Corrigé de l'examen de septembre 1999

I.1) Soient U, V ouverts et F, G fermés, alors $W := U \cap V$ est ouvert et $H := F \cap G$ est fermé, et $(U \cap F) \cap (V \cap G) = W \cap H$.

I.2) Soient U ouvert et F fermé, alors par continuité de f, $V := f^{-1}(U)$ est ouvert et $G := f^{-1}(F)$ est fermé, et $f^{-1}(U \cap F) = V \cap G$.

I.3) A ouvert dans $\overline{A} \Leftrightarrow \exists U$ ouvert t.q. $A = U \cap \overline{A} \Rightarrow \exists U$ ouvert et F fermé t.q. $A = U \cap F \Leftrightarrow A$ localement fermé. Réciproquement, si $A = U \cap F$ avec U ouvert et F fermé alors le fermé F contient A donc contient $\overline{A}$, d'où $A = A \cap \overline{A} = U \cap F \cap \overline{A} = U \cap \overline{A}$.

I.4) $\overline{A} = A \cup \{0\}$ donc $A = \overline{A} \cap \mathbf{R}^*$ donc d'après 3), A est localement fermé. $\mathbf{R} \setminus A$ est dense dans $\mathbf{R}$ et non ouvert donc d'après 3), non localement fermé.

I.5) Remarquons d'abord que pour tout ouvert V, $A \cap V$ est fermé dans V ssi $V \setminus A$ est ouvert dans V, i.e. ssi $V \setminus A$ est un ouvert de X.
Si $A = U \cap F$ avec U ouvert et F fermé alors $A \subset U$ et $U \setminus A = U \cap F^c$ est un ouvert de X donc $A \cap U$ est fermé dans U.
Réciproquement, supposons que tout $x \in A$ admet un voisinage ouvert V_x tel que $A \cap V_x$ soit fermé dans V_x i.e. tel que $V_x \setminus A$ soit ouvert, et posons $U = \cup_{x \in A} V_x$. Alors U est un ouvert contenant A et $W := V \setminus A = \cup_{x \in A}(V_x \setminus A)$ est ouvert donc $A = U \cap W^c$ est localement fermé.

II.1) $\forall y \in B(x,1), \sigma(y) \leq \sigma(x) + 1$ et $\mu(y) \geq \mu(x) - 1$ donc $\forall x \in Y, B(x,1) \subset Y$ donc Y est ouvert.

II.2) $\forall y \in B(x,1), \sigma(y) \geq \sigma(x) - 1$ et $\mu(y) \leq \mu(x) + 1$ donc $\forall x \in Y^c, B(x,1) \subset Y^c$ donc Y^c est ouvert.

II.3) $\sigma(a) = \mu(a) \in \mathbf{R}$ donc $a \in Y$ donc $Y \neq \emptyset$, donc d'après 1) et 2), si E est connexe, $Y = E$.

III.1) Montrons que toute partie compacte A d'un espace séparé est fermée. Soit $y \in A^c$. Pour tout $x \in A$, soient U_x, V_x ouverts disjoints t.q. $x \in U_x$ et $y \in V_x$. Les U_x pour $x \in A$ forment un recouvrement ouvert de A donc il existe une partie finie B de A telle que $\cup_{x \in B} U_x \supset A$. Posons $V = \cap_{x \in B} V_x$. Alors V est ouvert et $y \in V \subset A^c$.
Montrons que tout espace métrique compact A est borné. Si $A = \emptyset$ c'est immédiat. Sinon, soit $a \in A$. Alors les $B(a,r)$ pour $r > 0$ forment un recouvrement ouvert croissant de A donc il existe r t.q. $A \subset B(a,r)$.
Les e.v.n. dans lesquels tout fermé borné est compact sont exactement les e.v.n. de dimension finie (théorème de Riesz).

III.2) $f(B')$ est inclus dans un compact, qui d'après 1) est borné, donc $f(B')$ est borné, donc inclus dans une boule fermée de centre 0 et de rayon R, donc f est continue (de norme $\leq R$).

III.3) Remarquons d'abord que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont linéaires. Soit ensuite K compact contenant $f(B')$. $(g \circ f)(B') \subset g(K)$ compact (car g continue et V séparé), donc $g \circ f \in K(V)$.
Soit $R = |||g|||$, $g(B') \subset RB'$ donc $(f \circ g)(B') \subset f(RB') = Rf(B') \subset RK$ compact, donc $f \circ g \in K(V)$.

III.4) D'après 2), on a toujours $K(V) \subset L(V)$. Réciproquement si V est de dimension finie alors B' est compact donc pour tout $f \in L(V)$, $f(B')$ aussi (image continue d'un compact dans un séparé), donc $\overline{f(B')} = f(B')$ compact, donc $f \in K(V)$.

III.5) Si V est de dimension infinie $\overline{id(B')} = \overline{B'} = B'$ est non compact donc $id \notin K(V)$.