Chapitre 1 : l'algèbre des ensembles.

1. Appartenance.

Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E. On notera $x \in E$ le fait que x soit un élément de E et $x \notin E$ la négation de cette propriété. Le signe $\in$ est le signe d'appartenance. Il existe deux façons de décrire un ensemble. Soit en dressant la liste de ses éléments comme par exemple $E = \{0, 1, 2\}$ ou par une propriété caractérisant ses éléments : $F = \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ et \ x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$. D'une manière générale, à une propriété $P(x)$ comme ici $x \in \mathbb{R}$ *et* $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ on associe un ensemble que l'on note

$$\{x \ : \ P(x)\}$$

et qui vérifie la propriété suivante

$$x \in \{x \ : \ P(x)\} \Leftrightarrow P(x)$$

autrement dit, l'appartenance de x à cet ensemble dépend de la vérité de la propriété $P(x)$.

Une seconde propriété fondamentale est l' *axiome d'extensionnalité.* Cet axiome règle le problème de l'égalité de deux ensembles :

$$E = F \Leftrightarrow (\forall x)(x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

autrement dit *deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.* Il résulte de cet axiome que deux propriétés équivalentes définissent le même ensemble

$$\{x \ : \ P(x)\} = \{x \ : \ Q(x)\} \Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)).$$

Ainsi les ensembles $E = \{x \ : \ x \in \mathbb{N} \ et \ x \leq 2\}$ et $F = \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ et \ x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$ sont égaux parce que

$$x \in \mathbb{R} \ et \ x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \ x \in \mathbb{N} \ et \ x \leq 2.$$

Une notation souventefois utilisée est

$$\{x \in E \ : \ P(x)\} = \{x \ : \ x \in E \ et \ P(x)\}.$$

2. Constructions d'ensembles, union, intersection.

Nous allons donner une liste de propriétés et des ensembles qui leur sont associées :

(1) $\emptyset = \{x \ : \ x \neq x\}$, l'ensemble vide,
(2) $\{a\} = \{x \ : \ x = a\}$, le singleton a,
(3) $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\} = \{x \ : \ x = a_1 \ ou \ x = a_2 \ ou \ldots ou \ x = a_p\}$,
(4) $A \cup B = \{x \ : \ x \in A \ ou \ x \in B\}$, l'union de A et B,
(5) $A \cap B = \{x \ : \ x \in A \ et \ x \in B\}$, l'intersection de A et B,
(6) $A \setminus B = \{x \ : \ x \in A \ et \ x \notin B\}$, la différence de A et B.

3. Inclusion, ensemble des parties, complémentaire.

L'inclusion est une relation binaire entre ensembles qui est définie par
$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$
Lorsque $A \subset B$ on dit que A est contenu dans B ou que A est un sous-ensemble de B ou que A est une partie de B ou que B contient A.

L'inclusion est une relation d'ordre c'est à dire qu'elle vérifie

(1) $A \subset A$,
(2) $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$,
(3) $A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

En quelque sorte l'inclusion est une demi égalité.

A partir de l'inclusion et d'un ensemble E on fabrique un nouvel ensemble qui est l'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$:
$$\mathcal{P}(E) = \{A \ : \ A \subset E\}$$
de sorte que, par définition,
$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$
Par exemple $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

On définit enfin, pour une partie A de E son complémentaire dans E :
$$E \setminus A = \{x \ : \ x \in E \ et \ x \notin A\}$$
c'est donc la différence de E et A. D'autres notations sont utilisées comme $\bar{A}$ ou A^c lorsque le contexte "dans E" est sous-entendu. Il faut faire attention au fait que le complémentaire d'un ensemble n'existe pas. On ne dispose que du complémentaire d'une partie d'un ensemble plus grand.

4. Algèbre des sous-ensembles.

A, B, C sont des sous-ensembles d'un même ensemble E. Les complémentaires sont pris dans E. On a

(1) $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$,
(2) $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$,
(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup) B \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap) B \cap C$,
(4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(5) $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(6) $(A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A)$ et $(A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B)$,
(7) $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$,
(8) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
(9) $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$.

Il est bon, pour s'y retrouver dans toutes ces propriétés, d'utiliser des patatoïdes ...