Université Paul Sabatier   Printemps 2012
L3 Fonctions Holomorphes

TD 3. Intégrales curvilignes, formule de Green-Riemann

Exercice 1. Calculer l'intégrale de $(\sin z)^2$ le long du chemin $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0,1]$.

Exercice 2. Calculer les intégrales curvilignes de $\bar{z}$ le long des courbes suivantes: $\{|z| = 1, \Re z \geq 0\}$, $\{|z| = 1, \Re z \leq 0\}$, $\{|z| \leq 1, \Re z = 0\}$.

Exercice 3. Calculer les intégrales curvilignes de $z - \frac{1}{z}$ le long des trois courbes joignant les points $1-i$ et $1+i$ en ligne droite ou au long du cercle centré en 0. Comparer les résultats et donner une explication.

Exercice 4. Calculer les intégrales curvilignes de $\frac{1}{z^2+1}$ le long des deux courbes joignant les points 2 et $2i$ en ligne droite ou allant de 2 à -1 et puis de -1 à $2i$. Comparer les résultats et donner une explication.

Exercice 5. Calculer l'intégrale de $1/(1+z^4)$ sur l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$.

Exercice 6. Calculer $\int_\gamma (z-a)^n \, dz$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, où $\gamma(t) = a + \exp(it)$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 7. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{z+1}{z} \, dz$, dans chacun des cas suivants:

(1) γ est le bord du carré de centre 0 dont un sommet est le point $(1,1)$.
(2) γ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$. On pose $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer :

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z} \quad et \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

Exercice 9. Soient f une fonction holomorphe dans un ouvert qui contient $B(0,R)$ et $a, b \in B(0,R)$. Évaluer

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

En déduire le théorème de Liouville : toute fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Exercice 10. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Exercice 11. Soient $V = \{x + iy ; x, y \in \mathbf{R}_+\}$ et $f : V \to \mathbb{C}$ une application continue. Pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ et $r > 0$, on pose $\gamma_r(t) = re^{it}$, $M(r) = \sup_{\gamma_r} |f|$.

(1) Établir, pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$: $2t/\pi \leq \sin t$.
(2) On suppose que $M(r)$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. Montrer que $\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz} \, dz$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$.

Exercice 12. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \bar{z}\, dz$, où γ est le chemin joignant le point $(1,1)$ au point $(2,4)$ le long de la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 13. Soient $I = [0,1]$, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ une application continue. Si $t \in I$, on pose $\chi(t) = \overline{\gamma(t)}$.

(1) Établir:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_\chi \overline{f(\bar{z})} dz.$$

(2) On suppose que $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$. Montrer que:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = -\int_\gamma \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 14. En intégrant e^z le long d'une courbe convenable du plan complexe, montrer que l'on a, pour a et b réels, l'inégalité suivante:

$$|e^{bz} - e^{az}| \le |b-a||z|e^{x \max(a,b)},$$

lorsque $x = \Re z$ est supposé positif. Qu'obtient-on si x est négatif?

Exercice 15. Calculer

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \quad \text{et} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{-z}}{z} dz$$

où Γ^+ est le demi-cercle de centre 0 et rayon R situé dans la région $\Re z \ge 0$.

Exercice 16. On note AB le demi-cercle de paramétrisation : $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} (x-y)dx + (x+y)dy.$$

Vérifier la formule de Green-Riemann en complétant le demi-cercle avec le diamètre BA.

Exercice 17. On donne, sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, le champ de vecteur (P,Q) où

$$P(x,y) = -\frac{y}{r^2} \text{ et } Q(x,y) = \frac{x}{r^2} \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2}).$$

(1) Calculer, pour tout cercle C centré à l'origine, l'intégrale curviligne

$$\int_C P dx + Q dy.$$

(2) Vérifier que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Pourquoi la formule de Green-Riemann est-elle mise en défaut ?

(3) Déterminer une fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite $(x \le 0, y = 0)$, à valeurs réelles et telle que $(P,Q) = \mathrm{grad}(f)$.

Exercice 18. Déterminer à l'aide de la formule de Green-Riemann l'aire de la partie du plan comprise entre les deux boucles de la courbe (appelée limaçon de Pascal) d'équation polaire $r = 2\cos\theta - 1$ $(|\theta| \le \pi)$.