

## Chapitre 3 : Cardinaux, factorielles et coefficients binomiaux.

### 1. CARDINAUX.

L'ensemble des nombres entiers naturels  $0, 1, 2, \dots$  possède deux aspects primordiaux. Le premier est la structure ordinale c'est à dire celle qui est associée à l'ordre : lorsqu'un enfant apprend à compter c'est cet aspect qui est mis en avant : "un, deux, trois nous irons au bois", ou bien : premier étage, deuxième étage, troisième étage ... Le second aspect est la structure cardinale, c'est l'aspect "nombre" et calcul que nous allons étudier ici.

**Definition 1.** *On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  ont le même cardinal s'il existe une bijection  $f : E \rightarrow F$ . On note alors  $\text{Card } E$  ou bien  $\#E$  ce cardinal.*

Notons que cette définition s'applique à des ensembles qui ne sont pas nécessairement finis c'est pourquoi on préfère parler de "cardinal" d'un ensemble plutôt que de "nombre d'élément". Il y a des cardinaux finis et des cardinaux infinis mais dans ce chapitre nous ne nous intéresserons qu'aux premiers et plus particulièrement au cardinal de  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ , au cardinal de  $\mathcal{P}_k(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  qui contiennent  $k$  éléments et au cardinal de  $\mathcal{S}(E)$  le groupe des bijections de  $E$ .

Comme premiers exemples notons  $0 = \text{Card } \emptyset$  et  $1 = \text{Card } \{a\}$  le cardinal de tout singleton : l'application  $f : \{a\} \rightarrow \{b\}$  définie par  $f(a) = b$  est l'unique application entre ces deux singletons et elle est bijective ! C'est pourquoi tous les singletons ont le même nombre d'éléments : 1.

L'addition des cardinaux est définie de la façon suivante :

**Definition 2.** *Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles disjoints, c'est à dire si  $E \cap F = \emptyset$ , alors  $\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F$ .*

Par exemple si  $a \neq b$  les singletons  $\{a\}$  et  $\{b\}$  sont disjoints :  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$  ce qui prouve que

$$\text{Card } \{a, b\} = \text{Card } \{a\} \cup \{b\} = \text{Card } \{a\} + \text{Card } \{b\} = 1 + 1 = 2.$$

### 2. CARDINAUX D'ENSEMBLES DE PARTIES.

**Théorème 1.** *Si  $E$  est un ensemble qui possède  $n$  éléments alors, l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$  contient  $2^n$  éléments.*

**Preuve.** La démonstration se fait par récurrence sur  $n = \text{Card } E$ . Pour  $n = 0$ ,  $E = \emptyset$  et  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$  est un singleton donc  $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 1 = 2^0$ . Supposons la proposition vraie pour  $n$  et considérons un ensemble  $F = E \cup \{a\}$  avec  $\text{Card } E = n$  et  $a \notin E$  de sorte que  $\text{Card } F = n+1$ . Une partie de  $F$  est soit une partie de  $E$  soit la réunion de  $\{a\}$  et d'une partie de  $E$  et les deux possibilités s'excluent mutuellement : en termes plus ensemblistes

$$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E) \cup \{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}(E)\}$$

et

$$\mathcal{P}(E) \cap \{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}(E)\} = \emptyset.$$

Comme l'application

$$A \in \mathcal{P}(E) \rightarrow A \cup \{a\} \in \{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}(E)\}$$

est bijective (ceci parce que  $a \notin E$ ) on en déduit que ces deux ensembles ont  $2^n$  éléments et donc que

$$\text{Card } \mathcal{P}(F) = \text{Card } \mathcal{P}(E) + \text{Card}\{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}(E)\} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

□

**Definition 3.** Soit  $E$  un ensemble et soit  $n = \text{Card } E$ . Pour tout entier  $k \geq 0$  on note  $\mathcal{P}_k(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  qui possèdent  $k$  éléments et l'on note  $\binom{n}{k} = \text{Card } \mathcal{P}_k(E)$ . Ces cardinaux sont appelés **coefficients binomiaux**.

Notons que cette définition n'est pas tout à fait correcte puisqu'elle suppose que  $\text{Card } \mathcal{P}_k(E)$  ne dépend pas de  $E$  mais uniquement de  $k$  et de  $\text{Card } E$ . Ce point sera rendu plus clair plus tard. Une autre notation très classique est

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Nous préférons celle-ci à celle-là parce qu'elle comprise par tous les mathématiciens du monde, la notation  $C_n^k$ , due à Pascal, étant plutôt en usage dans les lycées et collèges français.

Ces coefficients sont ceux qui apparaissent dans le binôme de Newton

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

mais aussi dans le triangle de Pascal

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$n = 0$	1	0	0	0	0	0
$n = 1$	1	1	0	0	0	0
$n = 2$	1	2	1	0	0	0
$n = 3$	1	3	3	1	0	0
$n = 4$	1	4	6	4	1	0
$n = 5$	1	5	10	10	5	1

Ce triangle était déjà connu des mathématiciens chinois et arabes au XIII<sup>e</sup> siècle. Les premières propriétés que nous établissons sont des conséquences immédiates de la définition :

**Théorème 2.** Quels que soient les entiers  $n$  et  $k \geq 0$  on a :

- $\binom{n}{0} = 1$ ,
- $\binom{n}{n} = 1$ ,
- $\binom{n}{k} = 0$ , pour tout  $k > n$ ,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$ ,
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$  pour tout  $n \geq 0$  et  $k \geq 0$ .

**Preuve.** Les trois premières propriétés sont évidentes : la première parce qu'il n'y a dans tout ensemble  $E$  qu'une seule partie à 0 éléments :  $\emptyset$ , la seconde parce qu'il n'y a dans  $E$  qu'une seule partie à  $n$  éléments :  $E$ , et la troisième parce qu'il n'existe pas de parties à  $k > n$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

La quatrième propriété résulte de l'union

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \cup \mathcal{P}_1(E) \cup \dots \cup \mathcal{P}_n(E)$$

et du fait que  $\mathcal{P}_k(E) \cap \mathcal{P}_l(E) = \emptyset$  si  $k \neq l$ . Le cardinal de  $\mathcal{P}(E)$  est donc la somme des cardinaux des  $\mathcal{P}_k(E)$  pour  $k = 0, \dots, n$  ce qui donne la formule.

Pour prouver la cinquième propriété il suffit de remarquer que le passage au complémentaire est une bijection entre  $\mathcal{P}_k(E)$  et  $\mathcal{P}_{n-k}(E)$ . Ces deux ensembles ont donc même cardinal.

La dernière formule, qui justifie le calcul des coefficients binomiaux via le triangle de Pascal ci-dessus, se prouve de la façon suivante. Considérons un ensemble  $F = E \cup \{a\}$  avec  $\text{Card } E = n$  et  $a \notin E$  de sorte que  $\text{Card } F = n + 1$ . Une partie de  $F$  qui contient  $k + 1$  éléments est soit une partie de  $E$  qui contient  $k + 1$  éléments soit la réunion de  $\{a\}$  et d'une partie de  $E$  qui contient  $k$  éléments et les deux possibilités s'excluent mutuellement : en termes plus ensemblistes

$$\mathcal{P}_{k+1}(F) = \mathcal{P}_{k+1}(E) \cup \{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}_k(E)\}$$

et

$$\mathcal{P}_{k+1}(E) \cup \{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}_k(E)\} = \emptyset.$$

On passe alors aux cardinaux en remarquant que  $\{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}_k(E)\}$  et  $\mathcal{P}_k(E)$  ont le même cardinal  $\binom{n}{k}$  puisque

$$A \in \mathcal{P}_k(E) \rightarrow A \cup \{a\} \in \{A \cup \{a\} : A \in \mathcal{P}_k(E)\}$$

est une application bijective.  $\square$

**Exercice 1.** Les nombres de Fibonacci sont définis par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-k}{k} + \dots + \binom{0}{n}.$$

Le second résultat important est la formule du binôme de Newton que nous avons déjà annoncée :

**Théorème 3.** Pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

**Preuve.** Par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 0$  est immédiat de même que  $n = 1$ . On a

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n (x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k = \end{aligned}$$

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

par la formule de récurrence. □

Cette formule est vraie dans tout anneau commutatif et unitaire (nombres complexes par exemple). Par contre elle est fautive sans hypothèse de commutativité pour la multiplication comme c'est le cas pour les matrices carrées. Les conséquences de cette formule sont nombreuses. En voici trois laissées à titre d'exercice

**Exercice 2.**

- (1)  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .
- (2)  $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ .
- (3)  $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ . Indication : dériver l'expression  $(1+x)^n$ .