepsilon > 0.$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma définie par :  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ .

En pratique, le paramètre  $\varepsilon$  est choisi égal à la précision de calcul des ordinateurs. L'introduction de ce paramètre permet d'éviter les problèmes numériques lorsque les paramètres  $P$  et  $Z$  atteignent leurs bornes respectives. L'avantage de cette nouvelle loi de probabilité est que l'on peut facilement contrôler la forme de sa distribution :  $[a, b]$  est le support de la loi,  $Z$  contrôle la symétrie de la distribution,  $Z \in [-1, 1]$ , et  $P$  contrôle l'étalement de la loi. La Figure 6.7 illustre la façon dont les paramètres  $Z$  et  $P$  contrôlent la forme de la distribution : lorsque  $Z$  est fixé, plus  $P$  est petit, plus la distribution est large. Si  $Z = 0$ , la distribution est symétrique. A noter par exemple que la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  peut être approchée par la loi Beta-Mystique de paramètres  $(-6\sigma, 6\sigma, 0, 10)$  et que la loi uniforme  $U(a, b)$  est équivalente à la loi Beta-Mystique de paramètres  $(a, b, 0, 0)$ .

Un autre avantage de la loi Beta-Mystique est de pouvoir être caractérisée par ses 4 premiers moments : son espérance  $\mu$ , sa variance  $\sigma^2$ , sa dissymétrie (*skewness*)  $\gamma$  et son aplatissement (*kurtosis*)  $\Gamma$ . Plus précisément, les 4 moments  $(\mu, \sigma^2, \gamma, \Gamma)$  ont des expressions analytiques simples en fonction des paramètres  $(a, b, Z, P)$  et inversement. Le lecteur intéressé pourra se référer à [49] ou [225] pour davantage de précisions.

La loi Beta-Mystique distribution a déjà été utilisée pour quantifier les incertitudes au sein du bureau des Avant-Projets d'Airbus : les premières expériences ont montré qu'il s'agissait d'un outil très efficace pour remplacer le savoir-faire ingénieur basé sur des marges et gérer les incertitudes dans les modèles.



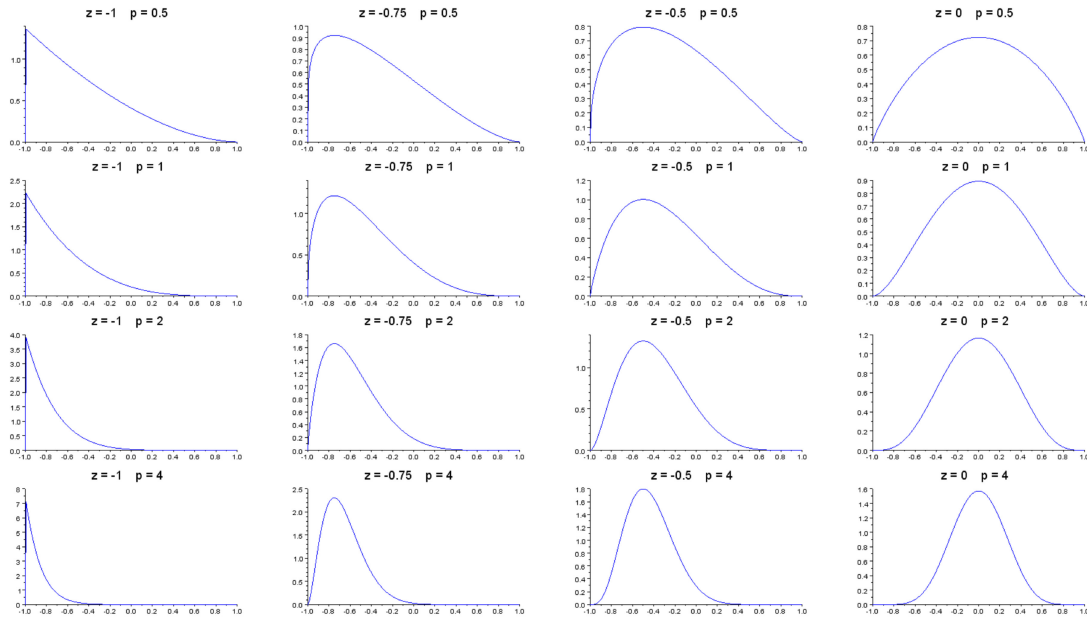


FIGURE 6.7 – Evolution de la forme de la loi Beta-Mystique en fonction de  $P \in [0.5, 4]$  et  $Z \in [-1, 0]$ .

**Propagation des incertitudes.** La problématique est la suivante : connaissant certaines informations sur l'incertitude  $\Xi$  en entrée, que savons-nous sur l'incertitude en sortie i.e. sur  $f(x, \Xi)$  et  $g(x, \Xi)$ ? Autrement dit, étant donné un modèle  $F(\xi) = f(x, \xi)$  où  $\xi$  est une réalisation de la variable aléatoire  $\Xi$ , on cherche à déterminer les caractéristiques ou une représentation de l'incertitude  $F(\Xi)$  en sortie. Deux cas se présentent :

**1<sup>er</sup> cas :  $\Xi$  suit une loi de probabilité.** Plusieurs méthodes sont alors envisageables : méthodes de Monte-Carlo, méthodes basées sur le développement de Taylor, méthodes d'expansion stochastiques, méthodes de quadrature. Toutes ces méthodes sont décrites dans le Chapitre 4 de la thèse [225], classées en fonction de leurs spécificités (temps de calcul, précision, hypothèses nécessaires sur les modèles) et comparées sur des exemples numériques académiques. Le but de cette étude est de permettre à l'utilisateur de sélectionner une méthode adaptée à son problème de dimensionnement d'avion sous incertitude.

**2<sup>ème</sup> cas : on connaît le support  $[a, b]$  de  $\Xi$ .** Dans ce cas, on cherche les supports de  $f(x, \Xi)$  et  $g(x, \Xi)$ . Une approche naturelle serait d'utiliser des techniques de propagation d'intervalles mais celles-ci sont difficile à appliquer à notre problème de configuration avion. L'alternative a été d'appliquer les méthodes de propagation d'incertitudes décrites dans le premier cas à une distribution de probabilité de support  $[a, b]$  et de récupérer le support de la distribution en sortie pour avoir celui de  $f(x, \Xi)$  et  $g(x, \Xi)$ .

Dans les deux cas, il faut se demander de quel type d'information on a besoin sur l'incertitude en sortie des modèles : la nature exacte de la distribution de probabilité, les premiers moments, une mesure de risque? Le choix de la méthode de propagation est fortement couplé à la précision que l'on a sur l'incertitude en entrée, la précision que l'on souhaite sur l'incertitude en sortie et le cout de calcul que l'on peut se permettre. Le guide proposé dans [225, Chapitre 4] permet de répondre à ces questions et de sélectionner la méthode la plus adaptée au problème considéré.

### 6.2.3 Optimisation sous contrainte en probabilité de l'avion hybride

Considérons le problème de conception avion sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes en probabilité (individuelles) de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathbb{E}[f(x, \Xi)] \quad \text{sous :} \quad & \mathbb{P}[g_i(x, \Xi) \leq 0] > p_i, \quad i = 1, \dots, l, \\ & x_{min} \leq x \leq x_{max}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

où  $x$  est la variable (certaine) de l'optimisation et  $\Xi$  le vecteur aléatoire modélisant les incertitudes d'entrée. Les paramètres  $(p_i)_{i=1, \dots, l}$  sont les niveaux de fiabilité, choisis en pratique entre 0.95 et 0.99. Les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  sont supposées différentiables en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ . En revanche le problème est *a priori* non linéaire et non convexe.

Une des difficultés dans notre cas est que bien qu'ayant des informations sur l'incertitude en entrée  $\Xi$ , on ne sait rien à propos de l'incertitude en sortie. Dans le cas où l'on connaît l'incertitude en entrée, les méthodes de propagation décrites dans [225, Chapitre 4] permettent d'évaluer l'espérance de l'objectif et les contraintes en probabilité et ainsi d'appliquer un algorithme d'optimisation classique. Toutefois cette approche directe étant très coûteuse, des recherches ont été menées sur des méthodes d'optimisation séquentielles sous incertitude telles que la méthode S.O.R.A. (*Sequential Optimization and Reliability Assessment*) introduite par X. Du et W. Chen dans [106] et améliorée dans [282]. L'idée de ces méthodes est de découpler l'optimisation de l'analyse de fiabilité. Dans un premier temps, on remplace le problème sous contraintes en probabilité (6.5) par une suite de problèmes déterministes :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, \mu_{\Xi}) \quad \text{sous :} \quad & g_i(x, \mu_{\Xi}) \leq s_i, \quad i = 1, \dots, l, \\ & x_{min} \leq x \leq x_{max}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

L'évaluation de la fiabilité (i.e. des contraintes  $\mathbb{P}[g_i(x_{sol}, \Xi) \leq 0]$ ) est effectuée dans un second temps. Le principe de la méthode est le suivant :

**Initialisation :**  $s_i = 0, i = 1, \dots, l$ .

**Tant que**  $\exists i \in \{1, \dots, l\}, \mathbb{P}[g_i(x_{sol}, \Xi) \leq 0] < p_i$ ,

1. Résoudre le problème déterministe (6.6). On note  $x_{sol}$  la solution obtenue.
2. Calculer les incertitudes  $g_i(x_{sol}, \xi), i = 1, \dots, l$ , en utilisant une technique de propagation d'incertitudes bien choisie et évaluer les probabilités :  $\mathbb{P}[g_i(x_{sol}, \Xi) \leq 0]$ .
3. Pour chaque  $i = 1, \dots, l$ , si  $\mathbb{P}[g_i(x_{sol}, \Xi) \leq 0] < p_i$  alors le seuil  $s_i$  est mis à jour de la façon suivante :

$$s_i = s_i - k(p_i)\sigma_{g_i}(x_{sol}), \quad (6.7)$$

où  $\sigma_{g_i}(x)$  est la variance de  $g_i(x, \Xi)$  à  $x$  fixé. Le coefficient  $k(p_i)$  est défini en fonction de la mesure de risque désirée (ici une probabilité), du niveau de fiabilité  $p_i$  désiré et des informations disponibles sur la distribution de probabilité associée à  $g_i(x, \Xi)$ .

Revenons sur la mise à jour (6.7) des seuils  $s_i$ . Les contraintes en probabilité  $\mathbb{P}[g_i(x, \Xi) \leq 0] \geq p_i$  peuvent être remplacées de façon conservative par la contrainte déterministe :

$$\mu_{g_i}(x) + k(p_i)\sigma_{g_i}(x) \leq 0 \quad (6.8)$$

Plus précisément, si la contrainte (6.8) est satisfaite alors :

$$\mathbb{P}[g_i(x, \Xi) \leq 0] \geq \mathbb{P}[g_i(x, \Xi) \leq \mu_{g_i}(x) + k(p_i)\sigma_{g_i}(x)] \geq p_i.$$

Les contraintes violées (ou ayant une fiabilité trop faible) sont décalées vers le domaine de fiabilité en intégrant des coefficients de seuil  $s_i$  dont le calcul est basé sur les informations de fiabilité obtenues à l'itération précédente. La mise à jour proposée est une généralisation de celle proposée pour les lois de distribution gaussienne dans [137], au cas où les incertitudes ne sont pas complètement connues (par exemple lorsque l'on ne dispose que des premiers moments de la loi de probabilité) et pas nécessairement gaussiennes.

### Application à l'optimisation sous contrainte en probabilité de l'avion hybride

La méthodologie précédente, testée sur un exemple académique, a ensuite été appliquée à l'optimisation de l'avion hybride. Nous nous sommes intéressés au problème suivant : compte-tenu de l'évolution (prédite) des technologies nécessaires à l'hybridation, trouver l'année à partir de laquelle l'avion hybride sera aussi performant qu'un avion conventionnel avec une probabilité de 95%, à cahier des charges identique. La démarche adoptée est la suivante : commençons par résoudre une optimisation déterministe d'un avion conventionnel de référence, i.e. par résoudre :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sous :} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ x_{min} \leq x \leq x_{max}.$$

Le cout  $f$  représente soit la consommation en fuel, soit le cout global d'opération de l'avion (COC), soit une mesure de l'impact climatique (APGWP). On note  $f_{conv}^*$  la valeur de la fonction cout à l'optimum. Nous proposons ensuite de résoudre le problème :

$$\min_{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}} t \quad \text{sous :} \quad \mathbb{P}[g_i(x, \Xi) \leq 0] \geq 0.95, \quad i = 1, \dots, l, \\ \mathbb{P}[f(x, \Xi) \leq f_{conv}^*] \geq 0.95, \\ x_{min} \leq x \leq x_{max}, \quad t \geq 2015. \quad (6.9)$$

où la variable  $t$  représente l'année qui indique le degré de maturité des technologies nécessaires à l'hybridation. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau de la Figure 6.8.

Optimize versus	Cost Mission Block Fuel		Cash Operating Cost (COC)		Climate Impact (APGWP)	
	Conventional	Hybrid	Conv.	Hyb.	Conv.	Hyb.
<b>Equilibrium Year</b>		<b>2026</b>		<b>2025</b>		<b>2020</b>
SLSThrust (daN)	11620	11160	12260	11760	10950	11120
WingArea (m <sup>2</sup> )	152	152	150	154	175	175
Wing Aspect Ratio	17	17	15	16	10	8
Cruise Mach	0,63	0,61	0,75	0,66	0,66	0,61
Cruise Altitude (ft)	35 000	35 000	35000	35000	31400	30000
BPR	8	8	8	8	12,9	12,2
eFan Power (MW)		1,1		1		1,7
Electric Ratio		0,01		0,01		0,012
<b>Active Constraints</b>	TOFL1	TOFL1	TOFL1 - LdSpeed	TOFL1 - LdSpeed	TOFL1 - ClbVz	TOFL1
<b>Cost Mis. Fuel</b>	<b>1650</b>	<b>1650</b>	1780	1780	2100	2300
<b>COC</b>	4400	4470	<b>4200</b>	<b>4200</b>	4600	4920
<b>APGWP</b>	3,1x10 <sup>-5</sup>	3,06x10 <sup>-5</sup>	3,25x10 <sup>-5</sup>	3,2x10 <sup>-5</sup>	<b>2,77x10<sup>-5</sup></b>	<b>2,77x10<sup>-5</sup></b>

FIGURE 6.8 – Résultats de l'optimisation de l'avion conventionnel et de l'avion hybride

Plus qu'une réelle révolution, cette optimisation est une très bonne validation des études parallèles menées précédemment quant à la pertinence du modèle et à la sensibilité des variables de conception. On retrouve par exemple le fait que pour réduire l'impact climatique, les avions devraient voler moins haut que les 35000 pieds actuels et moins vite, mais que cela entraîne une augmentation significative de la masse maximale au décollage et du cout global d'opération de l'avion. On observe également que d'ici 2025-2026, l'évolution des technologies nécessaires à l'hybridation devraient permettre de proposer un avion hybride qui soit économiquement viable par rapport à l'avion conventionnel avec une probabilité de 95%. Ainsi même s'il reste un gros travail à faire sur la conception de cet avion, nos résultats montrent qu'un avion hybride est une piste de recherche à considérer.

### 6.3 Premiers pas vers l'optimisation robuste

Dans la dernière partie de la thèse, nous nous sommes intéressés à une approche différente, quoique complémentaire, de l'optimisation pour la conception préliminaire d'avions. En se basant sur le savoir-faire ingénieur et sur les simulations réalisées par S. Prigent au cours de sa thèse, il apparaît que pour certaines fonctions objectif telles que le cout ou la consommation en fuel, le problème de conception préliminaire avion décrit au Paragraphe 6.2.1, peut être vu comme un problème d'optimisation sous incertitudes dont la fonction objectif est presque affine et les contraintes quasiment convexes. Nous avons alors montré que le problème initial peut être approché de manière conservative par un problème de programmation linéaire incertain auquel nous pourrions appliquer les techniques de programmation linéaire robuste décrites dans [43, Chapitre 1]. Cette méthodologie est ensuite appliquée à deux cas réels de conception avion dont nous présentons les résultats numériques. Dans ce mémoire, nous nous contenterons d'en donner les grandes étapes et de présenter les résultats numériques obtenus. Le lecteur intéressé pourra se référer soit au Chapitre 6 de la thèse, soit à l'article [227].

Partons du problème générique de conception d'avion présenté au Paragraphe 6.2.1 i.e. :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, \xi) \quad \text{sous :} \quad & g_i(x, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ & x_{min} \leq x \leq x_{max}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

où  $\xi$  est le vecteur des entrées incertaines du modèle. Les grandes idées sont les suivantes : basé sur le savoir-faire ingénieur et des simulations numériques qui viennent corroborer ces observations, les fonctions objectifs telles que le cout ou la consommation en fuel, sont presque linéaires en les variables de conception et l'ensemble des contraintes peut être approché par un polyèdre convexe. Ainsi en linéarisant la fonction  $f$  par rapport aux variables  $x$  de l'optimisation et en remplaçant le domaine admissible par un polyèdre dont la construction est détaillée dans [227], le Problème (6.10) peut être approché par un programme linéaire incertain de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x + d \quad \text{sous :} \quad & Ax \leq b, \\ & x_{min} \leq x \leq x_{max}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

où les incertitudes sur les coefficients  $(A, b, c, D)$  sont supposées connues (données par le savoir-faire ingénieur ou par des méthodes de propagation des incertitudes). Notons  $\mathcal{U}$  l'ensemble des incertitudes décrit par ces coefficients. Suivant le formalisme de A. Ben-Tal, L. El Ghaoui et A. Nemirovski [43], on suppose que  $\mathcal{U}$  admet un paramétrage affine de la forme :

$$\mathcal{U} = \left\{ D = \begin{bmatrix} c^\top & d \\ A & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+m) \times (1+n)} : D = D^0 + \sum_{k=1}^L \zeta_k D^k, \zeta \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^L \right\},$$

où  $\mathcal{Z}$  est l'ensemble des perturbations,  $D^0$  la valeur nominale des incertitudes et  $D^k$  la base des variations de ces incertitudes. En première approche, nous avons choisi une situation pire-cas dans laquelle :  $L = (1 + m)(1 + n)$  et :

$$D_{i,j}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } l = (n + 1)(i - 1) + j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des perturbations est alors choisi de la forme :  $\mathcal{Z} = \bigotimes_{k=1}^L [\zeta_k^{inf}, \zeta_k^{sup}]$  conduisant vraisemblablement à une sur-estimation de l'ensemble des incertitudes. En suivant la méthodologie décrite dans [43, Chapitre 1], le Problème (6.11) est équivalent au problème :

$$\begin{aligned} \min_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} t \quad \text{sous :} \quad & c^\top x + d \leq t, \quad Ax \leq b, \\ & x_{min} \leq x \leq x_{max}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Par définition, une solution robuste du Problème (6.12) est une solution optimale de sa contrepartie robuste définie par :

$$\min_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left( \sup_{(A,b,c,d) \in \mathcal{U}} t \right) \quad \text{sous :} \quad c^\top x + d \leq t, \quad Ax \leq b, \quad \forall (A, b, c, d) \in \mathcal{U},$$

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}.$$

soit ici :

$$\min_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} t \quad \text{sous :} \quad c^\top x + d \leq t, \quad Ax \leq b, \quad \forall (A, b, c, d) \in \mathcal{U} \quad (6.13)$$

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}.$$

En introduisant des variables d'écart comme expliqué dans [43, Chapitre 1], le Problème (6.13) est équivalent à un problème de programmation linéaire déterministe à  $2n + 1$  variables,  $2n + m + 1$  contraintes d'inégalités et  $n$  contraintes de boîtes que l'on peut résoudre à l'aide d'outils classiques de la programmation linéaire :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{2n+1}} \tilde{C}^\top X \quad \text{sous :} \quad \tilde{A}X \leq \tilde{b}, \quad X_{min} \leq X \leq X_{max}. \quad (6.14)$$

Considérons maintenant deux exemples respectivement en dimension 2 et 3 d'optimisation de la conception robuste d'avion. La fonction objectif et les contraintes sont définies dans les Tables 6.1 et 6.2. Pour chaque exemple, la démarche est la suivante :

	Dénomination	Unité	Sigle	$[x_{min}, x_{max}]$
$x_1$	Surface de la voilure	$m^2$	WingArea	[100, 170]
$x_2$	Poussée statique au niveau de la mer	daN	SLSThrust	[9000, 13000]
$x_3$	Mach de croisière	mach		[0.65, 0.76]

TABLE 6.1 – Variables de l'optimisation :  $(x_1, x_2)$  si  $n = 2$  et  $(x_1, x_2, x_3)$  si  $n = 3$ .

Objectif	$f$	Cout d'exploitation au comptant	COC		
Contraintes	$g_1$	Longueur de piste au décollage 1 (au niveau de la mer)	TOFL1	$\leq$	2000 m
	$g_2$	Longueur de piste au décollage 2 (in High & Hot conditions)	TOFL2	$\leq$	2500 m
	$g_3$	Vitesse verticale de montée	CLBVZ	$\geq$	500 ft/min
	$g_4$	Vitesse verticale de croisière	CRZVZ	$\geq$	300 ft/min
	$g_5$	Vitesse à l'atterrissage	LDSPEED	$\leq$	130 kt

TABLE 6.2 – Fonctions objectif et contraintes.

1. Construction du problème linéaire approché (6.11) par linéarisation de la fonction objectif et des contraintes.
2. Quantification et propagation des incertitudes pour obtenir les boîtes  $\mathcal{L}_\infty$  sur les  $\zeta$  par une méthode de propagation basée sur le développement de Taylor d'ordre 1.
3. Détermination des coefficients  $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$  associés pour obtenir le Problème (6.14).
4. Résolution du Problème (6.14) à l'aide de l'algorithme du simplexe (*linpro* sous Scilab).

Dans le cas  $n = 2$  par exemple et pour  $m = 25$  contraintes d'inégalités, on obtient la solution suivante du Problème (6.14) :

$$X_{sol} = (10292 \text{ daN}, 115.6 \text{ m}^2) \text{ , pour un cout optimal : } COC = 4285 \text{ \$/pax.}$$

Cette solution est alors comparée à la solution (*a priori* non robuste  $X_{sol}^{det}$  du problème d'optimisation déterministe initial :

$$X_{sol}^{det} = (10121 \text{ daN}, 114.3 \text{ m}^2) , \text{ pour un cout optimal : } COC^{det} = 4279 \text{ \$/pax.}$$

Les deux solutions sont représentées sur la Figure 6.9. Sans surprise, le prix à payer pour la robustesse de la solution est une augmentation de la valeur du cout optimal.

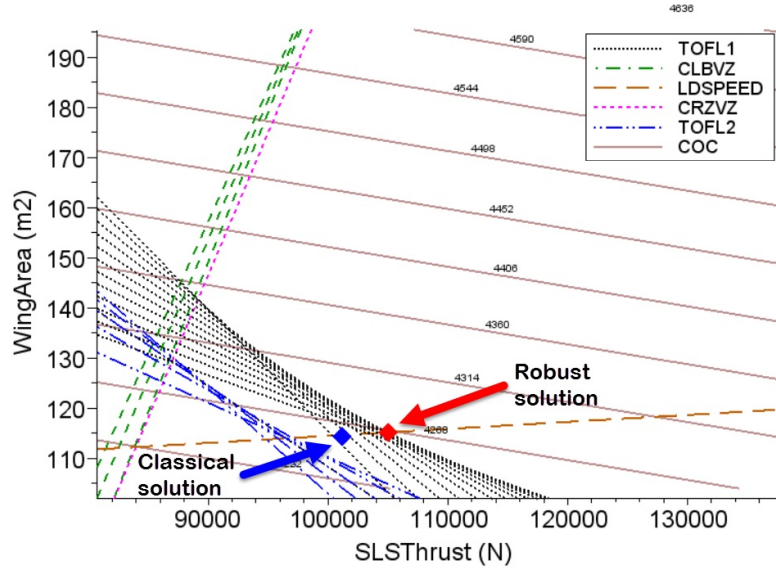


FIGURE 6.9 – Solutions déterministe et robuste du problème de conception 2D robuste d'avion.

Pour terminer, nous avons conclu notre étude en vérifiant la robustesse de la solution  $X_{sol}$  vis-à-vis du domaine admissible initial (avant linéarisation).

A noter que l'approche par l'optimisation linéaire robuste demeure aujourd'hui limitée par la dimension du problème d'optimisation à résoudre, ce qui la rend inapplicable au problème de conception préliminaire d'avions pris dans sa globalité. En revanche, cette approche est tout à fait adaptée à la conception de composants, pour lesquels la dimension du problème d'optimisation est petite, et dont les contraintes opérationnelles doivent être satisfaites à tout prix.

## 6.4 Conclusion

Pour conclure ce chapitre, revenons sur la contribution de la thèse dans le contexte des Avant-Projets Airbus. L'un des objectifs était de sensibiliser le bureau des Avant-Projets à la gestion d'incertitude par des distributions de probabilité. Cela a conduit au développement et à l'amélioration d'outils numériques internes utilisés pour la résolution du problème de conception d'avions. Tous les modèles développés dans le cadre de la thèse (impact climatique, avion hybride, moteur thermodynamique, profil de mission détaillé), ont été intégrés à ces outils, et validés par les études menées au cours de la thèse. Une contribution majeure de cette thèse est d'avoir mis en place des méthodes et outils numériques pour la conception préliminaire d'avion, ouvrant la voie à des études plus poussées d'autres concepts d'avions innovants.

# Chapitre 7

## Autres perspectives de recherche

Au delà des perspectives naturelles dégagées au fil de lecture, ce chapitre regroupe un certain nombre d'autres pistes de recherche, que je souhaiterais explorer. Certains des points évoqués ci-après sont déjà des projets en cours, d'autres relèvent de perspectives à plus long terme.

### 7.1 Autour de la commande robuste $H_\infty$

#### 7.1.1 Calcul robuste de la norme $H_\infty$

Cette première piste de recherche s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec O. Prot de l'Université de Limoges. Dans certaines applications en synthèse de lois de commande, nous nous sommes aperçus que l'erreur sur le calcul même de la norme  $H_\infty$ , par les routines implémentées sous Matlab©, est très grande (de l'ordre de  $10^{-1}$ ). Le but de ce projet est de proposer un algorithme de calcul plus précis et plus stable de la norme  $H_\infty$  pour les systèmes LTI.

Classiquement la norme  $H_\infty$  d'un système LTI est calculée, numériquement, comme la plus petite valeur possible d'un paramètre  $\gamma > 0$  pour lequel une certaine matrice Hamiltonienne  $H_\gamma$  n'admet aucune valeur propre imaginaire pure (cf Chapitre 2). Algorithmiquement, ce calcul peut être effectué à l'aide de l'algorithme de bisection proposé par S. Boyd, V. Balakrishnan, N. Bruinsma et M. Steinbuch [63, 68]. Le principe est le suivant : on souhaite calculer, s'il en existe, les valeurs propres purement imaginaires de la matrice  $H_\gamma$ . Cela nécessite de calculer la totalité des valeurs propres de  $H_\gamma$ , puis de sélectionner celles qui ont une partie réelle "petite". Il est, en effet, plus difficile d'essayer de calculer seulement les valeurs propres situées sur l'axe imaginaire pur, plutôt que de toutes les calculer, puis de les sélectionner. Le calcul des valeurs propres de  $H_\gamma$  n'étant pas très précis en pratique, le calcul de la norme  $H_\infty$  peut, lui aussi, être imprécis (non-détection d'un pic). De plus, la sélection des valeurs propres ayant une petite partie réelle est délicate, et peut également conduire à une mauvaise détection des fréquences de coupure.

Notre projet est de proposer et d'implémenter une version revisitée de l'algorithme de bisection permettant un calcul plus précis et plus robuste de la norme  $H_\infty$  d'un système LTI (Linéaire en Temps Invariant). Un article est en cours de rédaction. L'idée générale de la méthode sur laquelle nous travaillons, est de rendre plus robuste le calcul de la norme  $H_\infty$  en prenant en compte l'information de toutes les valeurs propres, ainsi que celle donnée par les vecteurs propres qui sont également calculés par les routines d'algèbre linéaire. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre théorique de la théorie des perturbations des matrices Hamiltoniennes par des matrices Hamiltoniennes [188, 4], qui est substantiellement différente de la théorie classique pour des matrices non structurées [266, 142]. Le principe est le suivant : étant donnée une matrice Hamiltonienne  $H_\gamma$  dépendant d'un paramètre  $\gamma > 0$  réel, comment se déplacent les valeurs propres (et vecteurs propres) de  $H_\gamma$  quand  $\gamma$  augmente ? Plus précisément, perturber le paramètre  $\gamma$  revient à perturber  $H_\gamma$  par une matrice Hamiltonienne (que l'on sait calculer). Le problème qui nous intéresse, est de comprendre comment se déplacent les valeurs propres imaginaires pures de  $H_\gamma$  sur l'axe des imaginaires purs, et à quelle condition, ces valeurs propres quittent l'axe des imaginaires purs.

Les premiers résultats obtenus avec O. Prot portent essentiellement sur le comportement des valeurs propres simples (et donc différentiables par rapport au paramètre  $\gamma$ ) de la matrice  $H_\gamma$ , et le calcul analytique de leur déplacement en fonction des perturbations sur  $\gamma$ . De plus, en utilisant les résultats publiés dans [188, 4], nous avons obtenu des conditions analytiques pour qu’une valeur propre quitte l’axe des imaginaires purs. Il reste maintenant à étendre ces résultats au cas plus intéressant des valeurs propres multiples de  $H_\gamma$  : en particulier, nous avons montré qu’une valeur propre qui quitte l’axe des imaginaires purs, est nécessairement au moins double.

Une autre piste de recherche intéressante concerne le conditionnement du calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice Hamiltonienne  $H_\gamma$ . L’idée est de montrer que le calcul de ces valeurs propres et vecteurs propres se ramène à celui des valeurs propres et vecteurs propres d’une certaine matrice, dont le développement de Taylor en  $\gamma$  est la somme alternativement de matrices hermitiennes et anti-hermitiennes. Il nous semble que ce résultat doit nous permettre de démontrer que, par notre approche, le conditionnement du calcul de la norme  $H_\infty$  est amélioré, ce qui garantirait la stabilité/robustesse de notre approche.

En s’appuyant sur les expressions du déplacement des valeurs propres et vecteurs propres obtenues dans le cas différentiable, nous avons implémenté (en C) un algorithme de bisection revisité dont les premiers résultats numériques améliorent significativement les résultats obtenus avec la fonction *hinfnorm* de Matlab®. Malgré l’absence de résultats théoriques complets, on observe numériquement la pertinence de l’approche (calcul plus précis de la norme  $H_\infty$ , amélioration du conditionnement) sur quelques exemples issus de la bibliothèque COMPl<sub>e</sub>ib de F. Leibfritz [165].

Enfin, une autre piste à explorer à moyen terme sera de voir comment adapter l’algorithme au cas de la grande dimension [125]. En effet, l’algorithme de bisection, même revisité, est relativement lent. Un des enjeux actuels est de proposer un algorithme de calcul rapide de la norme  $H_\infty$  en vue de son utilisation pour la synthèse de lois de commande robustes, au cours de laquelle on fait appel à une ou plusieurs évaluations de la norme  $H_\infty$  du système à chaque itération.

### 7.1.2 Commande active de vibrations d’un cable incliné

Cette piste de recherche est le fruit d’une collaboration avec L. Baudouin (LAAS-CNRS) lors de son séjour dans le groupe de D. Wagg et S. Neild (Dynamics and Control research group, de l’Université de Bristol, Royaume Uni). Le projet sur lequel nous travaillons, porte sur la commande des vibrations d’un cable incliné, dont la modélisation mathématique est décrite dans [274]. Du fait de l’expertise de L. Baudouin en commande robuste des systèmes décrits à l’aide d’équations aux dérivées partielles (EDP), l’étude s’est orientée vers le contrôle  $H_\infty$  des vibrations de ce type de cable, modélisées par des équations des ondes (1D) non-linéaires couplées. La contribution de ce travail réside dans le fait de partir d’un problème réel et de sa modélisation EDP, et d’en étudier à la fois les aspects théoriques et numériques, allant jusqu’aux tests sur un dispositif expérimental.

Les cables inclinés sont des composantes importantes de nombreuses structures de l’ingénierie civile, allant des ponts haubanés aux structures de télescopes avec cables [262]. Prenons l’exemple parlant (quoique peu pertinent pour l’approche envisagée) des ponts haubanés. Les vibrations des cables peuvent être induites, entre autres, par le mouvement du tablier dû à la circulation des véhicules. La conception des mécanismes de transmission des vibrations est crucial pour la compréhension de la dynamique du système, d’autant plus que les cables impliqués sont très flexibles et naturellement peu amortis. L’objectif général de notre étude est de prédire et de contrôler leur réponse à des excitations extérieures.

Plus précisément, supposons le cable connecté au sol par dispositif de tendon actif. Les équations du mouvement du cable sont décrites par une EDP que nous linéarisons au premier ordre afin de pouvoir rentrer dans le formalisme espace d’état de la commande robuste  $H_\infty$ . Un des enjeux de notre travail a donc été, dans un premier temps, de réécrire cette EDP sous la forme d’un modèle espace d’état, auquel nous appliquons les outils théoriques de la commande robuste  $H_\infty$  pour les systèmes de dimension infinie. Les principaux éléments de ce travail ont été publiés dans deux articles de conférence [34, 32], et relèvent plutôt de la compétence de L. Baudouin que de la mienne. Un article plus détaillé est actuellement en révision et propose une modélisation plus poussée du cable incliné et de la structure de commande choisie [33].



Dans un second temps, nous passons à la dimension finie par troncature du modèle initial, afin de pouvoir mettre en œuvre nos premières simulations numériques. Une étude de la commande robuste par retour d'état [34] a préparé celle par retour de mesures [32], et quelques améliorations dans l'écriture du modèle, essentiellement au niveau des mesures disponibles et des contrôles envisageables, sont encore à creuser.

L'idée est d'approcher le système original de dimension infinie par une suite de systèmes de dimension finie, obtenus par projection sur les premiers modes propres de l'opérateur des ondes, et sur lesquels nous allons pouvoir appliquer les outils classiques de la synthèse  $H_\infty$  en dimension finie. Comme attendu, les premières simulations mettent en évidence une bonne atténuation du premier mode (le plus important d'un point de vue structurel) et des suivants, ainsi qu'une réduction visible des vibrations. Sans surprise, on observe également le phénomène de spillover en l'absence d'amortissement : le correcteur stabilisant les  $N$  premiers modes du système, déstabilise le  $N + 1$  mode. Cela ne représente pas une véritable limitation de notre approche car un faible amortissement (bien inférieur à l'amortissement présent naturellement dans le système et quantifié dans [122]) suffit à éliminer ce phénomène.

Bien qu'il n'y ait pas de théorie permettant d'affirmer que la suite des correcteurs synthétisés en dimension finie converge vers le correcteur  $H_\infty$  optimal du système initial de dimension infinie, il serait intéressant d'effectuer quelques simulations pour observer le comportement de ces correcteurs et voir (numériquement) s'il y a convergence ou non. En particulier, il semble également naturel de se demander comment se comporte le correcteur calculé à un ordre donné, sur le système non linéaire initial. De plus, le cadre  $H_\infty$ , préparé par l'étude et la validation préalable du modèle en dimension infinie, pourra ensuite être comparé à des approches  $H_2$  ou mixte  $H_2/H_\infty$  en fonction des objectifs de performance que l'on souhaitera se donner.

Enfin, l'équipe de Bristol possède un dispositif expérimental, sur lequel nous nous appuyons déjà pour le choix des paramètres de nos simulations numériques actuelles, et avec lequel nous comptons travailler dans un dernier temps. Ce sera également l'occasion de comparer les résultats en matière d'amortissement des vibrations de notre approche avec celle, explorée (avec des objectifs différents) par les collègues de Bristol dans l'article [122], dans lequel seuls trois modes de vibrations sont conservés, mais avec les non-linéarités les combinant.

## 7.2 Dans le domaine du spatial

### 7.2.1 Evitement de collision en rencontres multiples

Depuis la collision entre le satellite russe COSMOS 1934 et un débris de COSMOS 926 en décembre 1991, pas moins de huit collisions ont été recensées en orbite entre des satellites opérationnels, ou entre des satellites et des débris. Les risques de collision sont particulièrement importants sur les orbites basses et les différentes agences spatiales (CNES, ESA, NASA) et les opérateurs du domaine (Airbus Defence and Space, GMV) ont mis en place des procédures d'alerte permettant d'évaluer les risques de collision concernant les satellites contrôlés, et autorisant le déclenchement des manœuvres d'évitement si le risque de collision est jugé important. Ces procédures ont connu de nombreuses évolutions ces dernières années et le domaine de l'évitement de collision est actuellement en plein développement.

Dans ce contexte, avec D. Arzelier, M. Joldes et J.-B. Lasserre, nous avons répondu à un appel d'offres lancé par le CNES sur le thème : "Probabilité de collision globale et prise en compte dans le maintien à poste des satellites". Notre projet, porté par M. Joldes, a été retenu par le CNES pour un financement de 6 mois à compter du 1<sup>er</sup> septembre 2016.

Cette étude a pour objet de développer, justifier théoriquement et tester avec des données simulées, puis réelles (fournies par le CNES), une méthode mathématique visant à calculer la probabilité de collision d'un satellite ou d'un ensemble de satellites avec un ensemble de débris spatiaux. La différence principale entre cette méthode et la plupart des méthodes utilisées opérationnellement aujourd'hui, est qu'on ne considère plus les couples satellite-débris de façon indépendante. Au contraire, on s'intéresse à l'ensemble des rapprochements sur un horizon de temps  $T$  pour le cal-

cul de la probabilité de collision globale entre le(s) satellite(s) d'intérêt et l'ensemble de débris considérés. Cette probabilité de collision globale sera ensuite utilisée pour la décision de la réalisation de(s) la manœuvre(s) d'anti-collision, permettant de ramener la probabilité de collision globale sous un certain seuil fixé par l'utilisateur. Cette approche est particulièrement nécessaire pour la gestion des risques de collision des satellites d'une constellation, via la prise en compte des contraintes de positionnement relatif, et pour le calcul de la probabilité de collision dans une configuration où existent des rapprochements multiples entre deux objets spatiaux (e.g. Topex-Jason).

La première phase de ce projet sera axée sur la modélisation des rencontres multiples. A notre connaissance, il n'existe actuellement pas de modélisation claire de ce problème, et les hypothèses formulées dans le cadre de la thèse de R. Serra (rapprochements rapides/lents, pas de corrélation croisées entre les états estimés des objets primaire et secondaire, par exemple), ne peuvent plus être considérées comme valides lors de l'étude et du calcul du risque global des rencontres multiples [76]. L'idée est de proposer une modélisation très générale du problème, puis d'identifier, en collaboration avec le CNES, plusieurs jeux d'hypothèses simplificatrices raisonnables.

La seconde phase de ce projet s'articule autour de deux questions fondamentales : l'évaluation de la probabilité de collision globale et le calcul de manœuvres d'évitement. L'évaluation du risque est un problème complexe : dans un premier temps, il s'agira de formaliser le calcul de la probabilité totale (modèles de dynamique relative entre les différents objets impliqués, volumes d'intégration à considérer, propriétés et caractéristiques des densités de probabilités en jeu). Ce travail s'appuiera sur la thèse de R. Serra et sur la référence [89] même si dans cette dernière, l'hypothèse de rencontres multiples n'est pas explicitement prise en compte. Dans un second temps, il est prévu d'utiliser les méthodes du point col, sur lesquelles travaillent M. Joldes et B. Salvy pour évaluer le comportement asymptotique de la probabilité de collision.

Revenons maintenant sur le calcul de manœuvres pour l'évitement de collisions multiples dans le cas où la probabilité de collision globale est supérieure à un certain seuil pour l'horizon temporel considéré. Les travaux seront organisés en deux temps : tout d'abord dans la continuité des travaux de thèse de Romain Serra, nous proposons de travailler sur la formulation précise du problème d'évitement de collisions multiples sous hypothèse de poussées impulsives. Le problème des rencontres multiples peut alors être formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes en probabilité. Faute d'avoir les gradients de la probabilité de collision globale par rapport à la manœuvre, une première approche consisterait à mettre en place un algorithme sans dérivée appliqué au problème d'évitement de collision dans lequel les contraintes apparaissent en pénalisation dans la fonction objectif. Sous des hypothèses plus précises, on peut envisager des techniques plus spécifiques telles que celles présentées dans la thèse de Romain Serra, en remplaçant la probabilité de collision individuelle par la probabilité globale sur l'intervalle de temps considéré.

Une perspective à plus long terme serait de travailler sur une modélisation du problème d'évitement de collisions multiples sous hypothèse de poussées continues. Dans ce cas, le problème s'écrit sous la forme d'un problème de commande optimale pouvant être abordé par des méthodes directes (méthodes de transcription, méthodes de tir) ou par des méthodes indirectes (résolution des conditions nécessaires d'optimalité). Le choix des approches (et donc des solutions obtenues) est fortement conditionné par les hypothèses qui seront identifiées au cours de cette étape de modélisation (dynamique linéaires/non-linéaires, képlériennes/perturbées, contraintes sur l'état,...).

## 7.3 Optimisation et apprentissage

Depuis le 1<sup>er</sup> septembre 2016, je suis membre de la toute nouvelle équipe "Apprentissage, Optimisation et Complexité", de l'Institut de Mathématiques de Toulouse. Cette section propose deux pistes de recherche que je souhaite explorer dans un futur proche.

### 7.3.1 Optimisation distribuée et apprentissage de dictionnaire. Applications en imagerie et en géophysique

Les développements récents en imagerie et en sciences des données sont accompagnés d'un besoin croissant en méthodes rapides pour la résolution de problèmes d'optimisation de très grande dimension, et de plus en plus souvent non convexes. Les méthodes actuelles pour représenter des données, telles que des signaux ou des images, les expriment comme des sommes d'atomes élémentaires. Ces méthodes sont adaptatives, et la recherche d'atomes optimisés a ouvert, il y a quelques années, un nouveau champ disciplinaire, celui de l'apprentissage de dictionnaire.

Définissons succinctement le problème. Notons  $N$  la taille des données et  $P$  le nombre d'atomes (avec  $P \gg N$ ); les atomes sont concaténés dans une matrice  $D$  de taille  $N \times P$ . Soit  $L$  le nombre d'échantillons qui vont servir à l'apprentissage et concaténés dans une matrice  $U$  de taille  $N \times L$ . L'archétype de la stratégie employée en apprentissage de dictionnaire, consiste à résoudre le problème d'optimisation non-convexe suivant :

$$\min_{D \in \mathcal{C}, A} \|DA - U\|^2 + \lambda \|A\|_1, \quad (7.1)$$

où  $\lambda > 0$ ,  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne,  $\|\cdot\|_1$  est la norme  $\mathcal{L}_1$  qui force la parcimonie de  $A$  et  $\mathcal{C}$  définit un ensemble de contraintes permettant, entre autres, d'éviter les solutions triviales. Le code  $A \in \mathbb{R}^{P \times L}$  peut être vu comme l'ensemble des coefficients auxquels on applique le dictionnaire pour reconstruire l'image  $U$ . Un tel problème est résolu par une alternance de mises à jour du dictionnaire  $D$ , puis du code  $A$ .

L'objectif est de proposer des algorithmes efficaces pour la résolution du problème (7.1) : il s'agit d'un problème d'optimisation non lisse et non convexe, dont les variables sont les paramètres définissant une transformée rapide permettant de représenter parcimonieusement des images.

Une étape importante de ce travail consistera à étudier la structure du problème d'optimisation afin de permettre la mise en place des algorithmes adaptés et d'en démontrer la convergence, sous des hypothèses raisonnables satisfaites en pratique. Plus précisément, nous prévoyons d'exploiter la structure polynomiale ou semi-algébrique des problèmes considérés : à l'aide de l'inégalité de Kurdyka-Lojasiewicz, et de la dérivation spécifique d'exposants de Lojasiewicz, nous espérons pouvoir donner une validation forte de nos approches numériques, non seulement en garantissant la convergence des algorithmes proposés, mais aussi en donnant, pour la première fois, des estimations de leur complexité pour l'apprentissage de dictionnaire.

Enfin, dans les domaines d'applications où le nombre de données peut être très important, il est nécessaire de pouvoir réduire la complexité des opérations traitées à chaque itération, ainsi que la mémoire occupée. Une stratégie pour atteindre cet objectif consiste à diviser les données en plusieurs blocs, et à n'en traiter qu'un nombre réduit à chaque itération.

Cette piste de recherche s'inscrit dans le cadre d'une collaboration récente avec F. Malgouyres (IMT-UPS) sur des problématiques liées à l'image et à l'apprentissage de dictionnaire. Notre collaboration a débuté au travers du co-encadrement d'un stage de M1 d'un mois au cours de l'été 2016. Le but du stage était de mieux comprendre le fonctionnement de trois stratégies d'optimisation distribuée pour l'apprentissage de dictionnaire. L'idée est la suivante : étant donné un échantillon  $U$  de patches aléatoires de taille fixée à l'avance, implémenter et tester les trois algorithmes suivants : l'algorithme classique de minimisation alternée, l'algorithme PALM (*Proximal Alternating Linearized Method*) proposé par J. Bolte, S. Sabach et M. Teboulle dans [56] ainsi qu'une version par blocs de cet algorithme, et un algorithme en ligne.

**Remarque 7.1** *Le principe de l'algorithme en ligne est le suivant : l'algorithme reçoit non pas un échantillon  $U$  de patches, mais un flux de patches  $U_i$  vectorisés, tirés aléatoirement et donc indépendants les uns des autres. On introduit la fonction :  $F : (D, U) \mapsto \min_X \|DX - U\|^2 + \lambda \|X\|_1$ .*

*A chaque itération, on minimise, par rapport à  $D$ , la fonction :  $D \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(D, U_i)$  qui est une approximation de l'espérance de :  $D \mapsto \min_X F(D, U)$  par rapport à la variable aléatoire  $U$ .*

### 7.3.2 Méthodes de faisceaux pour l'apprentissage

De nombreux problèmes d'apprentissage peuvent être décrit par un problème d'optimisation. Par exemple, un problème central en apprentissage est celui de la minimisation du risque régularisé : plus précisément, on veut résoudre un problème de la forme :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \lambda Q(x) + R(x), \quad (7.2)$$

où  $\lambda > 0$  est un paramètre de régularisation. La fonction  $Q$  joue le rôle d'un terme convexe de régularisation. Typiquement  $Q$  est choisie différentiable et peu coûteuse à évaluer. Au contraire, le risque empirique  $R$  est généralement non différentiable et, presque toujours, très coûteux à manipuler. Un cas bien connu est celui où l'on choisit :  $Q(x) = \|x\|_1$ , conduisant aux algorithmes de type Lasso [186, 75]. Même dans le cas où la fonction  $R$  est supposée convexe, le problème (7.2) ne peut pas être résolu efficacement et rapidement par des algorithmes d'optimisation très généraux, en particulier en grande dimension. Citons, parmi les applications classiques, les problèmes SVM (*Support Vector Machine*), les problèmes de régression logistique ou encore, les problèmes d'apprentissage de sortie structurée.

Dans le cas convexe, le problème de minimisation du risque régularisé a fait l'objet de recherches intensives ces dernières années, et plusieurs variantes de l'algorithme de faisceaux adapté à la structure du problème (7.2) ont été proposées [162, 267, 265].

En pratique, la non convexité est de plus en plus fréquente en apprentissage. Pour y faire face, plusieurs approches ont été explorées : la première repose sur l'idée de la "convexité à tout prix" et utilise des techniques de relaxation pour transformer le problème non convexe initial en un problème (ou une suite de problèmes) convexe(s) [279]. Ces approches sont difficiles à mettre en œuvre, et leurs performances numériques sont souvent peu satisfaisantes, du fait de la faible qualité des approximations. Une autre approche consiste à exploiter la structure du problème posé quand c'est possible (forme convexe-concave, différence de fonctions convexes, etc.), mais reste de ce fait limitée à quelques classes de fonctions. Dans [98], les auteurs proposent une variante des méthodes de faisceaux adaptées à la résolution du problème (7.2) dans le cas où :  $Q(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2$ . Bien que les résultats en pratique soient significativement meilleurs que les algorithmes non-spécialisés de l'optimisation non lisse, non convexe, la convergence de l'algorithme proposé reste à démontrer.

Une piste de recherche que j'aimerais explorer à moyen terme, serait de proposer une méthode de faisceaux pour la résolution du problème de minimisation du risque régularisé dans le cas où la fonction  $R$  est supposée non convexe. Dans un premier temps, il s'agira d'étudier l'état de l'art des méthodes d'optimisation en général, et des méthodes de faisceaux en particulier, pour l'apprentissage. Le but sera d'identifier les spécificités et difficultés des problèmes d'optimisation issus de l'apprentissage : propriétés du problème, régularité, problèmes liés à la grande dimension. Dans un second temps, j'envisage de travailler sur un problème jouet :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2 + R(x), \quad (7.3)$$

afin de pouvoir tester l'algorithme présenté au Chapitre 2, vraisemblablement avec la variante des tangentes décalées pour gagner en rapidité. Les points délicats de ce travail vont porter sur le choix du modèle, la gestion du paramètre de proximité (non pas pour assurer la convergence de l'algorithme, mais pour l'accélérer) et le mécanisme d'agrégation qui est un élément clé de ces méthodes à mémoire limitée. Enfin, l'enjeu sera bien entendu d'étendre l'approche choisie pour le problème jouet (7.3) au problème général (7.2).

# Publications de l'auteur

## Pré-publications soumises dans des revues internationales avec comité de lecture

- [s1] L. Baudouin, A. Rondepierre, S. Neild. “Robust control of an inclined cable using a partial differential equation model”, <https://hal.inria.fr/LAAS-MAC/hal-01096851v1>.
- [s2] R. Serra, D. Arzelier, A. Rondepierre “Analytical solutions for impulsive elliptic out-of-plane rendezvous problem via primer vector theory”, <http://homepages.laas.fr/arzelier/publis/2014/HP-journal.pdf>.

## Revue avec comité de lecture

- [1] R. Serra, D. Arzelier, M. Joldes, J.-B. Lasserre, A. Rondepierre, B. Salvy. “Fast and Accurate Computation of Orbital Collision Probability for Short-Term encounters”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No. 5, pp. 1009–1021, 2016.
- [2] S. Prigent, P. Maréchal, A. Rondepierre, T. Druot, M. Belleville “A Robust Optimization Methodology for Preliminary Aircraft Design.”, *Engineering Optimization*, Vol. 48, No. 5, pp. 883–899, 2016.
- [3] D. Noll, A. Rondepierre. “On local convergence of the method of alternating projections”, *Foundations of Computational Mathematics, Springer*, DOI 10.1007/s10208-015-9253-0, Feb 2015.
- [4] D. Arzelier, C. Louembet, A. Rondepierre, M. Kara-Zaitri “A New Mixed Iterative Algorithm to Solve the Fuel-Optimal Linear Impulsive Rendezvous Problem”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 159, No. 1, p 210–230, 2013.
- [5] D. Noll, A. Rondepierre “Convergence of linesearch and trust region methods using the Kurdyka-Lojasiewicz inequality”, *Computational and Analytical Mathematics. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol 50, p593-611, 2013.
- [6] P. Maréchal, A. Rondepierre. “A proximal approach to the inversion of ill-conditioned matrices”, *Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 2009.
- [7] D. Noll, O. Prot, A. Rondepierre “A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex functions”, *Pacific Journal of Optimization*, vol 4(3), p 569-602, 2008.
- [8] P. Apkarian, D. Noll, A. Rondepierre “Mixed  $H_2/H_\infty$  control via nonsmooth optimization”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol 47(3), p 1516-1546, 2008.

### Chapitres de livre avec comité de lecture

- [9] R. Serra, D. Arzelier, M.M. Joldes, A. Rondepierre., “Probabilistic Collision Avoidance for Long-term Space Encounters via Risk Selection”, *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control, Springer, Part IV, pp 679-698, 2015.*  
Selected Paper of the 3rd CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation and Control (CEAS EuroGNC), Toulouse, April 2015.

### Actes de conférences internationales avec comité de lecture

- [10] D. Arzelier, F. Bréhard, N. Deak, M. Joldes, C. Louembet, A. Rondepierre, R. Serra. “Linearized Impulsive Fixed-Time Fuel-Optimal Space rendezvous : A New Numerical Approach”, *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, 2016.
- [11] R. Serra, D. Arzelier, A. Rondepierre, J.L. Calvet., “Analytical optimal solutions of impulsive out-of-plane rendezvous around elliptic orbits”, *IFAC World Congress, Cape Town, South Africa*, 2014.
- [12] R. Serra, D. Arzelier, M.M. Joldes, J.B. Lasserre, A. Rondepierre, B. Salvy, “A new method to compute the probability of collision for short-term space encounters”, *AIAA/AAS’14 : Astrodynamics Specialist Conference*, 6p., n° 1404, Août 2014.
- [13] L. Baudouin, S. Neild, A. Rondepierre, D. Wagg, “Robust Measurement Feedback Control of an Inclined Cable”, *CPDE’13 : 1st IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, 2013.
- [14] P. Apkarian, D. Noll, A. Rondepierre, “Mixed  $H_2/H_\infty$  synthesis via nonsmooth optimization”, *46th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, 2009.
- [15] P. Apkarian, D. Noll, A. Rondepierre, “Nonsmooth optimization algorithm for mixed  $H_2/H_\infty$  synthesis”, *46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [16] J.-G. Dumas, A. Rondepierre, “Algorithms for Symbolic/Numeric Control of Affine Dynamical Systems”, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, p277–284, ACM Press 2005.
- [17] A. Rondepierre, “Piecewise Affine Systems Controllability and Hybrid Optimal Control”, *International Conference on Informatics in Control, Automation & Robotics*, 2005.
- [18] J.-G. Dumas, A. Rondepierre, “Modeling the electrical activity of a neuron by a continuous and piecewise affine hybrid system”, *Hybrid Systems : Computation and Control*, Lecture Notes in Computer Science, vol 2623, p156–171, Springer 2003.

### Actes de conférences (sans comité de lecture)

- [19] R. Serra, D. Arzelier, A. Rondepierre, “Collision avoidance for rectilinear encounters between spherical space objects via the scenario approach”, *ISSFD’15 : 25th International Symposium on Space Flight Dynamics, Munich, Germany*, October 2015.
- [20] S. Prigent, M. Belleville, T. Druot, A. Rondepierre, P. Maréchal, “Chance constrained business case of a three-engines hybrid aircraft”, *10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO 10), Orlando (Florida)*, May 2013.

# Bibliographie

- [1] M. Abramson, C. Audet, G. Couture, J. E. Dennis Jr., S. Le Digabel, and C. Tribes. The NOMAD project. Software available at <https://www.gerad.ca/nomad/>.
- [2] P.-A. Absil, R. Mahony, and B. Andrews. Convergence of the iterates of descent methods for analytic cost functions. *SIAM Journal on Optimization*, 16(2) :531–547, 2005.
- [3] M. Akella and K. Alfriend. Probability of collision between space objects. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(5) :769–772, 2000.
- [4] R. Alam, S. Bora, M. Karow, V. Mehrmann, and J. Moro. Perturbation theory for Hamiltonian matrices and the distance to bounded-realness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 32(2) :484–514, 2011.
- [5] S. Alfano. Aerospace support to space situation awareness. *Applicationes Mathematicae*, 2002.
- [6] S. Alfano. Satellite collision probability enhancements. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 29(3) :588–592, 2006.
- [7] S. Alfano. Review of conjunction probability methods for short-term encounters. *AAS*, 2007.
- [8] S. Alfano. Satellite conjunction monte carlo analysis. *AAS Spaceflight Mechanics Mtg, Pittsburgh, PA., Paper*, pages 09–233, 2009.
- [9] P. Antsaklis and A. Michel. *Linear systems*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] P. Apkarian. Comparison of HINFSTRUCT Matlab Robust Control Toolbox R2012a with HIFOO 3.5 with HANSO 2.1. Disponible à l’adresse : <http://pierre.apkarian.free.fr/hinfstructBenchmarking.html>, 2012.
- [11] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86, 2006.
- [12] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth optimization for multidisk  $H_\infty$  synthesis. *European Journal of Control*, 12(3) :229–244, 2006.
- [13] P. Apkarian, D. Noll, and O. Prot. A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex semi-infinite maximum eigenvalue functions. *Journal of Convex Analysis*, 16(3-4) :641–666, 2009.
- [14] P. Apkarian, D. Noll, and A. Rondepierre. Nonsmooth optimization algorithm for mixed  $H_2/H_\infty$  synthesis. In *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4110–4115, 2007.
- [15] P. Apkarian, D. Noll, and A. Rondepierre. Mixed  $H_2/H_\infty$  control via nonsmooth optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(3) :1516–1546, 2008.
- [16] P. Apkarian, D. Noll, and A. Rondepierre. Mixed  $H_2/H_\infty$  control via nonsmooth optimization. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009*, pages 6460–6465, Dec 2009.
- [17] D. Arzelier. Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation. Technical report, Université Paul Sabatier - Toulouse III, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010257>, 2004.
- [18] D. Arzelier. Etat de l’art sur le problème de synthèse multi-objectif  $H_2/H_\infty$ , le retour d’état. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 40(9-10) :947–995, 2006.

- [19] D. Arzelier, F. Bréhard, N. Deak, M. Joldes, C. Louembet, A. Rondepierre, and R. Serra. Linearized impulsive fixed-time fuel-optimal space rendezvous : A new numerical approach. In *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, 2016.
- [20] D. Arzelier, F. Bréhard, N. Deak, M. Joldes, C. Louembet, A. Rondepierre, and R. Serra. Linearized impulsive fixed-time fuel-optimal space rendezvous : A new numerical approach. Technical report, LAAS-CNRS, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01275427>, 2016.
- [21] D. Arzelier, G. Deaconu, S. Gumussoy, and D. Henrion.  $H_2$  for HIFOO. In *International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications*, Bilkent University, Ankara, Turkey, August 2011.
- [22] D. Arzelier, M. Kara-Zaitri, C. Louembet, and A. Delibasi. Using polynomial optimization to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(5) :1567–1576, 2011.
- [23] D. Arzelier, C. Louembet, A. Rondepierre, and M. Kara-Zaitri. A new mixed iterative algorithm to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 159(1) :210–230, 2013.
- [24] D. Arzelier, C. Louembet, and A. Théron. Etude bibliographique sur le problème du rendezvous. Rapport de contrat eads-astrium/cnes/laas-cnrs r-s07-08/vf0001-065, convention cnes no 71372/00, LAAS-CNRS, 2008.
- [25] D. Arzelier, C. Louembet, and A. Théron. Deux algorithmes pour le problème du rendezvous. Rapport de contrat eads-astrium/cnes/laas-cnrs r-s07-08/vf-00001-065 convention cnes no 71372/00, LAAS-CNRS, 2009.
- [26] H. Attouch and J. Bolte. On the convergence of the proximal algorithm for nonsmooth functions involving analytic features. *Mathematical Programming.*, 116(1) :5–16, 2009.
- [27] H. Attouch, J. Bolte, P. Redont, and A. Soubeyran. Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems : an approach based on the Kurdyka-Lojasiewicz inequality. *Mathematics of Operations Research*, 35(2) :438–457, 2010.
- [28] H. Attouch, J. Bolte, and B. Svaiter. Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems : proximal algorithms, forward-backward splitting, and regularized Gauss-Seidel methods. *Mathematical Programming*, 137(1-2, Ser. A) :91–129, 2013.
- [29] C. Audet and J. Dennis, Jr. Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 17(1) :188–217, 2006.
- [30] C. Baduffe. *Conceptual aircraft design : towards multiobjective, robust and uncertain optimisation*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007.
- [31] R. Bate, D. Mueller, and J. White. *Fundamentals of astrodynamics*. Cambridge University Press, UK, 1971.
- [32] L. Baudouin, S. Neild, A. Rondepierre, and D. Wagg. Robust measurement feedback control of an inclined cable. In *Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Control of Systems Modeled by Partial Differential Equations*, 2013.
- [33] L. Baudouin, A. Rondepierre, and S. Neild. Robust control of an inclined cable using a partial differential equation model. Article en révision.
- [34] L. Baudouin, D. Wagg, and S. Neild.  $H_\infty$ -control with state feedback of an inclined cable. In *European Control Conference*, 2013.
- [35] H. Bauschke and J. Borwein. On the convergence of von Neumann’s alternating projection algorithm for two sets. *Set-Valued Analysis*, 1(2) :185–212, 1993.
- [36] H. Bauschke and J. Borwein. On projection algorithms for solving convex feasibility problems. *SIAM Review*, 38(3) :367–426, 1996.
- [37] H. Bauschke and P. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Springer Science & Business Media, 2011.



- [38] H. Bauschke, P. Combettes, and D. Luke. Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants : a view from convex optimization. *Journal of the Optical Society of America A. Optics, Image Science, and Vision*, 19(7) :1334–1345, 2002.
- [39] H. Bauschke, D. Luke, H. Phan, and X. Wang. Restricted normal cones and the method of alternating projections : theory. *Set-Valued and Variational Analysis*, 21(3) :431–473, 2013.
- [40] H. Bauschke, D. R. Luke, H. Phan, and X. Wang. Restricted normal cones and the method of alternating projections : applications. *Set-Valued and Variational Analysis*, 21(3) :475–501, 2013.
- [41] H. Bauschke and D. Noll. On cluster points of alternating projections. *Serdica Mathematical Journal.*, 39(3-4) :355–364, 2013.
- [42] H. Bauschke and D. Noll. On the local convergence of the Douglas-Rachford algorithm. *Archiv der Mathematik*, 102(6) :589–600, 2014.
- [43] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski. *Robust optimization*. Princeton University Press, 2009.
- [44] J. Berges, P. Cayeux, A. Gaudel-Vacaresse, and B. Messygnac. CNES approaching guidance experiment within FFIORD. In *Proceedings of the 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, Annapolis, Maryland, USA*, pages 24–28, 2007.
- [45] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. LQG control with an  $H_\infty$  performance bound : a Riccati equation approach. *Transactions on Automatic Control*, 34(3) :293–305, 1989.
- [46] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 2nd edition, 1999.
- [47] J. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(2) :193–207, 1998.
- [48] J. Betts and I. Kolmanovsky. Practical methods for optimal control using nonlinear programming. *Applied Mechanics Reviews*, 55 :68, 2002.
- [49] J. Birman. *Quantification et propagation d'incertitudes dans les phases amont de projets de conception d'avions : de l'optimisation déterministe à l'optimisation sous contraintes probabilistes*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2013.
- [50] L. Blackmore, H. Li, and B. Williams. A probabilistic approach to optimal robust path planning with obstacles. In *American Control Conference*. IEEE, 2006.
- [51] L. Blackmore, M. Ono, and B. Williams. Chance-constrained optimal path planning with obstacles. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(6) :1080–1094, 2011.
- [52] V. Blondel and J. Tsitsiklis. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(6) :2118–2127, 1997.
- [53] J. Bolte, A. Daniilidis, and A. Lewis. The Łojasiewicz inequality for nonsmooth subanalytic functions with applications to subgradient dynamical systems. *SIAM Journal on Optimization*, 17(4) :1205–1223 (electronic), 2006.
- [54] J. Bolte, A. Daniilidis, A. Lewis, and M. Shiota. Clarke subgradients of stratifiable functions. *SIAM Journal on Optimization*, 18(2) :556–572, 2007.
- [55] J. Bolte, A. Daniilidis, O. Ley, and L. Mazet. Characterizations of Łojasiewicz inequalities : subgradient flows, talweg, convexity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(6) :3319–3363, 2010.
- [56] J. Bolte, S. Sabach, and M. Teboulle. Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems. *Mathematical Programming*, 146(1-2) :459–494, 2014.
- [57] V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and L. Pontryagin. The theory of optimal processes. i. the maximum principle. Technical report, DTIC Document, 1960.
- [58] V. Bompart. *Optimisation non lisse pour la commande des systèmes de l'aéronautique*. PhD thesis, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2007.
- [59] V. Bompart, P. Apkarian, and D. Noll. Nonsmooth techniques for stabilizing linear systems. In *American Control Conference (ACC'07)*, pages 1245–1250. IEEE, 2007.

- [60] V. Bompart, D. Noll, and P. Apkarian. Second-order nonsmooth optimization for  $H_\infty$  synthesis. *Numerische Mathematik*, 107(3) :433–454, 2007.
- [61] J. Bonnans, J. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. Sagastizábal. *Numerical optimization*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. Theoretical and practical aspects.
- [62] S. Boyd and V. Balakrishnan. A regularity result for the singular values of a transfer matrix and a quadratically convergent algorithm for computing its  $\mathbf{L}_\infty$ -norm. *Systems & Control Letters*, 15(1) :1–7, 1990.
- [63] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kabamba. A bisection method for computing the  $H_\infty$  norm of a transfer matrix and related problems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2(3) :207–219, 1989.
- [64] S. Boyd and C. Barratt. *Linear controller design : limits of performance*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [65] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.
- [66] A. Bressan Jr and F. Rampazzo. Impulsive control systems with commutative vector fields. *Journal of optimization theory and applications*, 71(1) :67–83, 1991.
- [67] A. Bressan Jr and F. Rampazzo. Impulsive control systems without commutativity assumptions. *Journal of optimization theory and applications*, 81(3) :435–457, 1994.
- [68] N. Bruinsma and M. Steinbuch. A fast algorithm to compute the  $h_\infty$ -norm of a transfer function matrix. *Systems & Control Letters*, 14(4) :287–293, 1990.
- [69] J. Burke, A. Lewis, and M. Overton. Optimizing matrix stability. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(6) :1635–1642, 2001.
- [70] J. Burke, A. Lewis, and M. Overton. Approximating subdifferentials by random sampling of gradients. *Mathematics of Operations Research*, 27(3) :567–584, 2002.
- [71] J. Burke, A. Lewis, and M. Overton. Two numerical methods for optimizing matrix stability. *Linear Algebra and its Applications*, 351 :117–145, 2002.
- [72] J. Burke, A. Lewis, and M. Overton. A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 15(3) :751–779, 2005.
- [73] G. Calafiore and M. Campi. Uncertain convex programs : randomized solutions and confidence levels. *Mathematical Programming*, 102(1) :25–46, 2005.
- [74] M. Campi and S. Garatti. The exact feasibility of randomized solutions of uncertain convex programs. *SIAM Journal on Optimization*, 19(3) :1211–1230, 2008.
- [75] E. J. Candes and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(12) :4203–4215, 2005.
- [76] J. Carpenter. Conservative Analytical Collision Probability for Design of Orbital Formations. In *2nd International Symposium on Formation Flying*, 2004.
- [77] T. Carter. Optimal impulsive space trajectories based on linear equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(2) :277–297, 1991.
- [78] T. Carter and J. Brient. Linearized impulsive rendezvous problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 86(3) :553–584, 1995.
- [79] T. E. Carter. Necessary and sufficient conditions for optimal impulsive rendezvous with linear equations of motion. *Dynamics and control*, 10(3) :219–227, 2000.
- [80] M. Chamanbaz, F. Dabbene, D. Peaucelle, and R. Tempo. R-RoMulOC : a unified tool for randomized and robust multiobjective control. In *IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2015.
- [81] F. Chan. *Spacecraft collision probability*. Aerospace Press, 2008.

- [82] K. Chan. Collision probability analysis for earth orbiting satellites. *Space cooperation into the 21 st century*, pages 1033–1048, 1997.
- [83] E. W. Cheney and A. A. Goldstein. Newton’s method for convex programming and Tchebycheff approximation. *Numerische Mathematik*, 1 :253–268, 1959.
- [84] W. Cheney and A. Goldstein. Proximity maps for convex sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10(3) :448–450, 1959.
- [85] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.
- [86] P. L. Combettes and H. J. Trussell. Method of successive projections for finding a common point of sets in metric spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 67(3) :487–507, 1990.
- [87] A. Conn, N. Gould, and P. Toint. *Trust-region methods*. MPS/SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA ; Mathematical Programming Society (MPS), Philadelphia, PA, 2000.
- [88] V. Coppola. Evaluating the short encounter assumption of the probability of collision formula. *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Charleston, SC, USA*, 2012.
- [89] V. Coppola. Including velocity uncertainty in the probability of collision between space objects. In *AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Charleston, SC, USA*, 2012.
- [90] R. Correa and C. Lemaréchal. Convergence of some algorithms for convex minimization. *Mathematical Programming*, 62(2, Ser. B) :261–275, 1993.
- [91] H. B. Curry. The method of steepest descent for non-linear minimization problems. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(3) :258–261, 1944.
- [92] M. N. Dao, J. Gwinner, D. Noll, and N. Ovcharova. Nonconvex bundle method with application to a delamination problem. *Computational Optimization and Applications*, pages 1–31, 2016.
- [93] N. M. Dào. *Techniques d’optimisation non lisse avec des applications en automatique et en mécanique des contacts*. PhD thesis, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2014.
- [94] J. E. Dennis, Jr. and R. B. Schnabel. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, volume 16 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. Corrected reprint of the 1983 original.
- [95] F. Deutsch. The method of alternating orthogonal projections. In *Approximation Theory, Spline Functions and Applications*, pages 105–121. Springer, 1992.
- [96] Q. T. Dinh, S. Gumussoy, W. Michiels, and M. Diehl. Combining convex–concave decompositions and linearization approaches for solving BMIs, with application to static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6) :1377–1390, 2012.
- [97] Q. T. Dinh, W. Michiels, S. Gros, and M. Diehl. An inner convex approximation algorithm for BMI optimization and applications in control. In *51st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3576–3581, 2012.
- [98] T. M. T. Do and T. Artières. Regularized bundle methods for convex and non-convex risks. *Journal of Machine Learning Research*, 13 :3539–3583, 2012.
- [99] J. Dolado, P. Legendre, R. Garmier, B. Revelin, and X. Pena. Satellite collision probability computation for long term encounters. *Advances in the Astronautical Sciences*, 142, 2011.
- [100] J. Douglas and H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 82(2) :421–439, 1956.
- [101] J. Doyle. Synthesis of robust controllers and filters. In *The 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 109–114, Dec 1983.

- [102] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *Transactions on Automatic Control*, 34(8) :831–847, 1989.
- [103] J. Doyle, K. Zhou, and B. Bodenheimer. Optimal control with mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives. In *American Control Conference*, pages 2065–2070. IEEE, 1989.
- [104] J. Doyle, K. Zhou, K. Glover, and B. Bodenheimer. Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives. II. Optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8) :1575–1587, 1994.
- [105] D. Drusvyatskiy, A. D. Ioffe, and A. S. Lewis. Transversality and alternating projections for nonconvex sets. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(6) :1637–1651, 2015.
- [106] X. Du and W. Chen. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. *Journal of Mechanical Design*, 126(2) :225–233, 2004.
- [107] V. Elser. Solution of the crystallographic phase problem by iterated projections. *Acta Crystallographica Section A : Foundations of Crystallography*, 59(3) :201–209, 2003.
- [108] Y. Ermoliev. Stochastic programming methods. *Nauka, Moscow*, 7(136), 1976.
- [109] R. Fletcher and S. Leyffer. Nonlinear programming without a penalty function. *Mathematical Programming*, 91(2, Serie A) :239–269, 2002.
- [110] C. Floudas. *Nonlinear and mixed-integer optimization : fundamentals and applications*. Oxford University Press on Demand, 1995.
- [111] J. Foster and H. Estes. A parametric analysis of orbital debris collision probability and maneuver rate for space vehicles. *NASA JSC*, 25898, 1992.
- [112] A. Frangioni. Generalized bundle methods. *SIAM Journal on Optimization*, 13(1) :117–156, 2002.
- [113] P. Frankel, G. Garrigos, and J. Peypouquet. Splitting methods with variable metric for Kurdyka–Lojasiewicz functions and general convergence rates. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 165(3) :874–900, 2015.
- [114] A. Fuduli, M. Gaudioso, and G. Giallombardo. Minimizing nonconvex nonsmooth functions via cutting planes and proximity control. *SIAM Journal on Optimization*, 14(3) :743–756, 2003.
- [115] A. Fuduli, M. Gaudioso, and G. Giallombardo. A DC piecewise affine model and a bundling technique in nonconvex nonsmooth minimization. *Optimization Methods & Software*, 19(1) :89–102, 2004.
- [116] M. Gabarrou. *Développement d’un algorithme de faisceau non convexe avec contrôle de proximité pour l’optimisation de lois de commande structurées*. PhD thesis, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2012.
- [117] M. Gabarrou, D. Alazard, and D. Noll. Design of a flight control architecture using a nonconvex bundle method. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 25(2) :257–290, 2013.
- [118] W. Gawronski, J. Müller, and M. Reinhard. Reduced cancellation in the evaluation of entire functions and applications to the error function. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(6) :2564–2576, 2007.
- [119] A. Genz and F. Bretz. *Computation of multivariate normal and t probabilities*, volume 195. Springer Science & Business Media, 2009.
- [120] R. Gerchberg and W. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35 :237–246, 1972.
- [121] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. A convex approach to the mixed  $H_2/H_\infty$  control problem for discrete-time uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(6) :1816–1833, 1995.
- [122] A. Gonzalez-Buelga, S. Neild, D. Wagg, and J. Macdonald. Modal stability of inclined cables subjected to vertical support excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 318(3) :565 – 579, 2008.

- [123] K. Grigoriadis and R. Skelton. Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods. *Automatica*, 32(8) :1117–1125, 1996.
- [124] L. Gubin, B. Polyak, and E. Raik. The method of projections for finding the common point of convex sets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(6) :1–24, 1967.
- [125] N. Guglielmi, M. Gurbuzbalaban, and M. Overton. Fast approximation of the  $h_\infty$  norm via optimization over spectral value sets. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 34(2) :709–737, 2013.
- [126] S. Gumussoy, D. Henrion, M. Millstone, and M. Overton. Multiobjective robust control with HIFOO 2.0. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2009.
- [127] I. Gurobi Optimization. Gurobi Optimizer Reference Manual, 2015.
- [128] M. Handelsman and P. Lion. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. *AIAA Journal*, 6(1) :127–132, 1968.
- [129] W. Hare and C. Sagastizábal. Computing proximal points of nonconvex functions. *Mathematical Programming*, 116(1-2, Ser. B) :221–258, 2009.
- [130] W. Hare, C. Sagastizábal, and M. Solodov. A proximal bundle method for nonsmooth nonconvex functions with inexact information. *Computational Optimization and Applications*, 63(1) :1–28, 2016.
- [131] R. Henrion and A. Möller. A gradient formula for linear chance constraints under gaussian distribution. *Mathematics of Operations Research*, 37(3) :475–488, 2012.
- [132] H. Hindi, B. Hassibi, and S. Boyd. Multiobjective  $H_2/H_\infty$ -optimal control via finite dimensional Q-parametrization and linear matrix inequalities. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, volume 5, pages 3244–3249, 1998.
- [133] M. Hintermüller. A proximal bundle method based on approximate subgradients. *Computational Optimization and Applications*, 20(3) :245–266, 2001.
- [134] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms. II*, volume 306 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, 1993. Advanced theory and bundle methods.
- [135] C. Hume. LEEA : Low emissions effect aircraft final report. Internal Airbus, 2008.
- [136] A. Ioffe. Nonsmooth analysis : differential calculus of nondifferentiable mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 266(1) :1–56, 1981.
- [137] L. Jaeger. *Optimisation multidisciplinaire sous incertitude en phase conceptuelle avion*. PhD thesis, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2013.
- [138] D. Jezewski. Primer vector theory applied to the linear relative-motion equations. *Optimal control applications and methods*, 1(4) :387–401, 1980.
- [139] D. Jezewski and H. Rozendaal. An efficient method for calculating optimal free-space n-impulse trajectories. *AIAA Journal*, 6(11) :2160–2165, 1968.
- [140] M. Kara-Zaitri, D. Arzelier, A. Delibasi, and C. Louembet. Polynomial optimization for the solution of fuel-optimal impulsive rendezvous using primer vector theory. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2010.
- [141] M. Kara-Zaitri, D. Arzelier, and C. Louembet. Mixed iterative algorithm for solving optimal impulsive time-fixed rendezvous problem. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2010.
- [142] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [143] J. E. Kelley, Jr. The cutting-plane method for solving convex programs. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8 :703–712, 1960.

- [144] K. Kiwiel. Proximal level bundle methods for convex nondifferentiable optimization, saddle-point problems and variational inequalities. *Mathematical Programming*, 69(1-3) :89–109, 1995.
- [145] K. Kiwiel. Convergence of the gradient sampling algorithm for nonsmooth nonconvex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 18(2) :379–388, 2007.
- [146] K. Kiwiel. A nonderivative version of the gradient sampling algorithm for nonsmooth nonconvex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 20(4) :1983–1994, 2010.
- [147] K. C. Kiwiel. An aggregate subgradient method for nonsmooth convex minimization. *Math. Programming*, 27(3) :320–341, 1983.
- [148] K. C. Kiwiel. An exact penalty function algorithm for nonsmooth convex constrained minimization problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 5(1) :111–119, 1985.
- [149] K. C. Kiwiel. *Methods of descent for nondifferentiable optimization*, volume 1133 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [150] K. C. Kiwiel. A constraint linearization method for nondifferentiable convex minimization. *Numerische Mathematik*, 51(4) :395–414, 1987.
- [151] K. C. Kiwiel. A subgradient selection method for minimizing convex functions subject to linear constraints. *Archives for Scientific Computing*, 39(4) :293–305, 1987.
- [152] K. C. Kiwiel. Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization. *Mathematical Programming, Series A*, 46(1) :105–122, 1990.
- [153] K. C. Kiwiel. Exact penalty functions in proximal bundle methods for constrained convex nondifferentiable minimization. *Mathematical Programming*, 52(2, Ser. B) :285–302, 1991.
- [154] K. C. Kiwiel. A proximal bundle method with approximate subgradient linearizations. *SIAM Journal on Optimization*, 16(4) :1007–1023, 2006.
- [155] N. Krasovskii. On the theory of optimum regulation. *Automation and Remote Control*, 18(100547), 1957.
- [156] A. Kruger. Generalized differentials of nonsmooth functions, and necessary conditions for an extremum. *Siberian Mathematical Journal*, 26(3) :370–379, 1985.
- [157] A. Kruger. On Fréchet subdifferentials. *Journal of Mathematical Sciences*, 116(3) :3325–3358, 2003. Optimization and related topics, 3.
- [158] A. Kruger. About regularity of collections of sets. *Set-Valued Analysis*, 14(2) :187–206, 2006.
- [159] K. Kurdyka. On gradients of functions definable in o-minimal structures. *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier*, 48(3) :769–783, 1998.
- [160] P. Labourdette, E. Julien, F. Chemama, and D. Carbonne. ATV Jules Verne mission maneuver plan. In *Proceedings of the International Symposium on space flight dynamics, Toulouse, France*, 2008.
- [161] D. Lawden. *Optimal trajectories for space navigation*. Butterworths, 1963.
- [162] Q. V. Le, A. J. Smola, and S. Vishwanathan. Bundle methods for machine learning. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1377–1384, 2007.
- [163] S. Le Digabel. Algorithm 909 : NOMAD : Nonlinear Optimization with the MADS algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 37(4) :1–15, 2011.
- [164] F. Leibfritz. A LMI-based algorithm for designing suboptimal static  $H_2/H_\infty$  output feedback controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(6) :1711–1735 (electronic), 2001.
- [165] F. Leibfritz. COMPl<sub>e</sub>ib : Constrained matrix optimization problem library - a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems. Technical report, Universität Trier, 2004.
- [166] G. Leitmann. *An introduction to optimal control*. McGraw-Hill, 1966.
- [167] C. Lemaréchal. Nonsmooth optimization and descent methods. IIASA research report, IIASA, <http://pure.iiasa.ac.at/838/>, 1978.

- [168] C. Lemaréchal. Numerical experiments in nonsmooth optimization. In E. e. Nurminski, editor, *Progress in Nondifferentiable Optimization*, pages 61–84. International Institute for Applied Systems Analysis, 1982.
- [169] C. Lemaréchal. Chapter VII Nondifferentiable optimization. In *Optimization*, volume 1 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 529–572. Elsevier, 1989.
- [170] C. Lemaréchal, A. Nemirovskii, and Y. Nesterov. New variants of bundle methods. *Mathematical Programming*, 69(1, Ser. B) :111–147, 1995. Nondifferentiable and large-scale optimization (Geneva, 1992).
- [171] C. Lemaréchal and F. Oustry. Nonsmooth Algorithms to Solve Semidefinite Programs. In L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, chapter 3. SIAM, 2000.
- [172] C. Lemaréchal, F. Oustry, and C. Sagastizábal. The  $\square$ -Lagrangian of a convex function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(2) :711–729, 2000.
- [173] C. Lemaréchal and C. Sagastizábal. An approach to variable metric bundle methods. In *System modelling and optimization (Compiègne, 1993)*, volume 197 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 144–162. Springer, London, 1994.
- [174] C. Lemaréchal and C. Sagastizábal. Variable metric bundle methods : from conceptual to implementable forms. *Mathematical Programming*, 76(3, Ser. B) :393–410, 1997.
- [175] C. Lemaréchal, J. Strodiot, and A. Bihain. On a bundle algorithm for nonsmooth optimization. *Nonlinear programming*, 4(0), 1981.
- [176] A. Lewis. Active sets, nonsmoothness, and sensitivity. *SIAM Journal on Optimization*, 13(3) :702–725, 2002.
- [177] A. Lewis and J. Malick. Alternating projections on manifolds. *Mathematics of Operations Research*, 33(1) :216–234, 2008.
- [178] A. Lewis and M. Overton. Nonsmooth optimization via quasi-newton methods. *Mathematical Programming*, 141(1) :135–163, 2013.
- [179] A. S. Lewis, D. R. Luke, and J. Malick. Local linear convergence for alternating and averaged nonconvex projections. *Foundations of Computational Mathematics*, 9(4) :485–513, 2009.
- [180] S. Lojasiewicz. Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. In *Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962)*, pages 87–89. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1963.
- [181] S. Lojasiewicz. Sur la géométrie semi- et sous-analytique. *Annales de l'Institut Fourier. Université de Grenoble.*, 43(5) :1575–1595, 1993.
- [182] D. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. John Wiley and Sons, New York, USA, 1969.
- [183] L. Lukšan and J. Vlček. A bundle-Newton method for nonsmooth unconstrained minimization. *Mathematical Programming*, 83(3, Ser. A) :373–391, 1998.
- [184] L. Lukšan and J. Vlček. Globally convergent variable metric method for convex nonsmooth unconstrained minimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(3) :593–613, 1999.
- [185] M. M. Mäkelä. Survey of bundle methods for nonsmooth optimization. *Optim. Methods Softw.*, 17(1) :1–29, 2002.
- [186] O. L. Mangasarian. Linear and nonlinear separation of patterns by linear programming. *Operations research*, 13(3) :444–452, 1965.
- [187] A. Megretski. On the order of optimal controllers in the mixed  $h_2/h_\infty$  control. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3173–3174, 1994.
- [188] V. Mehrmann and H. Xu. Perturbation of purely imaginary eigenvalues of Hamiltonian matrices under structured perturbations. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 17 :234–257, 2008.

- [189] R. Mifflin. An algorithm for constrained optimization with semismooth functions. *Mathematics of Operations Research*, 2(2) :191–207, 1977.
- [190] R. Mifflin. A modification and extension of Lemaréchal’s algorithm for nonsmooth minimization. *Mathematical Programming Study*, 17 :77–90, 1982. Nondifferential and variational techniques in optimization (Lexington, Ky., 1980).
- [191] R. Mifflin. A quasi-second-order proximal bundle algorithm. *Mathematical Programming*, 73(1, Ser. A) :51–72, 1996.
- [192] R. Mifflin and C. Sagastizábal. On  $\mathcal{VU}$ -theory for functions with primal-dual gradient structure. *SIAM Journal on Optimization*, 11(2) :547–571, 2000.
- [193] R. Mifflin and C. Sagastizábal. A  $\mathcal{VU}$ -algorithm for convex minimization. *Mathematical programming*, 104(2-3) :583–608, 2005.
- [194] R. Mifflin and C. Sagastizábal. A science fiction story in nonsmooth optimization originating at IIASA. In M. Grötschel, editor, *Optimization Stories, extra volume ISMP*, pages 291–300. DOCUMENTA MATHEMATICA, 2012.
- [195] R. Mifflin, D. Sun, and L. Qi. Quasi-Newton bundle-type methods for nondifferentiable convex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2) :583–603, 1998.
- [196] T. Mitchell and M. Overton. Hybrid expansion–contraction : a robust scaleable method for approximating the  $H_\infty$  norm. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2015.
- [197] B. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation. I*, volume 330 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Basic theory.
- [198] B. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation. II*, volume 331 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Applications.
- [199] J.-J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 93 :273–299, 1965.
- [200] A. Nemirovskii and D. Yudin. Problem complexity and method efficiency in optimization. In *Discrete Mathematics (Original Russian : Nauka 1979)*. Wiley-Intersciences Series, 1983.
- [201] L. Neustadt. Optimization, a moment problem, and nonlinear programming. *SIAM Journal on Control, Series A*, 2(1) :33–53, 1964.
- [202] L. Neustadt. A general theory of minimum-fuel space trajectories. *SIAM Journal of Control*, 3(2) :317–356, 1965.
- [203] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [204] D. Noll. Cutting plane oracles to minimize non-smooth non-convex functions. *Set-Valued and Variational Analysis*, 18(3-4) :531–568, 2010.
- [205] D. Noll. Bundle method for non-convex minimization with inexact subgradients and function values. In *Computational and Analytical Mathematics*, pages 555–592. Springer, 2013.
- [206] D. Noll. Convergence of non-smooth descent methods using the Kurdyka-Łojasiewicz inequality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 160(2) :553–572, 2014.
- [207] D. Noll and P. Apkarian. Spectral bundle methods for non-convex maximum eigenvalue functions : first-order methods. *Mathematical Programming*, 104(2-3, Ser. B) :701–727, 2005.
- [208] D. Noll and P. Apkarian. Spectral bundle methods for non-convex maximum eigenvalue functions : second-order methods. *Mathematical Programming*, 104(2-3, Ser. B) :729–747, 2005.
- [209] D. Noll, O. Prot, and A. Rondepierre. A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex functions. *Pacific Journal of Optimization*, 4(3) :571–604, 2008.



- [210] D. Noll and A. Rondepierre. Convergence of linesearch and trust-region methods using the Kurdyka-Lojasiewicz inequality. In *Computational and analytical mathematics*, volume 50 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 593–611. Springer, New York, 2013.
- [211] D. Noll and A. Rondepierre. On Local Convergence of the Method of Alternating Projections. *Foundations of Computational Mathematics*, 16(2) :425–455, 2016.
- [212] W. Oliveira and C. Sagastizábal. Bundle methods in the XXIst century : A bird’s-eye view. *Pesquisa Operacional*, 34(3) :647–670, 2014.
- [213] W. Oliveira, C. Sagastizábal, and C. Lemaréchal. Convex proximal bundle methods in depth : a unified analysis for inexact oracles. *Mathematical Programming*, 148(1-2) :241–277, 2014.
- [214] W. Oliveira, C. Sagastizábal, and S. Scheimberg. Inexact bundle methods for two-stage stochastic programming. *SIAM Journal on Optimization*, 21(2) :517–544, 2011.
- [215] F. Paganini and E. Feron. Linear Matrix Inequalities Methods for Robust  $H_2$  Analysis : A Survey with Comparisons. In L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, chapter 7. SIAM, 2000.
- [216] R. Patera. General method for calculating satellite collision probability. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 24(4) :716–722, 2001.
- [217] R. Patera. Satellite collision probability for nonlinear relative motion. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(5) :728–733, 2003.
- [218] R. Patera and G. Peterson. Space vehicle maneuver method to lower collision risk to an acceptable level. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(2) :233–237, 2003.
- [219] D. Peaucelle and D. Arzelier. Robust multi-objective control toolbox. In *Proceedings of the CACSD Conference*, 2006.
- [220] J. Peyrard, D. Olmos, A. Agenjo, A. Kron, and A. Cropp. Design and prototyping of PROBA-3 formation flying system. *International Journal of Space Science and Engineering* 5, 2(1) :16–34, 2014.
- [221] E. Polak. On the mathematical foundations of nondifferentiable optimization in engineering design. *SIAM Review*, 29(1) :21–89, 1987.
- [222] E. Polak. *Optimization. Algorithms and consistent approximations*, volume 124 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [223] B. Polyak. Subgradient methods : A survey of soviet research. In *Nonsmooth optimization : Proceedings of the IIASA workshop March*, pages 5–30, 1977.
- [224] B. Polyak. Subgradient methods : a survey of Soviet research. In *Nonsmooth optimization (Proc. IIASA Workshop, Laxenburg, 1977)*, volume 3 of *IIASA Proc. Ser.*, pages 5–29. Pergamon, Oxford-New York, 1978.
- [225] S. Prigent. *Innovative and integrated approach for environmentally efficient aircraft design and operations*. PhD thesis, Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace, 2015.
- [226] S. Prigent, M. Belleville, T. Druot, A. Rondepierre, and P. Maréchal. Chance constrained business case of a three-engines hybrid aircraft. In *10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Orlando, FL*, 2013.
- [227] S. Prigent, P. Maréchal, A. Rondepierre, T. Druot, and M. Belleville. A robust optimization methodology for preliminary aircraft design. *Engineering Optimization*, 48(5) :883–899, 2016.
- [228] J. Prussing. Illustration of the primer vector in time-fixed orbit transfer. *AIAA Journal*, 7(6) :1167–1168, 1969.
- [229] J. Prussing. Optimal impulsive linear-systems-sufficient conditions and maximum number of impulses. *Journal of the Astronautical Sciences*, 43(2) :195–206, 1995.
- [230] J. Prussing. Primer vector theory and applications. *Spacecraft trajectory optimization*, 29, 2010.

- [231] J. Prussing and J.-H. Chiu. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 9(1) :17–22, 1986.
- [232] T. Rautert and E. Sachs. Computational design of optimal output feedback controllers. *SIAM Journal on Optimization*, 7(3) :837–852, 1997.
- [233] R. Reemtsen and S. Görner. Numerical methods for semi-infinite programming : a survey. In R. Reemtsen and R. J.-J., editors, *Semi-infinite programming*, volume 25 of *Nonconvex optimization and its applications*, chapter 7, pages 195–275. Springer, 1998.
- [234] P. Rey and C. Sagastizábal. Dynamical adjustment of the prox-parameter in bundle methods. *Optimization*, 51(2) :423–447, 2002.
- [235] R. Rishel. An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A : Control*, 3(2) :191–205, 1965.
- [236] H. Robbins. An analytical study of the impulsive approximation. *AIAA journal*, 4(8) :1417–1423, 1966.
- [237] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational analysis*, volume 317 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [238] I. Ross. Chapter 6. Space trajectory optimization and  $L^1$ -optimal control problems. *Elsevier Astrodynamics Series*, 1, 2007.
- [239] T. Roubíček. Numerical techniques in relaxed optimization problems. In *Robust optimization-directed design*, pages 157–178. Springer, 2006.
- [240] A. Ruszczyński. *Nonlinear optimization*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [241] C. Sagastizábal. Composite proximal bundle method. *Mathematical Programming*, 140(1) :189–233, 2013.
- [242] C. Sagastizábal and M. Solodov. An infeasible bundle method for nonsmooth convex constrained optimization without a penalty function or a filter. *SIAM Journal on Optimization*, 16(1) :146–169, 2005.
- [243] B. Salvy. D-finiteness : Algorithms and applications. In *Proceedings of the 18th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 2005.
- [244] N. Sánchez-Ortiz, M. Belló-Mora, and H. Klinkrad. Collision avoidance manoeuvres during spacecraft mission lifetime : Risk reduction and required  $\delta v$ . *Advances in Space Research*, 38(9) :2107–2116, 2006.
- [245] H. Schaub and J. L. Junkins. *Analytical mechanics of space systems*. AIAA Education Series. AIAA, 2003.
- [246] C. Scherer. Multiobjective  $H_2/H_\infty$  control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6) :1054–1062, 1995.
- [247] C. Scherer. Lower bounds in multi-objective  $H_2/H_\infty$  problems. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3605–3610, 1999.
- [248] C. Scherer. An efficient solution to multi-objective control problems with LMI objectives. *Systems & Control Letters*, 40(1) :43–57, 2000.
- [249] H. Schramm. Eine Kombination von Bundle-und Trust-Region-Verfahren zur Lösung nicht-differenzierbarer Optimierungsprobleme. *Bayreuther Mathematische Schriften*, 30, 1989.
- [250] H. Schramm and J. Zowe. A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function : conceptual idea, convergence analysis, numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, 2(1) :121–152, 1992.
- [251] H. A. Schwarz. Über einige Abbildungsaufgaben. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 70 :105–120, 1869.
- [252] R. Serra. *Opérations de proximité en orbite : évaluation du risque de collision et calcul de manoeuvres optimales pour l'évitement et le rendez-vous*. PhD thesis, INSA de Toulouse, 2015.

- [253] R. Serra, D. Arzelier, M. Joldes, J.-B. Lasserre, A. Rondepierre, and B. Salvy. A new method to compute the probability of collision for short-term space encounters. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, page 4366, 2014.
- [254] R. Serra, D. Arzelier, M. Joldes, J.-B. Lasserre, A. Rondepierre, and B. Salvy. Fast and accurate computation of orbital collision probability for short-term encounters. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, pages 1–13, 2016.
- [255] R. Serra, D. Arzelier, M. Joldes, and A. Rondepierre. *Probabilistic Collision Avoidance for Long-term Space Encounters via Risk Selection*, chapter 39, pages 679–698. Springer International Publishing, 2015.
- [256] R. Serra, D. Arzelier, and A. Rondepierre. Analytical solutions for impulsive elliptic out-of-plane rendezvous problem via primer vector theory. Technical report, LAAS-CNRS, 2014.
- [257] R. Serra, D. Arzelier, and A. Rondepierre. Collision avoidance for rectilinear encounters between spherical space objects via the scenario approach. In *25th International Symposium on Space Flight Dynamics*, 2015.
- [258] R. Serra, D. Arzelier, A. Rondepierre, and J.-L. Calvet. Analytical optimal solutions of impulsive out-of-plane rendezvous around elliptic orbits. In *IFAC World Congress*, volume 19, pages 2231–2236, 2014.
- [259] N. Z. Shor. An application of the method of gradient descent to the solution of the network transportation problem. *Materialy Naucnovo Seminara po Teoret i Priklad. Voprosam Kibernet. i Issted. Operacii, Nucnyi Sov. po Kibernet, Akad. Nauk Ukrain.*, 1 :9–17, 1962.
- [260] N. Z. Shor. *Minimization methods for nondifferentiable functions*, volume 3 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Translated from the Russian by K. C. Kiwiel and A. Ruszczyński.
- [261] G. Silva and R. Vinter. Necessary conditions for optimal impulsive control problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(6) :1829–1846, 1997.
- [262] M. Smrz, R. Bastaitis, and A. Preumont. Active damping of the camera support mast of a Cherenkov Gamma-ray telescope. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research (Section A)*, 635(1) :44 – 52, 2011.
- [263] M. Solodov. On approximations with finite precision in bundle methods for nonsmooth optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 119(1) :151–165, 2003.
- [264] J. Spingarn. Submonotone subdifferentials of lipschitz functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 264(1) :77–89, 1981.
- [265] S. Sra, S. Nowozin, and S. J. Wright. *Optimization for machine learning*. MIT Press, 2012.
- [266] G. W. Stewart and J. Sun. *Matrix perturbation theory*. Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [267] C. H. Teo, S. Vishwanthan, A. J. Smola, and Q. V. Le. Bundle methods for regularized risk minimization. *Journal of Machine Learning Research*, 11 :311–365, 2010.
- [268] E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert, 2008.
- [269] J. Tschauner. Elliptic orbit rendezvous. *AIAA journal*, 5(6) :1110–1113, 1967.
- [270] G. Vanderplaats. DOT - Design Optimization Tools, 1992.
- [271] J. Verschelde. PHCpack : A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 25(2) :251–276, 1999.
- [272] J. Vlček and L. Lukšan. Globally convergent variable metric method for nonconvex nondifferentiable unconstrained minimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111(2) :407–430, 2001.
- [273] J. von Neumann. *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*. Number 22 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, (Reprint of mimeographed lecture notes first distributed in 1933), 1950.

- [274] D. Wagg and S. Neild. *Nonlinear Vibration with Control : For Flexible and Adaptive Structures*. Solid mechanics and its applications. Springer, 2010.
- [275] D. Walker and D. Ridgely. Uniqueness of the general mixed  $H_2/H_\infty$  optimal controller. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, volume 2, pages 1453–1457, 1995.
- [276] S. Wells and D. Ridgely. Using increased order controllers in mixed  $H_2/H_\infty$  optimization. In *American Control Conference*, pages 1358–1362. IEEE, 1992.
- [277] D. Widder. *The Laplace Transform*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1946.
- [278] P. Wolfe. A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions. *Math. Programming Stud.*, 3 :145–173, 1975. Nondifferentiable optimization.
- [279] Z. Xu, R. Jin, J. Zhu, I. King, and M. Lyu. Efficient convex relaxation for transductive support vector machine. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1641–1648, 2008.
- [280] K. Yamanaka and F. Ankersen. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(1) :60–66, 2002.
- [281] M. Yamashita, M. Fujisawa, K. and Fukuda, K. Kobayashi, K. Nakata, and M. Nakata. Latest developments in the SDPA family for solving large-scale SDPs. In *Handbook on semidefinite, conic and polynomial optimization*, pages 687–713. Springer, 2012.
- [282] X. Yin and W. Chen. Enhanced sequential optimization and reliability assessment method for probabilistic optimization with varying design variance. *Structures and Infrastructure Engineering*, 2(3-4) :261–275, 2006.
- [283] K. Yosida. *Functional analysis*. Delhi., Narosa Publishing House, 1965.
- [284] D. Zeilberger. A holonomic systems approach to special functions identities. *Journal of computational and applied mathematics*, 32(3) :321–368, 1990.
- [285] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*, volume 40. Prentice hall, 1996.
- [286] J. Zowe. Nondifferentiable optimization. In *Computational mathematical programming (Bad Windsheim, 1984)*, volume 15 of *NATO Advanced Science Institutes Series F : Computer and Systems Sciences*, pages 323–356. Springer, Berlin, 1984.
- [287] J. Zowe. The BT-algorithm for minimizing a nonsmooth functional subject to linear constraints. In *Nonsmooth optimization and related topics*, volume 43 of *Ettore Majorana international science series : Physical science*, pages 459–480. Plenum, New York, 1989.