Corrigé de l'examen de janvier 1999

I. Soient $F = \cap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ et $a_n \in F_n$ (donc $\forall N \leq n, a_n \in F_N$ puisque la suite des F_n est décroissante). Il suffit de montrer que (a_n) converge et que sa limite appartient à F. Soit $\epsilon > 0$. Puisque le diamètre des F_n tend vers 0, il est $\leq \epsilon$ à partir d'un certain rang N. On a alors $\forall p, q \geq N, d(a_p, a_q) \leq \epsilon$. Donc (a_n) est de Cauchy donc (puisque X complet) converge, vers un certain $a \in X$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_k \in F_n$ pour $k \geq n$ donc (puisque F_n fermé) $a \in F_n$. Donc $a \in F$.

II.1) La partie imaginaire de $f(x)$ est $g(x) = \frac{f(x)-\overline{f(x)}}{2i}$, donc g est continue sur X, donc (puisque X connexe) $g(X)$ est un connexe de $\mathbf{R}$, i.e. un intervalle. Puisque par hypothèse il ne contient pas 0, il est tout entier inclus soit dans $]0, +\infty[$, soit dans $]-\infty, 0[$, donc tous les $g(x)$ sont de même signe.

II.2) $g(X)$ contient la suite $1/n$ qui tend vers 0, mais ne contient pas 0, donc il n'est pas fermé dans $\mathbf{R}$, donc pas compact, or l'image continue d'un compact dans un séparé est compacte. Donc X n'est pas compact.

III.1) L'unicité est immédiate puisqu'une distance d vérifie $d(i,i) = 0$. Il s'agit donc de vérifier que l'application $d : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$ définie par $d(i,j) = 1$ si $i \neq j$, 0 si $i = j$ est une distance sur $\mathbf{N}$. On a bien $d(i,j) = 0 \Leftrightarrow i = j$ et $d(i,j) = d(i,j)$. L'inégalité triangulaire $d(i,k) \leq d(i,j) + d(j,k)$ se vérifie en distinguant deux cas : si $i = j = k$, $d(i,k) = 0 = d(i,j) + d(j,k)$; sinon, $d(i,k) \leq 1 \leq d(i,j) + d(j,k)$.

$(\mathbf{N}, d)$ est séparé (comme tout espace métrique), borné (puisque $d \leq 1$), complet (puisque toute suite de Cauchy pour d est stationnaire donc convergente), discret (puisque la boule ouverte de centre i et de rayon r est $\{i\}$ dès que $r \leq 1$, donc $\{i\}$ est non seulement fermé mais aussi ouvert), non connexe (puisque discret et de cardinal > 1), non compact (puisque discret et infini).

Si $f \in F_\lambda$ alors $\lambda = d(f(0), f(1)) \in \{0,1\}$, or $\lambda > 0$ par hypothèse. Donc si $F_\lambda \neq \emptyset$ alors $\lambda = 1$.

Si $f \in F_\lambda$ alors $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x,y) = d(f(x), f(y))/\lambda = 0/\lambda = 0 \Rightarrow x = y$, donc f est injective (et ce pour tout espace métrique (X,d) et tout $\lambda > 0$). Réciproquement si f est injective alors pour tous $i, j \in \mathbf{N}$ distincts, ou bien $i = j$ et $f(i) = f(j)$ donc $d(f(i), f(j)) = 0 = d(i,j)$, ou bien $i \neq j$ et $f(i) \neq f(j)$ donc $d(f(i), f(j)) = 1 = d(i,j)$. Par ailleurs toute application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ est bornée pour d. Donc $f \in F_1$ ssi f est injective.

Il existe des injections de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ non surjectives : par exemple $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, i \mapsto i+1$.

III.2) Toute $f \in F_\lambda$ est injective : cf ci-dessus.

Si $F_\lambda \neq \emptyset$, il existe donc une injection bornée de X dans X, donc X est borné ; de plus si δ est son diamètre (> 0 puisque X a au moins deux points), on a $\lambda\delta \leq \delta$ donc $\lambda \leq 1$.

Si F_λ contient une f surjective, on a même $\lambda\delta = \delta$ donc $\lambda = 1$.

III.3) Supposons X borné (sinon F_λ est vide donc évidemment fermé). Pour tout $f \in B$ posons $\varphi(f)(x,y) = d(f(x), f(y))$. Alors φ est une application continue (et même 2-lipschitzienne) de B dans l'ensemble $B(X\times X, \mathbf{R})$ des applications bornées de $X \times X$ dans $\mathbf{R}$, donc $F_\lambda = \varphi^{-1}(\{\lambda d\})$ est fermé dans B et $\cup_{\lambda\in[a,b]} F_\lambda = \varphi^{-1}([a,b]d)$ aussi, car $[a,b]d$ est fermé dans $B(X\times X, \mathbf{R})$ et même compact, comme image du compact $[a,b]$ par l'application $\mathbf{R} \to B(X \times X, \mathbf{R}), \lambda \mapsto \lambda d$ qui est linéaire continue, de norme δ (le diamètre de X).

III.4) D'après le théorème de Picard, f a un unique point fixe a et $\forall x \in X, f_n(x) \to a$. La convergence est même uniforme car $d(f_n(x), a) = \lambda^n d(x,a) \leq \lambda^n\delta$. Or $f_n \in F_{\lambda^n}$. Donc la suite des

f_n est à valeurs dans $\cup_{\lambda\in]0,1]}F_\lambda$, tandis que sa limite la fonction constante a n'appartient à aucun F_λ. Donc $\cup_{\lambda\in]0,1]}F_\lambda$ n'est pas fermé dans B.

III.5) Par hypothèse $\overline{G}\neq\emptyset$ donc $F_1\supset G\neq\emptyset$ donc X est borné, donc toute isométrie de X dans X est bornée, donc G est simplement l'ensemble des isométries de X sur X. Soit $f\in\overline{G}$. Remarquons d'abord que $f\in F_1$ (car $G\subset F_1$ et F_λ fermé), en particulier f est continue. Pour tout $\epsilon>0$ il existe un $g\in G$ qui approxime uniformément f à ϵ près. Tout élément de $X=g(X)$ est donc ϵ-proche d'un élément de $f(X)$, donc $f(X)$ est dense dans X. Si de plus X est compact alors $f(X)$ aussi donc $f(X)$ est fermé dans X, d'où $f(X)=X$, d'où $f\in G$. On a donc prouvé (si X compact) que $\overline{G}\subset G$. En fait cette hypothèse de compacité est superflue : comme $f\in F_1$, $f(X)$ est isométrique à X donc complet donc fermé dans X et on conclut de même. La question suivante est une variante de cet argument.

III.6) $f\circ h=id_{f(X)}\Leftrightarrow\forall y\in f(X),h(y)$ est l'antécédent de y par f (d'où l'existence et l'unicité de h, par injectivité de f). f et id préservent les distances donc h aussi, donc h est uniformément continue. Par densité de $f(X)$ et complétude de l'espace d'arrivée X, h admet donc un unique prolongement continue $k:X\to X$. Les applications $f\circ k$ et id_X sont continues et coïncident sur $f(X)$ qui est dense, donc coïncident sur X, donc f est surjective.

IV.1) N_a est évidemment une semi-norme, comme somme des deux semi-normes N et $P\mapsto|P(a)|$. De plus $N(P)=0\Leftrightarrow P(a)=0$ et $P'=0$ sur $[0,1]\Leftrightarrow P(a)=0$ et $P'=0\Leftrightarrow P=0$, donc N_a est une norme sur E. Par contre N n'est qu'une semi-norme car $P'=0\not\Rightarrow P=0$.

IV.2) Si $a,b\in[0,1]$, $|N_b-N_a|=||P(b)|-|P(a)||\leq|P(b)-P(a)|\leq|b-a|N(P)\leq N(P)$, donc $N_b\leq 2N_a$ et $N_a\leq 2N_b$, donc N_a,N_b sont équivalentes.

IV.3) $P_n:=X^n/n$ vérifie $N_0(P_n)=1$ et $N_2(P_n)\to+\infty$ donc il n'existe pas de constante C telle que $N_2\leq CN_0$. (Ou dans l'autre sens : $Q_n:=(2^n-X^n)/n$ vérifie $N_2(Q_n)=1$ et $N_0(Q_n)\to+\infty$ donc il n'existe pas de constante C telle que $N_0\leq CN_2$). Donc N_0,N_2 ne sont pas équivalentes (ni même comparables dans un sens).

IV.4) φ est évidemment linéaire, et si $Q=\varphi(P)$ alors $N_0(Q)=sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$, or $|P(x)-P(0)|\leq N(P)$ (par le même raisonnement que dans IV.2) donc $N_0(Q)\leq N_0(P)$. Donc φ est continue de norme ≤ 1. La norme est exactement 1 car $\varphi(1)=X$ et $N_0(1)=1=N_0(X)$.