Corrigé du partiel de novembre 2005

Exercice 1.

1) $\overline{A} = \overline{\mathbf{Q}} \times \overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \times \overset{\circ}{\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}} = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$. B est l'ensemble des valeurs d'une suite qui converge vers $\ell = (1,0)$ donc $\overline{B} = B \cup \{\ell\}$. En particulier B est dénombrable donc $\overset{\circ}{B} = \emptyset$. C est égal à son adhérence car fermé, comme image réciproque du fermé $[1, +\infty[$ par l'application continue $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^2}{3} + y^2$. Tout point (x,y) vérifiant $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ est adhérent au complémentaire de C (par exemple si $x > 0$, comme limite de $(x - 1/n, y)$, et analogue dans les 3 autres cas $x < 0, y > 0, y < 0$), et les autres points de C sont intérieurs à C puisque $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{3} + y^2 < 1\}$ est ouvert (comme image réciproque de l'ouvert $]1, +\infty[$ par l'application continue $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^2}{3} + y^2$), donc cet ensemble est l'intérieur de C. On en déduit $\mathrm{Fr}(A) = \mathbf{R}^2$, $\mathrm{Fr}(B) = B \cup \{\ell\}$, $\mathrm{Fr}(C) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{3} + y^2 = 1\}$.
A et B sont non fermés, donc non compacts et non complets. C est fermé donc complet, mais non borné donc non compact.

2) Soient $f \in \Omega$ et $-\epsilon$ le maximum (< 0) de la fonction $\mathcal{R}ef$ (continue sur un compact), alors $B(f, \epsilon) \subset \Omega$. Donc Ω est ouvert.
Γ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application linéaire continue $f \mapsto \mathcal{R}ef$ de E dans $C([0,1], \mathbf{R})$, donc Γ est un fermé du complet E, donc Γ est complet.

Exercice 2.

1) Par convexité de K, f_n est une application de K dans K. Elle est $(1 - 1/n)$-lipschitzienne et K est complet (par compacité), donc elle admet un unique point fixe.

2) $f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n}(f(a) - f(x))$. Soit $\delta = \sup_{x \in K} \|f(a) - f(x)\|$ (fini, par compacité de K et continuité de $x \mapsto \|f(a) - f(x)\|$). Alors $\|f_n - f\|_\infty = \delta/n \to 0$.

3) Soient (par compacité de K) $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite convergente de (x_n) et $x \in K$ sa limite. On a $\|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x)\| \leq \|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\| + \|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)\| \to 0$ (par convergence uniforme de $f_{\varphi(n)}$ vers f et par continuité de f en x), or $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)} \to x$, d'où $f(x) = x$.

Exercice 3.

1.a) (i) équivaut à “pour tout ouvert Ω de Y et tout $x \in F^{-1}(\Omega)$, il existe un voisinage V de x tel que $\forall y \in V, f(y) \subset \Omega$”, i.e. à “pour tout ouvert Ω de Y et tout $x \in F^{-1}(\Omega)$, il existe un voisinage V de x inclus dans $F^{-1}(\Omega)$”, i.e. à “pour tout ouvert Ω de Y et tout $x \in F^{-1}(\Omega)$, $F^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de x”, i.e. à (ii).

1.b) $f(x) = [a(x), b(x)]$ ou $[a(x), +\infty[$ ou $]-\infty, b(x)]$ avec a, b continues, ou même seulement a semi-continue inférieurement (par exemple l'indicatrice d'un ouvert) et b semi-continue supérieurement (par exemple l'indicatrice d'un fermé).

2) ($F(K)$ est séparé car Y l'est). Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y recouvrant $F(K)$, i.e. $\forall x \in K, f(x) \subset \cup_{i \in I} \Omega_i$. Par compacité de $f(x)$, il existe J_x fini inclus dans I tel que $f(x) \subset U_x := \cup_{i \in J_x} \Omega_i$, i.e. $x \in F^{-1}(U_x)$. D'après 1.a, les $F^{-1}(U_x)$ forment un recouvrement ouvert du compact K, donc il existe Z fini inclus dans K tel que $K \subset \cup_{x \in Z} F^{-1}(U_x)$, d'où $F(K) \subset \cup_{i \in J} \Omega_i$ avec $J = \cup_{x \in Z} J_x$ (fini).

3.a) Soit $d = d(a, K)$ (> 0 car a n'appartient pas au fermé K), $\{x \in X \mid d(x, K) < d\}$ est un ouvert contenant K mais pas a.

3.b) D'après 2), G est une intersection de fermés donc est fermé, dans X compact, donc G est compact. G peut très bien être vide (exemple $\forall x \in X, f(x) = \emptyset$). (Remarquons que $F(\emptyset) = \emptyset$).

$F(G) \subset G$ car $\forall x \in G, f(x) \subset G$ car $\forall n \geq 2, f(x) \subset F^n(X)$ car $x \in F^{n-1}(X)$.
Soit $a \notin F(G)$, montrons que $a \notin G$. D'après 2 et 3.a il existe Ω ouvert contenant $F(G)$ mais pas a. En notant H_0 le fermé $F^{-1}(O)^c$ et $H_n = F^n(X)$ pour $n \geq 1$ on a alors $\cap_{n \in \mathbf{N}} H_n = \emptyset$ donc (par compacité de X), pour n assez grand, $H_0 \cap H_n = \emptyset$, i.e. $F^n(X) \subset F^{-1}(O)$, i.e. $F^{n+1}(X) \subset O$, d'où $G \subset O$, d'où $a \notin G$.