Exercices de TD

IMPORTANT :
Les exercices dont l'intitulé est souligné sont des exercices de révision ou des applications directes de notions nouvelles vues en cours. Ils demandent parfois un peu de calcul. Ils doivent impérativement être préparés avant la séance de TD.

Géométrie 2D

Dans la suite $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

<u>Exercice</u> 1. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point de coordonnées $(2, -1)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{j} - \overrightarrow{i}$.

1) Déterminer une équation paramétrique, une équation cartésienne puis une équation en coordonnées polaires de $\mathcal{D}$.
2) Calculer l'angle entre $\mathcal{D}$ et l'axe des abscisses.
3) Calculer la distance de $\mathcal{D}$ au point M de coordonnées $(5, 3)$.
4) Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{D}$.
5) Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le cercle de centre M et de rayon 5.

Exercice 2. Que représentent géométriquement (dans le plan identifié au champ complexe) les transformations suivantes :

$$z \mapsto e^{i\theta}.z, \text{ où } \theta \text{ un réel donné}; \quad z \neq 0 \longmapsto \frac{1}{\bar{z}} \cdot$$

<u>Exercice</u> 3. Soit A le point de coordonnées $(1, 1)$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des points du plan dont la distance à l'axe $(0x)$ est égale à la distance au point A.

1) Donner une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{B}$.
2) Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $y - \frac{1}{2} = (x-1)^2/2$.
3) Soit O' le point de coordonnées $(1, 1/2)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère le nouveau repère $(O'; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Exprimer les formules de changement de repère (on notera (x, y) les coordonnés dans l'ancien repère et (x', y') celles dans le nouveau).
4) Exprimer l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{B}$ dans le nouveau repère. Tracer l'ensemble $\mathcal{B}$ et préciser sa nature géométrique.

Exercice 4. Soit A le point de coordonnées $(1, 1)$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points du plan dont la distance à l'axe $(0y)$ est égale à $\sqrt{2}$ fois la distance au point A.

1) Donner une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{C}$.
2) Soit O' le point de coordonnées $(2, 1)$. Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O'; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3) Proposer une équation paramétrique simple de $\mathcal{C}$.
4) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie. Tracer $\mathcal{C}$.

Exercice 5. *(Plus difficile).* Soient $a > b > 0$ et $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On rappelle que ses foyers sont les points de coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, où c est le nombre positif déterminé par la relation $a^2 = b^2 + c^2$.

1) Vérifier que la somme des distances d'un point de $\mathcal{E}$ aux deux foyers est constante. On pourra utiliser la représentation paramétrique de $\mathcal{E}$

2) Déterminer l'équation de la droite tangente à $\mathcal{E}$ en un point $P = (x_0, y_0)$ de $\mathcal{E}$.

Géométrie 3D

Exercice 6. *Révisions des acquis du L1* .Calculer les déterminants suivants (pour le dernier on pourra tirer parti de la structure "triangulaire inférieure par blocs") :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Exercice 7. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives $x + y + z = 5$, $x - 2y - 3z = -1$ et $2x + y - z = 3$.

Exercice 8. *Contrôle des acquis de base sur la géométrie en dimension 3.*

1) Déterminer l'écart angulaire entre les deux vecteurs suivants de l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Donner un vecteur directeur, puis une équation paramétrique, de la droite intersection des plans d'équations cartésiennes suivantes :

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 3. \end{aligned}$$

3) — Calculer l'aire du parallélogramme et celle du triangle de côtés les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

— Calculer le volume du parallélépipède de côtés les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

4) — Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les trois points que voici :

$$A = (0,1,0), \quad B = (2,3,1), \quad C = (5,7,2).$$

— Quelle est la distance du point $P = (1,2,3)$ à ce plan ?
— Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).

Exercice 9. On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ le plan $\mathcal{P}$ et la partie Σ de $\mathcal{P}$ de définitions cartésiennes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \ &: \ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1\} \ ; \\ \Sigma \ &: \ = \{(x,y,z) \in \mathcal{P} : x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}. \end{aligned}$$

1) Représenter graphiquement $\mathcal{P}$ et Σ.

2) — Déterminer la projection orthogonale de l'origine O sur le plan $\mathcal{P}$.
— En déduire que le point trouvé est aussi le point de Σ à distance minimale de O.
— Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite (de l'espace) passant par $A_1 = (1,0,0)$ et dirigée par $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{D}_2$ la droite passant par $A_2 = (0,0,0)$ et dirigée par $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On admet l'existence et l'unicité d'une droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

1) Donner un vecteur $\vec{v}$ dirigeant Δ.

2) Déterminer $H_1 \in \mathcal{D}_1$ et $H_2 \in \mathcal{D}_2$ de sorte que $\overrightarrow{H_1H_2}$ soit parallèle à $\vec{v}$.
(*Indication.* On prendra H_1 tel que $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA_1} + \lambda_1 \vec{u}_1$, H_2 tel que $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA_2} + \lambda_2 \vec{u}_2$, et on déterminera λ_1 et λ_2 de sorte que $\overrightarrow{H_1H_2}$ soit parallèle à $\vec{v}$.)

3) Déduire de ce qui précède la distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$.

Exercice 11. *Le théorème de Pythagore en 3D.* On considère un tétraèdre $OABC$ tri-rectangle en O, avec $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\,\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = c\,\vec{k}$, où a, b, c sont des quantités strictement positives. Il y a ainsi trois "faces triangles rectangles" OAB, OAC, OBC et une "face hypoténuse" ABC.

1) Quelle est l'équation cartésienne du plan passant par A, B et C ?

2) Déterminer l'aire de ABC de deux façons différentes :
— en utilisant le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
— en calculant le volume du tétraèdre, la distance de O à la face hypoténuse ABC, et en en déduisant l'aire de ABC.

3) Déduire de ce qui précède le beau résultat suivant :

$$(\text{Aire } ABC)^2 = (\text{Aire } OAB)^2 + (\text{Aire } OAC)^2 + (\text{Aire } OBC)^2.$$

Algèbre, matrices

Exercice 12. *Révision du calcul matriciel vu en L1.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2, A^3, puis $A^3 - 3A^2 - 2A$.

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3) Résoudre en x, y, z le système linéaire suivant (a, b, c sont des scalaires quelconques) :

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y - z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ -x - 2y - z = c \end{array} \right.$$

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B de taille 2×2 telles que $AB = BA$.

Exercice 14. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 0$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ d'un point de coordonnées (a, b, c). En déduire la matrice, dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

Exercice 15. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble d'équation cartésienne $xy = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On introduit une nouvelle base formée par les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Exprimer la matrice de passage P de l'ancienne vers la nouvelle base, ainsi que les formules de changement de coordonnées. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 16. Soit A et P deux matrices carrées de taille n. On suppose que P est inversible et on pose $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\det(B) = \det(A)$, puis l'égalité entre polynômes caractéristiques $\chi_B = \chi_A$.

Exercice 17. Calculez les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes. Lorsque c'est possible, diagonalisez-les.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 7,3 & 0,2 & -3,7 \\ -11,5 & 1 & 5,5 \\ 17,7 & 1,8 & -9,3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice A représente une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même (ou de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même), les espaces en question étant repérés par la base canonique $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1) Montrer que A n'a pas de valeurs propres réelles ni de vecteurs propres de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et trouver une base de $\mathbb{C}^2$ constituée de vecteurs propres de A. En déduire une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

3) Déduire des calculs précédents une procédure permettant de déterminer A^p, où p est un entier relatif quelconque.

Exercice 19. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n.
2) En déduire l'expression des termes généraux des suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$$

Exercice 20. *Pour éviter de croire que l'on peut "prendre la racine carrée d'une matrice"* Déterminer toutes les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $A^2 = I_2$. Parmi toutes les solutions obtenues décrire en détail celles qui vérifient $b = c$; que sont les applications linéaires associées ?

Exercice 21. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On commencera par diagonaliser la matrice de droite.

Exercice 22.

1) Les matrices ci-dessous sont-elles symétriques, antisymétriques ou orthogonales ?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2) Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont hermitiennes ou antihermitiennes.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{pmatrix}; \; M_2 = \begin{pmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{pmatrix}; \; M_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

3) Y a-t-il des matrices antisymétriques orthogonales $(3, 3)$?

Exercice 23. Soit $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta \, \overrightarrow{i} + \sin\theta \, \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v(\theta)} = -\sin\theta \, \overrightarrow{i} + \cos\theta \, \overrightarrow{j}$.

1) Vérifier que $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ est une base orthonormée du plan (vectoriel).
2) En déduire que la matrice $P_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est orthogonale.
3) Montrer que $P_\theta \overrightarrow{u(\alpha)} = \overrightarrow{u(\theta + \alpha)}$. A quelle transformation géométrique correspond P_θ ?
4) Calculer le produit $P_\theta . P_\varphi$ puis $(P_\theta)^{-1}$. Interpréter géométriquement les résultats.
5) *(Plus difficile).* Déterminer toutes les matrices orthogonales de taille $(2, 2)$. On pourra distinguer les matrices de déterminant 1 et celles de déterminant -1. Signification géométrique de ces objets ?

Exercice 24. Si c'est possible, trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres pour

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $A^2 = I_n$. Montrer que ses valeurs propres ne peuvent valoir que 1 ou -1. En déduire que si $A^2 = I_n$ **et** A est symétrique et semi-définie positive, alors nécessairement $A = I_n$.

Exercice 26. Exprimer la matrice symétrique associée à chacune des formes quadratiques suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur nature :

$$q_1(x,y) = x^2 + 3y^2, \quad q_2(x,y) = -7y^2, \quad q_3(x,y) = 6xy,$$
$$q_4(x,y) = -5x^2 + 4xy - 2y^2, \quad q_5(x,y) = -y^2 + x^2 + 2xy, \quad q_6(x,y) = (x-3y)^2$$
$$q_7(x,y,z) = x^2 + 3y^2, \quad q_8(x,y,z) = x^2 + (x+y)^2 + (y+z)^2.$$

Exercice 27. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto q(x,y) := 3x^2 + 2xy + y^2.$$

1) a) Ecrire $q(x,y)$ sous forme $X^T A X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et A est une matrice symétrique $(2,2)$.
   b) Exprimer le vecteur gradient $\overrightarrow{\nabla} q(x,y)$ ainsi que la matrice hessienne (ou des dérivées secondes) $\nabla^2 q(x,y)$ en fonction de A et de X.
2) a) Que signifie “la forme quadratique q (ou bien la matrice A) est définie positive” ?
   b) Montrer, sans calcul, que la forme quadratique q est définie positive.
3) a) Que peut-on dire, sans calcul, des valeurs propres de A ? du caractère diagonalisable ou pas de A ? On désigne par λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 < \lambda_2$, les valeurs propres de A.
   b) Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$.
   c) Modifier P afin d'obtenir une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$.
   d) On opère le changement de variables $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Exprimer la forme quadratique q en fonction des nouvelles variables u et v.
   e) Exprimer en fonction des coordonnées (u,v) l'équation de l'ensemble $\mathcal{F}$ dont l'équation (dans le repère initial) est $q(x,y) = 1$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une ellipse, préciser la longueur de son grand axe et de son petit axe.

Exercice 28. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.

1) Décrire la matrice A associée à cette forme quadratique.
2) Quelle est la nature (définie positive, définie négative ou autre) de la forme quadratique f ? On pourra répondre à cette question en calculant quelques valeurs particulières, comme $f(1,-1,0)$...
3) Trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres pour A.
4) Exprimer la forme quadratique dans cette nouvelle base.
5) En vous plaçant dans la nouvelle base, décrivez la nature géométrique de l'ensemble d'équation $f = 0$.

Exercice 29. Soient r, s, t trois nombres réels. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$

$$q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

1) En écrivant pour $y \neq 0$, $q(x,y) = y^2 \left(r \left(\frac{x}{y} \right)^2 + 2s \left(\frac{x}{y} \right) + t \right)$ et en utilisant les résultats classiques sur le signe d'un trinôme, montrer que si $r > 0$ et $rt - s^2 > 0$ alors q est définie positive.
2) Retrouver le résultat précédent en étudiant les valeurs propres de la matrice associée à q.

Fonctions de plusieurs variables

<u>Exercice</u> 30. *Contrôle des acquis de base du Cours ; questions indépendantes.*

1) — On note z la fonction de deux variables x et y que voici : $z(x,y) = e^{-ax}\sin(ay)$, où a est un nombre réel donné. Vérifier que $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a\frac{\partial z}{\partial x}$.
   — Si $z = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y^a}$, déterminer la valeur du réel strictement positif a telle que $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x}$.

2) Une fonction f de deux variables x et y est dite *harmonique* si elle satisfait *l'équation de* Laplace, à savoir $\Delta f = 0$ (où $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ désigne le *laplacien* de f). Vérifier que les fonctions suivantes sont harmoniques (a est une constante réelle) :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3y - xy^3 \ ; \ f(x,y) = \ln(ax^2 + ay^2) \ ; \\ f(x,y) &= \arctan(\frac{x}{y}) \ ; \ f(x,y) = e^{-ay}\cos(ax). \end{aligned}$$

3) Vérifier que les fonctions suivantes satisfont *l'équation des ondes* (en 1D), à savoir l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (a est une constante réelle) :

$$u(x,t) = \sin(x+at)\,;\, u(x,t) = \sin(bx)\sin(ct),\ \text{où}\ \frac{c}{b} = a\,;\, u(x,t) = e^{x+at}.$$

Exercice 31. Une plaque circulaire dont le centre est situé à l'origine est chauffée à chacun de ses points. La température (en degrés Celsius) en un point de coordonnées (x,y) est donnée par $T(x,y) = \frac{100}{x^2+y^4+4}$.

1) — Quelle est la température au point $(1,1)$?
   — Sans faire appel au calcul différentiel, expliquez pourquoi la température maximale sur la plaque est de 25°C. A quel point cette température maximale est-elle atteinte ?

2) Au point $(2,-1)$, dans quelle direction la température augmente-t-elle le plus rapidement ?

3) Un insecte se déplace sur la plaque de façon à suivre un trajet qui assure une baisse de température la plus rapide. Dans quelle direction doit-il se déplacer si au départ il n'est pas situé à l'origine ?

4) A l'instant t, l'insecte est au point de coordonnées $(x(t), y(t))$. Exprimer (en fonction des dérivées partielles de T qu'il n'est pas demandé de calculer) la dérivée en temps de la température ressentie par l'insecte.

Exercice 32. *(Plus difficile)*

Soit $\Omega = \{(x,y) : x \text{ et } y \text{ strictements positifs}\}$, et f une fonction numérique deux fois continûment différentiable sur Ω. En passant en coordonnées polaires, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, la valeur $f(x,y)$ est réexprimée comme une fonction g de r et θ.

1) Evaluez le laplacien Δf de f en fonction des dérivées partielles (premières ou secondes) de g. *Indication* : On commencera par montrer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos\theta \ ; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta \ ; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \ ; \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}$$

2) Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer le laplacien de la fonction f définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + (\arctan\frac{y}{x})^2$.

Exercice 33. Soit f la fonction de deux variables x et y définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + kxy$, où k est un paramètre réel différent de 2 et de -2.

1) Montrer que le point $(0,0)$ est un point critique (ou stationnaire) de f, quelle que soit la valeur de k.
2) Déterminer suivant k la nature du point critique $(0,0)$.
3) On suppose maintenant que $k = 1$. Donner le développement de Taylor d'ordre 2 de f au point $(1,0)$.

Exercice 34. Soit f la fonction de deux variables x et y définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

1) Expliquer succinctement pourquoi f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et donner le développement de Taylor–Young à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.
2) Déterminer tous les points critiques de f, leur nature, et montrer que les extrema (ou optima) locaux sont globaux.

Exercice 35. Soit $\overrightarrow{F}$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x - xy \\ xy \end{pmatrix}$. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

1) Déterminer l'image Ω'de Ω par $\overrightarrow{F}$.
2) — Montrer que $\overrightarrow{F}$ établit une bijection de Ω sur Ω', et déterminer sa bijection inverse, notée $\overrightarrow{G}$.
   — Calculer la matrice jacobienne de $\overrightarrow{F}$ en un point de Ω, ainsi que celle de $\overrightarrow{G}$ en un point de Ω'.

Exercice 36. Soit $\overrightarrow{F}$ la fonction vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un point de coordonnées (x,y,z) fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 - e^y \\ \sin(z) \\ y^2 + z \end{pmatrix}$.

Calculer (le scalaire) $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$ et (le vecteur) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \overrightarrow{F}$ en tout point (x,y,z).

Exercice 37. Soit $\overrightarrow{F}$ la fonction vectorielle de trois variables x,y,z dont les fonctions composantes sont : $f_1(x,y,z) = y^2\sin(xz)$; $f_2(x,y,z) = e^y\cos(x^2+z)$; $f_3(x,y,z) = \ln(2+\cos(xy))$.

Calculer les gradients de chacune de ces fonctions composantes, la divergence de $\overrightarrow{F}$ et le rotationnel de $\overrightarrow{F}$.

Exercice 38. *Formules générales d'Analyse vectorielle.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soient f et g deux fonctions numériques continûment différentiables sur Ω. Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux applications de Ω dans $\mathbb{R}^3$ supposées continûment différentiables.

1) Etablir les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f.\overrightarrow{F}) &= \langle \overrightarrow{\nabla f}, \overrightarrow{F} \rangle + f.\operatorname{div}(\overrightarrow{F}), \\
\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f.\overrightarrow{F}) &= \langle \overrightarrow{\nabla f} \wedge \overrightarrow{F} \rangle + f.\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{F}), \\
\operatorname{div}(\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{G}) &= \langle \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G} \rangle - \langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{G} \rangle.
\end{aligned}$$

2) On suppose maintenant que f et g sont deux fois continûment différentiables. Montrer

$$\operatorname{div}(f.\overrightarrow{\nabla g}) = f.\Delta g + \langle \overrightarrow{\nabla f}, \overrightarrow{\nabla g} \rangle \quad .$$

En déduire

$$\operatorname{div}(f.\overrightarrow{\nabla g}) - \operatorname{div}(g.\overrightarrow{\nabla f}) = f.\Delta g - g.\Delta f \quad .$$

Intégrales curvilignes, intégrales doubles

Exercice 39. La rampe métallique le long du premier tour du parking des Carmes à Toulouse est assimilée à une courbe Γ paramétrée de la façon suivante :

$$t \in [0, 2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 4\sin t \\ 3t \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer la longueur de cette rampe (en unités de longueur, non explicitées ici).
2) On suppose que la densité de masse de la rampe est constante. Déterminer alors les coordonnées du centre de gravité de cette rampe.
3) Esquisser Γ.

Exercice 40. *Calculs simples d'intégrales curvilignes. Deux questions indépendantes.*

1) Soit $\overrightarrow{F} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \overrightarrow{F}(x, y) := \begin{pmatrix} xy \\ y^2 - x \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{\gamma} : t \in [0, 1] \longmapsto \overrightarrow{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$ paramétrant la courbe Γ du plan. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{d\gamma} \rangle$.
2) Même question avec $\overrightarrow{F} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \overrightarrow{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \cos(z) \\ e^x \\ e^y \end{pmatrix}$, et

   $\overrightarrow{\gamma} : t \in [0, 4] \longmapsto \overrightarrow{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ e^t \end{pmatrix}$ paramétrant la courbe Γ de l'espace.

Exercice 41. Calculer les intégrales

1) $I_1 = \displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ avec γ le segment orienté (vers le haut) $y = x$ et $1 \le x \le 2$.
2) $I_2 = \displaystyle\int_{\mathcal{E}^+} y\,dx - x\,dy$ avec $\mathcal{E}^+$ l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcourue dans le sens direct.

Exercice 42. Soit $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - a^2 = 0 \text{ et } x + y - z = a\}$. Trouver un paramétrage de Γ puis calculer la circulation du champ vectoriel $\overrightarrow{V} = (yz, -xz, 0)$ le long de Γ (orienté par ce paramétrage).

Exercice 43. *Fonction vectorielle dérivant d'une fonction potentiel scalaire.*

$$\text{Soit } \overrightarrow{F} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \overrightarrow{F}(x, y) := \begin{pmatrix} 3x^2y + 2x \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

1) Indiquer pourquoi $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel φ sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les fonctions $\varphi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ pour lesquelles $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla\varphi}$ sur $\mathbb{R}^2$.
3) Calculer la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de l'arc Γ donné par $\overrightarrow{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, avec $t \in [0, 1]$.

Exercice 44. Calculer $\displaystyle\iint_D x(2x^2 + y^2)\,dxdy$ où $D = \{(x, y);\ x \in [0, 1] \text{ et } 0 \le y \le x^2\}$.

Exercice 45. Soit $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, où $0 < a \leq b$; c'est la partie du plan délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Déterminer l'aire de E, c'est-à-dire calculer l'intégrale double $\iint_E 1 \; dxdy$.
Indication. On fera ce calcul de deux façons différentes : par intégrations simples successives ; par un changement de variables $u = \frac{x}{a}$, $v = \frac{y}{b}$ (dans ce dernier cas, on obtiendra que l'élement différentiel $dxdy$ devient $ab.dudv$).

Exercice 46. On pose, pour tout nombre $R \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} I_R &= \iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \\ J_R &= \iint_{\Delta_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \text{ où } \Delta_R = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq R^2\}. \end{aligned}$$

1) Calculer J_R en passant aux coordonnées polaires.
2) Comparer I_R, J_R et $J_{R\sqrt{2}}$.
3) En déduire que $\int_0^R e^{-x^2} dx$ a une limite quand $R \to +\infty$ (notée $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$). Calculer cette limite.

Exercice 47. On considère l'ensemble $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ;\ 1 \leq x+y \leq 2\}$.
1) Montrer que l'application $T : [0,1] \times [1,2] \to \Delta$ définie par $T(u,v) = \big(uv, v(1-u)\big)$ est une bijection. Calculer son Jacobien.
2) Utilisez le changement de variable $(x,y) = T(u,v)$ pour calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_\Delta \frac{e^{\frac{x}{x+y}}}{x+y} \, dxdy.$

Exercice 48. *Illustration simple du théorème de* GREEN.
Soit $\mathcal{R}$ la région du plan définie par $\mathcal{R} := \{(x,y\} : x^2+y^2 \leq 1\}$ et
$\overrightarrow{\gamma} : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ une paramétrisation de sa frontière Γ. On considère le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{F} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \overrightarrow{F}(x,y) := \begin{pmatrix} P(x,y) = xy \\ Q(x,y) = y^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer directement $\oint_\Gamma \langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{d\gamma} \rangle$ et $\iint_{\mathcal{R}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \; dxdy$.

Exercice 49. On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point fixe P situé sur un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur une droite. Les coordonnées paramétriques de la cycloïde sont données par :

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \overrightarrow{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{pmatrix}.$$

On considére dans la suite une arche de cycloïde, $C := \big\{\overrightarrow{\gamma}(t) : t \in [0, 2\pi]\big\}$.
1) Calculer la longueur de l'arche de cycloïde C.
2) On suppose que la densité de masse de l'arche est constante. Déterminer le centre de gravité $G = (\overline{x}_G, \overline{y}_G)$ de cette arche.
3) Soit $\mathcal{R}$ la région du plan délimitée par l'axe des x et l'arche de cycloïde C, de bord Γ (Γ^+ signifiera Γ orienté dans le sens direct (ou positif)). Montrer à l'aide de la formule de GREEN que l'aire de $\mathcal{R}$ vaut

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = -\int_{\Gamma^+} y \; dx = \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) \; dt.$$

Calculer alors $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Intégrales de surfaces et de volume

Exercice 50. On désigne par Σ la surface d'équation $z = f(x,y) := x^2 - y^2$ (forme dite *explicite* de l'équation d'une surface).

1) a) Esquisser Σ.

   b) Déterminer un vecteur normal (non nul) $\overrightarrow{N}(P_0)$ à Σ au point $P_0 = (1,1,0)$ de Σ.

   c) Déterminer une équation du plan tangent à Σ en P_0.

2) Soit S la surface d'équation (*implicite*) $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$.

   a) Qu'est-ce-que S ?

   b) Déterminer un vecteur normal (non nul) à S au point $P = (x,y,z)$ de S.

   c) Trouver les points en lesquels Σ coupe S perpendiculairement (c'est-à-dire les plans tangents à Σ et à S en ces points de $\Sigma \cap S$ sont perpendiculaires).

<u>Exercice</u> 51. On considère un solide en forme de tore (= chambre à air) construit de la manière suivante : un disque de rayon b tourne autour de l'axe Oz, de sorte que le centre du disque suive un cercle du plan Oxy de centre O et de rayon a ($a > b$).

Une paramétrisation de cette surface torique (notée T) est :

$$(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} (a + b\cos(v)).\cos(u) \\ (a + b\cos(v)).\sin(u) \\ b\sin(v) \end{pmatrix}.$$

1) Représenter schématiquement T. Que représentent u et v dans cette paramétrisation ?

2) Calculer $\frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial v}$, $\left\| \frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial v} \right\|$. En déduire l'aire de T.

Exercice 52. Déterminer l'aire de la partie du cylindre d'équation $x^2 + z^2 = r^2$ découpée par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = r^2$.

Indication : Faire une esquisse de la surface obtenue (l'étape la plus importante !), et s'en tenir, pour des raisons de symétrie, à la partie située dans l'orthant positif $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

<u>Exercice</u> 53. Soit $(u,v) \in [0,2] \times [0,3] \longmapsto \overrightarrow{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ v \end{pmatrix}$ la paramétrisation d'une surface Σ, et $\overrightarrow{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 3z^2 \\ 6 \\ 6xz \end{pmatrix}$ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Calculer le flux du champ $\overrightarrow{F}$ à travers la surface Σ.

Exercice 54. Déterminer le volume du solide délimité par *l'ellipsoïde* d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

- par la technique d'intégration par couches successives,
- par la technique du changement de variables.

Exercice 55. Soit Σ la sphère de centre O et de rayon r, paramétrée par longitude et latitude. Soit $\overrightarrow{F} : (x,y,z) \longmapsto \overrightarrow{F}(x,y,z) := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Qu'exprime le théorème de la divergence dans ce cas particulier ?
- Retrouver par ce biais l'expression du volume de la sphère de rayon r.

Exercice 56. Un ouvrage de génie civil de type silo à grains a la forme d'un solide délimité par les trois surfaces que voici :

- le plan horizontal d'équation cartésienne $z = 0$;
- le cylindre d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 9$;
- la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Le solide lui-même est l'ensemble

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}.$$

On désigne par Σ la calotte sphérique de S (ou le toit du silo),

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 + z^2 = 25\}.$$

L'unité de base est le mètre.

1) Esquisser S et Σ.

2) - Donner une équation cartésienne, sous forme explicite, de Σ, c'est-à-dire une équation de la forme $(x, y) \in D \longmapsto z = f(x, y)$, où le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et la fonction f sont à déterminer.
   - Calculer la hauteur de la paroi latérale de S.

3) Calculer le volume V de S.

4) Un couvreur doit poser une fine protection métallique sur Σ, il lui faut donc en connaître l'aire. Aidez-le à préparer son devis en calculant l'aire $\mathcal{A}$ de Σ.
   Indication : par symétrie, on limitera les calculs à la partie de la base (domaine d'intégration) située dans l'orthant positif $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.