Corrigé de l'exercice 1.12 du tronc commun, année 2009.

La notation utilisée est celle du polycopié, vocabulaire mathématique, 3.5, p. 29 [édition 2009].
Soit $l_1, l_2, \dots, l_s$ une partition de n. On a donc $\sum_i l_i = n$ et $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_s > 0$. Pour tout entier naturel non-nul j, soit c_j le nombre de l_i ($i \in \{1, \dots s\}$) tels que $l_i = j$.

Lemme 0.1. — *Le cardinal de la classe de conjugaison de l'élément*

$$(1, \dots, l_1)(l_1+1, \dots, l_1+l_2) \cdots (l_1 + \cdots + l_{s-1}+1, \dots, l_1 + \cdots l_{s-1} + l_s) \qquad ([1])$$

de S_n associé à la partition $l_1, l_2, \dots, l_s$ de n est

$$n! \cdot \Big(\prod_j (c_j! \cdot r^{c_j}) \Big)^{-1}$$

Preuve. Toute permutation peut s'écrire sous la forme

$$(\sigma(1), \dots, \sigma(l_1))(\sigma(l_1+1), \dots, \sigma(l_1+l_2)) \cdots (\sigma(l_1 + \cdots + l_{s-1}+1), \dots, \sigma(l_1 + \cdots l_{s-1} + l_s)) \qquad ([2])$$

où σ est une élément de S_n. La permutation ([2]) est le conjugué par σ de l'élément ([1]) (voir 3.5, vocabulaire mathématique dans le polycopié). Nous allons d'abord compter le nombre de $\sigma \in S_n$ tels que

$$\begin{aligned} & (1, \dots, l_1)(l_1+1, \dots, l_1+l_2) \cdots (l_1 + \cdots + l_{s-1}+1, \dots, l_1 + \cdots l_{s-1} + l_s) \\ = \quad & (\sigma(1), \dots, \sigma(l_1))(\sigma(l_1+1), \dots, \sigma(l_1+l_2)) \cdots (\sigma(l_1 + \cdots + l_{s-1}+1), \dots, \sigma(l_1 + \cdots l_{s-1} + l_s)) \end{aligned}$$

(autrement dit, le cardinal du stabilisateur de l'élément ([1]), sous l'action de S_n sur lui-même par conjugaison.)
Cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si
- pour tout j, la permutation σ agit par rotation sur le support de chaque cycle de longueur j de ([1]) et
- pour tout j, la permutation σ permute les supports des c_j cycles de longueur j de ([1]).

Nous disons que σ agit par rotation sur $\{r, r+1, \dots, r+k-1\}$ s'il existe un entier naturel p tel que $p < k$ et tel que $\sigma(r+t) = r + (t + p \mod k)$ pour tout $t \in \{0, \dots, k-1\}$.
Il y a $\prod_j (c_j! \cdot r^{c_j})$ éléments $\sigma \in S_n$ avec ces propriétés.
Au moyen de 2.6.3, p. 23 du vocabulaire mathématique, on déduit que la classe de conjugaison a le cardinal voulu.
Q.E.D.

(0) Il est montré dans le polycopié (vocabulaire mathématique, 3.5, p. 29), que le nombre de classes de conjugaison de S_5 est égal au nombre de partitions de 5, ie 7. Sur la même page, on voit que les éléments

$$(1),\ (12),\ (123),\ (1234),\ (12345),\ (12)(34),\ (345)(12)$$

sont des représentants des ces classes (voir aussi le lemme 0.1 ci-dessus). Notons $[\cdot]$ la classe de conjugaison d'un élément $\cdot$. Le lemme 0.1 donne les égalités

$$\begin{aligned} &\#[(1)] = 1,\ \#[(12)] = 10,\ \#[(123)] = 20,\ \#[(1234)] = 30, \\ &\#[(12345)] = 24,\ \#[(345)(12)] = 20,\ \#[(12)(34)] = 15 \end{aligned}$$

(1) Voir les exercices 1.9 & 1.15. Le caractère χ_U est donné dans la table ci-dessous (sous (iv)). Il est calculé au moyen de la formule de l'exercice 1.15 (i). Le caractère $\chi_{U \otimes \mathrm{sign}}$ est irréductible par l'exercice 1.10. On a $\mathrm{ch}_{U \otimes \mathrm{sign}} = \chi_U \cdot \chi_{\mathrm{sign}}$ (I.3.1.2, p. 134, polycopié) et un calcul direct (voir table) montre que $\mathrm{ch}_U \neq \chi_U \cdot \chi_{\mathrm{sign}}$. Le signe est calculé au moyen de 3.5.2, vocabulaire mathématique, p. 30 du polycopié.

(2) Le calcul de $\chi_{\Lambda^2 U}$ est fait au moyen de la Prop. I.3.8, p. 134 du polycopié. Voir la table ci-dessous (sous (iv)).

(3) Le calcul de $\chi_{\mathrm{Sym}^2 U}$ est fait au moyen de la Prop. I.3.8, p. 134 du polycopié. On obtient

	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(345)(12)	(12)(34)
$\chi_{\mathrm{Sym}^2 U}$	10	4	1	0	0	1	2

On calcule aussi

$$\langle \chi_{\mathrm{Sym}^2 U}, 1 \rangle = \frac{1}{120}(10 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 15) = 1$$

$$\langle \chi_{\mathrm{Sym}^2 U}, \chi_{\mathrm{Sym}^2 U} \rangle = \frac{1}{120}(100 \cdot 1 + 16 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 20 + 4 \cdot 15) = 3$$

et

$$\langle \chi_{\mathrm{Sym}^2 U}, \chi_U \rangle = \frac{1}{120}(10 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 \cdot 20 + 1 \cdot (-1) \cdot 20 + 2 \cdot 0 \cdot 15) = 1$$

ce qui démontre l'assertion voulue, au moyen du Cor. I.2.15, p. 123 du polycopié.

(4) On calcule à partir du (iii) que

$$\chi_V = \chi_{\mathrm{Sym}^2 U} - \chi_{\mathbf{1}} - \chi_U$$

et donc

	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(345)(12)	(12)(34)
χ_V	5	1	-1	-1	0	1	1

et par ailleurs on calcule que $\chi_{V\otimes\mathrm{sign}} = \chi_V \cdot \chi_{\mathrm{sign}}$ diffère des caractères $\chi_1,\ \chi_U,\ \chi_{\mathrm{sign}},\ \chi_{U\otimes\mathrm{sign}},\ \mathrm{ch}_{\Lambda^2 U}$ et χ_V. On conclut que la table des caractères est

	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(345)(12)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_U	4	2	1	0	-1	-1	0
χ_{sign}	1	-1	1	-1	1	-1	1
$\chi_{U\otimes\mathrm{sign}}$	4	-2	1	0	-1	1	0
$\mathrm{ch}_{\Lambda^2 U}$	6	0	0	0	1	0	-2
χ_V	5	1	-1	-1	0	1	1
$\chi_{V\otimes\mathrm{sign}}$	5	-1	-1	1	0	-1	1

(v) Le groupe S_5 agit naturellement sur l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,5\}$. Le groupe H est un sous-groupe car il s'agit du stabilisateur de l'élément $\{1,2\}$ pour cette action. Soit H_0 le sous-groupe (à deux éléments) de S_5 engendré par (12). Soit H_1 le sous-groupe de S_5 engendré par tous les cycles à support dans $\{3,4,5\}$. Le groupe H est engendré par H_0 et H_1 et on a un monomorphisme naturel de groupes $H_0 \times H_1 \hookrightarrow S_5$. Par ailleurs, on a un isomorphisme naturel a $H_1 \simeq S_3$. En utilisant 3.5 dans le vocabulaire mathématique du polycopié ou l'exercice 1.11, on voit ainsi que H a six classes de conjugaison (dans H), représentées par les éléments (1), (12), (34), (12)(34), (345) et (12)(345). Par ailleurs, l'exercice 1.11 ou le lemme 0.1 montre que

$$\#[(1)]_H = 1,\ \#[(12)]_H = 1,\ \#[(34)]_H = 3,\ \#[(12)(34)]_H = 3,\ \#[(345)]_H = 2,\ \#[(12)(345)]_H = 2$$

On obtient ainsi la table des valeurs

	(1)	(12)	(34)	(12)(34)	(345)	(12)(345)
$\mathrm{Res}^H_{S_5}\chi_1$	1	1	1	1	1	1
$\mathrm{Res}^H_{S_5}\chi_U$	4	2	2	0	1	-1
$\mathrm{Res}^H_{S_5}\chi_{\mathrm{sign}}$	1	-1	-1	1	1	-1
$\mathrm{Res}^H_{S_5}\chi_{U\otimes\mathrm{sign}}$	4	-2	-2	0	1	1
$\mathrm{Res}^H_{S_5}\,\mathrm{ch}_{\Lambda^2 U}$	6	0	0	-2	0	0
$\mathrm{Res}^H_{S_5}\chi_V$	5	1	1	1	-1	1
$\mathrm{Res}^H_{S_5}\chi_{V\otimes\mathrm{sign}}$	5	-1	-1	1	-1	-1

et la loi de réciprocité de Frobenius (I.3.13 du polycopié) donne

$$\langle \mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1, \chi_1\rangle_{S^5} = \langle \chi_1, \mathrm{Res}^H_{S^5}\chi_1\rangle_H = \frac{1}{12}(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1) = 1$$

$$\langle \mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1, \chi_U\rangle_{S^5} = \langle \chi_1, \mathrm{Res}^H_{S^5}\chi_U\rangle_H = \frac{1}{12}(1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)) = 1$$

$$\langle \mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1, \chi_{\mathrm{sign}}\rangle_{S^5} = \langle \chi_1, \mathrm{Res}^H_{S^5}\chi_{\mathrm{sign}}\rangle_H = \frac{1}{12}(1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)) = 0$$

$$\langle \mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1, \chi_{U\otimes\mathrm{sign}}\rangle_{S^5} = \langle \chi_1, \mathrm{Res}^H_{S^5}\chi_{U\otimes\mathrm{sign}}\rangle_H = \frac{1}{12}(1\cdot 4 + 1\cdot(-2) + 3\cdot(-2) + 3\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1) = 0$$

$$\langle \mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1, \chi_{\Lambda^2 U}\rangle_{S^5} = \langle \chi_1, \mathrm{Res}^H_{S^5}\chi_{\Lambda^2 U}\rangle_H = \frac{1}{12}(1\cdot 6 + 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 3\cdot(-2) + 2\cdot 0 + 2\cdot 0) = 0$$

$$\langle \mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1, \chi_V\rangle_{S^5} = \langle \chi_1, \mathrm{Res}^H_{S^5}\chi_V\rangle_H = \frac{1}{12}(1\cdot 5 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 2\cdot 1) = 1$$

$$\langle \mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1, \chi_{V\otimes\mathrm{sign}}\rangle_{S^5} = \langle \chi_1, \mathrm{Res}^H_{S^5}\chi_{V\otimes\mathrm{sign}}\rangle_H = \frac{1}{12}(1\cdot 5 + 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 2\cdot(-1)) = 0$$

et, en utilisant le Cor. I.2.15, on conclut que

$$\mathrm{Ind}_H^{S_5}\chi_1 = \chi_1 + \chi_U + \chi_V$$