Introduction au langage des catégories

Jean-Christophe San Saturnino

Équipe Émile Picard
Université Paul Sabatier, Toulouse III

Séminaire étudiant du 20 Janvier 2010

Introduction

Pourquoi parler de catégories ?

- Parce qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles (paradoxe du barbier).
- Pour regrouper dans une même théorie des mots comme homéomorphisme, holomorphisme, application ensembliste...
- Pour pouvoir étudier certains objets mathématiques à l'aide d'autres objets plus simples à manipuler.

Introduction

Pourquoi parler de catégories ?

- Parce qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles (paradoxe du barbier).
- Pour regrouper dans une même théorie des mots comme homéomorphisme, holomorphisme, application ensembliste...
- Pour pouvoir étudier certains objets mathématiques à l'aide d'autres objets plus simples à manipuler.

Introduction

Pourquoi parler de catégories ?

- Parce qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles (paradoxe du barbier).
- Pour regrouper dans une même théorie des mots comme homéomorphisme, holomorphisme, application ensembliste...
- Pour pouvoir étudier certains objets mathématiques à l'aide d'autres objets plus simples à manipuler.

Introduction

Pourquoi parler de catégories ?

- Parce qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles (paradoxe du barbier).
- Pour regrouper dans une même théorie des mots comme homéomorphisme, holomorphisme, application ensembliste...
- Pour pouvoir étudier certains objets mathématiques à l'aide d'autres objets plus simples à manipuler.

Un peu d'histoire...

- Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane en 1942-1945.
- Années 1960-70 en France par Alexander Grothendieck.

Un peu d'histoire...

- Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane en 1942-1945.
- Années 1960-70 en France par Alexander Grothendieck.

Plan de l'exposé

1. Les catégories
   - Définitions
   - Des exemples
   - Objets universels
2. Les foncteurs
   - Définitons
   - Des exemples
   - Equivalence de catégories

Plan de l'exposé

1. Les catégories
   - Définitions
   - Des exemples
   - Objets universels
2. Les foncteurs
   - Définitons
   - Des exemples
   - Equivalence de catégories

Plan de l'exposé

Définition

Une **catégorie** $\mathcal{C}$ consiste en :
-une collection d'objets $Ob(\mathcal{C})$
-un ensemble $Hom(X, Y)$ de **morphismes** (ou **flèches**) de X dans Y où $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$
-une loi de composition (une application) :
$\circ : Hom(Y, Z) \times Hom(X, Y) \to Hom(X, Z),\ X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$
satisfaisant aux trois axiomes suivant :
Cat 1 $Hom(X, Y) \cap Hom(X', Y') = \emptyset$ sauf si $X = X'$ et $Y = Y'$, auquel cas ils sont égaux ;
Cat 2 $\forall X \in Ob(\mathcal{C}), \exists id_X \in Hom(X, X)$ tel que $\forall Y \in Ob(\mathcal{C})$, $\forall f \in Hom(X, Y), f \circ id_X = f$ et $\forall g \in Hom(Y, X), id_X \circ g = g$;
Cat 3 la loi de composition est associative.

Terminologie

- $End(X) := Hom(X, X)$: **endomorphismes** de $X \in Ob(\mathcal{C})$; c'est un monoïde.
- $f \in Hom(X, Y)$ est un **isomorphisme** si $\exists g \in Hom(Y, X)$ tel que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$.
- Un isomorphisme de $End(X)$ est un **automorphisme**.
- L'ensemble des automorphismes de X est noté $Aut(X)$, c'est un groupe.

Terminologie

- $End(X) := Hom(X, X)$: **endomorphismes** de $X \in Ob(\mathcal{C})$; c'est un monoïde.
- $f \in Hom(X, Y)$ est un **isomorphisme** si $\exists g \in Hom(Y, X)$ tel que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$.
- Un isomorphisme de $End(X)$ est un **automorphisme**.
- L'ensemble des automorphismes de X est noté $Aut(X)$, c'est un groupe.

Terminologie

- $End(X) := Hom(X, X)$: **endomorphismes** de $X \in Ob(\mathcal{C})$; c'est un monoïde.
- $f \in Hom(X, Y)$ est un **isomorphisme** si $\exists g \in Hom(Y, X)$ tel que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$.
- Un isomorphisme de $End(X)$ est un **automorphisme.**
- L'ensemble des automorphismes de X est noté $Aut(X)$, c'est un groupe.

Terminologie

- $End(X) := Hom(X, X)$: **endomorphismes** de $X \in Ob(\mathcal{C})$; c'est un monoïde.
- $f \in Hom(X, Y)$ est un **isomorphisme** si $\exists g \in Hom(Y, X)$ tel que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$.
- Un isomorphisme de $End(X)$ est un **automorphisme.**
- L'ensemble des automorphismes de X est noté $Aut(X)$, c'est un groupe.

Sous-catégories

Définition

La catégorie $\mathcal{C}'$ est une **sous-catégorie** d'une catégorie $\mathcal{C}$ si $Ob(\mathcal{C}') \subset Ob(\mathcal{C})$ et si $Hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C}')$.
Elle est dite **pleine** si $Hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et **essentielle** si tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{C}'$.

Plan de l'exposé

1. Les catégories
   - Définitions
   - Des exemples
   - Objets universels
2. Les foncteurs
   - Définitons
   - Des exemples
   - Equivalence de catégories

La catégorie des ensembles

Exemple

-Les objets sont les ensembles.
-Les morphismes sont les applications ensemblistes, les isomorphismes sont les bijections.
-On parle donc de catégorie des ensembles et non pas d'ensemble de tous les ensembles.
-On la note $\mathcal{E}ns$.

Les catégories des groupes, anneaux commutatifs, corps

Exemples

-Les objets sont respectivement les groupes, les anneaux commutatifs, les corps.
-Les morphismes sont respectivement les morphismes de groupes, d'anneaux et de corps.
-On note ces catégories $\mathcal{Gr}$, $\mathcal{Ann}$, $\mathcal{Cor}$.

La catégorie des A-modules

Exemple

-Les objets sont les A-modules à gauche où A est un anneau quelconque.
-Les morphismes sont les applications A-linéaires.
-On la note $\mathcal{Mod}_A$, si A est un corps commutatif K on note plutôt $\mathcal{Ev}_K$.
-La catégorie $\mathcal{Evf}_K$ dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif K et les morphismes sont les applications K-linéaires, est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{Ev}_K$.

Les catégories des espaces topologiques, des espaces mesurables et des espaces de Banach

Exemples

-Les objets sont respectivement les espaces toplogiques, les espaces mesurables et les espaces de Banach.
-Les morphismes sont respectivement les applications continues, les applications mesurables et les applications linéaires continues.
-On les note $\mathcal{Top}$, $\mathcal{Mes}$, $\mathcal{Ban}$.
-Dans le cas de $\mathcal{Top}$, les isomorphismes sont les homéomorphismes.

Les catégories $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{H}ol$

Exemples

-Les objets de $\mathcal{C}^0$ et de $\mathcal{C}^\infty$ sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$, ceux de $\mathcal{H}ol$ sont les ouverts de $\mathbb{C}^n$.
-Les morphismes de $\mathcal{C}^0$ sont les applications continues, ceux de $\mathcal{C}^\infty$ sont les applications $\mathcal{C}^\infty$ et ceux de $\mathcal{H}ol$ sont les applications holomorphes.

La catégorie des morphismes d'une catégorie

Exemple

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on peut concevoir les morphismes de $\mathcal{C}$ comme les objets d'une nouvelle catégorie :
si $f : X \to Y$ et $f' : X' \to Y'$ sont deux morphismes dans $\mathcal{C}$ on définit un morphisme $f \to f'$ comme un couple (φ, ψ) de morphismes dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Catégorie opposée

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on appelle **catégorie opposée** à $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathcal{C}^{op}$ définie par :
$Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$;
$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$;
$g \circ_{\mathcal{C}^{op}} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$.

Plan de l’exposé

objet intitial, objet final

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $Z \in Ob(\mathcal{C})$ est dit **final** si :

$$\exists ! f : X \to Z, \forall X \in Ob(\mathcal{C}).$$

Il est dit **initial** s'il est final dans $\mathcal{C}^{op}$, c'est-à-dire :

$$\exists ! f : Z \to Y, \forall Y \in Ob(\mathcal{C}).$$

De tels objets sont appelés des **objets universels**, de plus ils sont uniques à isomorphisme unique près.

Premiers exemples

- $\emptyset$ est initial dans $\mathcal{Ens}$.

  $\{\emptyset\}$ est final dans $\mathcal{Ens}$.

  $\mathbb{Z}$ est initial dans $\mathcal{Ann}$.

Premiers exemples

- $\emptyset$ est initial dans $\mathcal{Ens}$.
  $\{\emptyset\}$ est final dans $\mathcal{Ens}$.
  $\mathbb{Z}$ est initial dans $\mathcal{Ann}$.

Premiers exemples

- $\emptyset$ est initial dans $\mathcal{E}ns$.
  $\{\emptyset\}$ est final dans $\mathcal{E}ns$.
  $\mathbb{Z}$ est initial dans $\mathcal{A}nn$.

Le quotient

Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, on forme la catégorie dont les objets sont les couples (G, f) où G est un espace vectoriel et $f : E \to G$ une application linéaire telle que $F \subset \ker f$ et les morphismes de (G, f) dans (H, g) sont les $\varphi : G \to H$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ G \arrow[rr, "\varphi"'] & & H \end{tikzcd}$$

Le quotient $(E/F, \pi)$, où $\pi : E \to E/F$ est la projection canonique, est alors un objet initial dans cette catégorie.

Le complété d'un espace vectoriel normé

Soit E un espace vectoriel normé, on forme la catégorie dont les objets sont les couples (F, f) où F est un espace vectoriel normé et $f : E \to F$ une application linéaire continue et les morphismes de (F, f) dans (G, g) sont les $\varphi : F \to G$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ F \arrow[rr, "\varphi"'] & & G \end{tikzcd}$$

Le complété $(\hat{E}, \iota)$, où $\iota : E \hookrightarrow \hat{E}$ est l'inclusion canonique, est alors un objet initial dans cette catégorie.

Produits dans les catégories

Définition

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, un **produit** de X et de Y dans $\mathcal{C}$ est un triplet $(X \times Y, pr_1, pr_2)$ constitué d'un objet de $\mathcal{C}$, noté $X \times Y$ et de deux morphismes $pr_1 : X \times Y \to X$ et $pr_2 : X \times Y \to Y$ tels que $\forall \varphi : Z \to X$ et $\psi : Z \to Y$, $Z \in Ob(\mathcal{C})$, $\exists! f : Z \to X \times Y$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
Z \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[drr, "\psi"'] \arrow[r, dotted, "f"] & X \times Y \arrow[ur, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Remarques et exemples

- Le produit est un objet universel dans une catégorie convenablement choisie.
- De manière identique, on peut définir le produit d'une famille quelconque d'objets.
- Dans $\mathcal{Ens}$, le produit existe : c'est le produit cartésien avec les projections canoniques.
- Dans $\mathcal{Gr}$, $\mathcal{Ann}$, $\mathcal{Mod}_A$, le produit existe : on prend l'ensemble produit en le munissant de la bonne structure.
- Dans $\mathcal{Top}$, le produit quelconque existe : on munit l'ensemble produit de la topologie produit.

Remarques et exemples

- Le produit est un objet universel dans une catégorie convenablement choisie.
- De manière identique, on peut définir le produit d'une famille quelconque d'objets.
- Dans $\mathcal{E}ns$, le produit existe : c'est le produit cartésien avec les projections canoniques.
- Dans $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathcal{M}od_A$, le produit existe : on prend l'ensemble produit en le munissant de la bonne structure.
- Dans $\mathcal{T}op$, le produit quelconque existe : on munit l'ensemble produit de la topologie produit.

Remarques et exemples

- Le produit est un objet universel dans une catégorie convenablement choisie.
- De manière identique, on peut définir le produit d'une famille quelconque d'objets.
- Dans $\mathcal{E}ns$, le produit existe : c'est le produit cartésien avec les projections canoniques.
- Dans $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathcal{M}od_A$, le produit existe : on prend l'ensemble produit en le munissant de la bonne structure.
- Dans $\mathcal{T}op$, le produit quelconque existe : on munit l'ensemble produit de la topologie produit.

Remarques et exemples

- Le produit est un objet universel dans une catégorie convenablement choisie.
- De manière identique, on peut définir le produit d'une famille quelconque d'objets.
- Dans $\mathcal{E}ns$, le produit existe : c'est le produit cartésien avec les projections canoniques.
- Dans $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathcal{M}od_A$, le produit existe : on prend l'ensemble produit en le munissant de la bonne structure.
- Dans $\mathcal{T}op$, le produit quelconque existe : on munit l'ensemble produit de la topologie produit.

Remarques et exemples

- Le produit est un objet universel dans une catégorie convenablement choisie.
- De manière identique, on peut définir le produit d'une famille quelconque d'objets.
- Dans $\mathcal{Ens}$, le produit existe : c'est le produit cartésien avec les projections canoniques.
- Dans $\mathcal{Gr}$, $\mathcal{Ann}$, $\mathcal{Mod}_A$, le produit existe : on prend l'ensemble produit en le munissant de la bonne structure.
- Dans $\mathcal{Top}$, le produit quelconque existe : on munit l'ensemble produit de la topologie produit.

Sommes dans les catégories

Définition

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, une **somme** (ou **coproduit**) de X et de Y dans $\mathcal{C}$ est un triplet $(X \amalg Y, i_1, i_2)$ constitué d'un objet de $\mathcal{C}$, noté $X \amalg Y$ et de deux morphismes $i_1 : X \to X \amalg Y$ et $i_2 : Y \to X \amalg Y$ tels que $\forall \varphi : X \to Z$ et $\psi : Y \to Z$, $Z \in Ob(\mathcal{C})$, $\exists! f : X \amalg Y \to Z$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
& X \amalg Y \arrow[r, dotted, "f"] & Z \\
Y \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Remarques et exemples

- La somme est le produit dans la catégorie opposée, on peut donc définir des sommes de familles quelconques d'objets et c'est un objet universel.
- Dans $\mathcal{E}ns$, la somme correspond à la réunion disjointe : $X \amalg Y = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y)$ muni $i_1(x) = (1, x)$ et $i_2(x) = (2, x)$.
- Dans $\mathcal{T}op$, la somme s'obtient en munissant la somme ensembliste de la topologie dont les ouverts sont les sommes d'ouverts.

Remarques et exemples

- La somme est le produit dans la catégorie opposée, on peut donc définir des sommes de familles quelconques d'objets et c'est un objet universel.
- Dans $\mathcal{Ens}$, la somme correspond à la réunion disjointe : $X \amalg Y = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y)$ muni $i_1(x) = (1, x)$ et $i_2(x) = (2, x)$.
- Dans $\mathcal{Top}$, la somme s'obtient en munissant la somme ensembliste de la topologie dont les ouverts sont les sommes d'ouverts.

Remarques et exemples

- La somme est le produit dans la catégorie opposée, on peut donc définir des sommes de familles quelconques d'objets et c'est un objet universel.
- Dans $\mathcal{Ens}$, la somme correspond à la réunion disjointe : $X \amalg Y = (\{1\} \times X) \cup (\{2\} \times Y)$ muni $i_1(x) = (1, x)$ et $i_2(x) = (2, x)$.
- Dans $\mathcal{Top}$, la somme s'obtient en munissant la somme ensembliste de la topologie dont les ouverts sont les sommes d'ouverts.

Remarques et exemples

- Dans $\mathcal{G}r$, la somme n'est pas un objet "classique". Par contre dans la catégorie des groupes commutatifs, la somme est la somme directe et on note $X \amalg Y = X \oplus Y$. On peut l'identifier au produit dans le cas d'une somme finie mais pas dans le cas général.
- Dans $\mathcal{M}od_A$, lorsque A est un anneau commutatif, la somme est la somme directe notée également $\oplus$.
- Dans $\mathcal{A}nn$, la somme est le produit tensoriel.

Remarques et exemples

- Dans $\mathcal{G}r$, la somme n'est pas un objet "classique". Par contre dans la catégorie des groupes commutatifs, la somme est la somme directe et on note $X \amalg Y = X \oplus Y$. On peut l'identifier au produit dans le cas d'une somme finie mais pas dans le cas général.
- Dans $\mathcal{M}od_A$, lorsque A est un anneau commutatif, la somme est la somme directe notée également $\oplus$.
- Dans $\mathcal{A}nn$, la somme est le produit tensoriel.

Remarques et exemples

- Dans $\mathcal{Gr}$, la somme n'est pas un objet "classique". Par contre dans la catégorie des groupes commutatifs, la somme est la somme directe et on note $X \amalg Y = X \oplus Y$. On peut l'identifier au produit dans le cas d'une somme finie mais pas dans le cas général.
- Dans $\mathcal{Mod}_A$, lorsque A est un anneau commutatif, la somme est la somme directe notée également $\oplus$.
- Dans $\mathcal{Ann}$, la somme est le produit tensoriel.

Plan de l'exposé

1. Les catégories
   - Définitions
   - Des exemples
   - Objets universels
2. Les foncteurs
   - Définitons
   - Des exemples
   - Equivalence de catégories

Plan de l'exposé

1. Les catégories
   - Définitions
   - Des exemples
   - Objets universels
2. Les foncteurs
   - Définitons
   - Des exemples
   - Equivalence de catégories

Définition

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un **foncteur covariant** de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est la donnée d'une fonction qui à $X \in Ob(\mathcal{C})$ associe $F(X) \in Ob(\mathcal{C}')$ et d'une application qui à tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ associe un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ de $\mathcal{C}'$ vérifiant :

FON 1 $\forall X \in \mathcal{C}, F(id_X) = id_{F(X)}$;

FON 2 $\forall X, Y, Z \in \mathcal{C}, f \in Hom(X, Y), g \in Hom(Y, Z)$,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est dit **contravariant** s'il est covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'^{op}$.

Remarques

- Un foncteur transforme les isomorphismes en isomorphismes.
- Si le foncteur F est covariant on note parfois f_* au lieu de $F(f)$.
- Si le foncteur F est contravariant on note parfois f^* au lieu de $F(f)$.
- On peut former la catégorie des catégories : les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs covariants.

Remarques

- Un foncteur transforme les isomorphismes en isomorphismes.
- Si le foncteur F est covariant on note parfois f_* au lieu de $F(f)$.
- Si le foncteur F est contravariant on note parfois f^* au lieu de $F(f)$.
- On peut former la catégorie des catégories : les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs covariants.

Remarques

- Un foncteur transforme les isomorphismes en isomorphismes.
- Si le foncteur F est covariant on note parfois f_* au lieu de $F(f)$.
- Si le foncteur F est contravariant on note parfois f^* au lieu de $F(f)$.
- On peut former la catégorie des catégories : les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs covariants.

Remarques

- Un foncteur transforme les isomorphismes en isomorphismes.
- Si le foncteur F est covariant on note parfois f_* au lieu de $F(f)$.
- Si le foncteur F est contravariant on note parfois f^* au lieu de $F(f)$.
- On peut former la catégorie des catégories : les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs covariants.

Plan de l'exposé

Le foncteur d'oubli

-Ce foncteur est défini, par exemple, de $\mathcal{Gr}$, $\mathcal{Ann}$, $\mathcal{Mod}_A$, $\mathcal{Top}$, dans $\mathcal{Ens}$, en oubliant la structure de l'objet de départ et en regardant les morphisme que de manière ensembliste.
-On a également un foncteur d'oubli partiel de $\mathcal{Ann}$ dans $\mathcal{Gr}$.

Préfaisceaux sur un espace topolgique

- Soit X un espace topologique, on forme la catégorie $\mathcal{Ouv}_X$ dont les objets sont les ouverts de X et pour deux ouverts U et V, $Hom(U, V)$ est réduit à un élément si $U \subset V$, vide sinon.
- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, un **préfaisceau** de base X à valeur dans $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{Ouv}_X$ dans $\mathcal{C}$.
- Par exemple, si $X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{Ann}$, le foncteur contravariant $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ qui à un ouvert U associe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, est un préfaisceau d'anneaux.

Préfaisceaux sur un espace topolgique

- Soit X un espace topologique, on forme la catégorie $\mathcal{Ouv}_X$ dont les objets sont les ouverts de X et pour deux ouverts U et V, $Hom(U, V)$ est réduit à un élément si $U \subset V$, vide sinon.
- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, un **préfaisceau** de base X à valeur dans $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{Ouv}_X$ dans $\mathcal{C}$.
- Par exemple, si $X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{Ann}$, le foncteur contravariant $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ qui à un ouvert U associe $\mathcal{O}_\mathbb{C}(U)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, est un préfaisceau d'anneaux.

Préfaisceaux sur un espace topolgique

- Soit X un espace topologique, on forme la catégorie $\mathcal{O}uv_X$ dont les objets sont les ouverts de X et pour deux ouverts U et V, $Hom(U, V)$ est réduit à un élément si $U \subset V$, vide sinon.
- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, un **préfaisceau** de base X à valeur dans $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{O}uv_X$ dans $\mathcal{C}$.
- Par exemple, si $X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{A}nn$, le foncteur contravariant $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ qui à un ouvert U associe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, est un préfaisceau d'anneaux.

Le foncteur de dualité

-Soit A un anneau commutatif, on définit le foncteur (contravariant) de dualité de la catégorie $\mathcal{Mod}_A$ dans elle-même en associant à tout A-module M, son dual $M^* = Hom(M, A)$ et à toute application linéaire sa transposée.
-Dans $\mathcal{Evf}_K$, c'est la dualité classique.

Le foncteur *Spec*

- Soit A un anneau commutatif, on note $Spec(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A.
- Pour $f : A \to B$, morphisme d'anneaux commutatifs, on associe $f^* : Spec(B) \to Spec(A)$ où $f^*(P) = f^{-1}(P)$, pour $P \in Spec(B)$.
- Le foncteur contravariant *Spec* est le foncteur définit de $\mathcal{Ann}$ dans $\mathcal{Ens}$ (et même $\mathcal{Top}$) qui à A associe $Spec(A)$ et à f associe f^*.

Le foncteur *Spec*

- Soit A un anneau commutatif, on note $Spec(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A.
- Pour $f : A \longrightarrow B$, morphisme d'anneaux commutatifs, on associe $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ où $f^*(P) = f^{-1}(P)$, pour $P \in Spec(B)$.
- Le foncteur contravariant *Spec* est le foncteur définit de $\mathcal{Ann}$ dans $\mathcal{Ens}$ (et même $\mathcal{Top}$) qui à A associe $Spec(A)$ et à f associe f^*.

Le foncteur *Spec*

- Soit A un anneau commutatif, on note $Spec(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A.
- Pour $f : A \to B$, morphisme d'anneaux commutatifs, on associe $f^* : Spec(B) \to Spec(A)$ où $f^*(P) = f^{-1}(P)$, pour $P \in Spec(B)$.
- Le foncteur contravariant *Spec* est le foncteur définit de $\mathcal{Ann}$ dans $\mathcal{Ens}$ (et même $\mathcal{Top}$) qui à A associe $Spec(A)$ et à f associe f^*.

Un foncteur de mesures

En composant le foncteur contravariant de la catégorie des espaces compacts (muni des applications continues) vers $\mathcal{Ban}$ qui à X associe $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ avec le foncteur de dualité de $\mathcal{Ban}$ sur elle-même, on obtient un foncteur covariant qui à X associe $\mathcal{M}(X)$ (espace des mesures sur X muni de la topologie de la norme) et à f associe $f_*(\mu)$ (image directe de la mesure μ par f).

Plan de l'exposé

1. Les catégories
   - Définitions
   - Des exemples
   - Objets universels
2. Les foncteurs
   - Définitons
   - Des exemples
   - Equivalence de catégories

Morphismes de foncteurs

Définition

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, F et G deux foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. On appelle **morphisme de foncteur** (ou **transformation naturelle**), noté $\Phi : F \to G$, la donnée, pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\Phi_X : F(X) \to G(X)$ tel que, pour tout $f : X \to Y$ morphisme de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\Phi_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(Y) \arrow[d, "\Phi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Remarques

- Si F et G sont contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, on les considère comme covariants de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.
- On peut construire la catégorie des foncteurs entre deux catégories données, les objets étant les foncteurs et les morphismes étant les transformations naturelles.
- Un morphisme Φ de foncteur est un isomorphisme ssi Φ_X est un isomorphisme.

Remarques

- Si F et G sont contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, on les considère comme covariants de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.
- On peut construire la catégorie des foncteurs entre deux catégories données, les objets étant les foncteurs et les morphismes étant les transformations naturelles.
- Un morphisme Φ de foncteur est un isomorphisme ssi Φ_X est un isomorphisme.

Remarques

- Si F et G sont contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, on les considère comme covariants de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.
- On peut construire la catégorie des foncteurs entre deux catégories données, les objets étant les foncteurs et les morphismes étant les transformations naturelles.
- Un morphisme Φ de foncteur est un isomorphisme ssi Φ_X est un isomorphisme.

Définitions

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur.

- On dit que F est **pleinement fidèle** si $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ est bijective.
- On dit que F est **essentiellement surjectif** si $\forall X' \in Ob(\mathcal{C}'), \exists X \in Ob(\mathcal{C})$ tel que X' soit isomorphe à $F(X)$.
- Si F est covariant, on dit que c'est une **équivalence de catégories** s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.
- Si F est contravariant, on dit que c'est une **antiéquivalence de catégories** si c'est une équivalence de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.

Définitions

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur.

- On dit que F est **pleinement fidèle** si $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ est bijective.
- On dit que F est **essentiellement surjectif** si $\forall X' \in Ob(\mathcal{C}'), \exists X \in Ob(\mathcal{C})$ tel que X' soit isomorphe à $F(X)$.
- Si F est covariant, on dit que c'est une **équivalence de catégories** s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.
- Si F est contravariant, on dit que c'est une **antiéquivalence de catégories** si c'est une équivalence de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.

Définitions

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur.

- On dit que F est **pleinement fidèle** si $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ est bijective.
- On dit que F est **essentiellement surjectif** si $\forall X' \in Ob(\mathcal{C}'), \exists X \in Ob(\mathcal{C})$ tel que X' soit isomorphe à $F(X)$.
- Si F est covariant, on dit que c'est une **équivalence de catégories** s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.
- Si F est contravariant, on dit que c'est une **antiéquivalence de catégories** si c'est une équivalence de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.

Définitions

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur.

- On dit que F est **pleinement fidèle** si $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ est bijective.
- On dit que F est **essentiellement surjectif** si $\forall X' \in Ob(\mathcal{C}'), \exists X \in Ob(\mathcal{C})$ tel que X' soit isomorphe à $F(X)$.
- Si F est covariant, on dit que c'est une **équivalence de catégories** s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.
- Si F est contravariant, on dit que c'est une **antiéquivalence de catégories** si c'est une équivalence de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.

Définitions

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur.

- On dit que F est **pleinement fidèle** si $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ est bijective.
- On dit que F est **essentiellement surjectif** si $\forall X' \in Ob(\mathcal{C}'), \exists X \in Ob(\mathcal{C})$ tel que X' soit isomorphe à $F(X)$.
- Si F est covariant, on dit que c'est une **équivalence de catégories** s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.
- Si F est contravariant, on dit que c'est une **antiéquivalence de catégories** si c'est une équivalence de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$.

Proposition

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur covariant.
Alors F est une équivalence de catégories ssi $\exists G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tel que $G \circ F$ soit isomorphe à $Id_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G$ soit isomorphe à $Id_{\mathcal{C}'}$.

Exemples

- Soient K un corps commutatif et $\mathcal{End}_{\mathcal{Evf}_K}$ la catégorie formée par les endomorphismes de $\mathcal{Evf}_K$.
  On a une équivalence de catégories entre $\mathcal{End}_{\mathcal{Evf}_K}$ et $\mathcal{Mod}_{K[X]}$.
- Soit $\mathcal{Mat}(\mathbb{R})$ la catégorie dont les objets sont les espaces $\mathbb{R}^n$ et $Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.
  On a une équivalence de catégorie entre $\mathcal{Evf}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{Mat}(\mathbb{R})$.

Exemples

- Soient K un corps commutatif et $\mathcal{End}_{\mathcal{Evf}_K}$ la catégorie formée par les endomorphismes de $\mathcal{Evf}_K$.
  On a une équivalence de catégories entre $\mathcal{End}_{\mathcal{Evf}_K}$ et $\mathcal{Mod}_{K[X]}$.
- Soit $\mathcal{Mat}(\mathbb{R})$ la catégorie dont les objets sont les espaces $\mathbb{R}^n$ et $Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.
  On a une équivalence de catégorie entre $\mathcal{Evf}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{Mat}(\mathbb{R})$.

Merci de votre attention !