TD 2: Le langage de la théorie des ensembles (1)
Ensembles et applications

Exercice 1 Soient $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$. Calculer $A \cup B$, $A \cap B$, $E \setminus A$.

Exercice 2 On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

1. Remplacer les pointillés par l'un des symboles $\in$, $\subset$, $\notin$.
$$4...\mathbb{N},\ 4...\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \{4\}...\mathbb{N},\ \{4\}...\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \{-3, 0, 5\}...\mathcal{P}(\mathbb{N}).$$
2. Soit $E = \{0, 7\}$, expliciter $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
3. Même question avec $E = \emptyset$.

Exercice 3 (Paradoxe de Russell (ou du barbier)) On note $X = \{x \mid x \notin x\}$. Montrer que l'existence de X conduit à une contradiction :
$$X \in X \text{ et } X \notin X.$$

Exercice 4 Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que si $E \subset F$ alors $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Parmi les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, lequel est inclus dans l'autre ? A quelle condition a-t-on l'égalité ?
3. Mêmes questions pour $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

Exercice 5 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Supposons que $A \cap B = A \cap C$ et que $A \cup B = A \cup C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 6 Soient A, B, C et D quatre parties d'un ensemble E. Supposons que $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 7 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \cup \big((E \setminus A) \cap B\big) = A \cup B$,
2. $A \cap \big((E \setminus A) \cup B\big) = A \cap B$,
3. $A \cup \big((E \setminus A) \cap B\big) \cup \big((E \setminus A) \cap (E \setminus B) \cap C\big) = A \cup B \cup C$.

Que peut-on dire de $A \cap \big((E \setminus A) \cup B\big) \cap \big((E \setminus A) \cup (E \setminus B) \cup C\big)$? Pourquoi ?

Exercice 8 Soit $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de E. Montrer que :

1. Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$,
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple où l'égalité est fausse. Montrer ensuite que si f est injective, alors l'égalité est vraie.

   Soient à présent C et D deux parties de F. Montrer que :
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Que signifient les formules suivantes ?

1. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$,
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$,
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$,
4. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exercice 10 Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ définies comme suit :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité puis la bijectivité de f et g. Déterminer ensuite $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 11 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si f et g sont toutes deux injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
3. Montrer que si f et g sont toutes deux surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

   Soit de plus $h : F \to E$. On suppose que $f \circ h \circ f$ est bijective.
5. Déduire de ce qui précède que f est alors bijective.
6. Montrer que h est bijective également.

Exercice 12 Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère l'application :

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A)$$
$$X \mapsto A \cap X$$

1. Montrer que f est surjective.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A = E$.

Exercice 13 Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ puis entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Existe-t-il une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$?