Corrigé de l'examen de septembre 2001

I.1) Lorsqu'on identifie tout polynôme à la suite de ses coefficients, $\| \ \|$ n'est autre que la restriction à E (vu comme l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang) de la norme usuelle sur ℓ^1 ($\|a\|_1 = \sum_{n\in\mathbf{N}} |a_k|$).

I.2.a) $\sum_{k\leq n} |ka_k| \leq n \sum_{k\leq n} |a_k|$ donc D est continue sur E_n (de norme $\leq n$).

I.2.a) $\|X^n\| = 1$ tandis que $\|D(X^n)\| = n$, donc D n'est pas continue sur E (car non bornée sur la sphère unité).

I.3) A est réunion de deux convexes (donc connexes) qui se rencontrent (en 1) donc est connexe.

II.1) La suite des $A_n(\epsilon)$ est décroissante parce que la suite des $d(f_n, f)$ l'est.
$A_n(\epsilon)$ est fermé parce que l'application $d(f_n, f) : X \to Y$ est continue.

II.2) L'intersection des $A_n(\epsilon)$ est vide parce que $d(f_n, f)$ converge (simplement) vers 0.

II.3) D'après 1 et 2, les $A_n(\epsilon)$ forment une suite décroissante de fermés d'intersection vide, dans X compact. Donc ils sont vides à partir d'un certain rang, i.e.
$\exists N_\epsilon, \forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

III) Appliquons l'hypothèse à un $B \geq f(0)$. A l'extérieur de la boule fermée de centre 0 et de rayon A, f est strictement minorée par B. Par ailleurs la restriction de f à cette boule (compacte par Riesz) a un minimum absolu en un certain x. En particulier $f(x) \leq f(0) \leq B$. Donc f elle-même a un minimum absolu en x.

IV.1.a) L'image par $r \mapsto r(1-r)$ de $]0, 1/2[$ est $]0, 1/4[$ donc contient des majorants de $\|g\|$.

IV.1.b) Soit r comme ci-dessus, alors $\Phi(B'_r) \subset B'_s$ avec $s = \frac{1}{2}(\|g\| + r^2 + r) \leq r$.

IV.1.c) $\Phi(f) - \Phi(k) = \frac{1}{2}((f-k)(f+k) - (f-k)\circ h)$ donc $\forall f, k \in B'_r$, $\|\Phi(f) - \Phi(k)\| \leq \frac{1}{2}\|f-k\|(2r+1)$.

IV.2.a) L'équation équivaut à $\Phi(f) = f$. Pour r comme dans 1) le théorème de Picard s'applique (B'_r est complet car fermé dans le complet E, et $\varphi : B'_r \to B'_r$ est k-lipschitzienne avec $k = \frac{2r+1}{2} < 1$) donc Φ admet un unique point fixe dans B'_r.

IV.2.b) Non en général : par exemple si $g = C < 9/4$ (constante), l'équation a au moins deux solutions constantes (quelle que soit h) même si $C \in]-1/4, 1/4[$. Tout ce qu'on peut affirmer est que la solution est unique dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1/2.