UNIVERSITÉ PAUL SABATIER – ANNÉE 2008-2009
MASTER $1^{\text{ère}}$ année – 1M72MFM Probabilités et Statistique

Exercices de TD

1 Tribus, fonctions mesurables

Exercice 1. Soit E une partie d'un ensemble Ω. Déterminer la tribu sur Ω engendrée par les parties de E.

Exercice 2. Pour un ensemble $B \subset \mathbb{R}^2$ on note $B^0 := \{x \in \mathbb{R};\ (x,0) \in B\}$ la section horizontale de B passant par l'origine vue comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Montrer que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ alors $B^0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Indication: on pourra montrer que $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2);\ B^0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^2$ qui contient les ouverts.

Exercice 3. Montrer en détail que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que l'ensemble $\big\{\omega \in \Omega;\ \big(X_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\big\}$ est mesurable.
2. Montrer que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = \lim_n X_n(\omega)$ si la limite existe et 0 sinon, est une variable aléatoire.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. On munit l'espace d'arrivée de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Décrire la tribu $\sigma(f)$ engendrée par f.
2. Montrer qu'elle coincide avec l'ensemble des parties boréliennes de $\mathbb{R}^2$ qui sont invariantes par les rotations (linéaires).

Exercice 6. Pour $i = 1$ ou 2 on considère un espace mesurable $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. On considère les applications projections $\pi_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_1$ et $\pi_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2$ définies par $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ et $\pi_2(x_1, x_2) = x_2$. Montrer que

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\pi_1, \pi_2).$$

Exercice 7. On définit pour $1 \leq k \leq n$, $S_k := X_1 + \cdots + X_k$. Démontrer que

$$\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, \ldots, S_n).$$

Exercice 8. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la suite de tribus $\big((\sigma(\min(T,n))\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 9. Soit φ une application mesurable de $(E, \mathcal{B})$ dans lui-même. Soit $f : \Omega \to (E, \mathcal{B})$.

1. Montrer que $\sigma(\varphi \circ f) \subset \sigma(f)$.
2. Montrer que s'il existe une application ψ de $(E, \mathcal{B})$ dans lui-même, mesurable et telle que pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$, $\psi(\varphi(x)) = x$ alors
$$\sigma(\varphi \circ f) = \sigma(f).$$
Indication: $\psi \circ \varphi \circ f = f$.

3. On suppose que $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, montrer que $\sigma(f+1) = \sigma(f^3) = \sigma(\arctan f) = \sigma(f)$.
4. On suppose que $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que l'image de f est incluse dans $[0, a]$ pour un $a > 0$. Pour quelles valeurs de a peut-on conclure que $\sigma(f) = \sigma(\cos(f))$?

Exercice 10. Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. On considère une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ d'applications d'un ensemble A à valeurs dans E. On munit A de la tribu $\mathcal{A} := \sigma\big((\varphi_i)_{i\in I}\big)$, qui est la plus petite tribu sur A qui rend toutes les φ_i mesurables de A dans $(E, \mathcal{E})$. Soit $f : F \to A$. Montrer que $f : (F, \mathcal{F}) \to (A, \mathcal{A})$ est mesurable si et seulement si pour tout $i \in I$, $\varphi_i \circ f : (F, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ est mesurable.

Exercice 11. On note $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. On le munit de la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les applications

$$\begin{array}{cccc} \varphi_g : & \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}) & \to & \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \\ & \mu & \mapsto & \int g\, d\mu, \end{array}$$

pour toutes les fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées.

1. Montrer que l'application de $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ dans $\big(\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}), \mathcal{B}\big)$ qui à x associe δ_x est mesurable.
2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour $\omega \in \Omega$ on définit la mesure empirique
$$\mu_n^\omega = \frac{1}{n}\big(\delta_{X_1(\omega)} + \cdots + \delta_{X_n(\omega)}\big).$$
Montrer que c'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Soit $\mathcal{F}$ une algèbre de fonctions bornées définies sur un ensemble Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathcal{F}$ contient les fonctions constantes et que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{F}$ vérifiant $0 \le f_n \le f_{n+1} \le 1$ on a $\lim f_n \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega;\ \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 13. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On considère l'ensemble
$$\mathcal{H} := \Big\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{boréliennes bornées telles que } E\varphi(X) = E\varphi(Y)\Big\}.$$
Montrer que $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, contenant les constantes et stable par convergence monotone bornée.
2. Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ qui est stable par multiplication. Montrer que pour tout $B \in \sigma(\mathcal{C})$,
$$P_X(B) = P_Y(B).$$
On rappelle que $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ qui rend boréliennes toutes les fonctions de $\mathcal{C}$.
3. Pour $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ on définit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi_{a,b}(x) = e^{-ax^2+bx}$. Soit
$$\mathcal{C}_0 := \big\{\varphi_{a,b}\,;\ (a, b) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}\big\}.$$
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{bx}$ est $\sigma(\mathcal{C}_0)$-mesurable pour tout $b \in \mathbb{Q}$.
   (b) En déduire que $x \mapsto x$ est aussi $\sigma(\mathcal{C}_0)$-mesurable.
   (c) Que vaut $\sigma(\mathcal{C}_0)$?
4. Conclure que si pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}$,
$$E\left(e^{-aX^2+bX}\right) = E\left(e^{-aY^2+bY}\right),$$
alors X et Y ont même loi.

2 Lois de variables aléatoires, indépendance, inégalités

Exercice 14.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} (-1)^{k-1} P\big(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\big)\right).$$

2. Un bal regroupe n couples mariés. Un tirage au sort équitable attribue un cavalier à chaque dame. Calculer la probabilité pour qu'aucun couple marié ne soit reformé. Etudier la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 15. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, avec $E(X^2) < \infty$. On rappelle que la variance de X est par définition $\mathrm{var}(X) = E\big((X - EX)^2\big)$.

1. Montrer que $\mathrm{var}(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} E\big((X-a)^2\big) = \frac{1}{2}E\big((X-Y)^2\big)$.
2. Soit $q \geq 1$. Montrer que

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} E\big(|X-a|^q\big) \leq E\big(|X-EX|^q\big) \leq E\big(|X-Y|^q\big) \leq 2^q \inf_{a\in\mathbb{R}} E\big(|X-a|^q\big).$$

Exercice 16. On lance deux fois un dé non pipé et on considère les événements

- A :="On obtient un nombre pair au premier lancer"
- B :="On obtient un nombre impair au second lancer"
- C :="On obtient un résultat de même parité aux deux lancers".

Montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux par deux, mais ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 17.

1. *Loi de Bernoulli.* Soit $p \in [0,1]$ et $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \{0,1\}$ une variable aléatoire telle que

$$P(X = 1) = p.$$

   Calculer $E(X)$, $\mathrm{var}(X)$.

2. *Loi binômiale.* Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes, dont la loi commune est la loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer la loi, l'espérance et la variance de $X_1 + \ldots + X_n$.
3. *Loi de Poisson.* Soit $\lambda > 0$. Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire telle que

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

   Calculer $E(X)$, $\mathrm{var}(X)$.

4. *Loi Géométrique.* Soit $0 < a < 1$. Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire telle que

$$P(X = k) = (1 - a)a^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Calculer $E(X)$, $\mathrm{var}(X)$.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction

$$G_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)z^k$$

est appelée fonction génératrice de X.

1. Montrer que G_X est définie pour $|z| < 1$.
2. Montrer que si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui a la même fonction génératrice que X alors Y a même loi que X.
3. Montrer que si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
4. Calculer la fonction génératrice des lois étudiées dans l'exercice précédent. En déduire la loi d'une somme de variables aléatoires de Poisson indépendantes.

Exercice 19.

1. Soient $p, q \in]0, 1[$ et X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de lois de Bernoulli de paramètres p et q. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si elles sont non-corrélées.
2. Construire trois variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ qui soient non-corrélées sans être mutuellement indépendantes. Indication: on pourra considérer d'abord des variables ε_1 et ε_2 indépendantes et de loi $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$, ainsi que leur produit $\varepsilon_1\varepsilon_2$.

Exercice 20. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer la loi de

$$\frac{\max(U, 1 - U)}{\min(U, 1 - U)}.$$

Exercice 21.

1. On pose $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$.
   (a) Montrer que $\Gamma(a)$ est définie si et seulement si $a > 0$.
   (b) Montrer que pour $a > 0$, $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètre $a > 0$, $b > 0$ (notée $\gamma(a, b)$), si elle admet pour densité sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}.$$
   Vérifier que f est une densité de probabilité. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $\gamma(a_1, b)$ et $\gamma(a_2, b)$. On pose $S = X + Y$ et $T = X/S$.
   (a) Déterminer la loi de (S, T).

(b) On pose $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$. Montrer que $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

(c) Une variable aléatoire V suit une loi Béta de paramètre a, b si elle admet pour densié sur $[0,1]$:

$$f(v) = \frac{1}{B(a,b)} v^{a-1}(1-v)^{b-1}.$$

Calculer son espérance et sa variance.

(d) Montrer que S et T sont indépendantes et préciser leurs lois.

(e) Déterminer la loi de X/Y. Quelle est son espérance?

3. Soit X une gaussienne centrée réduite. On pose $U = X^2$. Déterminer la densité de U et montrer que U est une loi Gamma dont on déterminera les paramètres. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 22. Soit $p > 0$. On considère une variable aléatoire réelle X de loi $\gamma(p,1)$ c'est-à-dire telle que

$$dP_X(x) = x^{p-1}e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}\frac{dx}{\Gamma(p)}.$$

On rappelle que $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ vaut $(p-1)!$ si $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Calculer la transformée de Laplace de X.

2. Soit Y une variable aléatoire de loi $\gamma(q,1)$ et indépendante de X. En utilisant la question précédente démontrer que $X+Y$ suit une loi γ dont on précisera les paramètres.

3. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi exponentielle

$$dP_{X_i}(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}dx.$$

Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.

4. Pour $t \geq 0$, on introduit la variable aléatoire

$$N(t) = \text{card}\{i;\ X_1 + \cdots + X_i \leq t\}.$$

Calculer $P(N(t) \geq k)$ pour k entier, puis montrer que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre t.

Exercice 23. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes et de même loi.

1. Exprimer la fonction de répartition de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ en fonction de celle de X_1.

2. Même question avec $\min(X_1, \ldots, X_n)$.

3. Calculer explicitement la loi de ces variables lorsque les (X_i) suivent une loi

   (a) uniforme sur $[0,1]$

   (b) exponentielle

   (c) uniforme sur $\{1,2,3\}$.

Exercice 24. Soit X une variable aléatoire réelle. On note P_X sa loi, Φ_X sa fonction caractéristique et F_X sa fonction de répartition.

On note A l'ensemble des atomes de sa loi, $A := \{a \in \mathbb{R};\ P(X=a) > 0\}$.

1. (a) Soit $b \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Calculer $\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\Phi_X(t)\,dt$ en fonction de P_X et en déduire que

$$P_X(\{b\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\Phi_X(t)\,dt.$$

   (b) Soit Y une v.a.r. indépendante de X et de même loi. En utilisant la question précédente, montrer que

$$P(X-Y=0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\Phi_X(t)|^2 dt.$$

   (c) En déduire que

$$\sum_{a\in A} P(X=a)^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\Phi_X(t)|^2 dt.$$

2. (a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $T > 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\Phi_X(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin\big(t(x-a)\big)}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin\big(t(x-b)\big)}{t}dt \right) P_X(dx).$$

   (b) Montrer que $\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt \in]0,+\infty[$. On admettra pour la suite que cette limite vaut $\frac{\pi}{2}$. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin(tx)}{t}dt = \frac{\pi}{2}\mathrm{signe}(x),$$

   où $\mathrm{signe}(x) = 1$ si $x > 0$, $\mathrm{signe}(x) = -1$ si $x < 0$ et $\mathrm{signe}(0) = 0$.

   (c) Montrer que si $a < b$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\Phi_X(t)\,dt = P_X\big(]a,b[\big) + \frac{P_X(\{a\})+P_X(\{b\})}{2}.$$

   (d) Vérifier que si F_X est continue en a et b, on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\Phi_X(t)\,dt.$$

   Utiliser ce résultat pour donner une démonstration différente de celle du cours du fait que la donnée de Φ_X caractérise la loi de X.

Exercice 25. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes avec pour tout i, $EX_i = 0$ et $E(X_i^2) < +\infty$. On définit $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$P(|S_n| \geq x) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)}{x^2}.$$

   Dans la suite de l'exercice on va montrer un résultat plus fort:

$$P(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| \geq x) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)}{x^2}.$$

2. Pour $k \leq n$ on définit l'ensemble

$$A_k = \left\{ \max_{j<k} |S_j| < x \text{ et } |S_k| \geq x \right\}.$$

Montrer que

$$P(A_k) \leq \frac{E\left(\mathbf{1}_{A_k} S_k^2\right)}{x^2}.$$

3. Vérifier que

$$E\left(S_n^2\right) \geq \sum_{k=1}^{n} E\left(\mathbf{1}_{A_k}\left(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} E\left(\mathbf{1}_{A_k} S_k^2\right).$$

4. En déduire l'inégalité annoncée.

Exercice 26. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Par ailleurs soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes entre elles, et de même loi telle que $E\xi_i = 0$ et $E\left(\xi_i^2\right) = \sigma^2$. On suppose que les tribus $\sigma(X_i,\, i \geq 1)$ et $\sigma(\xi_i,\, i \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes. On considère la suite de variables $(Z_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{S_i}.$$

On peut interpréter Z_n comme la cueillette effectuée par un marcheur aléatoire qui se déplace suivant (S_n) et qui au site j ramasse une quantité aléatoire ξ_j. On définit les variables aléatoires N_j^n par

$$N_j^n := \operatorname{card}\left\{i \in \{1,\ldots,n\};\ S_i = j\right\}.$$

Elles correspondent au temps passé par le marcheur au site j avant l'instant n.

1. Montrer que N_j^n est indépendante des $(\xi_i)_{i\geq 1}$, et que $N_j^n = 0$ si $|j| > n$.

2. Montrer que pour $n \geq 1$ on peut écrire

$$Z_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \xi_j N_j^n,$$

et noter que la somme porte en fait sur un nombre fini d'indices.

3. En déduire que $EZ_n = 0$.

4. Montrer par la même méthode que

$$\operatorname{var}(Z_n) = \sigma^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} E\left((N_j^n)^2\right).$$

5. En écrivant $N_j^n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{S_i=j}$ et en développant le carré, montrer que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} E\left((N_j^n)^2\right) = n + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)P(S_k = 0).$$

6. Montrer que $P(S_k = 0)$ vaut 0 si k est impair et $2^{-k} C_k^{k/2}$ si k est pair. En utilisant la formule de Stirling $n! \sim_\infty \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, conclure qu'il existe des constantes $a, b > 0$ telles que pour $k \geq 2$ entier pair
$$\frac{a}{\sqrt{k}} \leq P(S_k = 0) \leq \frac{b}{\sqrt{k}}.$$

7. En déduire l'existence de constantes $c, d > 0$ telles que pour $n \geq 2$,
$$c\, n^{3/2} \leq \operatorname{var}(Z_n) \leq d\, n^{3/2}.$$
Comparer avec S_n.

3 Suites de variables indépendantes, Borel-Cantelli

Exercice 27. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres positifs qui converge vers 0. Soient X et $(X_n)_{n\geq 0}$ des v.a.r. définies sur un même espace de probabilité. Montrer que si
$$\sum_{n\geq 0} P\big(|X_n - X| \geq \varepsilon_n\big) < +\infty$$
alors p.s. $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$.

Exercice 28. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\big\{\limsup_n X_n > a\big\} \subset \limsup_n \big\{X_n > a\big\} \subset \limsup_n \big\{X_n \geq a\big\} \subset \big\{\limsup_n X_n \geq a\big\}.$$
Montrer par des contre-exemples que ces inclusions peuvent être strictes.

Exercice 29. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi. De plus on suppose que $c := E\Big(X_1^4\Big) < +\infty$. On note $m := EX_n$. On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $E\Big((S_n - nm)^4)\Big) \leq 3cn^2$. Indication: utiliser la formule du multinôme: pour $m \in \mathbb{N}$,
$$(a_1 + \cdots + a_n)^m = \sum_{q_1+\cdots+q_n=m} \frac{m!}{\prod_{i=1}^n (q_i)!} \prod_{i=1}^n a_i^{q_i}.$$
2. En déduire une majoration pour $a > 0$ de $P\big(|S_n - nm| > na\big)$.
3. Conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, presque sûrement $\dfrac{S_n}{n} - EX_1 = O\big(n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\big)$.

Exercice 30. On cherche à montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité P sur $\big(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)\big)$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, $P(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$. On suppose qu'une telle probabilité existe, et on considère la suite croissante $(p_k)_{k\geq 1}$ des nombres premiers.

1. Montrer que $P\Big(\limsup_{k\geq 1} p_k\mathbb{N}^*\Big) = 0$.
2. Montrer que les événements $p_k\mathbb{N}^*$, $k \geq 1$ sont mutuellement indépendants.

3. En utilisant que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k} = +\infty$ montrer que $P\Big(\limsup_{k\geq 1} p_k\mathbb{N}^*\Big) \neq 0$.

Exercice 31.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que la probabilité pour que la suite converge vaut 0 ou 1.
2. On suppose maintenant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi et que les X_n ne sont pas constantes.
   (a) Montrer que puisque X_1 n'est pas constante, il existe $\alpha < \beta$ tels que $P(X_1 \leq \alpha) > 0$ et $P(X_2 > \beta) > 0$. On pourra raisonner par contraposée, traduire l'énoncé en terme de la fonction de répartition et considérer $\inf\{t;\ F_{X_1}(t) = 1\}$.
   (b) Montrer que presque sûrement $\liminf_n X_n \leq \alpha$. Indication: calculer $\sum_n P(X_n \leq \alpha)$.
   (c) Montrer que p.s. $\limsup_n X_n \geq \beta$ et donc que (X_n) diverge presque sûrement.

Exercice 32. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1 - p$.

1. Soit $k \geq 1$ entier. Montrer que presque sûrement il existe une infinité de n tels que $X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{n+k-1} = 1$. En d'autres terme la suite contient une infinité de séquences de longueur k ne contenant que des 1.
2. En déduire que presque sûrement la suite (X_n) contient des séquences de 1 arbitrairement longues.
3. On considère maintenant l'événement

   $$A_n = \{\exists k;\ 2^n \leq k \leq 2^{n+1} - n \text{ et } X_{k+1} = \cdots = X_{k+n} = 1\}$$

   qu'il y ait une séquence de longueur n formée de 1 entre les indices 2^n+1 et 2^{n+1}. Étudier la probabilité de $\limsup A_n$ suivant que $p < \frac{1}{2}$ ou p$\geq \frac{1}{2}$.

   Indication: on pourra se contenter de majorer et de minorer $P(A_n)$.

4 Calcul conditionnel

Exercice 33. Soit $(X_i)_i \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}\cdot$$

On leur associe la suite de variables $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On considère la sous-tribu engendrée $\mathcal{B}_n := \sigma\big(S_i;\ 0 \leq i \leq n\big)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n = \sigma\big(X_i;\ 1 \leq i \leq n\big)$.
2. Soit $m \leq n$, calculer $E\big(S_n \,|\, \mathcal{B}_m\big)$, $E\big(S_n^2 - n \,|\, \mathcal{B}_m\big)$ et pour λ réel fixé $E\big(e^{\lambda S_n - n\log\cosh\lambda} \,|\, \mathcal{B}_m\big)$.

Exercice 34. Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ on définit la variance conditionnelle de X sachant B par

$$\mathrm{Var}\big(X|\mathcal{B}\big) := E\big(X^2|\mathcal{B}\big) - E\big(X|\mathcal{B}\big)^2.$$

Montrer que

$$\mathrm{Var}(X) = E\Big(\mathrm{Var}\big(X|\mathcal{B}\big)\Big) + \mathrm{Var}\Big(E\big(X|\mathcal{B}\big)\Big).$$

Exercice 35. Soient X, Y deux v.a.r. bornées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer les espérances conditionnelles suivantes en fonction de $E(X|Y)$:

$$E\big(X + a\,|\,Y\big), \quad E\big(X\,|\,a + Y\big), \quad E\big(XY\,|\,Y^3\big).$$

Exercice 36. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ. On définit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer sans calculs que pour $1 \le i, j \le n$ on a
$$E\left(X_i\Big|\frac{S_n}{n}\right) = E\left(X_j\Big|\frac{S_n}{n}\right).$$
2. En déduire que pour tout $i \le n$,
$$E\left(X_i\Big|\frac{S_n}{n}\right) = \frac{S_n}{n}\cdot$$
3. Évaluer pour $m \le n$
$$E\left(\frac{S_m}{m}\Big|\frac{S_n}{n}\right).$$

Exercice 37. Soit X une variable aléatoire réelle de loi à densité $P_X(dx) = f(x)\,dx$.

1. Soit h une fonction mesurable positive. Calculer $E\big(h(X)\,|\,|X|\big)$.
2. En déduire la loi conditionnelle de X sachant $|X|$.
3. Généraliser au cas où $P_X(dx) = f(x)\,dx + \sum_{i=1}^n p_i\delta_{a_i}(dx)$.

Exercice 38. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $F(x) := x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable de loi à densité $P_X(dx) = f(x)\,dx$.

1. (a) Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$.
   (b) Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé et tel que $P\big(X \in [k, k+1[\big) > 0$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{\lfloor X \rfloor = k\}$.
   (c) En déduire la loi conditionnelle de X sachant $\lfloor X \rfloor$.
2. (a) Déterminer la loi de $F(X)$. Montrer que pour presque tout $y \in [0, 1]$ (au sens de la mesure de Lebesgue),
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k + y) < +\infty.$$

(b) En utilisant $E|X| < +\infty$ montrer que pour presque tout $y \in [0,1]$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k+y| f(k+y) < +\infty.$$

(c) Calculer $E\big(X|F(X)\big)$.

(d) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $F(X)$.

Exercice 39. Soit $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ et v_n son volume. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur B_n. Calculer la loi conditionnelle de $(X_2, \ldots, X_n)$ sachant X_1.

Exercice 40. Soit X une variable aléatoire réelle et $a \in \mathbb{R}$. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $\min(X, a)$.

Exercice 41. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et tel que la loi conditionnelle de Y sachant X est donnée par

$$\mathcal{L}_{Y|X=x} = x\delta_1 + (1-x)\delta_0.$$

1. Déterminer la loi du couple (X, Y). Dessiner le support de $P_{(X,Y)}$.
2. Quelle est la loi de Y?
3. Calculer la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 42. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = 2^{-k}$ et tel que la loi conditionnelle de Y sachant X soit donnée par le noyau

$$K(x, dy) = x(1-y)^{x-1}\mathbf{1}_{0<y<1}dy.$$

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Quelle est la loi de Y?
3. Calculer la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 43. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace de probabilité. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$, et que la loi conditionnelle de Y sachant X est donnée par le noyau de transition

$$K(x, \cdot) = \mathcal{B}(x, q) = \sum_{k=0}^{x} C_x^k q^k (1-q)^{x-k}\delta_k.$$

1. Calculer la loi du couple (X, Y).
2. Montrer que Y suit encore une loi classique.

Exercice 44. Soient $p, q \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un nombre X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\delta_k$. Cette valeur de X étant connue, on tire au sort un nombre Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(X, q)$. Montrer que Y suit encore une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

5 Vecteurs gaussiens

Exercice 45. Soit (X, Y) un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, centré et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Montrer que X et Y sont proportionnels.

Exercice 46. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et ϵ une variable indépendante de X telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Montrer que ϵX suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ mais que le vecteur $(X, \epsilon X)$ n'est pas gaussien.

Exercice 47. Soit X un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ et M une matrice orthogonale. Quelle est la loi du vecteur aléatoire MX?

Exercice 48. On considère un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \theta \\ 2+\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 2+\theta \end{pmatrix}\right)$ avec $\theta \in [-1, 2]$.

1. Donner les lois de X et de Y. Que se passe t-il pour $\theta = 0$?
2. Calculer si c'est possible la densité du couple (X, Y).
3. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de sorte que $\mathbb{E}\left[(X - \alpha Y + \beta)^2\right]$ soit minimum.
4. Pour $\theta \in]-1, 2[$, calucler la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.

Exercice 49. Soient $G_1, \dots, G_n$ des variables réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit

$$\overline{G}_n := \frac{G_1 + \cdots + G_n}{n}.$$

1. Montrer que le vecteur $\left(G_1 - \overline{G}_n,\, G_2 - \overline{G}_n, \dots,\, G_n - \overline{G}_n,\, \overline{G}_n\right)$ est gaussien. Déterminer sa loi.
2. Montrer que $\overline{G}_n$ et $\left(G_1 - \overline{G}_n,\, G_2 - \overline{G}_n, \dots,\, G_n - \overline{G}_n\right)$ sont indépendants.
3. Diagonaliser la matrice de covariance de $\left(G_1 - \overline{G}_n,\, G_2 - \overline{G}_n, \dots,\, G_n - \overline{G}_n\right)$. Il sera utile d'introduire la matrice $J \in M_n(\mathbb{R})$ dont toutes les entrées valent 1.
4. En déduire que $\sum_{i=1}^n \left(G_i - \overline{G}_n\right)^2$ suit une loi du χ_2 dont on précisera le paramètre.

Exercice 50.

1. Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Quelle est la loi de $Y = X^2$.
2. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires gaussiennes centrées réduites. Quelle est la loi de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ et celle de $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$.
3. Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée réduite indépendante de Z. Quelle est la loi de

$$T = \frac{N}{\sqrt{Z/n}}.$$

Exercice 51. Un groupe topologique est un groupe $(G,\cdot)$ muni d'une topologie τ qui rend continues les applications produit $(g,h)\mapsto g.h$ et inverse $g\mapsto g^{-1}$. Dans ce qui suit G est un groupe topologique et $\mathcal{B}(G)$ sa tribu borélienne.

1. Soit A un sous-ensemble borélien de G et $g\in G$. Montrer que les ensembles suivants sont aussi dans $\mathcal{B}(G)$:
$$g.A := \{g.a;\ a\in A\},\quad A.g := \{a.g;\ a\in A\},\quad A^{-1} := \{a^{-1};\ a\in A\}.$$

2. Une mesure μ sur $\big(G,\mathcal{B}(G)\big)$ est dite invariante à gauche si pour tout $g\in g$ et tout $A\in\mathcal{B}(G)$, elle vérifie $\mu(g.A)=\mu(A)$ (elle est dite invariante à droite lorsque l'on a $\mu(A.g)=\mu(A)$). Soit μ une mesure invariante à gauche.

   (a) Montrer que pour tout $g\in G$ et toute fonction f borélienne positive sur G on a
$$\int_G f(g.h)\,d\mu(h) = \int_G f(h)\,d\mu(h).$$

   (b) Montrer que la mesure image de μ par l'application $g\mapsto g^{-1}$ est invariante à droite.

   (c) Montrer que si μ est une mesure de probabilité invariante à gauche sur G et λ est une mesure de probabilité invariante à droite alors $\mu=\lambda$. Indication: calculer de deux manières le produit de convolution $\mu*\lambda$.

   (d) En déduire qu'il existe au plus une mesure de probabilité sur G invariante à gauche et que si elle existe elle est aussi invariante à droite.

   (e) Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans G et tel que pour tout $g\in G$, $g.X$ a même loi que X. Montrer que P_X est l'unique mesure de probabilité invariante à gauche sur G, et que X^{-1} a même loi que X.

Exercice 52. Soit $n\geq 2$ et $G_1,\dots,G_n$ des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, indépendants de même loi $\mathcal{N}_n(0,\mathrm{I}_n)$. L'espace vectoriel engendré par des vecteurs $v_1,\dots,v_k$ de $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathrm{vect}(v_1,\dots,v_k)$.

1. Calculer $P\big(G_1\in\mathrm{vect}(G_2,\dots,G_n)\big)$ et en déduire que presque sûrement $(G_1,\dots,G_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

2. On définit (presque sûrement) la base orthonormée $(\widetilde{G}_1,\dots,\widetilde{G}_n)$ obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt à la base $(G_1,\dots,G_n)$. Si l'on note $|\cdot|$ la norme euclidienne et P_E la projection orthogonale sur un espace E, cette base est définie par
$$\widetilde{G}_1 := \frac{G_1}{|G_1|},\quad \widetilde{G}_{i+1} := \frac{G_{i+1}-P_{\mathrm{vect}(G_1,\dots,G_i)}(G_{i+1})}{\Big|G_{i+1}-P_{\mathrm{vect}(G_1,\dots,G_i)}(G_{i+1})\Big|},\ 1\leq i<n.$$

   On note O la matrice orthogonale aléatoire dont les colonnes sont $(\widetilde{G}_1,\dots,\widetilde{G}_n)$. Soit R une matrice orthogonale fixée de taille n.

   (a) Montrer que $(RG_1,\dots,RG_n)$ a la même loi que $(G_1,\dots,G_n)$.

   (b) Montrer que si l'on applique l'orthonormalisation à la base $(RG_1,\dots,RG_n)$, on obtient en fait $(R\widetilde{G}_1,\dots,R\widetilde{G}_n)$.

   (c) En déduire que RO a même loi que O.

   (d) En utilisant l'exercice précédent, montrer que la loi de O est l'unique mesure de probabilité invariante à gauche et à droite sur le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n$. Montrer aussi que O et O^t ont même loi.

Exercice 53. Soient $\sigma, \tau > 0$. Soit X une variable aléatoire réelle de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On considère une variable Y de loi conditionnelle $\mathcal{N}(x, \tau^2)$ sachant $X = x$.

1. Soient f, g des fonctions boréliennes positives. Calculer $E\big(f(X)g(Y-X) \,|\, X\big)$.
2. En déduire la valeur de $E\big(f(X)g(Y-X)\big)$. Conclusion?
3. Montrer que (X, Y) suit une loi gaussienne $\mathcal{N}_2\left(0, \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 + \tau^2 \end{pmatrix}\right)$.
4. En déduire la loi de Y.
5. Calculer $E(X \,|\, Y)$.
6. Déterminer la loi de X sachant Y.

Exercice 54. Soient $G_1, \ldots, G_n$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit $S_n = G_1 + \ldots + G_n$.

1. Calculer la projection orthogonale au sens de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de G_1 sur la droite vectorielle engendrée par S_n.
2. Montrer que la loi conditionnelle de G_1 sachant S_n est $\mathcal{N}\Big(\frac{S_n}{n}, 1 - \frac{1}{n}\Big)$.

Exercice 55. Soit (X, Y) un vecteur de Gaussien de $\mathbb{R}^2$ de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

Exercice 56. Soit (X, Y) un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant X.

6 Convergence

Exercice 57. Soit $(p_n)_n$ une suite de nombre réels de $]0,1[$ telle que $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que la suite de V.A. de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

Exercice 58.

1. Soient $(a_n, b_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $a_n \to a,\ b_n \to b$. Etudier la convergence en loi de $\mathcal{N}(a_n, b_n)$.
2. Soit $X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$. Montrer que X_n/n et $\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ convergent en loi et déterminer les lois limites.
3. Soit X_n une V.A. de loi $\mathcal{B}(n, p/n)$. Etudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_n$
4. Soit $(X_n)_n$ une suite de V.A.I de loi de Cauchy de paramètre 1. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Etudier les convergences en probabilité et en loi des suites $S_n/\sqrt{n},\ S_n/n,\ S_n/n^2$.

Exercice 59.

1. Soit $(X_n)_n$ une suite de V.A.I exponentielle de paramètre 1. Soit $M_n = max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $M_n - \ln(n)/n$ converge en loi.
2. Soit $(X_n)_n$ une suite de V.A.I de loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $M_n = max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $n(1 - M_n)$ converge en loi.

Exercice 60.

1. Soient $(X_n)_n,\ (Y_n)_n$ et X, Y des vecteurs aléatoires, soit c une constante. Montrer les résultats suivants:

   (a) Si $X_n \xrightarrow[n]{p.s.} X$ alors $X_n \xrightarrow[n]{Pr} X$.

   (b) Si $X_n \xrightarrow[n]{Pr} X$ alors $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$.

   (c) $X_n \xrightarrow[n]{Pr} c$ si et seulement si $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} c$.

   (d) Si $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$ et $d(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{Pr} 0$ alors $Y_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$.

   (e) (Slutsky) Si $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n]{Pr} c$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} (X, c)$.

   (f) Si $X_n \xrightarrow[n]{Pr} X$ et $Y_n \xrightarrow[n]{Pr} Y$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{Pr} (X, Y)$.

   On notera $X_n = o_P(1)$ si X_n converge vers 0 en probabilité. D'une manière générale $X_n = o_P(R_n)$ signifie que $X_n = Y_n R_n$ avec Y_n convergeant vers 0 en probabilité.
   On notera $X_n = O_P(1)$ si la famille $(X_n)_n$ est uniformément tendue. D'une manière générale $X_n = O_P(R_n)$ signifie que $X_n = Y_n R_n$ avec la famille $(Y_n)_n$ uniformément tendue.

2. Montrer que si X_n est une suite de vecteurs aléatoires qui converge vers zéro en probabilité. Alors pour tout $p > 0$, et toute fonction R telle que $R(0) = 0$,

   (a) $R(h) = o(\|h\|^p) \implies R(X_n) = o_P(\|X_n\|^p)$.
   (b) $R(h) = O(\|h\|^p) \implies R(X_n) = O_P(\|X_n\|^p)$.

3. Soit ϕ une application de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^m$ différentiable en θ. Soit T_n des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^k$ (à valeurs dans le domaine de définition de ϕ) et $(r_n)_n$ une suite de nombres réels tendant vers ∞. Montrer que
$$r_n\left(\phi(T_n) - \phi(\theta)\right) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} D\phi(\theta)(T);$$
   dès que $r_n\left(T_n - \theta\right) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} T$. Montrer de plus que la différence entre $r_n\left(\phi(T_n) - \phi(\theta)\right)$ et $D\phi(\theta)\left(r_n(T_n - \theta)\right)$ converge vers zéro en probabilité.

7 Statistique

Exercice 61. On considère la structure statistique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{U_{[0,\theta]}, \theta > 0\})^n$ où $U_{[0,\theta]}$ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. On note $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées.

1. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ? (On le notera $\hat{\theta}$).

2. Calculer le biais de $\hat{\theta}$. En déduire un estimateur T sans biais de θ.

3. On considère comme troisième estimateur de θ, $U = \frac{n+2}{n+1}\max(X_1, ..., X_n)$. Calculer le biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne de U, T et $\hat{\theta}$. Commentaires.

Exercice 62. On considère la structure statistique $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in (0,1)\})^n$ où $\mathbb{P}_\theta$ est la loi géomètrique de paramètre θ. On note $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées.

1. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ? (On le notera $\hat{\theta}$).
2. Calculer le biais de $\hat{\theta}$.
3. Montrer que $\hat{\theta}$ est robuste.
4. Trouver la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$.

Exercice 63. On considère un n-échantillon d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. On suppose σ connu et m inconnu. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de m. Propriétés ?
2. On suppose m connu et σ inconnu. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ ?. Propriétés ?
3. On suppose σ et m inconnus. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de (m, σ) ?. Propriétés ?

Exercice 64. On considère la structure statistique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{U_{[0,\theta]}, \theta > 0\})^n$ où $U_{[0,\theta]}$ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. On note $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées. Donner une statistique exhaustive et complète et améliorer l'estimateur $\overline{X}$ de $\frac{\theta}{2}$.

Exercice 65. On considère un n-échantillon d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Donnner une statistique exhaustive dans les cas suivants.

1. On suppose σ connu et m inconnu.
2. On suppose m connu et σ inconnu.
3. On suppose σ et m inconnus.

Ces statistiques sont-elles complètes ?

Exercice 66. On considère la structure statistique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\gamma_\theta, \theta > 0\})^n$ où γ_θ est une loi gamma de paramètre θ. On note $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées. Trouver un estimateur efficace de $h(\theta)$ où h est une fonction bijective de θ que l'on précisera.

Exercice 67. On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ d'une loi $\mathcal{N}(m, 1)$. Vérifier que la statistique $S = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ est libre.

Exercice 68. Pour tout réel $\theta > 0$, on considère la probabilité $\mathbb{P}_\theta$ définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{1}{\theta}|x|},$$

et on s'intéresse à la structure statistique

$$\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \mathbb{R}^+_{>0}\}\right).$$

On note $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées.

1. Donner un estimateur efficace (que l'on notera T) de θ.
2. T^2 est-il un estimateur efficace de $\lambda = \theta^2$?

3. Construire un estimateur sans biais (que l'on notera U) de λ, qui s'écrive en fonction de la statistique $S = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Est-ce un estimateur efficace ?

Exercice 69. Soit g une fonction de densité sur $\mathbb{R}$, connue, symétrique et strictement positive. Pour $\theta \in [0,1]$, on note $\mathbb{P}_\theta$ la mesure sur $\mathbb{R}$ de densité

$$p_\theta(x) = (1-\theta)g(x) \text{ si } x \leq 0$$

et

$$p_\theta(x) = (1+\theta)g(x) \text{ si } x > 0.$$

1. Vérifier que $\mathbb{P}_\theta$ est une mesure de probabilité.

2. Construire une statistique exhaustive et complète dans la structure statistique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\mathbb{P}_\theta, \theta > 0\})^n$.

3. En notant $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées dans cette structure statistique, montrer que les 2 statistiques suivantes sont indépendantes:

$$S = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(X_i)$$

et

$$T = (\mid X_1 \mid, ..., \mid X_n \mid).$$

4. Trouver le meilleur estimateur de θ en terme de moindre variance.

Exercice 70.[Problème de l'estimation efficace dans un modèle exponentiel] On considère la structure statistique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \mathbb{R}\})^n$ où $\mathbb{P}_\theta$ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$p_\theta(x) = \exp\left(a(x)\alpha(\theta) + b(x) + \beta(\theta)\right).$$

On note $X_1, \ldots, X_n$ les applications coordonnées et on considère

$$T \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a(X_i).$$

1. Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathrm{var}(T)$.

2. Montrer que T est un estimateur efficace de $h(\theta)$ où h est une fonction que l'on explicitera.

3. Réciproquement, on considère un estimateur U qui estime de façon efficace le paramètre $f(\theta)$. Montrer qu'à une trabsformation linéaire près $f = h$.

Exercice 71. On considère la structure statistique $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \{\mathbb{P}_\sigma, \sigma \in \mathbb{R}_+^*\}\right)^n$ où $\mathbb{P}_\sigma$ est la loi normale $\mathcal{N}_2(0, \sigma^2 I)$. Si $X = (X_1, X_2) \sim \mathbb{P}_\sigma$, on note S et T les coordonnées polaires de X.

1. Décrire la loi du couple (S, T).

2. Montrer que S et T sont indépendantes.

3. En déduire que S est une statistique exhaustive.

4. Retrouver d'une autre manière le résultat de la question preécédente.

Exercice 72. On considère la structure statistique $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \mathbb{R}^2\}\right)$ où $\mathbb{P}_\theta \sim \mathcal{N}_2(\theta = (\gamma, \beta), I)$. On considère $\theta^1 \in \mathbb{R}^2$ fixé, ainsi que les hypothèses suivantes:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_0 : \theta = 0 \\
&\mathcal{H}_1 : \theta = \theta^1 \\
&\mathcal{H}_2 : \theta \in \{a\theta^1, a > 0\}.
\end{aligned}$$

1. Donner un test U.P.P. de niveau α de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$.
2. Peut-on construire un test U.P.P. de n iveau α de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_2$?

Exercice 73. On considère la structure statistique $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \{\mathbb{P}_\lambda, \lambda >\})$ où $\mathbb{P}_\lambda$ est une loi de Poisson de paramètre λ. On considère pour $\lambda_0 > 0$ fixé, les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_0 : \lambda = \lambda_0 \\
&\mathcal{H}_1 : \lambda \geq \lambda_0.
\end{aligned}$$

Donner un test U.P.P. de niveau α de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$.