TD4. Applications linéaires et matrices

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E}$, on considère les vecteurs $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = 2e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 3e_2$.

(1) Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse P^{-1}.

On suppose que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base $\mathcal{E}$ d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$.

(3) Déterminer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$.

(4) Donner une base de $Ker f$.

(5) Calculer le rang de f et donner une base de $Im f$.

(6) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E}$, on considère le plan H d'équation $x+y+z=0$ et la droite D engendrée par e_1+e_2. Posons $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 - e_2$ et $v_3 = e_1 - e_3$

(1) Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse P^{-1}.

(3) Considérer la projection π sur le plan H de direction D. Donner la matrice de π dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{E}$.

Soient, de plus, H' le plan engendré par e_2 et v_3 et D' la droite vectorielle engendrée par v_2. Soit π' la projection sur H' de direction D'.

(4) Calculer $\pi'(e_1)$ et $\pi'(v_1)$.

(5) Donner la matrice de π' et de $f = \pi' \circ \pi$ dans la base $\mathcal{B}$.

(6) Donner le rang de f et déterminer $Ker f$, $Im f$.

(7) Trouver deux sous-espaces vectoriels K et L de $\mathbb{R}^3$ tels que f soit la projection sur K de direction L.

Exercice 3 : Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leurs bases canoniques, respectivement (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2), est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_1 + e_3,\ e'_3 = e_1 + e_2,\ f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

(1) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases?

Exercice 4 : Soit $E = \mathbb{R}^3[X]$. On définit f l'application de E dans E par :

$$f(P) = P + (1-X)P'$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique de E.

(2) Donner une base de Imf et de $Kerf$.

(3) Montrer que Imf et $Kerf$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 5 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n vérifiant $f^2 = Id_E$.

(1) Soit $x \in E$, montrer que le vecteur $x_1 = f(x) + x$ (resp. $x_2 = x - f(x)$) vérifie $f(x_1) = x_1$ (resp. $f(x_2) = -x_2$).

(2) Montrer que $E = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$.

(3) En déduire l'existence d'un entier $s \in [0, n]$ et d'une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans sa base canonique est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer M^2 et en déduire que u est un automorphisme tel que $u^{-1} = u$.

(2) Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par u est un sous-espace P dont on donnera la dimension et une base.

(3) Calculer $u(e_1 - e_2 + e_3)$.

(4) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Quel est le noyau de u?

(2) Calculer le rang de la matrice M. L'application u est-elle surjective?

Exercice 8 : Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

(1) Montrer que $Im(g \circ f) \subset Im(g)$ et que $Kerf \subset Ker(g \circ f)$.

(2) En déduire que $rang(g \circ f) \leq \min(rang(f), rang(g))$.